

المحاضرة الثالثة

المصفوفات الجبرية

تعرف المصفوفات بأنها مجموعة من الأعداد المرتبة في صفوف (Rows) وأعمدة (Columns) تستخدم لحل المعادلات الخطية والإحصاء والجبر الخطي وغيره وكما مبين في أدناه.

$$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{1n}$$

$$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad a_{2n}$$

$$a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{m3} \quad a_{mn}$$

إذا كان m يمثل الصفوف و n يمثل الأعمدة ويعبر عن رتبة المصفوفة (Matrix order) ب $m \times n$ أي بضرب عدد الصفوف في عدد الأعمدة.

مثال: اكتب مصفوفة برتية 4×2 ؟

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4 \quad -1$$

$$3 \quad 1$$

$$5 \quad 2$$

المصفوفة التربيعية SQUARE MATRIX

تلك المصفوفة التي تتكون من عناصر متساوية من الصفوف والأعمدة

$$7 \quad 1$$

$$-3 \quad 2$$

عناصرها 2×2

المصفوفة الصفرية والتي تكمن جميع عناصرها صفر

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

والتي تكون جميع عناصرها غير القطرية تساوس صفر

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1- \end{matrix}$$

مبدول المصفوفة Transpos of Matrix

تلك المصفوفة التي تبديل فيها الاعمدة بدل الصفوف فإذا كانت المصفوفة A (3 * 2) هي كما يلي:

$$\begin{matrix} 5- & 4 & 2 \\ 3 & 1- & 1 \end{matrix}$$

فان مبدول هذه المصفوفة يرمز له ب A^T ويكون المبدول كما يلي:

الصفوف تصبح اعمدة والاعمدة تصبح صفوف وكما يلي:

$$\begin{matrix} 5- & 3 \\ 4 & 1- \end{matrix}$$

2 1

وكذلك الحال اذا كانت المصفوفة متساوية الابعاد

المصفوفة المتساوية Equal Matrix

تلك المصفوفة التي تتطابق عناصرها متساوية وكما في المثال التالي للمصفوفتين التاليتين:

$\frac{1}{2}$ 3
 0 4

فإذا كانت هذه مصفوفة A فانها تساوي المصفوفة B وتكون قيمها كما يلي:

$$\begin{matrix} \sqrt{1/4} & \sqrt{9} \\ 0 & \sqrt{2} \end{matrix}$$

جمع وطرح المصفوفات

تتم عمليات الجمع والطرح للمصفوفات المتساوية الابعاد فقط
مثال:

$$Y = \begin{matrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{matrix}$$

فان $X+Y$ تساوي

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 9 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 7 & 4 & 1 \end{matrix}$$

ضرب المصفوفات بقيمة ثابتة

يتم في هذه الحالة ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بتلك القيمة الثابتة وكما يلي:
لو تم ضرب المصفوفة السابقة بالقيمة 3 فإن الناتج يكون كما يلي:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 6 & 9 \\ 3 & 27 & 12 \\ 21 & 12 & 3 \end{array}$$

ضرب المصفوفات

يتم ضرب المصفوفات بشرط ان تكون عدد اعمدة المصفوفة الاولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية وتسمى بمصفوفة جديدة .

مثال : المصفوفات التالية $A*B=C$ ففي هذه الحالة يجب ان تكون اعمدة المصفوفة الاولى (A) تساوي عدد سطور المصفوفة الثانية (B) وعدد صفوف المصفوفة الناتجة (C) يجب ان تساوي عدد صفوف المصفوفة الاولى (A) والناتج هي المصفوفة C_{ij} ونتجت من ضرب الصف i من المصفوفة الاولى A في العمود j للمصفوفة الثانية B.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad -2 \quad 5$$

اوجد ناتج ضرب $A*B$ وكذلك $B*A$
الجواب:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$=1*2+3*5=17$$

$$1*4+3*1=7$$

$$0*2+ -2*5=-10$$

$$0*4+ -2*1=-2$$

$$6*2+5*5=37$$

$$6*4+5*1=29$$

اذن المصفوفة الجديدة هي

$$C=17 \quad -10 \quad 37$$

$$7 \quad -2 \quad 29$$

اما ضرب ال B في المصفوفة A فلا يمكن لان عدد اعمدة الاولى B (3) لا تساوي عدد صفوف المصفوفة الاخرى B (2)

المحددات Determinants

تلك المصفوفات التي يرمز لها |A| اي استخراج قيمة واحدة للمصفوفة تسمى المحددات ويمكن استخراجها عند حالة المصفوفة المتساوية الابعاد 2×2 من خلال ضرب الطرفين بالوسطين وكما مبين:

$$A=2 \quad 4$$

$$3 \quad 1$$

$$\text{فان } |A| \text{ تساوي } 2*1 - 3*4 = -10$$

اما بالنسبة للمصفوفات ذات الرتب الاعلى فتستخدم طريقة العوامل المتممة في استخراجها.

تسمى المصفوفة شاذة singular اذا كانت قيمة المحدد لها تساوي صفر $|A| = 0$.

المصفوفة المرافقة Adjoint Matrix

إذا كانت A مصفوفة فان المصفوفة المرافقة لـ A يرمز لها بالرمز $\text{adj } A$ اذا كان عنصرها بالصف i والعمود j يمثل العامل المتمم للعنصر بالصف j والعمود i للمصفوفة A
للمصفوفة التالية جد المرافق $\text{Adj } A$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

α_{11}	α_{21}	α_{31}	: الجواب
α_{12}	α_{22}	α_{32}	
α_{13}	α_{23}	α_{33}	:

نجد قيم كل واحد وكذلك الاشارة فالحد الاول يكون كما يلي:

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1^2) = +1(6-0) = 6$$

يتم ايجاد المصفوفة المرافقة من خلال حذف الصف والعمود للقيمة التي تحتويها المصفوفة وضرب الطرفين والوسطين للقيم الاربعة الباقية وطرحهما فمثلا القيمة الاولى a_{11} تكون قيمتها كما يلي:

الرتبة 11α تستخرج اشارتها من خلال ضرب القيمة (-1) بالاس فهنا تكون الاشارة -1
 \times الاس 2 ويساوي +1 او 1 والعملية الاخرى هو ترك الصف والعمود لهذه القيمة في

المصفوفة وإيجاد المحدد كقيمة للصفين والعمودين الباقيين من خلال ضرب الطرفين
والوسطيين مع طرح القيم لذلك الضرب وهنا يساوي $6+0=7-2\times 3$
وهكذا لبقية عناصر المصفوفة

والنتيجة النهائية للمصفوفة المرافقة تكون

$$\text{Adj. A} = \begin{matrix} 6 & -4 & 29 \\ 28 & 18 & 7 \\ -12 & 8 & -3 \end{matrix}$$

المتجهات Vectors

عبارة عن مجموعة من الأرقام إما بشكل صف أو بشكل عمود

المتجه العمودي: 3

2

6

2

إما المتجه الأفقي فمثال عليه: 2 6 2 3

إيجاد معكوس المصفوفة

خطوات إيجاد معكوس المصفوفة بطريقة الصف البسيطة

تتضمن ثلاث خطوات رئيسية هي:

1- تبديل صفين بالمصفوفة

2-عملية ضرب صف بعدد

3-عملية ضرب صف بعدد وجمعه مع صف آخر

مثال:جد المعكوس للمصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

خطوات الحل:

اولا تكوين مصفوفة الوحدة بنفس عناصر المصفوفة الاصلية

وكما يلي:

$$[A: I]$$

اذ ان I : مصفوفة الوحدة

اول خطوة هي تحويل المصفوفة الاصلية الى مصفوفة الوحدة من خلال جعل القيم القطرية لها تساوي واحد ويتم ذلك من خلال عملية الضرب بالارقام المحددة التي تجعل الناتج واحد.

ففي هذه الحالة تضرب المصفوفة A بالرقم ربع $\frac{1}{4}$ وبالتالي يتغير فيها الصف الاول لكل من المصفوفة الاصلية ومصفوفة الوحدة ويصبح $[1 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{4} \ 0 \ 0]$ اما الصف الثاني والثالث فيبقى كما هو ، بعد ذلك تاتي الخطوة اللاحقة وهي جعل العناصر تحت الواحد تساوي صفر وهنا يمكن ذلك من خلال الضرب للصف الاول وجمعه مع الصف الثاني لنحصل على الصف الثاني اما قيم الصف الاول فتبقى كما هي دون تغيير في المصفوفة (فقط قيم الصف الثاني تغيرت) والقيمة او الرقم المقترح لجعل تحت الرقم واحد صفر هو العدد الذي عند ضرب الصف الاول وجمعه مع الصف الثاني سنحصل على قيمة صفر تحت الرقم واحد في الصف الاول وكما يلي:

ضرب $2 \times \text{Row1} + \text{Row2}$

الصف الثاني سيصبح

$$[0 \ 3 \ 0 : 1/2 \ 1 \ 0]$$

الخطوة الاخرى لجعل اسفل الرتبة او الرقم واحد يساوب صفر يكون ذلك من خلال ضرب الصف الاول بسالب ستة -6 وجمعه مع الصف الثالث وعندها سنحصل على قيم الصف الثالث كما يلي:

$$[0 \ -1 \ 5 : -3/2 \ 0 \ 1]$$

الخطوة التالية هي جعل القيمة التالية القطرية تساوي واحد من خلال الضرب للصف الثاني فقط بالرقم $3/1$ وبالتالي سيصبح الصف الثاني كما يلي:

$$[0 \ 1 \ 0 : 1/6 \ 1/3 \ 0]$$

بعد ذلك نجعل تحت الواحد صفر من خلال اما الضرب والجمع للصفين التاليين او الجمع بين الصفين التاليين (بحيث نجعل تحت الواحد صفر)

وهنا في هذه الحالة نجمع الصف الثاني مع الصف الثالث سنحصل على قيمة صفر تحت الواحد الذي هو جزء من مصفوفة الوحدة للصف السابق وبذلك تكون قيمة الصف الثالث كما يلي بعد جمعه مع الصف السابق له وهو الصف الثاني:

$$[0 \ 0 \ 5 : -4/3 \ 1/3 \ 1]$$

ولجعل الصف الثالث كمصفوفة وحدة في هذه الحالة يضرب الصف الثالث بالخمس $5/1$ ويكون الناتج كما يلي:

$$[0 \ 0 \ 1 : -4/15 \ 1/15 \ 1/5]$$

وهنا حصلنا على مصفوفة الوحدة للمصفوفة الاصلية ومعها المصفوفة المجاورة وكما يلي:

$$1 \ 0 \ 0 : \ 1/4 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 1 \ 0 : 1/6 \ 1/3 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 1 \ : \ -4/15 \ 1/15 \ 1/5$$

وبذلك حصلنا في الجهة اليمنى على نضير المصفوفة والتي تمثل معكوس المصفوفة المطلوب وهو :

$$\frac{1}{4} \quad 0 \quad 0$$

$$1/6 \quad 1/3 \quad 0$$

$$-4/15 \quad 1/15 \quad 1/5$$