فاذا كان احتمال النجاح هو (p) واحتمال الفشل هو (q) حيث ان ($p + q = 1$)
فان المتغير العشوائي الذي ياخذ قيمتين فقط (الصفر والواحد) اي ان ($X = 0,1$)
له توزيع برنولي اذا كان توزيعه الاحتمالي هو :

$$P(X) = p^x q^{1-x}$$

وعليه ، فان احتمال النجاح (اي ($X = 1$)) هو :

$$P(X = 1) = p$$

واحتمال الفشل (اي ($X = 0$)) هو :

$$P(X = 0) = q$$

المتوسط الحسابي لتوزيع برنولي فهو :

$$\mu = E(X) = \sum_{0} X p^x q^{1-x} \quad p$$

اما التباين فهو :

$$\sigma^2 = pg$$

(2-2-4) توزيع ذو الحدين :

The Binomial Distribution

يعتبر توزيع ذو الحدين من التوزيعات المتقطعة المهمة ذات التطبيق الواسع في الاحصاء وهو من التوزيعات المرتبطة بتكرار التجربة .
وعلى فرض أن عينة عشوائية ذات حجم n قد اخذت من توزيع برنولي ولتكـــن :

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

وبما ان X تاخذ (١) اذا وقع الحادث (اوعند نجاحه) و (صفر) عنـد فشلـه فان عدد الـ 1's في n من المحاولات هو :

$$(X_1 + X_2 + \ldots + \dot{X}_n) = \Sigma X_i$$

فاذا رمزنا للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذو الحدين بالرمز X وهو يمثل عدد النجاحات فان :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ويمكن حساب احتمال ظهور الحادث X من المرات في n من التجارب او المحاولات بقانون توزيع ذو الحدين التالي :

$$P(X) = \binom{n}{X} p^{X} q^{n-X}, \quad X = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \ldots\ldots (3-4)$$

حيث ان :

p = احتمال النجاح

q = احتمال الفشل

$$p + q = 1$$

$\binom{x}{u}$ يمثل عدد الحالات المختلفة الممكنة التي يمكن معها ظهور الحدث X من المرات من بين n من المحاولات وهذا المصطلح الرياضي (الذي يمثل عدد الحالات الممكنة والذي يطلق عليه بالتوافيق combinations) يساوي :

$$\binom{n}{X} = \frac{n!}{X!(n-X)!} =$$

$$\frac{(n)(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)}{(X)(X-1)(X-2)\ldots(1)(n-X)(n-X-1)(n-X-2)\ldots(1)}$$

فلوكان لدينا 5 محاولات ، فان عدد الحالات المختلفة التي يمكن معها ظهور الحدث مرتين فقط هو :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\ 3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = 10$$

علما بان $1! = 1, 0! = 1$ بالتعريف

هذا وان تجارب ذو الحدين لها الخواص التالية :

1. نتيجة كل محاولة تصنف الى صنفين . نجاح الحادث اوفشله .
2. احتمال النجاح p يبقى ثابتا من محاولة الى اخرى .
3. ان المحاولات تتكرر n من المرات .
4. ان تكرار هذه المحاولات مستقلة .

ان المتوسط الحسابـــي لتوزيع ذو الحدين :

$$\mu = E(X) = np$$

وان تباينه هو

$$\sigma_x^2 = npq$$

مثال 4 – 7 : في احدى تجارب مندل الوراثية وجد بانه عند تهجين نبات طويل نقي مع نبات قصير نقي من نباتات البزاليا فانه ينتج نباتات طويلة وقصيرة في الجيل الثاني بنسبة 3 : 1 على التوالي . فاذا تم اختيار 5 نباتات من الجيل الثاني فما هو احتمال الحصول على 3 نباتات طويلة ؟

الحل :

احتمال ظهور نبات طويل في الجيل الثاني هو $p = \frac{3}{4}$

واحتمال ظهور نبات قصير في الجيل الثاني هو $q = \frac{1}{4}$

ان عدد المحاولات هو $n = 5$

وعدد النباتات الطويلة $X = 3$

وعند استخدام المعادلة (4 – 3) نجد ان :

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)(2)(1)}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 10\left(\frac{27}{64}\right)\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{270}{1024}$$

$$= 0.269$$

∴ احتمال الحصول على 3 نباتات طويلة 0.269 أو ٪ 26.9

وهناك بعض الحالات المهمة لاستخدام قانون توزيع ذو الحدين وعلى فرض ان n لازالت 5 كما في المثال السابق وهي :

احتمال الحصول على ثلاثة نباتات طويلة ، اي :

$$p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 0.269$$

احتمال الحصول على ثلاث نباتات طويلة على الاكثر ، اي

$$p(X \leq 3) = p(X = 3) + p(X = 2) + p(X = 1) + p(X = 0)$$

احتمال الحصول على ثلاث نباتات طويلة على الاقل اي :

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$$

مثال 4 – 8 : في احدى بساتين البرتقال في منطقة ما كانت نسبة اصابة الثمار بمرض معين هي ٪15 فاذا قطفت اربع برتقالات عشوائياً من هذا البستان ، فما هو احتمال :

1. ان تكون واحدة مصابة فقط ؟
2. ان تكون هناك برتقالتان مصابتان على الاقل ؟

الحـــل :

بما ان احتمال الاصابة $p = 15\% = 0.15$

وان احتمال عدم الاصابة $q = 1 - p = 0.85$

فان حل الجزء (1) يعني ان : $n = 4, X = 1$

اي ان =

$$p(X = 1) = \binom{4}{1}(0.15)^1(.85)^3$$

$$= \frac{(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)} (0.15)(.614125)$$

$$= (4)(0.15)(.614125)$$

$$= 0.3685$$

اما حل الجزء (2) والذي يعني : $n = 4, X \geq 2$

فهو : $p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4)$

$$= \binom{4}{2}(.15)^2(.85)^2 + \binom{4}{3}(.15)^3(.85)^1$$

$$+ \binom{4}{4}(.15)^4(.85)^0$$

$$= 0.0975 + 0.0114 + 0.0005$$

$$= 0.1094$$

(4 2-3) توزيع بواسون

وهو من التوزيعات غير المستمرة ايضا وقد سمي بهذا الاسم نسبة الى العالم بواسون Simeirı Denis Poisson (1781 - 1840) الذي وصفه سنة 1837 . وقد وجد بان لهذا التوزيع تطبيقات عملية خاصة في التجارب التي تكون المشاهدات فيها تقاس في ضوء وحدة الزمان او المكان . فمثلا عدد المكالمات التلفونية المستلمة في دائرة البريد بالدقيقة اوعدد المكائن المكسورة في يوم واحد ، اوعدد البذور الغريبة في كل ١٠٠٠ حبة او عدد الحشرات على ورقة معينة او عدد الخلايا الجرثومية في كل جزء من الالف من اللتر ... الخ .

فاذا اعتبرنا الرمز (X) يمثل عدد حالات النجاح للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون في وقت معين اومكان معين . فان احتمال حصول هذا العدد من حالات النجاح بحسب وفق المعادلة (4-4) اي ان :

حيث ان :

$$p(X) = \frac{e^{-\mu} \mu^{x}}{X!} \qquad X = 0,1,2,\ldots$$

(μ) يمثل متوسط عدد النجاحات في وقت ومكان محدد ($u = np$) ان e تمثل اساس اللوغاريتمات الطبيعية (2.71828) .

ان توزيع بواسون يتميزبان n لاتقف عند حد وان p صغيرة جدا اونادرة .
اي ان التوزيع البواسواني هوشكل اوحد نهائي لتوزيع ذوالحدين عندما تصبح n كبيرة و p صغيرة تكاد تصل الى الصفر .
ويلاحظ ان كلا من المتوسط الحسابي والتباين للتوزيع البواسواني مساوٍ الى μ .

مثال 4 - 8 : اذا كان متوسط عدد الخلايا الجرثومية في كل جزء من الالف من اللترهو 3 (اي ان $3 = \mu$) فما هواحتمال الحصول على اربع خلايا جرثومية عند سحب جزء واحد من الالف من اللتر؟

الحـل :

ان الاحتمال المطلوب يحسب على النحوالتالي :

$$p(X = 4) = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0{\cdot}168$$

واذا اريد حساب احتمال عدم وجود خلية جرثومية في الجزء الواحد من الالف من اللتر . فانه يحسب على النحوالتالي :

$$p(X = 0) = \frac{e^{-3}3^0}{3!}$$

$$= 0.0083$$

(4-2-4) التوزيع المعتدل او الطبيعي : Normal Distribution

يعتبر التوزيع المعتدل أوالطبيعي من أهم التوزيعات المستمرة على الاطلاق لما له من اهمية كبيرة في الاختبارات الاحصائية . وترجع اهمية التوزيع المعتدل الى خاصية مايسمى بنظرية النهاية المركزية (Central Limit theorm) والتي تنص على ان توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي يقترب من التوزيع الطبيعي كلما كان حجم العينة كبيرا . ومن هذا يتضح بان العينات كبيرة الحجم المسحوبة من مجتمع غيرمعتدل تتصف بكون

متوسطاتها الحسابية تتوزع توزيعا يقرب من التوزيع المعتدل . وكلما كبر حجم العينة فان بالامكان استخدام التوزيع المعتدل كتوزيع تقريبي جيد لعدة توزيعات غير مستمرة كتوزيع ذو الحدين والتوزيع البواسواني وغيرها .

ان أول من اكتشف التوزيع المعتدل هو العالم ديموفر Demoivre كشكل نهائي لتوزيع ذو الحدين سنة 1733 .

ويطلق احيانا على التوزيع المعتدل بتوزيع كاوس (Gauss) أوبتوزيع (كاوس – لابلاس) Gauss-Laplace احيانا أخرى .

ويعبر عن التوزيع الاحتمالي المعتدل بالمعادلة التالية :

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$-\infty < X < \infty$$

علما بأن $\pi = 3.14159$

$e = 2.71828$

$\mu =$ المتوسط الحسابي للمجتمع

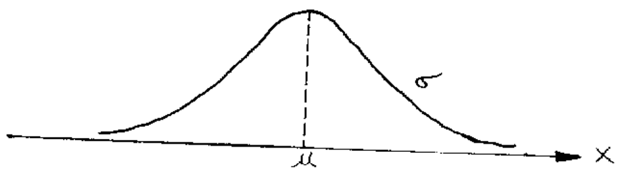
$\sigma =$ الانحراف المعياري للمجتمع

ومن المعادلة اعلاه يتضح بأن شكل المنحني يختلف من مجتمع لاخر لان قيمة μ و σ يحددان موقع وشكل المنحني وانهما يختلفان من مجتمع لاخر .

الصفات العامة للتوزيع المعتدل :

من اهم صفات التوزيع المعتدل مايلي :

1. أن شكل المنحني هو على هيئة ناقوس

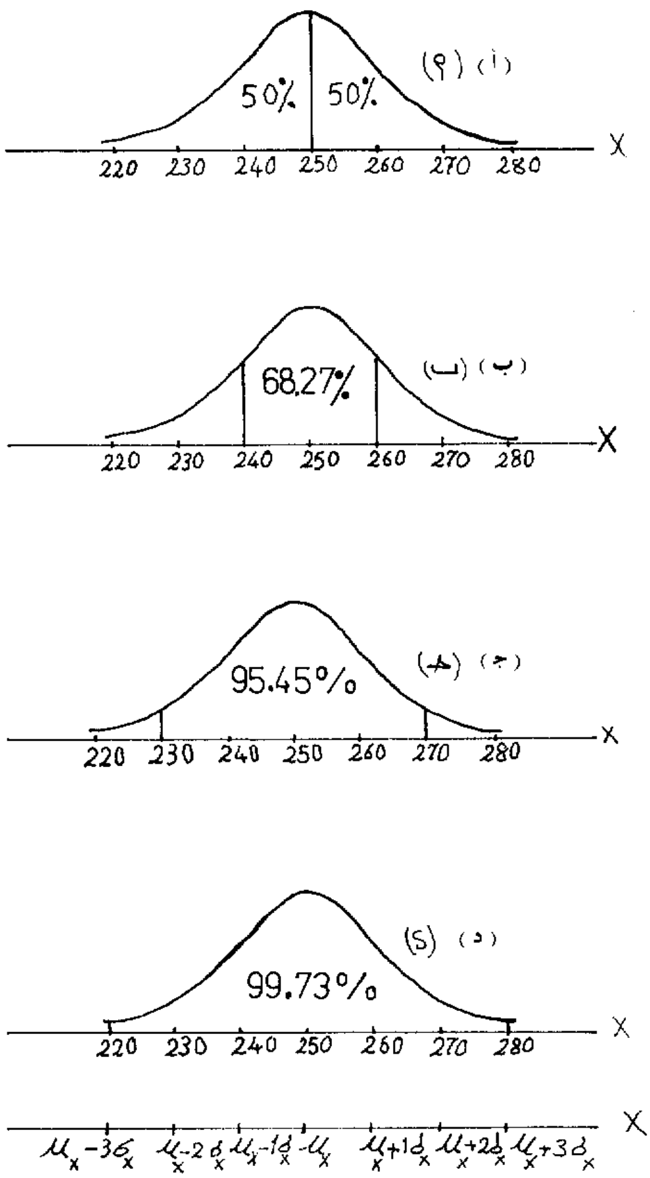


2. ان المساحة الـكلية تحت المنحني المعتدل تساوي الواحد الصحيح (Unity)
3. ان اعلى ارتفاع للمنحني المعتدل هو عند قيمة المتوسط الحسابي له. وان لهذا المنحنى قمة واحدة.
4. يتميز المنحنى المعتدل بتماثله حول متوسطه الحسابي.
5. ان المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للمنحنى المعتدل متساوية.
6. ان المساحة الواقعة على يمين المتوسط الحسابي للمنحنى المعتدل تساوي 50٪ وهذا يعني ان القيم التي تزيد على المتوسط الحسابي تشكل نصف المجموع الـكلي للقيم. وينطبق القول نفسه على نسبة القيم التي تقل عن المتوسط الحسابي (انظر الجزء أ من الشكل 4 - 1).
7. ان المساحة بين $(\mu - \sigma)$ و $(\mu + \sigma)$ تساوي 68.27٪ ، اي ان القيم التي تقع بين الحدين اعلاه تشكل نسبة 0.6827 من المجموع الـكلي للقيم كما هو مبين في الجزء ب من الشكل (4 - 1).
8. ان المساحة بين $(\mu - 2\sigma)$ و $(\mu + 2\sigma)$ تساوي 95.45٪ (لاحظ الجزء جـ من الشكل (4 - 1).
9. ان المساحة بين $(\mu - 3\sigma)$ و $(\mu + 3\sigma)$ تساوي 99.73٪ (انظر الجزء أ من الشكل 4 1).
10. ان بعض ثوابت المعتدل هي :

المتوسط الحسابي	=	μ
التبايـن	=	σ^2
الانحراف المعياري	=	σ
معامل الالتواء	=	صفر
معامل التفلطح	=	3

مثال 4 - 9 : لو علمت ان الوزن الصافي للبزاليا داخل علبة من حجم معين لانتاج معمل معين متوزع توزيعا معتدلا بالثوابت التالية :

المتوسط الحسابي (μ) = 250 غم
الانحراف المعياري (σ) = 10 غم
والمطلوب هو :



الشكل (4 – 1) بعض صفات التوزيع المعتدل موضحة بمثال .

(1) استخدام هذا المثال لتوضيح صفات التوزيع المعتدل .

(2) ما هو احتمال كون الوزن الصافـي للبزاليا في علبة مختارة عشوائيا اكثر مـــن 260 غرام ؟

(3) ما هو احتمال كون الوزن الصافـي للبزاليا في علبة مختارة عشوائيا يتـــرواح بين 230 و 260 غم ؟

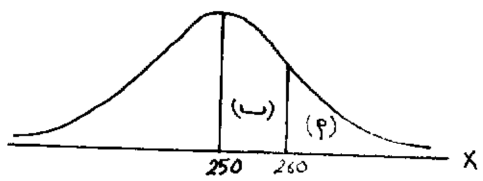
(4) ما هو احتمال كون الوزن الصافـي للبزاليا في علبة مختارة عشوائيا يتراوح بيـن 250 و 255 غم ؟

الحل : اذا رمزنا لمتغير الوزن الصافـي بالحرف (X) فان :

(1) اهم صفات التوزيع المعتدل ممثلة في الشكل (4 – 1) مع مراعاة :

$$\mu_x = 250$$
$$\sigma_x = 10$$

(2) ان المساحة (أ) في الشكل التالـي تمثل الاحتمال المطلوب .



وبما ان الصفة المذكورة في البند (6) للتوزيع المعتدل تعنـي :

المساحة (أ) = 0.50 – المساحة (ب)

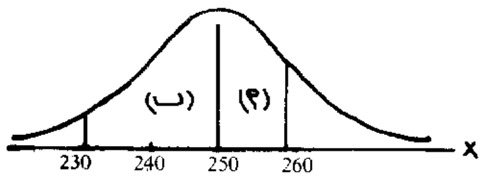
وان الصفة المذكورة في البند (7) تعنـي ان :

$$\text{المساحة (ب)} = \left(\frac{1}{2}\right)(0.6827)$$
$$= 0.3414$$

وعليه فان الاحتمال المطلوب :

$$\text{المساحة (أ)} = 0.50 - 0.3414$$
$$= 0.1586$$

(3) : ان مجموع المساحتين (أ و ب) في الشكل التالـي يمثـل الاحتمـال المطلوب :



وبالاستعانة بمضمون صفات التوزيع المعتدل المذكورة في البنـــديـن (7) و(8)
فـأن :

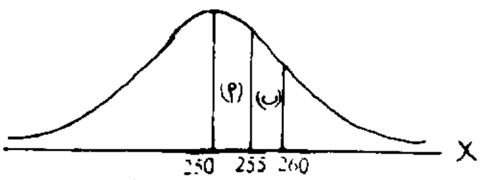
المساحة (أ) = $(0.6827)\left(\frac{1}{2}\right)$

المساحة (ب) = $(0.9545)\left(\frac{1}{2}\right)$

وعليه فان الاحتمال المطلوب هو :
المساحة (أ) + المساحة (ب) =

$0.4773 + 0.3414$
0.8187

(4) ان المساحة (أ) تمثل الاحتمال المطلوب :



ان مجموع المساحتين (أ) و (ب) يساوي 0.3414 وفق مضمون صفة التوزيـع المعتدل المذكورة في البند (7) . ولكن المساحتين غيرمتساويتين بسبب تناقص المساحة باتجاه نهايتي التوزيع . وعليه ، فان الاعتماد على صفات التوزيع المعتدل المذكورة آنفا كما هي لايسمح بتحديد هذا الاحتمال بالاسلوب المباشروالمبسط الذي اتبعناه في تحديد الأحتمالات السابقة . وبعبارة أخرى، فأن المساحات المحصورة بين المتوسط الحسابي للتوزيع المعتدل وقيم اخرى تبعد عنه بمسافات لاتساوي اعداد كاملة من الانحراف المعياري لايمكن تحديدها بالاسلوب المبسط المذكور اعلاه . اما معالجة مثل هـــذه الحالات فانها مبينة في الفقرات التالية :