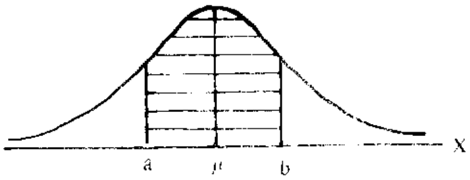
حساب الاحتمالات للتوزيع المعتدل :

ان الاحتمالات للمنحني المعتدل تمثل بالمساحات المحصورة بين المنحني والخط الافقي وضمن قيم محددة للمتغير قيد الدرس . **ولايجاد احتمال كون قيمة X تقع بين** القيمتين b,a



فان المساحة **المحصورة بين b,a تمثل الاحتمال المطلوب** . ولحساب هذه المساحة نستخدم التكامل :

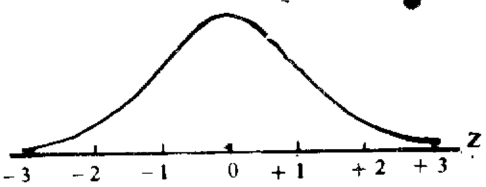
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X)\, d_x$$

على اعتبار ان المتوسط الحسابي والتباين للتوزيع المعتدل معلومان .

ان هذه الطريقة لايجاد الاحتمالات تعتبر غير عملية وصعبة . وقد تم الاستعاضة عنها ، من الناحية التطبيقية ، عن طريق تحويل قيم المتغير المعتدل الى متغير معتدل قياسي . وقد اعدت جداول متكاملة للمساحات المختلفة للمتغير المعتدل القياسي والتي يمكن بموجبها تحديد الاحتمالات المطلوبة للتوزيع الطبيعي العادي بعد تحويله الى التوزيع المعتدل القياسي وفق الاسلوب المبين في الفقرة التالية :

(5-2-4) التوزيع المعتدل القياسي (Z) :

ان التوزيع المعتدل القياسي هو توزيع معتدل يتصف بكون متوسطه الحسابي يساوي (صفر) وانحرافه **المعياري يساوي (١) كما هو مبين في الشكل التالي :**



ويلاحظ **ان المتغير العشوائي في هذا التوزيع** يرمز له **بالحرف Z اي ان :**

$Z \sim N(0,1)$

والذي يعني أن (Z) هو متغير موزع توزيعاً معتدلاً بمتوسط حسابي يساوي (صفر) وأنحراف معياري يساوي (1) :

وبما أن هذا التوزيع هو توزيع معتدل فأن جميع الصفات التي ذكرت في البند (4 - 2 - 4) تنطبق عليه ماعدا كون متوسطه الحسابي وأنحرافه المعياري معلومان وثابتان ($\mu = 0, \sigma = 1$) ويمكن حساب أحتمالات متعددة تمثل مساحات معينة من المنحني وباسلوب مشابه لما ذكرناه في الامثلة المعطاة في البند 4 - 2 - 4 مادمنا نتكلم عن مسافات من مضاعفات الواحد الصحيح عن المتوسط الحسابي (الصفر) .

أما اذا اردنا تحديد أحتمالات اضافية أخرى غير مشروطة فأن بامكاننا الأستعانة بجداول خاصة بهذا التوزيع الأحتمالي للمتغير (Z) وطريقة التكامل المشار اليها في نهاية البند (4 - 2 - 4) .

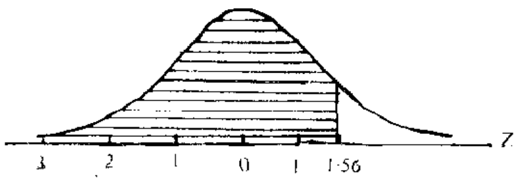
وتجدر الأشارة الى أن التوزيع الأحتمالي للمتغير (Z) هو :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

ومن هذا يتضح أن التوزيع الأحتمالي للمتغير (Z) يعتمد على قيمة (Z) فقط وأنطلاقاً من هذه الخاصية وسهولة أجراء عملية التكامل وحساب الأحتمالات المختلفة، فقد قام باحثون عديدون بأعداد جداول تفصيلية لأحتمالات متعددة للمتغير (Z) بحيث يمكن للمستفيد أن يرجع الى تلك الجداول ويقتبس منها مباشرة أحتمالات (مساحات) تمكنه من الوصول الى الأحتمال المنشود . وقد أخترنا من بين هذه الجداول المتعددة جدولاً يعطي المساحة (الأحتمال) بين اللانهاية السالبة ($-\infty$) وأي قيمة للمتغير (Z) داخل الحدود (3.4 - , 3.4 +) وهذه الأحتمالات مبينة في الجدول الملحق رقم (2) . ويمكن الاستفادة من هذا الجدول بتحديد أي أحتمال مطلوب كما هو مبين في الأمثلة التالية :

مثال 4 - 10 ماهي المساحة الواقعة الى يسار قيمة Z البالغة 1.56 ؟

الحـل : ان المساحة المطلوبة هي المساحة المظللة التالية :



وعند العودة الى الجدول الملحق رقم (2) وعند تقاطع الخط المبتدأ بقيمة 1.5 للمتغير Z والعمود المبتديء بالقيمة 0.06 نحصل على قيمة مقدارها 0.9406 والتي تمثل المساحة المطلوبة . واذا استخدمنا الرموز الاحتمالية فان :

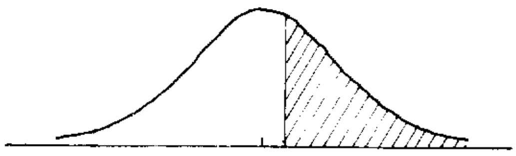
$$P(Z \leq 1.56) = 0.9406$$

مثال 4 - 11 ماهي المساحة الواقعة الى يمين قيمة Z البالغة 0.25 ؟ .

الحـل : ان المساحة المطلوبة تمثل :

$$P(Z \geq 0.25)$$

والممثلة بالمساحة المخططة التالية :



ويمكن التعبير عن المساحة المذكورة بمايلي :

$$P(Z \geq 0.25) = 1.00 - p(Z \leq 0.25)$$

وبما أن جدول الملحق رقم (2) يشير الى أن :

$$P(Z \leq 0.25) = 0.5987$$

فأن

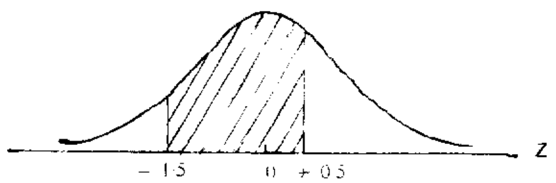
$$P(Z \geq 0.25) = 1.00 - 0.5987$$
$$= 0.4013$$

مثال 4 - 12 : ماهي المساحة المحصورة بين قيمتي Z البالغتين (1.5 -) و (+ 0.5)

الحل : المساحة المطلوبـة هي :

$$P(-1.5 \leq Z \leq +0.5)$$

والمبينة في الشكل التالي :



وبما أن المساحة يمكن أن تكتب على النحو التالي :

$$P(-1.5 \leq Z \leq +0.5) = P(Z \leq +0.5) - p(Z \leq -1.5)$$

ومن الجدول الملحق رقم (2) نتوصل الى مايلي :

$$P(-1.5 \leq Z \leq +0.5) = 0.6915 - 0.0668$$
$$= 0.6247$$

تحويل التوزيع المعتدل الاعتيادي الى توزيع معتدل قياسي :

بما ان جميع الاحتمالات المطلوبة يمكن تحديدها من التوزيع المعتدل القياسي (Z) فان هذه الحقيقة تمثل الفائدة الفعلية من هذا التوزيع النظري الذي لايمثل ظاهرة طبيعية قائمة .

وهذه الفائدة تتمثل بامكانية تحويل اي توزيع معتدل اعتيادي (X) الى توزيع معتدل قياسي (Z) وذلك عن طريق حساب القيم المتناظرة بين التوزيعين ووفق المعادلة (5 - 4)

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \qquad \ldots\ldots (5-4)$$

حيث ان (X) ، (μ_x) ، σ_x تمثل قيمة المتغير (X) ومتوسطه الحسابي **وانحرافه المعياري على التوالي . ويمكن توضيح هذه الفكرة بالمثال التالي :**

مثال 4 13 : لو رجعنا للمثال (4 - 9) واردنا الاجابة عن الفقرة (4) التي ارجانا الاجابة عليها . فان المطلوب فيها هو :

$$P(250 \leq X \leq 255)$$

وللوصول الى الاحتمال المطلوب بالاستعانة بالجدول الملحق رقم (2) فأن علينا تحويل القيمتين 255, 250 الخاصتين بالمتغير (X) الى ماينا ظرهما من المتغير (Z) فاذا استخدمنا المعادلة رقم (4 5) اي :

وبما أن :

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$\mu_x = 250$$
$$\sigma_x = 10$$

فان قيمة (Z) المناظرة لقيمة (X) البالغة 250 هي :

$$Z = \frac{250 - 250}{10} = 0$$

اما قيمة (Z) المناظرة لقيمة (X) البالغة 255 فهي :

$$Z = \frac{255 - 250}{10} = +0.5$$

وعليه فان

$$\begin{aligned} P(250 \leq X \leq 255) &= P(0 \leq Z \leq +0.5) \\ &= P(Z \leq 0.5) - P(Z \leq 0) \\ &= 0.6915 - 0.5000 \\ &= 0.1915 \end{aligned}$$

مثال 4 - 14 : لوفرضنا ان متوسط طول نبات صنف الماكسيباك في حقل معين هو 68.22 سم وان تباينه يساوي 10.8 سم² وانه متوزع توزيعا معتدلا .
فاذا اخترنا 1000 نبات بصورة عشوائية من هذا الصنف في ذلك الحقل ، فما هو عدد النباتات المتوقع زيادة اطوالها على 72 سم ؟

الحـــــل : ان عدد النباتات المتوقع زيادة اطوالها على 72 سم يساوي

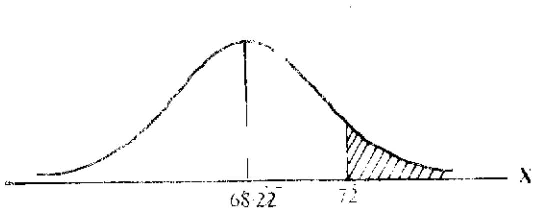
$$p(X \geq 72)\{1000\}$$

اما الاحتمال المطلوب فانه يمثل المساحة المظللة من التوزيع المعتدل الذي يتصف بكون :

اي :

$\mu_x = 68.22$

$\sigma = \sqrt{10.8} = 3.29$



وبما ان :

$$p(X \geq 72) = p\left(Z \geq \frac{(72 - 68.22)}{3.29}\right)$$

$$= p(Z \geq +1.15)$$

$$= 1.00 - P(Z < +1.15)$$

$$= 1.0 - 0.8749$$

$$= 0.1251$$

وعليه فان عدد النباتات المتوقع زيادة اطوالها على 72 سم في العينة يساوي :

$$(0.1251)(1000) = 125$$

اما اذا اردنا تحديد عدد النباتات المتوقع ان تقل اطوالها عن 60 سم فانه يساوي :

$$\{P(X < 60)\}\{1000\} = \left\{p\left(Z < \frac{60 - 68.22}{3.29}\right)\right\}\{1000\}$$

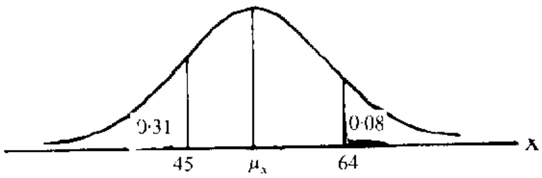
$$= \{P(Z < -2.50)\}\{1000\}$$

$$= (0.0062)(1000)$$

$$= 6$$

مثال 4 – 15 : كان انتاج التفاح في احد البساتين يتوزع توزيعا معتدلا ووجد بان 31% من الاشجار تعطي اقل من 45 كغم للشجرة الواحدة وان 8% منها تعطي اكثر من 64 كغم للشجرة الواحدة فما هو المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل : يمكن ان توصف هذه الحالة بالشكل التقريبي التالي



ولتحديد μ_x و σ_x . فان علينا ان نحدد قيمة (Z) التي تناظر كل من قيمتي المتغير (X) التابعتين 45 و 64 وذلك بالاستعانة بالجدول الملحق رقم (2) والمعادلة (4 5) .

واذا اجرينا ذلك . فاننا سنحصل على المعادلتين التاليتين : −

$$- 0.5 = \frac{45 - \mu_x}{\sigma_x} \qquad (1)$$

$$+ 1.4 = \frac{64 = \mu_x}{\sigma_x} \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين اعلاه . نحصل على مايلي :

$\mu_x = 50$

$\sigma_x = 10$

اي ان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لانتاج شجرة التفاح هو 50 كغم و10 كغم على التوالي .

(6-2-4) توزيع t المعتدل t − Distribution

وهو من التوزيعات الاحتمالية **المستمرة** المهمة والمستخدمة مع العينات صغيرة الحجم . ففي عام 1905 اشتق كوست W.S. Gosset توزيعا نظريا اصبح يدعى فيما بعد بتوزيع t (Student's t-distribution)

ومن الناحية النظرية فان توزيع t هو عبارة عن النسبة بين متغير له توزيع طبيعي قياسي الى الجذر التربيعي لمتغير اخر مستقل له توزيع مربع كاي .

اما من الناحية التطبيقية والتي تهمنا بالدرجة الاولى في مجال واهداف هذا الكتاب . فان توزيع النسبة :

$$\frac{\overline{X} - \mu_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}}}$$

قد حدد بشكل تام في حالة المعاينة من مجتمع موزع توزيعا معتدلا . واطلق على هذا التوزيع بتوزيع t (t-distribution) اي ان :

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}}} \qquad (6-4)$$

اما اهم خواص هذا التوزيع فهي :

أ- ان توزيع t هو توزيع متماثل كما هي الحال بالنسبة للتوزيع المعتدل القياسي Z

ب- المتوسط الحسابي لتوزيع t يساوي (صفر) . ومرة اخرى نلاحظ التشابه بين هذا التوزيع والتوزيع المعتدل القياسي .

جـ- يمكن التعبير عن تباين توزيع t بالمعادلة (4 – 7):

$$\frac{(n-1)}{(n-1)-2} \qquad (7-4)$$

حيث ان :

n يمثل حجم العينة

$n-1$ يمثل درجات الحرية

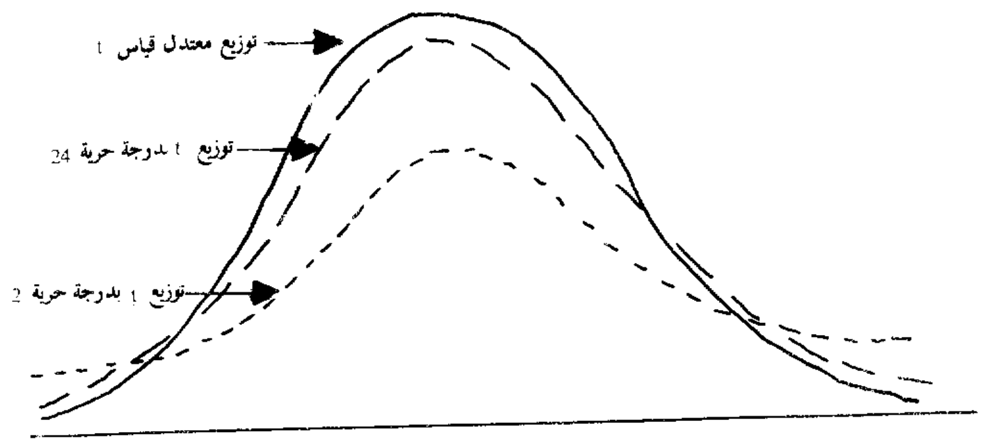
وتجدر الاشارة الى ضرورة كون حجم العينة (n) مساو الى 4 او اكثر.وعليه فان تباين توزيع t يساوي 3 في حالة كون $n = 4$. ويساوي 2 عندما تكون $n = 5$ وهكذا . ومن هذا المنطلق ، فان بامكاننا جلب الانتباه الى النقاط التالية :

أ- ان تباين توزيع t أكبر من واحد (1) . وهذا يعني ان توزيع t اكثر اتساعا او تفلطحا من التوزيع المعتدل القياسي .

ب- ان تباين توزيع t يختلف باختلاف حجم العينة . وعليه فان هناك توزيع t خاص بكل حجم من احجام العينة . ولايخفى ان جميع توزيعات t هذه متماثلة ومتمركزة حول (الصفر) ولكنها تختلف في تباينها . وفي الواقع فان لتوزيع (t) ثابت واحد هو ($n-1$) اي درجات الحرية (degress of freedom)

جـ- عندما يصبح حجم العينة كبيرا فان تباين توزيع t يقترب من الواحد الصحيح . وهذه الملاحظة مع سابقاتها تشير الى ان توزيع t يقترب من التوزيع المعتدل القياسي عندما يزداد حجم العينة .

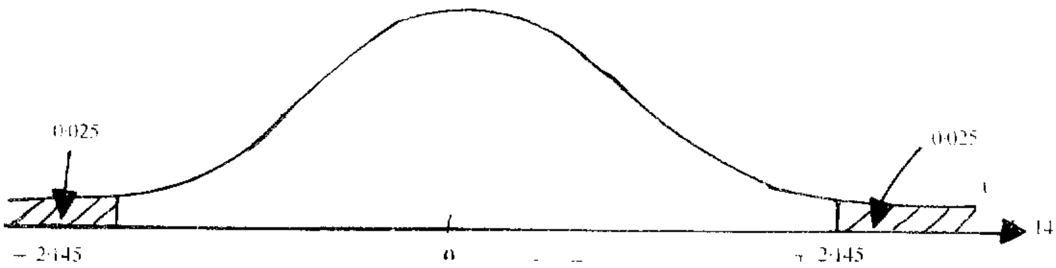
ويبين الشكل 4 – 2 علاقة توزيع t لدرجتي حرية (25,2) مع التوزيع المعتدل القياسي .



شكل (4 – 2) توزيع لدرجتي حرية 2 و 24.

وقد اعدت جداول مختلفة اعطت المساحات تحت منحني توزيع t بدرجات حرية مختلفة . وقد اخترنا من بينها الجدول الذي شخصناه بالجدول الملحق رقم (3) . وهو يمثل جزءا من جدول احصائي شمل على احتمالات (مساحات) تراوحت بين 0·5 و 0·001 . وقد شعرنا ان بالامكان الاكتفاء بالبيانات المعطاة في الجدول الملحق رقم (3) خاصة بالنسبة لمتطلبات التقديرات والاختبارات الاحصائية في مجال العلوم الزراعية والبيطرية .

ويبين الجدول الملحق رقم (3) قيم t الموجبة التي تعزل الى يمينها مساحة مساوية الى المساحة المشار اليها في الاحتمالات عند اهمال الاشارة اونصفها عند اعتبار الاشارة (اي القيمتين المتطابقتين السالبة والموجبة) . وهذه الحقيقة هي نتيجة حتمية لصفة التماثل التي يتصف بها توزيع t مثله بذلك مثل التوزيع المعتدل القياسي (z) . ولتوضيح هذه الفكرة ، فان الشكل 4 – 3 يبين توزيع t لدرجة حرية (14) .

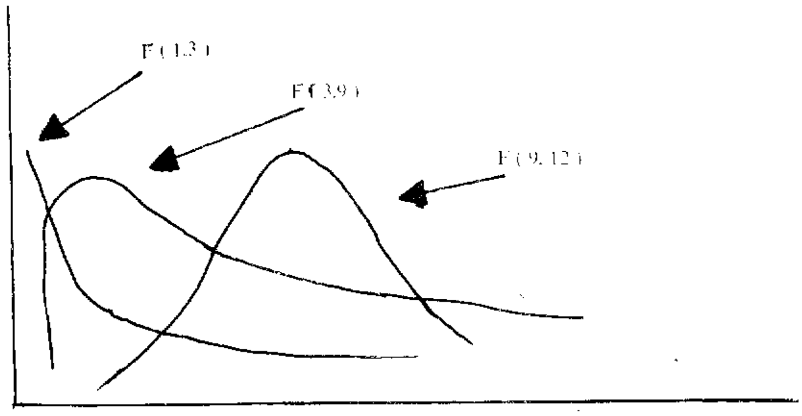


شكل (4 3) توزيع t لدجة حرية 14

4 2 7 توزيع F

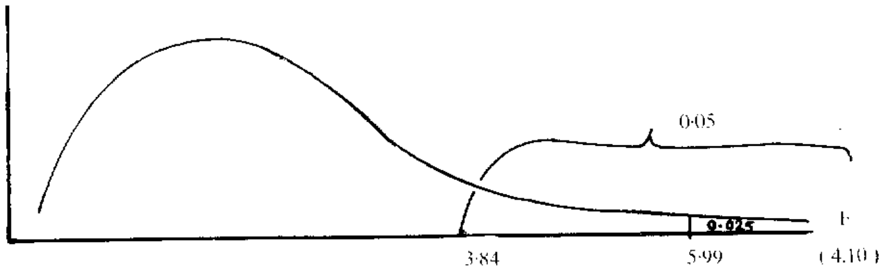
وهو ايضا من اهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة وسمي بهذا الاسم نسبة الى فيشر R·A Fisher الذي كان اول من وصفه .

والمتغير العشوائي F عبارة عن النسبة بين متغيرين يتوزعان توزيع مربع كـــاي . فاذا كان u هو متغير عشوائي له توزيع χ^2 بدرجة حرية m واذا كان v هو متغير عشوائي له توزيع χ^2 بدرجة حرية n واذا كان μ و v مستقلان فان المتغير العشوائي $\frac{\mu / m}{V / n}$ له توزيع F بدرجة حرية $V_1 = m$ للبسط $V_2 = n$ للمقام وعند معرفة كل من V_1 و V_2 فان توزيع F يتحدد كما موضح في الشكل 4-4 .



شكل (4 – 4): توزيع F بدرجات حرية مختلفة

وقد حسبت قيم F لتوليفات مختلفة من درجات حرية المقام ودرجات حرية البسط من قبل عدة باحثين . وقد اقتبسنا منها القيم المعطاة في الجدول الملحق رقم (4) شاملين احتمال قيمة اكبر لـ (F) بحدود 0·05 و0·01 فقط . اما استخدام هذا الجدول فانــه موضــح بالشكل رقم 4 — 5 لتوزيع F بدرجات حرية للبسط مساوية الى (4) ودرجات حرية للمقام مساوية الى 10 .



شكل (4 — 5) توزيع F موضحا مستوى المعنوية

وتجدر الاشارة الى ان قيمة t بدرجة حرية (n − 1) تساوي الجذر التربيعي لقيمة F المناظرة لدرجات الحرية واحدة للبسط و n−1 للمقام لنفس المساحة المقطوعة من النهاية اليمنى . اي ان :

$$t_{n-1} = \sqrt{F_{1,n-1}}$$

وكمثل على ذلك ، فان : —

$$t_{14} = \sqrt{F_{1,14}}$$

$$= \sqrt{4.60} = 2.145$$

بالنسبة الى مساحة 0·05 من النهاية اليمنى .