1/ المنوال

يعد المنوال من أسهل مقاييس النزعة المركزية، التي يمكن استخدامها بدون إجراء عمليات إحصائية معقدة مهما كان توزيع البيانات بصورة مبوبة أو غير مبوبة. لهذا نجد أن ترتيبه الثالث في الأهمية والاستخدام بعد كل من الوسط الحسابي والوسيط، والتي هي بمجموعها تشكل مقاييس النزعة المركزية. وللمنوال تعريفات، أهمها : " انه الدرجة الأكثر شيوعاً، أو الدرجة التي تكرر أكثر من غيرها من الدرجات ".

والمنوال، يفضل على غيره من مقاييس النزعة المركزية، كونه سهل الحساب، ولا تأثير للقيم الشاذة عليه، فان حساب المنوال لا يكون إلاّ إذا كانت هنالك قيم للظاهرة تتكرر أكثر من غيرها، وفي هذه الحالة يكون المنوال القيمة التي لها اكبر تكرار بالتوزيع.

بقي أن نقول أن للمنوال جملة من الخصائص يأتي في مقدمتها :

1. هو سهل الحساب ، وطريقة إيجاده بسيطة وقصيرة (حسابياً أو رسماً).
2. بالإمكان استخراج قيمته في حالتي الجداول التكرارية المفتوحة أو المغلقة.
3. لا تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة أو الشاذة عند ترتيبها، إذ لا يعيبه وجودها في التوزيع.
4. قد يكون لأي من توزيعات القيم أكثر من منوال، وقد لا يكون لها منوال البتة.
5. من الممكن استخراج قيمة المنوال بالرسوم البيانية، ومنها المنحنى التكراري، والمضلع والمدرج التكرارين.
6. عندما يراد للمتوسط أن يعبّر عن حالة الشيوع يستخدم المنوال، لاسيما مع البيانات الوصفية (النوعية).
7. لا يخضع المنوال للعمليات الجبرية.
8. لا يمثل المنوال ، القيمة الوسطى في توزيع القيم.
9. لا يمكن الاعتماد على قيمة المنوال إلاّ إذا كان عدد القيم كبيراً.
10. قيمة المنوال المستخرجة من التوزيعات التكرارية ، تعتمد على طريقة اختيار الفئات.

طرائق استخراج المنوال :

أ/ في حالة البيانات غير المبوبة

عندما تتعامل مع مجموعة من القيم تنتشر بتوزيع معين، فيكون المنوال عندها، تلك القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها من قيم هذه المجموعة، أي (هو القيمة الأكثر شيوعاً) .ولاستخراج هذه القيمة من مجموعة قيم نتبع عدة أساليب لتحليلها وتعيين المنوال فيها، ومنها:

1/ لا يوجد منوال لمجموعة القيم ، إذا ما كانت كل قيمة من هذه القيم تتكرر بذات العدد من المرات (أي التكرار متساوي فيها) .

فالأعداد (13 ،15 ،28 ،37 ، 41 ، 58) عديمة المنوال ، لأن كل واحدة منها متكررة مرة واحدة فقط، وقد ينطبق عليها الأمر نفسه إذا ما تكررت جميع القيم بنفس العدد من التكرارات، ومثالها القيم (13 ، 15 ، 28 ، 37 ، 15 ، 28 ، 13 ، 37) هي عديمة المنوال أيضاً .

2/ إذا ما تكررت إحدى القيم أكثر من غيرها، فإنها ستكون هي المنوال. فمثلاً الأعداد (13 ، 15 ، 28 ، 37 ، 15 ، 37 ، 58 ، 41 ، 15) يكون منوالها (15) لأن قيمته تكررت ثلاث مرات.

3/ بغية استخراج قيمة المنوال ، نتبع السياق الآتي :

- ❖ نقوم أولاً بترتيب البيانات (القيم) بواحد من الأسلوبين ، إما تصاعدياً أو تنازلياً.
- ❖ نحدد القيمة ذات التكرارات الأكثر شيوعاً.

مثال : استخرج قيمة المنوال من القيم الآتية :

70 ، 90 ، 80 ، 60 ، 75 ، 90

الحل :

- ❖ نرتب القيم ترتيباً تنازلياً ، وعلى النحو الآتي :

90 ، 90 ، 80 ، 75 ، 70 ، 60

- ❖ نحسب المنوال من خلال تأشير القيمة الأكثر تكراراً. وبما أن القيمة (90) تكررت دون الأخريات لمرتين.
- ❖ إذن المنوال = 90

4/ قد يحدث أن تكون أعلى التكرارات متساوية لقيمتين متجاورتين، هنا تكون قيمة المنوال، عبارة عن معدل القيمتين المتجاورتين.

مثال :حدد قيمة المنوال من القيم الآتية :

13 ، 15 ، 15 ، 28 ، 28 ، 37 ، 41 ، 58

الحل :

بما أن القيم مرتبة تصاعدياً ، وأن كل من القيمتين (15 ، 28) هما الأكثر تكراراً ، وأنهما متجاورتين ... عليه ، يمكن استخراج قيمة المنوال من معدلهما.

- ❖ نحسب قيمة المنوال من المعادلة الآتية :

$$\text{المنوال} = \frac{28 + 15}{2} = 21.5$$

5/ في حال وجود أعلى التكرارات لقيمتين غير متجاورتين، يمكن اعتبار كلا القيمتين منوالاً قائماً بذاته . وتسمى مثل هذه المجموعة بثنائية المنوال.

مثال :

احسب المنوال من القيم الآتية :

5، 10، 18، 18، 5، 12

الحل :

بعد ترتيب القيم نجد أن هنالك منوالين لهذه المجموعة من القيم. إذ تكررت قيم كل منوال مرتين، وتساوت في هذا التكرار دون غيرها من القيم.

الترتيب : 5، 5، 10، 12، 18، 18

المنوالان ، هما : (5 ، 18)

ب/ في حالة البيانات المبوبة :

عندما تكون البيانات المعروضة بشكل توزيع تكراري، أي إن القيم مبوبة، يمكن إيجاد المنوال بعدة طرائق، منها :

أولاً : في حالة الفئات المتساوية : وفيها يمكن إيجاد المنوال عن طريق الحساب أو الرسم.

1/ الطرائق المختلفة لحساب المنوال :

أ/ طريقة مركز الفئة المنوالية :

تعد هذه الطريقة من الطرائق المبسطة حسابياً في استخراج قيمة المنوال، وأنها اقل دقة من الطرائق الأخرى ، إذ تعتمد على مركز الفئة الخاص بأعلى تكرار. ومثل هذه الفئة (التي تحتوي على التكرار الأكبر) يطلق عليها (الفئة المنوالية) . ومن هذا نجد أن المنوال، ما هو إلاّ عبارة عن مركز الفئة المنوالية.

إن المنوال المستخرج طبقاً لهذه الطريقة تكون قيمته تقريبية لأنه ليس من الضرورة أن تكون قمة المنحنى تناظر مركز الفئة إلاّ في حالة أن يكون المنحنى متماثلاً.

مثال : احسب المنوال من الجدول التكراري التالي بطريقة مركز الفئة المنوالية :

الفئات	التكرارات
5 –	4
10 –	10
15 –	17
20 –	9
30 – 25	3
مجموع	43

الحل :

الفئة المنوالية ، هي الفئة التي تحتوي على التكرار الأكبر وهو (17). وتحدد هنا بالفئة (15 إلى أقل من 20) . وعلى هذا يكون المنوال :

$$\text{مركز الفئة المنوالية} = \frac{20 + 15}{2} = 17.5$$

وللتنويه، نقول : إن قيمة المنوال المستخرجة بهذه الطريقة غير دقيقة، وإنها تتأثر بطرائق اختبار الفئة التكرارية ، ولهذا قد نجد عند اختيارنا فئات مختلفة لنفس التوزيع، وجود قيم مختلفة للمنوال.

ج/ طريقة الفروق (طريقة بيرسون) :

وتستخرج قيمة المنوال من العلاقة الآتية :

$$Mo = L1 + \frac{d1}{d1 + d2} \times w$$

حيث أن:

فئة المنوال: تلك الفئة التي تملك اكبر التكرارات و أن:

الحد الأعلى الحقيقي لفئة المنوال = L1

الفرق بين تكرار فئة المنوال و الفئة السابقة لها = d1

الفرق بين تكرار فئة المنوال و الفئة اللاحقة لها = d2

طول الفئة = w

وعلى هذا بالإمكان اختصار خطوات استخراج قيمة المنوال بالآتي :

1/ نجد الفئة المنوالية ، وهي الفئة التي تقابل اكبر التكرارات ما بين الفئات.

2/ نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها (الفرق الأول).

3/ نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها (الفرق الثاني).

4/ نجد المنوال من خلال تطبيق المعادلة المنوه عنها آنفاً.

ولبيان تطبيق هذه الإجراءات ، نعود إلى مثالنا السابق ، ومنه نستخرج قيمة المنوال على وفق الآتي :

$$Mo = 15 + \frac{7}{7 + 8} \times 5$$

$$= 15 + \frac{35}{15}$$

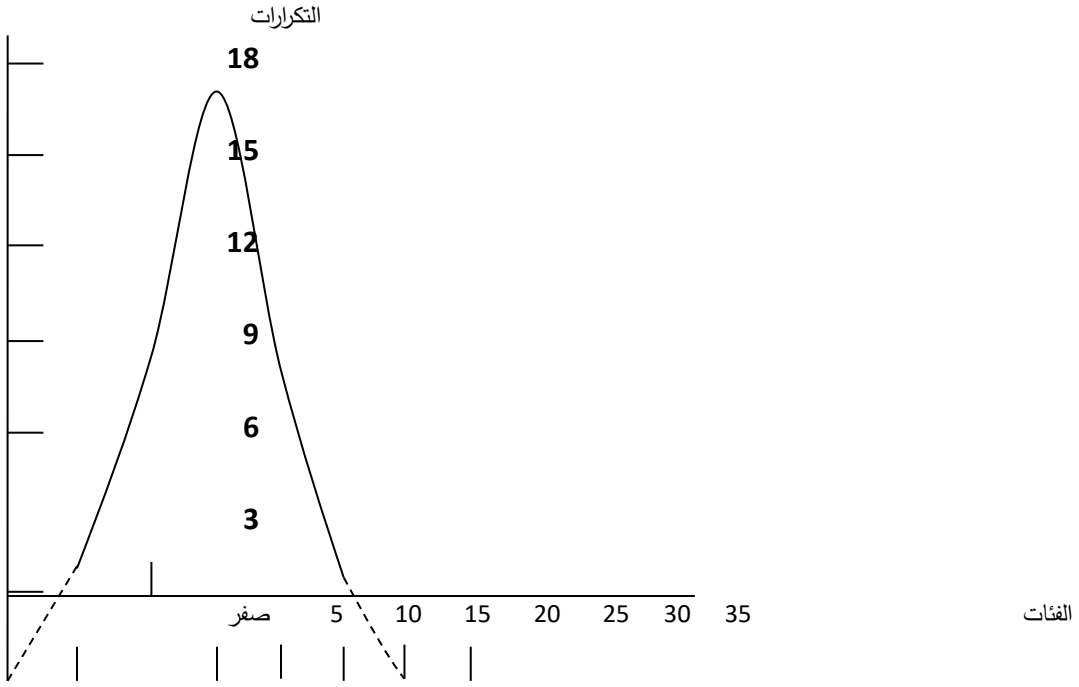
$$2.33 + 15 = 17.33$$

2/ الطرائق المختلفة لاستخراج المنوال بالرسم :

أ/ طريقة المنحنى التكراري :

يستخدم المنحنى التكراري في إيجاد المنوال من خلال تمثيل البيانان بالمنحنى التكراري. وعند هذه الطريقة يكون المنوال عبارة عن نقطة تؤشر على المحور السيني (الأفقي)، وهي تناظر أعلى قيمة في هذا المنحنى ، فإذا ما كان المنحنى التكراري متماثلاً فإن المنوال عنده سيمثل مركز الفئة المنوالية التي تناظر حتماً أعلى قيمة في هذا المنحنى.

وهذه الطريقة تعد تقريبية، ودقتها تعتمد على المهارة الشخصية في الرسم. وعن تمثيل المنوال بالرسم، نتخذ الإجراءات اللازمة برسم المنحنى التكراري وننزل عموداً من قمة هذا المنحنى على المحور الأفقي بحيث يقطعه في نقطة ما، وهذه النقطة ستعطينا قيمة المنوال، وكما في تمثيل بيانات مثالنا السابق.



ب/ طريقة المدرج التكراري :

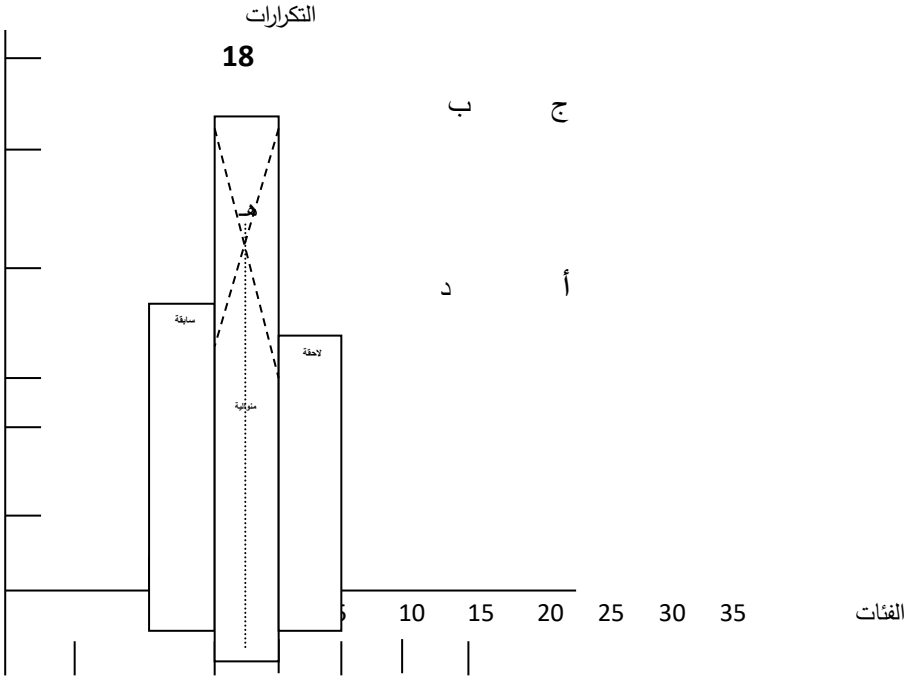
لاستخراج قيمة المنوال في هذه الطريقة، يتم الاعتماد على المدرج التكراري للفئة المنوالية، وكذا الفئتين التي قبل هذه الفئة وبعدها. إذ يوصل وبخطوط مستقيمة ما بين ارتفاعات كل من المدرجات المذكورة للفئات الثلاث ، ومن نقطة تقاطع هذه الخطوط يتم إنزال عمود على المحور الأفقي ، ونقطة التقاء هذا العمود بالمحور الأفقي ستمثل قيمة المنوال. ولبيان خطوات العمل وتنفيذ عمليات الرسم نتبع الآتي :

1/ نرسم المدرج التكراري للفئات الثلاث (الفئة المنوالية والفئة السابقة ، والفئة اللاحقة للفئة المنوالية). بمعنى نرسم جزء من المدرج التكراري، والذي يبين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها والفئة التي تلي الفئة المنوالية.

2/ نصل الرأسين (أ ، ب) والرأسين (ج ، د) بالمستقيمين (أب ، ج د) – كما في الشكل أدناه – فيلتقيان في النقطة (هـ).

3/ ننزل عمود من النقطة (هـ) على المحور الأفقي (السيني) فيقطعه بالنقطة (و). وهذه النقطة هي التي تحدد قيمة المنوال، والتي يجدها معظم الإحصائيون بأنها تساوي قيمة المنوال المستخرجة بطريقة الفروق.

وللتأكد من هذا نعود إلى مثالنا السابق ونمثل بياناته بالرسم على وفق المدرج التكراري، لاستخراج قيمة المنوال منه.



مما جاء آنفاً ، نخلص إلى أن كل طريقة من الطرائق المعنية بحساب قيمة المنوال تعطي نتيجة مغايرة للأخرى، وهذا أمر طبيعي – ومتوقع ، إذ إن كل طريقة من هذه الطرائق تختلف عن الأخرى في المبدأ والأساس الذي تقوم عليه. وتتفاوت درجة الدقة بين كل منها ، إذ إن درجة الدقة عند هذه الطرائق تكون رهينة بطبيعة البيانات الإحصائية وكيفية توزيعها أكثر من أي من العوامل الأخرى. وعلى العموم إن قيم المنوال المستخرجة بالطرائق كافة تقريبية، وتعد طريقة الفروق وطريقة الرسم باستخدام المدرج التكراري من أدق هذه الطرائق.

ثانياً : في حالة الفئات غير المتساوية : حيثما يعبّر عن المنوال بالنقطة الواقعة على المحور الأفقي (السيني) التي تناظر أعلى قمة في المنحنى التكراري، وان رسم هكذا منحنى في حال الفئات غير المتساوية صعب تحقيقه، إلاّ بعد تعديل تكرارات هذه الفئات عن طريق استعمال المعادلة الآتية :

$$\text{التكرار المعدل} = \frac{\text{التكرار المشاهد}}{\text{طول الفئة المقابلة لذلك التكرار}}$$

عليه، وفي حال وجود فئات غير متساوية في التوزيعات التكرارية يكون من الواجب تعديل تكراراتها واستعمالها في العمليات الحسابية أو تمثيلها بالرسم. وعلى هذا يستخرج المنوال من التوزيعات التكرارية ذات الفئات غير المتساوية بذات الطرائق (طريقة الرافعة ، طريقة الفروق)، وكذلك بالرسم (المدرج التكراري ، المنحنى التكراري) بإتباع نفس الخطوات السابقة بعد تعديل التكرارات.

مثال :

احسب المنوال للتوزيع التكراري التالي بطريقة الفروق لبيرسون.

الفئات	5 –	10 –	20 –	40 –	50– 60
التكرارات	10	15	75	25	20

الحل :

1/ نستخرج التكرارات المعدلّة بتطبيق المعادلة المذكورة أنفاً فنحصل على الجدول الآتي :

الفئات	5 –	10 –	20 –	40 –	50– 60
التكرارات	10	15	75	25	20
التكرارات المعدلة	2	1.5	3.75	2.5	2

2/ نعين الفئة المنوالية ، وهي (20 إلى أقل من 40)

3/ نطبق قانون الفروق لبيرسون في استخراج قيمة المنوال.