مختلفة بعضها يتعلق بخاصية تركيز البيانات والبعض الآخر بخاصية انتشارها او اختلافها . وتبين الفقرات التالية المقاييس الاحصائية الاكثر تداولا وفائدة .

3 - 3 - 1 مقاييس النزعة المركزية (Measures of central tendency)

عند اخذ عدة قياسات لمتغير معين كالوزن والطول وضغط الدم وعدد الكريات الحمر نلاحظ ان هذه القياسات (القيم) كـكل يمكن ان تمثل بقيمة معينة ويطلق على هذه الظاهرة مصطلح « النزعة المركزية » ومن اهم مقاييس النزعة المركزية مايلي :

1 - الوسيط Median

ويعرف الوسيط بانه القيمة التي تحتل المرتبة الوسطى عندما ترتب القيم قيد الدرس تصاعديا او تنازلياً . وهذا يعني ان نصف القيم تقل عن قيمة الوسيط والنصف الاخر يزيد عليها . وسنوضح طرق حساب الوسيط بالامثلة التالية التي تمثل حالات مختلفة :

مثال (3 ـ 7) : ماهو الوسيط لمجموعة القيم التالية :

10 , 9 , 8 , 11 , 12 , 16 , 9

الحل : لو رتبنا القيم تصاعديا لحصلنا على مايلي :

16 , 12 , 11 , 10 , 9 ; 9 - 8

ويتضح ان المرتبة الوسطى هي المرتبة الرابعة والتي تحتلها القيمة (10) . وعليه فان قيمة الوسيط تساوي 10 .

مثال (3 ـ 8) : ماهو الوسيط لمجموعة القيم التالية :

? 10, 14 , 7, 5 , 20 , 7 , 22 , 12

الحل : ان ترتيب القيم المذكورة تصاعديا يعطينا مايلي :

22 , 20 , 14 , 12 , 10 , 7 , 7 , 5

ويلاحظ عدم وجود مرتبة واحدة وسطية بل هناك مرتبتان وسطيتان هما المرتبة الرابعة والمرتبة الخامسة . وهذه الحالة تنشأ عندكون عدد القيم زوجياً . ولحساب الوسيط في مثل هذه الحالات فاننا ننطلق من فكرة وجوب وقوع الوسيط بين المرتبتين الرابعة

والخامسة كي يوزع البيانات الى نصفين احدهما ذو قيم أقل منه والاخر ذو قيم اكبر منه . اي ان قيمة الوسيط تقع بين منتصف المسافة بين القيمتين 10 و 12 . وعليه ، فان بالامكان تحديد قيمة الوسيط على النحو التالي :

$$\text{الوسيط} = \frac{\text{القيمة التي تحتل المرتبة الوسطى الاولى} + \text{القيمة التي تحتل المرتبة الوسطى الثانية}}{2}$$

$$= \frac{12 + 10}{2}$$

$$= 11$$

ومن المثالين اعلاه ، يتضح بان تحديد قيمة الوسيط تعتمد على تحديد المرتبة الوسطى (اذا كان عدد القيم فردياً) والمرتبة الوسطى الاولى والمرتبة الوسطى الثانية (اذا كان عدد القيم زوجيا) . فلو كان عدد القيم يساوي (ن) فان :

$$\text{مرتبة الوسيط} = \frac{\text{ن} + ١}{2}$$ اذا كان (ن) عدداً فرديا

وان :

$$\text{المرتبة الوسطى الاولى} = \frac{\text{ن}}{2}$$

$$\text{والمرتبة الوسطى الثانية} = \frac{\text{ن}}{2} + ١$$ اذا كان (ن) عدداً زوجياً .

وهذا يعني ان تحديد قيمة الوسيط لاتتطلب بالضرورة ترتيب جميع القيم تصاعدياً او تنازليا ، بل يكتفي فقط بترتيب القيم المنتهية بمرتبة الوسيط (اذا كان عدد القيم فرديا) أو بالمرتبتين الوسطيتين (اذا كان عد د القيم زوجيا) . وهذه الحقيقة تجعل من الوسيط مقياسا مفيدا في بعض الحالات . فلو اردنا مثلا معرفة عمر الخيول العربية بواسطة اخذ

عينة مكونة من 21 حصانا عند الولادة وتتبعها فان عدد السنوات التي عاشها الحصان المتوفي في حالة الوفاة الحادية عشرة تمثل قيمة الوسيط والتي تعني ان نصف الخيول يقل عمره عنها والنصف الاخر يزيد عمره عليها .

كما ان الوسيط يستعمل احياناً في دراسات تحديد سمية الدواء ، حيث ان كمية الدواء او المادة اللازمة لقتل 50٪ من حيوانات التجربة (اي LD 50) تمثل قيمة الوسيط . كما ان استخدامات الوسيط عند التحدث عن دخل الاسر معروفه وشائعة .

مثال (3 – 9) : اوجد قيمة الوسيط لمجموعة البيانات التالية :

الوزن (كغم) (القيمة)	عدد الحيوانات (التكرار)
5	3
6·5	7
8	5

الحل : هناك طريقتان لمعالجة هذه المسألة وهما :

(أ) اعادة القيم البالغ عددها (15) الى وضعها الاصلي ، اي :

8, 8. 8 ، 8 . 8, 6·5, 6·5, 6·5, 6·5, 6·5, 6·5, 6·5, 5, 5, 5

وباتباع الاسلوب المذكور مع المثال (3 – 7) نجد ان :

قيمة الوسيط = 6·5 وذلك لانها تحتل المرتبة الوسطى (المرتبة 8)

(ب) بما ان اسلوب اعادة القيم الى صيغتها الاولى ليس سهلا وممكنا دائماً خاصة اذا كان عدد القيم كبيراً ، فان هناك اسلوباً آخر لمعالجة هذه الصعوبة . ويتلخص هذا الاسلوب بتحديد مرتبة الوسيط ثم تحديد التكرار التجميعي التصاعدي واختيار القيمة المناظرة للتكرار التجميعي التصاعدي الذي يشمل مرتبة الوسيط . فاذا طبقنا هـــذا الاسلوب على مثالنا الحالي ، فاننا نحصل على مايلي :

$$\text{مرتبة الوسيط} = \frac{\text{ن} + ١}{2}$$

$$\frac{1 + 15}{2} =$$

$$= 8$$

اما جدول التكرار التجميعي التصاعدي فهو مبين في جدول رقم (3 8) .

جدول (3 - 8) : التكرار التجميعي لبيانات المثال 3 9

الوزن (كغم)	عدد الحيوانات (التكرار)	التكرار التجميعي التصاعدي (آخر مرتبة احتلتها القيمة المناظرة)
5	3	3
6·5	7	10
8	5	15

وبما ان التكرار التجميعي التصاعدي يشير الى اخر مرتبة احتلت من قبل القيمة المناظرة (اي ان القيمة 5 احتلت المراتب الثلاثة الاولى وهي 1 ، 2 ، 3 بينما احتلت القيمة 6·5 المراتب 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 وهكذا) ، فان القيمة المناظرة للتكرار التجميعي التصاعدي الذي يشمل مرتبة الوسيط تمثل قيمة الوسيط . وبما ان مرتبة الوسيط (المرتبة 8) هي واحدة من المراتب التي شملها التكرار التجميعي التصاعدي الثاني (اي 10) وأن القيمة 6·5 تحتل كل من هذه المراتب . فان :

قيمة الوسيط = 6·5 كغم

مثال (3 - 10) : جد قيمة الوسيط للبيانات التالية : التي تمثل غلة 18 شجرة حمضية

الغلة (كغم) (القيمة)	عدد الاشجار (التكرار)
5 – 1	2
20 – 5	6
25 – 20	10

الحل : بما ان الفئة الاولى تعني ان هناك شجرتين كل منهما تحمل غلة لاتقل عن كيلوغرام واحد ولاتصل الى 5 كيلوغرام بالضبط ، فاننا لانعرف غلة كل شجرة بالضبط بل اننا نعرف حدود الغلة .وهذا القول ينطبق على الفئتين الثانية والثالثة . وبسبب عدم معرفة القيم الفردية بالضبط ، فان بامكاننا تحديد قيمة الوسيط حسب المعادلة رقم (2 – 3) :

$$(2 - 3) \quad \text{قيمة الوسيط} = أ + \frac{(ع - أ)}{k} \times (و - ت)$$

حيث ان :

أ تمثل الحد الادنى لفئة الوسيط وع حدها الاعلى

k تمثل تكرار فئة الوسيط

و تمثل مرتبة الوسيط وت تمثل التكرار التجميعي التصاعدي للفئة السابقة لفئة الوسيط :

ويقصد بفئة الوسيط الفئة التي تشمل مرتبة الوسيط . فاذا ماطبقنا ذلك على المثال (3 - 10) نحصل على مايلي :

فئة الغلة (كغم)	التكرار	التكرار التجميعي التصاعدي
5 – 1	2	2
20 – 5	6	8
25 – 20	10	18

وبما ان عدد الاشجار = ن = 18 وهو عدد زوجي . فان :

$$\text{المرتبة الوسطى الاولى} = \frac{ن}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\text{المرتبة الوسطى الثانية} = \frac{ن}{2} + 1 = 10$$

وباستخدام المعادلة (3 - 2) نجد ان :

$$\text{قيمة المرتبة الوسطى الاولى} = 20 + \left(\frac{20 - 25}{10} \right) \times (8 - 9) = 20.4$$

$$\text{قيمة المرتبة الوسطى الثانية} = 20 + \left(\frac{20 - 25}{10} \right) \times (8 - 10) = 20.8$$

وعليه فأن :

$$\therefore \text{قيمة الوسيط} = \frac{20.8 + 20.4}{2}$$

$$= 20.6 \text{ كغم}$$

2 - المنــوال (الشــائــع) Mode

المنوال هو القيمة (أو القيم) الأكثر شيوعا أو وجودا بين مجموعة القيم قيد الدرس . ويلاحظ بأن هذا المقياس يعطي للقارىء فكرة حول تراكم القيم حول قيمة (أو قيم معينة) كأن تكون الطول أو الوزن أو عدد الفرضيات أو عدد المواليد الأكثر شيوعا .

مثال (3 - 11) : جد قيمة المنوال للقيم التالية التي تمثل اطوال 10 اشجار :

13 , 14 , 16 , 14 , 12 , 12 , 14 , 15 , 14 , 15 (متر) .

الحل : لو عرضنا هذه البيانات بجدول تكراري لاستطعنا تشخيص القيمة (أو القيم) الاكثر شيوعا بسرعة وسهولة كما هو مبين في جدول رقم 3 - 9

جدول 3 - 9 التوزيع التكراري لبيانات المثال 3 - 11

القيمــة (الطول بالامتار)	التكــرار (عدد النخيل)
13	1
14	4
16	1
12	2
15	2

ويبدو جليا أن الطول (14 م) هو الأكثر شيوعا بين الأطوال . وعليه فأن قيمة المنوال هي 14 م . وهذا يعني أن الطول الأكثر شيوعا بين اشجار النخيل العشرة قيد الدرس هو 14 م .

مثال (3 – 12) جد قيمه المنوال للقيم التالية التي تمثل أوزان 20 حملا عند الولادة :

الوزن (كغم)	عدد الحملان
2·0	3
2·5	7
4·0	7
4·5	3

الحل : بما أن القيمتين (2·5 ، 4·0 كغم) متساويتان في التكرار (أي الشيوع) فأن كل منهما تمثل قيمة مستقلة للمنوال . وعليه فان قيمتي المنوال هما 2·5 ، 4·0 كغم . وهذا يعني ان الأوزان الشائعة للحملان عند الولادة في المجموعة قيد الدرس هي 2·5 ، 4·0 كغم .

وهناك حالات تتطلب تحديد قيمة المنوال لبيانات مصنفة حسب فئات معينـــة وتكراراتها المناظرة . ولمعالجة هذه الحالة فأننا نجد قيمة المنوال حسب الخطوات التالية :

أ – تشخيص الفئة المنوالية (أي الفئة الأكثر تكرارا) .

ب – تحدد قيمة المنوال من المعادلة (3 – 3) ، معادلة كارل بيرسون) :

$$(3 - 3) \quad \text{قيمة المنوال} = أ + \frac{ك_م - ك_ق}{(ك_م - ك_ق) + (ك_م - ك_ب)} \times (ع - أ)$$

حيث أن :

أ تمثل قيمة الحد الأدنى للفئة المنوالية

$ك_م$ تمثل تكرار الفئة المنوالية

$ك_ق$ تمثل تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية

$ك_ب$ تمثل تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية

ع تمثل قيمة الحد الاعلى للفئة المنوالية

مثال (3 - 13) : جد قيمة المنوال للبيانات التالية :

وزن اللحم الصافي (كغم)	عدد الحيوانات المذبوحة
16 - 20	5
20 - 24	10
24 - 28	40
28 - 32	20

الحل : بما ان الفئة 24 — 28 هي الفئة المنوالية لان تكرارها (40) يفوق جميع التكرارات الاخرى . فأن تطبيق المعادلة (3 - 3) يؤدي الى مايلي :

$$\text{قيمة المنوال} = 24 + \frac{40 - 10}{(40 - 10) + (40 - 20)} \times (28 - 24)$$

= 26.4 كغم .

ولا يخفى ان القيمة المحسوبة للمنوال لابد لها ان تقع داخل حدود الفئة المنوالية . وتجدر الاشارة الى ضرورة حساب قيم المنوال المختلفة وفق المعادلة (3 - 3) في حالة وجود أكثر من فئة منوالية واحدة لنفس مجموعة البيانات .

3 – المتوسط الحسابي (Arithmetic Mean)

وهو من أكثر مقاييس النزعة المركزية شيوعا واستعمالا . ويطلق عليه احيانا بالمعدل الحسابي (Arithmetic average) أو الوسط الحسابي . ويرمز لهذا المقياس برمزين مختلفين هما :

أ – الرمز (μ) ليمثل المتوسط الحسابي للمجتمع .

ب – الرمز ($\bar{X}$) ليمثل المتوسط الحسابي للعينة .

وتجدر الاشارة الى أن (μ) هي قيمة ثابتة لا تتغير ، ولهذا فأنها تعتبر من بين معالم أو ثوابت (Parameters) المجتمع . أما ($\bar{X}$) فأنها تتغير من عينة الى أخرى اعتمادا على العناصر التي تشملها كل عينة . ولهذا السبب فان ($\bar{X}$) تعتبر من بين الاحصاءات (Statistics) . وسوف نتطرق في الفصل الرابع الى العلاقة بين (μ) و ($\bar{X}$) .

أما قيمة المتوسط الحسابي ، فأنها تحدد وفق المعادلة العامة (3 - 4) :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}} \qquad (3-4)$$

ورغم فائدة وعمومية هذه المعادلة ، فأن هناك حاجة الى تمييز المتوسط الحسابي للمجتمع (μ) عن المتوسط الحسابي للعينة ($\bar{X}$) اضافة الى ضرورة التطرق الى الانواع المختلفة للبيانات المراد تحديد متوسطها الحسابي . وعليه ، فأن المعادلات التالية تمثل حالات مختلفة لحساب المتوسط الحسابي للمجتمع وللعينة لمتغير معين ولنطلق عليه (X) . وسوف نتطرق لهذين المتوسطين على النحو التالي :

أولاً : المتوسط الحسابي للمجتمع (μ_X) :

تعتمد الطريقة المتبعة لتحديد قيمة المتوسط الحسابي للمجتمع (μ_X) على طبيعة البيانات المتوفرة والتي قد تكون على شكل سلسلة من القيم المنفردة أو فئات من القيم وتكراراتها المطلقة أو النسبية . وعليه ، فأن المعادلة المستخدمة قد تأخذ أحد الاشكال الثلاثة التالية :

$$\mu_x = \frac{\Sigma X_i}{N} \qquad (5-3)$$

حيث أن :

N تمثل حجم المجتمع

X_i تمثل قيمة المتغير (X) للمفردة أو العنصر رقم i

أو

$$\mu_x = \frac{\Sigma K_i X_i}{N} = \frac{\Sigma K_i X_i}{\Sigma k_i} \qquad \dots (6-3)$$

حيث ان .

K_i تمثل تكرار القيمة X_i

أو :

$$\mu_x = \Sigma f_i X_i \qquad \dots (7-3)$$

حيث ان .

f_i تمثل التكرار النسبي للقيمة X_i بالنسبة للمجموع الكلي للقيم وتحسب على النحو التالي :

$$f_i = \frac{K_i}{N}$$

ان تحديد قيمة المتوسط الحسابي للمجتمع يتطلب توفر قيم جميع مفردات ذلك المجتمع دون استثناء . فأن تعذر ذلك وأخذت عينة ممثلة لذلك المجتمع ، فان المتوسط الحسابي الممكن قياسه هو المتوسط الحسابي للعينة ($\bar{X}$) كما موضح في (ثانيا) ادناه .

ثانيا : المتوسط الحسابي للعينة ($\bar{X}$) :

ويحسب على النحو التالي

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad \ldots (8-3)$$

حيث أن

n تمثل حجم العينة

أو

$$\bar{X} = \frac{\sum k_i \bar{X}_i}{\sum k_i} \qquad \ldots (9-3)$$

أو

$$\bar{X} = \sum f_i X_i \qquad \ldots (10-3)$$

حيث أن :

$$f_i = \frac{K_i}{n}$$

وهناك متوسط حسابي خاص يطلق عليه « المتوسط الحسابي المرجح Weighted Airithmetic Mean » ويرمز له بالرمز ($\bar{X}_{wt}$) والناشيء عن المعاينة الطبقية التي تؤخذ بموجبها عينة من كل طبقة ويحدد المتوسط الحسابي للعينة المأخوذة من كل طبقة على انفراد ويطلق عليه بالرمز ($\bar{X}_j$) . وبما أن الطبقات تختلف في احجامها فأن المتوسطات الحسابية للعينات المأخوذة من هذه الطبقات توزن حسب ما تمثله طبقاتها المناظرة في المجتمع الكلي بهدف الوصول الى متوسط حسابي مرجح يمثل العينة الكلية المأخوذة من المجتمع . وعليه . فأن المتوسط المرجح يحسب وفق المعادلة (11 - 3) .

$$\bar{X}_{wt} = \Sigma \bar{X}_j \cdot \frac{N_j}{N} \qquad \ldots (11 \quad 3)$$

حيث أن :

$\bar{X}_j$ تمثل المتوسط الحسابـي للعينة المأخوذة من الطبقة رقم j

N_j تمثل حجم الطبقة رقم j

N تمثل حجم المجتمـع

ولابد لنا من الاشارة الى أن استخدامنا لحجم المجتمع (N) في المعادلة (3 – 11) لا يعني اننا نتكلم عن المتوسط الحسابي للمجتمع لاننا لا نعرف قيم جميع مفرداتـه وان كل ما نعرفه لا يتعدى قيم مفردات العينات المأخوذة من الطبقات المختلفة التـي يتكون منها المجتمع . وعليه ، فان استخدام الحجم الكلي للمجتمع (N) كان لاغراض الموازنة فقط (لاحظ المثال رقم 3 – 17) .

ولتوضيح كيفية استخدام المعادلات المشار اليها اعلاه ، فأننا سنستعين بالامثلـة التاليـــة :

مثال (3 – 14) : اذا كانت البيانات التالية تمثل أطوال ثمان نخلات تشكل مجتمعا قائما بذاته : 11 ، 16 ، 16 ، 15 ، 11 ، 16 ، 11 ، 16 (متراً) ، فأن المتوسط الحسابي لطول النخلة في هذا المجتمع يحسب وفق المعادلة رقم (3 – 5) ، أي :

$$\mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

$$= \frac{11 + 16 + 16 + 15 + 11 + 16 + 11 + 16}{8} = \frac{112}{8}$$

$= 14$ (متراً)

وتجدر الأشارة في هذه المرحلة الى أن المتوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية يأخذبنظر الأعتبار جميع القيم دون استثناء وهذا مايميزه عن الوسيط والمنوال اللذان يركزان على قيمة اوقيم قليلة فقط ويتركان بقية القيم . وهذه الحقيقة تعتبر من محاسن

هذا المقياس كما أنها في الوقت ذاته تعتبر من المآخذ عليه لأنه . وبسبب شموله لجميع البيانات . يتأثر دون شك بالقيم المتطرفه الواطئة اوالعالية على حد سواء .

ولو عدنا الى المثال رقم (3 . 14) ورتبنا البيانات الأصلية بجدول تكراري على النحو التالي :

القيمة (متر)	التكرار
11	3
16	4
15	1
المجموع	8

فأن بالأمكان حساب المتوسط الحسابي لطول النخلة في هذا المجتمع وفق المعادلة رقم (3 - 6) ، أي أن

$$\mu_x = \frac{\Sigma K_i X_i}{\Sigma k_i}$$

$$= \frac{(3)(11) + (4)(16) + (1)(15)}{8}$$

$$= \frac{112}{8} = 14 \quad \text{متر}$$

ولايخفى اننا توصلنا الى نفس النتيجة كما هو متوقع .

ولو اعطيت بيانات المثال رقم (3 . 14) على النحو التالي :

القيمة (متر) X_i	التكرار النسبي f_i
11	0·375
16	0·500
15	0·125
المجموع	1·000

حيث ان 0.375 تمثل نسبة 3 من 8 وهكذا ، فان بامكاننا حساب المتوسط الحسابي لطول النخلة في هذا المجتمع وفق المعادلة رقم (3 - 7) ، اي ان :

$$\mu_x = \sum f_i X_i$$
$$= (0.375)(11) + (0.500)(16) + (0.125)(15)$$
$$= 14$$ مترا

مثال 3 –15 لوفرضنا ان البيانات المعطاة في المثال 3-14 لاطوال 8 نخلات تمثل عينة مأخوذة بشكل عشوائي من مجتمع معين ، فان المتوسط الحسابي لطول النخلة الواحدة (اي $\overline{X}$) في هذه العينة يمكن ان يحسب وفق المعادلة (3–8) اي ان :

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$= \frac{11 + 16 + 16 + 15 + 11 + 16 + 11 + 16}{8} = \frac{112}{8}$$

$$= 14$$ مترا

او وفق المعادلة (3 – 9). اي ان :

$$\overline{X} = \sum f_i X_i$$
$$= (0.375((11) + (0.500)(16) + (0.125)(15)$$
$$= 14$$ مترا

ويلاحظ بان قيمة المتوسط الحسابي لاي مجموعة من البيانات هي قيمة محددة سواء كانت تخص المجتمع او العينة المأخوذة منه رغم الاختلاف بالرمز والاستخدام .
مثال(3 – 16): لو اخذت عينة من تيلات صنف معين من القطن وزنها 5 غم وفرزت تلك التيلات الى ثلاث فئات لطول التيلة ووزنت تيلات كل فئة وكانت النتائج كما يلي :

فئة طول التيلة (سم)	الوزن (غم)
2 − 1	0·5
4 − 2	3·0
7 − 4	1·5
	5·0 (المجموع)

فلو اريد تحديد قيمة المتوسط الحسابـي لطول التيلة في العينة (اي $\bar{X}$) ، فان بالامكان الوصول الى ذلك عن طريق استخدام مركز الفئة وتكرارها النسبـي ، اي :

مركز الفئة (سم)	التكرار النسبي
X_i	f_i
1·5	0·1
3·0	0·6
5·5	0·3
	1·0 المجموع

وبأستعمال المعادلة رقم (3 - 10) فأن المتوسط الحسابي لطول التيلة في العينة هو :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sum f_i X_i \\ &= (0{\cdot}1)(1{\cdot}5) + (0{\cdot}6)(3{\cdot}0) + (0{\cdot}3)(5{\cdot}5) \\ &= 3{\cdot}6 \text{ سنتمتراً} \end{aligned}$$

مثال (3 − 17) لو اريد تقدير المتوسط الحسابي لأنتاج محصول معين في محافظة تختلف حقولها المزروعة بهذا المحصول في خصوصيتها بحيث تشكل هذه الحقول ثلاث مجاميع خصوبة (أي ثلاث طبقات) تختلف عن بعضها البعض مع وجود تقارب بين حقول كل مجموعة بالنسبة لخصوبتها بشكل عام. فأن علينا والحالة هذه أخذ عينة من

حقول كل طبقة (اومجموعة) بحيث يكون حجم العينة الخاص بكل طبقة يتناسب وحجم تلك الطبقة ووفق الأسلوب الذي أشرنا اليه في الفصل الثاني. ولوحسب المتوسط الحسابي لعينة كل طبقة من الطبقات وفق المعادلة (3 – 8) فان بالامكان حساب المتوسط الحسابي المرجح ($\overline{X}_{wt}$) وفق المعادلة (3 – 11) ليمثل المتوسط الحسابي العام لتلك المحافظة على أساس العينة التي أخذت منه ووزعت على الطبقات الثلاثة التي تكونه . وعلى فرض أن نتائج المعاينة كانت على النحو المبين في الجدول رقم (3 – 10)

جدول رقم (3 – 10) : المساحات المزروعة ومتوسط الغلة حسب الطبقات

رقم الطبقة j	مساحة الطبقة المزروعة بالمحصول قيد الدرس (دونم) N_j	المتوسط الحسابي لانتاج كل دونم في العينة المأخوذة من الطبقة (كغم) $\overline{X}_j$
1	1000	650
2	6000	420
3	3000	530
المجموع	10,000	

ومن الواضح جدا انه لايجوز جمع المتوسطات الحسابية للعينات الثلاثة وتقسيمها على عددها (اي على 3) وذلك لانها غير متساوية في الاهمية بسبب اختلاف المساحات المزروعة بهذا المحصول في كل طبقة (اي اختلاف احجام الطبقات الثلاثة) .
وعليه .فأن المتوسط الحسابي المرجح لانتاج الدونم الواحد على نطاق المحافظة يحسب وفق المعادلة رقم (3 – 11) وعلى النحو التالي :

$$\overline{X}_{wt} = \sum_j \overline{X}_j \cdot \frac{N_j}{N}$$

$$= (650)\left(\frac{1000}{10000}\right) + (420)\left(\frac{6000}{10000}\right) + (530)\left(\frac{3000}{10000}\right)$$

$$= (650)(0\cdot1) + (420)(0\cdot6) + (530)(0\cdot3)$$

$= 476$ كغم

ملاحظة : يمكن تحديد قيمة المتوسط الحسابي بشكل تقريبي على اساس العلاقة بينه وبين كل من الوسيط والمنوال كما هو مبين في المثال (3 – 18)

مثال (3 – 18) : جد قيمة كل من الوسيط والمنوال والمتوسط الحسابي للبيانات التالية التي تمثل الدخل السنوي لعدد من الحيازات الزراعية :

الدخل السنوي (دينار)	عدد الحيازات
اقل من 250	1000
250 – 1250	4500
1250 – 5000	1500
5000 فاكثر	700

الحـــل :

يمكن ايجاد قيمة الوسيط وفق الاسلوب المبين في المثال رقم (10) والذي يعطينا قيمة للوسيط تساوي 883.3 دينارا .

اما قيمة المنوال ، فأن بالامكان تحديدها وفق الاسلوب المبين في المثال رقم (3 – 13) وعليه . فأن قيمة المنوال تساوي 788.5 دينارا .

اما بالنسبة للمتوسط الحسابـي . فأن تحديده يعتمد على تحديد مراكز الفئات الاربعة المختلفة (راجع المثال رقم (3 – 16) . وبما ان الفئة الاخيرة مفتوحة الطرف الاعلى (اي ان حدها الاخير غير محدد) . فأن مركز هذه الفئة غير معروف . وفي مثل هـــذه الحالات . يمكن الاستعانة بالعلاقة التالية التي تربط مقاييس النزعة المركزية الثلاثـــة :

المتوسط الحسابـي – المنوال = (3) (المتوسط الحسابـي – الوسيط) ويمكن ان تكتب العلاقة هذه على النحو التالي :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \left(\frac{3}{2}\right)(\text{الوسيط}) - \left(\frac{1}{2}\right)(\text{المنوال})$$

وعند تعويض القيم التي تم الوصول اليها لـكل من الوسيط والمنوال ، فاننا نحصل على قيمة تمثل المتوسط الحسابـــي بشكل تقريبـــي ، اي ان :

$$\text{المتوسط الحسابـــي} = (788.5)\left(\frac{1}{2}\right) - (883.3)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$= 1719.2$ (دينارا)

وتجدر الاشارة في هذه المرحلة الى ان شمول جميع القيم في حساب قيمة المتوسط الحسابـي وبساطة الحصول عليه وسهولة فهمه وكونه تقديراً غير متحيز للمتوسط الحسابـي للمجتمع واستخدامه كاساس في حساب مقاييس احصائية اخرى (كمقاييس التشتت التي سنأتي عليها فيما بعد في هذا الفصل) قد جعلت من المتوسط الحسابـــي اكثر استعمالاً من غيره من مقاييس النزعة المركزية . ورغم تاثره بالقيم المتطرفة ، فان هذه الحقيقة لم تنل من شيوع استخدامه .

4· المتوســـط الهندســـي · Geometric Mean

يعرّف المتوسط الهندسي لمجموعة من القيم عددها (ن) على انه الجذر النونـــي لحاصل ضرب هذه القيم . فلو رمزنا للمتوسط الهندسي بالرمز (G) وللقيم بالرموز ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) فان المتوسط الهندسي يحسب وفق المعادلة (3 − 12) :

$$G = \sqrt[n]{(X_1)(X_2)\ldots(X_n)} \qquad (12-3)$$

وعادة مايستعان باللوغارتيمات لايجاد قيمة المتوسط الهندسي ، اي ان : −

$$\operatorname{Log} G = \frac{1}{n}(\log X_1 + \log X_2 + \ldots + \log X_n)$$

$$= \frac{\sum \log X_i}{n}$$

وهذا يعني ان لوغاريثم المتوسط الهندسي ماهو الا المتوسط الحسابي للورغايثمات القيم قيد الدرس .

وتجدر الاشارة الى ان المتوسط الهندسي لمجموعة من القيم يكون دائما اقل من المتوسط الحسابي . كما ان المعادلة رقم (3 - 12) لاتسمح بحساب المتوسط الهندسي اذا كانت احدى القيم تساوي صفرا وكذا الحال بالنسبة لوجود عدد فردي من القيم السالبة .

وفي حالة الجداول التكرارية ، فان المتوسط الهندسي يحسب وفق المعادلة (3 - 13)

$$\log G = \frac{K_1 \log X_1 + K_2 \log X_2 + \dots + K_n \log X_n}{n} \qquad (13-3)$$

$$= \frac{\sum K_i \log X_i}{\sum K_i}$$

حيث ان

K_i يمثل تكرار القيمة X_i

X_i تمثل القيمة رقم i والتي قد تكون قيمة قائمة بذاتها او ممثلة لمركز الفئة المناظرة لها .

مثال (3 - 19) : جد المتوسط الهندسي للقيم 5, 8, 10, 12

الحل : قيمة المتوسط الهندسي تحسب وفق المعادلة رقم (3 - 12) . اي ان :

$$G = \sqrt[4]{(5)(8)(10)(12)}$$

وباستخدام طريقة اللوغارتيمات نحصل على ان :

$$G = 8.3$$

ولابد لنا من جلب انتباه القارىء الى ان المتوسط الحسابي للقيم المذكورة في هذا المثال يساوي (8.75) وهو اكثر من قيمة المتوسط الهندسي الامر الذي يؤكد ماذكرناه في بداية الحديث عن المتوسط الهندسي .

وللمتوسط الهندسي استخدامات محدودة ولكنها مفيدة ومن بين هذه الأستخدامات صلاحية المتوسط الهندسي لتمثيل مجموعة من النسب (Ratios) كما هي الحال بالنسبة للارقام القياسية . كما يعتبر هذا المقياس من بين انسب المتوسطات في حالة كون التغير يتناسب مع العدد (او الكمية) الموجودة في فترة زمنية محددة كما هي الحال بالنسبة لتزايد اعداد السكان او الحيوانات .

مثال (3 – 20) لو علمت بان عدد الابقار في وحدة ادارية معينة كان 4000 بقرة عند منتصف عام 1970 وانه بلغ 6000 بقرة عند منتصف عام 1978 . فما هو عدد الابقار المقدر عند منتصف الفترة الزمنية هذه ؟ .

الحل : بما ان تغير عدد الابقار يعتمد على عددها في اي لحظة زمنية . فان المتوسط الهندسي يمثل عدد الابقار عند منتصف الفترة الزمنية ، اي ان :

$$G = \sqrt[2]{(4000)(6000)}$$

$$= 4900 \quad \text{بقرة}$$

وعليه ، فان عدد الابقار المقدر عند منتصف عام 1974 (اي منتصف الفترة الزمنية) هو 4900 بقرة . ويلاحظ باننا لو استخدمنا المتوسط الحسابي لتوصلنا الى ان العدد المقدر في منتصف الفترة هو 5000 بقرة الامر الذي يعني ان 4000 بقرة زادت بمقدار 1000 بقرة خلال 4 سنوات خلال الفترة من منتصف 1970 حتى منتصف 1974 بينما نجد ان 5000 بقرة زادت بنفس العدد (اي 1000) خلال الاربع سنوات الاخيرة لتصبح 6000 .ولايخفى ان هذا الاستنتاج لايتفق والواقع بسبب كون حجم الزيادة لابد له ان يتغير مع حجم المجتمع عند فترة زمنية محددة . وعليه ، فان المتوسط الهندسي هو الاصلح في مثل هذه الحالات .

(5) المتوسط التوافقي Harmonic Mean

يعرّف المتوسط التوافقي على انه مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوبات القيم . فاذا كانت لدينا القيم ($X_n, \ldots, X_2, X_1$) فان المتوسط التوافقي لها (ونرمز له بالرمز H) يحسب وفق المعادلة (3 – 14)

$$H = \frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{X_1} + \dfrac{1}{X_2} + \dots \dfrac{1}{X_n}}{n}} \qquad (14-3)$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\Sigma \dfrac{1}{X}}{n}}$$

$$= \frac{n}{\Sigma \dfrac{1}{X_i}}$$

مثال (3 – 21) : زاد وزن حيوان تسمين 40 كيلوغراما على النحو التالي :

لقد زاد العشرة كيلوغرامات الاولى بمعدل 10 كيلوغرام شهريا ، وزاد العشرة كيلو غرامات الثانية بمعدل 20 كيلوغراما شهريا ، وزاد العشرة كيلوغرامات الثالثة بمعدل 30 كيلو غراما شهريا ، وزاد العشرة كيلوغرامات الرابعة بمعدل 40 كيلو غراما شهريا . فلو اردنا معرفة متوسط الزيادة الشهرية في الوزن ، وحاولنا استعمال المتوسط الحسابي لهذا الغرض ، فقد نتوصل الى ان معدل الزيادة الشهرية في الوزن تساوي :

$$\bar{X} = \frac{10 + 20 + 30 + 40}{4}$$

$$= 25 \quad \text{(كغم / للشهر)}$$

ولايخفى ان هذه القيمة لاتمثل متوسط الزيادة الشهرية في الوزن وذلك لان هذا الحيوان ازداد وزنه على النحو التالي :

ازداد العشرة كيلوغرامات الاولى خلال شهر واحد وازداد العشرة كيلوغرامات الثانية خلال $\frac{1}{2}$ شهر وازداد العشرة كيلوغرامات الثالثة خلال $\frac{1}{3}$ شهر وازداد العشرة كيلو غرامات الرابعة خلال $\frac{1}{4}$ شهر ، وعليه ، فأن هذا الحيوان قد ازداد وزنه بمقدار 40 كيلو غراما خلال فترة تساوي :

الأستاذ المساعد الدكتور
عبدالله عصام نعمان
رئيس قسم الإنتاج الحيواني

$$1{\cdot}0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2{\cdot}08$$ شهر

وعليه ، فأن متوسط الزيادة الشهرية في وزنه تساوي :

$$\frac{40}{2{\cdot}08} = 19{\cdot}20$$ (كغم / للشهر)

ويلاحظ بان هذه القيمة تختلف عن المتوسط الحسابي وانها تمثل في الواقع المتوسط التوافقي لأن قيمة المتوسط التوافقي المحسوب وفق المعادلة (3 – 14) هي :

$$H = \frac{4}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40}}$$

$$= 19{\cdot}20$$ (كغـم / للشهـر)

ولابد لنا من الاشارة الى ان المتوسط التوافقي قليل الاستخدام وانه اسلوب حسابه ملتوي وعقيم .

6. الربيعـان الادنـى والاعـلى Lower Quartile and Upper Quartile

قد نحتاج احيانا الى معرفة القيمة التي تقع عند ربع السلسلة الصاعدة والنازلة لمجموعة من القيم . ويطلق على القيمة عند ربع السلسلة الصاعدة بالربيع الادنى والقيمة عند ربـع السلسلة النازلة بالربيع الاعلى . هذا وان معرفة هاتين القيمتين تعطينا فكرة مفيدة عن كيفية توزيع القيم في السلسلة .

7. العشيـر (Decile) والمئيـن (Centile)

يمكن حساب القيمة التي تقع عند عشر السلسلة من اسفل اومن اعلى . وتسمى هـذه القيمة « العشيـر » الادنى او الاعلى على الترتيب .