المحاضرة الخامسة

اقتصاديات انتاج زراعي

استاذة المادة

أ . يسرى طارق بكر

$= P.Q-(WL+rK)+b$

$= P.F(L,K)-P_L.L-P_K.K-b$

يتضح من المعادلة أعلاه ان معدل الربح π هو دالة في K,L ويمكن تحديد نهايتها العظمى بالنسبة لكل من K, L رياضيا بأجراء الشرط الضروري أي المشتقة الجزئية الأولى وكالاتي:

$$\pi = P.F(L,K) - P_L.L - P_K.K - b$$

وباشتقاق دالة الربح π بالنسبة لعنصر الإنتاج L نحصل على :

$$\frac{\partial\pi}{\partial L} = P.\frac{\partial\pi}{\partial L} - P_L = 0$$

$$= P.MP_L - P_L = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots > P.MP_L = P_L \ldots\ldots\ldots > P = \frac{MP_L}{P_L}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial K} = P.\frac{\partial\pi}{\partial K} - P_K = 0$$

$$= P.MP_K - P_K = 0 \ \ldots\ldots > P.MP_K = P_K \ldots\ldots\ldots > P = \frac{MP_K}{P_K}$$

بما ان P يساوي P اذن :

$$\frac{MPL}{PL} = \frac{MPK}{PK}$$ وهو شرط التوازن

ولكن لتعظيم الربح لابد من تحقيق $MP_L = P_L$ وكذلك $MP_K = P_K$ أي:

بما ان $MP_L - P_L = 0$ و $MP_K - P_K = 0$

اذن $\underline{MP_L = P_L}$ و $\underline{MP_K = P_K}$ وهما شرط تعظيم الربح

وان MPL تمثل نسبة الإنتاجية الحدية لـــ L أي نسبة أرباح المنتج وبإمكانه زيادتها إذا استخدم كميات أكثر من عنصر العمل L.

وان الشرط اللازم للنهاية العظمى لمعدل الربح هو ان يستخدم كل عنصر من عناصر الإنتاج عند المستوى الذي تتساوى عنده قيمة الإنتاجية الحدية للعنصر مع سعره أي:

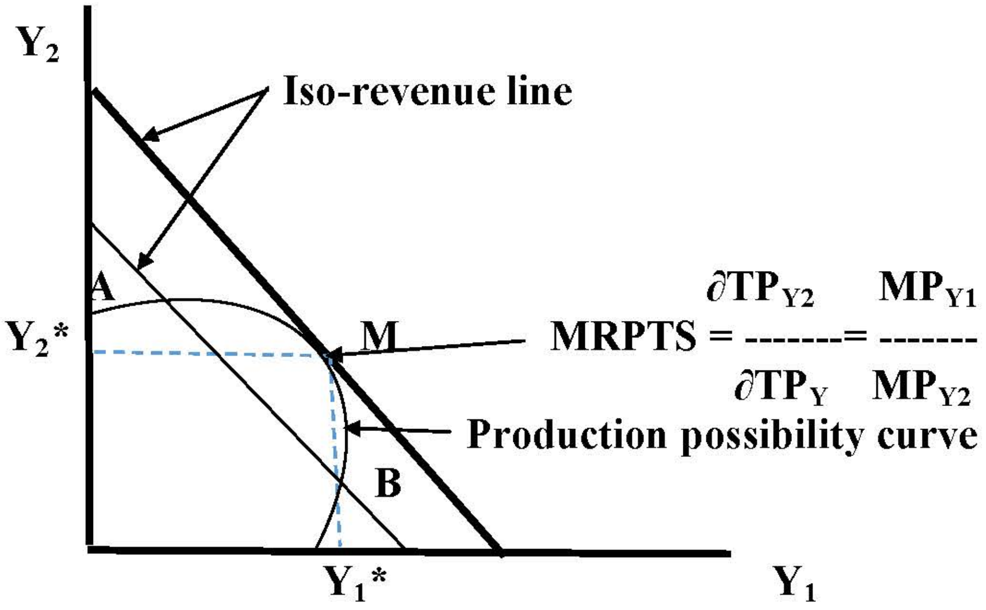
$$V.MP_L = P_L$$

$$V.MP_K = P_K$$

أي يمكن للمنتج زيادة أرباحه مادام استخدام وحدة إضافية من العنصر يضيف الى ايراده مقدار اكبر من المقدار المضاف الى الكلفة، وتقع توليفة عناصر الإنتاج التي تحقق اكبر ربح على خط التوسع للمنتج او المنشاة او المؤسسة.

2-الشرط الكافي:

وللتحقق من ان الربح وصل فعلا الى أقصاه نجري الشرط الكافي وهو استخدام المشتقة الثانية <0 أي $0 > FKK$, $0 > FLL$.



شكل () منحنى التوليفة المثلى للعائد (الربح):

$$\text{معدل الاحلال التكنولوجي} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية للمورد الإنتاجي في انتاج الناتج الاول}}{\text{الإنتاجية الحدية للمورد الإنتاجي في انتاج الناتج الثاني}}$$

<u>تحديد التوليفة المثلى التي تحقق اقصى عائد</u>: **Optimum output combination**

تتحدد التوليفة التي تحقق اقصى عائد اجمالي او ربح من منتجين عند تساوي معدل التبادل بالسوق مع معدل الاحلال الحدي او عند تكاس خط العائد المتماثل مع منحنى الناتج الممكن عند نقطة M في الشكل أعلاه حيث يتساوى ميل خط العائد مع ميل منحنى الإنتاج الممكن وتتحدد نقطة التوازن في التوليفة التي تحقق اعلى

ربح صافي نظرا لاستخدام كمية ثابتة من المورد، وبذلك تكون الكلفة واحدة، ولا تحقق أي نقطة أخرى عائد أكبر لان انخفاض العائد نتيجة خفض الإنتاج من أحد المنتجين يكون اعلى من زيادة العائد من المنتج الاخر. ويمكن تحديد التوليفة المثلى بطريقة بيانية كما في أعلاه. والنقطة M هي التوليفة المثلى للمنتجات التي تحقق اقصى عائد ممكن عند انتاج Y_1* من Y_1 و Y_2* من Y_2.

وهذا المستوى هو اعلى عائد يمكن تحقيقه لكمية معينة من المورد حيث انه يمس منحنى الإنتاج الممكن في نقطة واحدة فان تقاطع خط العائد مع المنحنى في نقطتي B,A فانه يمكن مقارنة ميل المماسين لمنحنى الإنتاج عند النقطتين B,A مع ميل خط العائد.

ويلاحظ ان ميل خط العائد يكون أكبر من معدل الاستبدال الحدي عند النقطة A مما يعني الاستمرار في إضافة Y_1 هو في مصلحة المنتج Y_1 لزيادة العائد وبالعكس عند النقطة B يكون ميل المماس لمنحنى الإنتاج الممكن أكبر وهذا يعني ان التوسع في انتاج Y_2 هو في مصلحة المنتج Y_2 لأنه يزيد من العائد، ولكن ميل منحنى الإنتاج وخط العائد يكونان متساويان عند نقطة التوازن M وبذلك مادامت نسبتا الاحلال الحدي والسوقي غير متساويين فان المنتج يستطيع الحصول على عائد أكبر بالاتجاه نحو المساواة بين النسبتين.

هناك أيضاً ثلاثة طرق لتحديد توليفة الموارد التي تعظم الربح وهي:

1-الطريقة الجدولية.

2-الطريقة الهندسية.

3-الطريقة الجبرية.

وسوف يتم التركيز على الطريقة الجبرية مع توضيح رسم بياني يحدد مستوى الاستخدام الأمثل للموارد المتغيرة التي تحقق أهداف المنتج (تعظم الإنتاج، تدني التكاليف، تعظم الربح) كما يلي:

بافتراض أن دالة الإنتاج كتالي: $Y = F(X_1 ,\ X_2)$

وأن معادلة التكاليف تأخذ الصورة التالية:

$$TC = r_1X_1 + r_2X_2 + b$$

حيث: Y= كمية الناتج ، X_1,X_2= موارد الإنتاج، r_1,r_2= أسعار موارد الإنتاج، b= التكاليف الثابتة، TC= التكاليف الكلية. مما سبق يتضح أن معادلة الربح يمكن كتابتها كما يلي:

$$\pi = P_y\, Y - r_1X_1 - r_2X_2 - b$$

وبالتعويض في دالة الإنتاج يمكن إعادة كتابة دالة الربح π كما يلي:

$$\pi = p_y\, F(X_1, X_2) - r_1X_1 - r_2X_2 - b$$

ولتحقيق هدف المنتج لمعظمة الأرباح فإن هناك شرطان هما:

الشرط الأساسي الضروري: Necessary Condition

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = P_y \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - r_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = P_y \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - r_2 = 0$$

ومن الشرط الأساسي نحصل على القانون الأساسي لمعظمة الأرباح وهو:

$$P_Y \, MPP_{X1} = r_1$$

$$P_Y \, MPP_{X2} = r_2$$

وهذا يعني حتى يتحقق تعظيم الربح فلا بد من تحقيق المعادلتين التاليتين:

$$V.MP_{X1} = r1$$

$$V.MP_{X2} = r_2$$

أي ضرورة تساوي قيمة الناتج الحدي للمورد الإنتاجي مع سعر الوحدة من هذا المورد الإنتاجي.

ومن هذا الحل يمكن الحصول على منحنى الطلب للمورد الأول وكذلك على منحنى الطلب للمورد الثاني والذي يتخذ كل منهما الصورة التالية:

$$X_1^* = h_1 (p_y, r_1, r_2)$$

$$X_2^* = h_2 (p_y, r_1, r_2)$$

وفي حالة معرفة قيم كل من P_y, r_1, r_2 فإنه يمكن تحديد الكمية من X_2^* , X_1^* التي تؤدي لتعظيم الربح.

الشرط الكافي: Sufficient Condition

للتأكد من أن مستوى الاستخدام من X_2,X_1 المتحصل عليه من الشرط الأساسي يؤدي فعلاً إلى تعظيم الربح فإنه لابد من التأكد من توفر الشرط الكافي والذي يتطلب سالبيه التفاضل الثاني لدالة الربح بالنسبة لوحدات المورد المتغير كما يلي:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} \prec 0$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} \prec 0$$

مثال ( ) إذا توفرت لك دالة الإنتاج التالية:

$Y = 28L - 2L^2 + 26K - 3K^2$ **when** $PY = 0.55,\ P_L=6,\ P_K=5$

من خلال العلاقات التالية $VMP_Y = P_L$ **,** $VMP_Y = P_K$

جد : التوليفة الموردية من الموردين K,L اللذان يعظمان الرح مع إيجاد كمية الناتج التي تعظم الربح ومقدار الربح الأعظم المتحقق من الدالة ، راسما النتائج التي ستتوصل اليها مع التفسير؟

الحل: عندما $VMP_Y = P_L$ **فان:**

$0.55((28 - 4L) = 6$
$15.4 - 2.2L = 6 \quad 9.4 - 2.2L = 0$
$\therefore L = 9.4/2.2 = 4.27$ كمية المورد التي تعظم الربح

وعندما $VMP_Y = P_K$ **فان:**

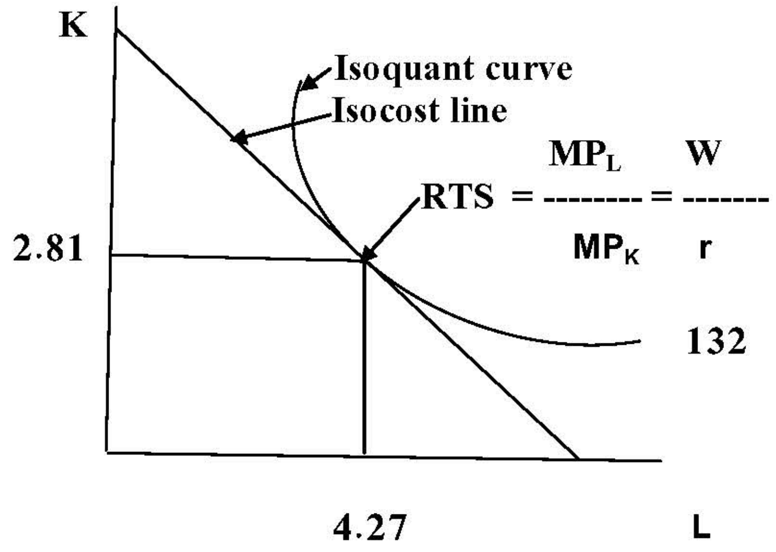
$0.55(26 - 6K) = 5$
$14.3 - 3.3K = 5$
$\therefore 9.3 - 3.3K = 0$
$\therefore K = 9.3/3.3 = 2.81$ كمية المورد التي تعظم الربح

ولا يجاد الإنتاج المعظم للربح نعوض كميات الــ K, L التي حصلنا عليها في دالة الإنتاج وكالاتي:

$Y = 28(4.27) - 2(4.27)^2 + 26(2.81) - 3(2.81)^2$
$= 119.56 - 36.46 + 73.06 - 23.52$
$= 192.62 - 59.98 = 132.64$ كمية الناتج المعظم للربح

اما لا يجاد كمية الربح الأعظم المتحقق فيمكن ايجاده من معادلة الربح : $\pi = TR - TC$

$\pi = Y P_Y - WL - rK$
$= 132.64\ (0.55) - 4.27(6) - 2.81(5)$
$= 72.95 - 25.62 - 14.05 = 33.28$ كمية الربح الأعظم



مثال (3) إذا توفرت لك دالة الإنتاج التالية:

$Y = 18L - L^2 + 14K - K2$ when $PY = 0.65$, $P_L=9$, $P_K=57$

وبموجب العلاقات التالية

$VMP_Y = P_L$
$VMP_Y = P_K$

جد : التوليفة الموردية من الموردين K,L اللذان يعظمان الرح مع إيجاد كمية الناتج التي تعظم الربح ومقدار الربح الأعظم المتحقق من الدالة، راسما النتائج التي ستتوصل اليها مع التفسير؟

<u>مثال محلول</u> (2) إذا توفرت لديك دالة الإنتاج لكوب دوكلاص المتجانسة من الدرجة a +b التالية:

$Y = A\,L^a\,K^b$
وقيد التكاليف هو $(C = P_L * L + P_K * K)$
ولحساب الكمية المثلى للإنتاج وكميات (K,L) نتبع الاتي:

$Z = AL^a k^b + \lambda (C - P_L * L - P_K * K)$
ولتحقيق اقصى انتاج ممكن لعناصر الإنتاج نأخذ المشتقة الجزئية الأولى لكل من (λ, K,L) ومساواتها بالصفر كما يلي :

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = aAL^{a-1}K^b - \lambda P_L = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = bAL^{a} K^{b-1} - \lambda P_k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = C - P_L * L - P_K * K = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

وبحل المعادلتين 2,1 آنيا نحصل على:

$$aAL^{a-1} K^{b} = \Lambda P_L$$

$$\lambda = \frac{aA L^{a-1} K^{b}}{P_L}$$

$$\lambda = \frac{ba L^{a} K^{b-1}}{P_k}$$

بما ان $\lambda = \lambda$ اذن

$$\frac{aA L^{a-1} K^{b}}{P_L} = \frac{ba L^{a} K^{b-1}}{P_K}$$

وبظرب الوسطين بالطرفين نحصل على:

$$(aA L^{a-1} K^{b})PK = PL\ (bA L^{a} K^{b-1})$$

$$P_L = \frac{(aA L^{a-1} K^{b})PK}{bA L^{a} K^{b-1}}$$

وبقسمة الطرفين على P_K نحصل على :

$$\frac{PL}{P_K} = \frac{(aA L^{a-1} K^{b})PK}{(bA L^{a} K^{b-1})PK}$$

$$\frac{PL}{P_K} = \frac{(aA L^{a} L^{-1} K^{b})PK}{(bA L^{a} K^{b} K^{-1})PK}$$

منذ

$$\frac{P_L}{P_K} = \frac{aA\, L^{-1}}{(bA\, K^{-1}}$$

$$\frac{P_L}{P_K} = \frac{a\, k}{b^{\cdot}\, L}$$

$$P_L\, b\, L = P_K\, ak$$

وبقسمة طرفي المعادلة على k نحصل على:

$$\frac{P_L\, b\, L}{K} = \frac{P_K\, a\, k}{k}$$

$$P_L\, b\, L = k\, P_K\, a$$

ومنه يمكننا ان نستخرج L بدلالة k

$$L = \frac{a}{b} * \frac{Pk}{PL}\, k$$

وللحصول على قيمة Kبدلالة L

$$K = \frac{b}{a} * \frac{PL}{Pk}\, L$$

وللحصول على قيمة الإنتاج Y كالآتي:

$$Y = A(a/b * P_k / P_L \ *k)^{a} (b/a * P_L /P_k *L)^{b}$$

دالة إنتاج (كوب – دوكلص) (Cobb – Douglas Production Function)

سميت هذه الدالة بهذا الاسم نسبة إلى مكتشفيها الاقتصادي Paul H . Douglas وعالم الرياضيات Charles W.Cobb، وهي دالة ضريبة مستخلصة من الواقع التجريبي ، أول تطبيق عملي لها كان في الصناعة الأمريكية ، وفي بدايتها كانت دالة بسيطة يستعمل فيها عنصر العمل ورأس المال ، كذلك تفترض هذه الدالة بأنها دالة متجانسة من الدرجة الأولى أي أن عوائد الحجم ثابتة وبذلك يكون مجموع مرونات الإنتاج $(b_1 + b_2)$ تساوي واحد. ثم طورت

هذه الدالة تشمل متغيرات اقتصادية أخرى، كما إنها تحررت من مجموع مرونات الإنتاج المساوي للواحد الصحيح.

ويمكن التعبير عن دالة كوب – دوكلص بالطريقة الرياضية الآتية:

$$Y = A\ L^{b1}\ K^{b2}$$

حيث أن:

Y = تمثل الناتج الكلي (كغم).

A = تمثل (الحد الثابت) معامل الدالة التناسب (Factor proportionality)

L = تمثل مورد العمل (رجل / يوم).

K = تمثل مورد رأس المال (دينار) .

b_1 = مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل وهي موجبة وتقل قيمتها عن الواحد.

b_2 = مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس لمال وهي موجبة وتقل قيمتها عن الواحد.

<u>بعض الصفات الرياضية لدالة كوب – دوكلص:</u>

1- دالة متجانسة من الدرجة ($b_1 + b_2$).

2- عندما تكون $b_1 + b_2 = 1$ (في حالة خاصة) فيكون هناك تجانس خطي أي دالة متجانسة من الدرجة الأولى وتتميز بثبات عوائد السعة.

3- أن ميل المنحنى الناتج المتساوي سالب ومحدب تجاه نقطة الأصل بالنسبة للقيم الموجبة للعنصرين الإنتاجين.

4- لا يمكن استخدام أحد العناصر الإنتاجية (العمل او رأس المال) بمفرده في العملية الإنتاجية، وإذا تم ذلك يكون الناتج صفر.

$$Y = f(L, 0) = 0 \qquad ; \qquad Y = f(0, K) = 0$$

5- إذا كان نصيب العناصر الإنتاجية من الأجور بمقدار لإنتاجية الحدية، فأن مجموع ما يدفع لهذه العناصر يساوي قيمة الناتج. أي أن:

$$K\frac{dY}{dK} + L\frac{dY}{dL} = Y$$

وهذا مطابق لمبدأ نظرية أيلر Euler ، والتي تنص في حال كون عوائد الحجم ثابتة فأن حجم الناتج يستنفذ بالكامل إذا دفعت أجور لعناصر الإنتاج بمقدار إنتاجيتها الحدية.

6- منحنى الإنتاجية الحدية والمتوسطة في دالة كوب – دوكلص لا يتقطعان، وتبقى النسبة بينهما ثابتة، والاستثناء الوحيد عندما تكون المرونة الإنتاجية لأحد عناصر الإنتاج تساوي واحد صحيح، وهذه الخاصية تنطبق على الدوال اللوغاريتمية والاسية لأنها لا تبلغ النهاية العظمى.

ويمكن استخراج مرونة العناصر الإنتاجية في دالة كوب – دوكلص من خلال قانون المرونة:

$Y = a\,L^{b1}$

$\frac{dY}{dL} = b\,a\,L^{b-1}$

$E_L = \frac{dY}{dL} \cdot \frac{L}{Y}$

$\frac{dY}{dL} = b\,a\,L^{b-1}$

$E_L = b\,a\,L^{b-1} . \frac{L}{Y}$

$Y = a\,L^{b}$

$E_L = b\,a\,L^{b-1} . \frac{L}{a\,L^{b}}$

$E_L = b\,\frac{a\,L^{b}}{L} . \frac{L}{a\,L^{b}}$

$E_L = b$

7- سهولة تحويل الدالة إلى الصيغة اللوغاريتمية، ومن خلالها نحصل على دالة خطية.

8- ان قيمة كل من (b_1+b_2) تتراوح بين الصفر والواحد الصحيح والفرضيات الآتية تبين ذلك.

الشرط الضروري: necessary condition

$dy/dL > 0 , \; dy/dK > 0$

- الشرط الكافي sufficient condition

$d^2y / dL^2 < 0 , \; d^2y / dk^2 < 0$

وهذه الفرضيات تتحقق عندما يكون

$0 < B < 1 , \; 0 < a < 1$

عوائد السعة (غلة الحجم) Return to Scale

يشير قانون النسب المتغيرة إلى مقدار التغير الحاصل في حجم الناتج الكلي نتيجة لتغير أحد العناصر الإنتاجية عند بقاء العناصر الأخرى ثابتة دون تغير.

أما غلة الحجم فأنها عبارة عن التغير في الإنتاج الكلي نتيجة لتغير جميع عناصر الإنتاج بما في ذلك المستوى التكنولوجي.

ومن هذا التعريف يتضح أن غلة الحجم تنسجم مع الفترة الطويلة Long – run ، التي بموجبها تستطيع المنشأة تغير مزج كل عناصرها الإنتاجية لتوسيع طاقتها الانتاجية. وتكون الزيادة في كمية الإنتاج بسبب الزيادة في حجم المنشأة وليست بسبب تغير كمية أحد العناصر الإنتاجية.

وتقيس دالة انتاج كوب – دوكلص عوائد السعة من خلال $(b_1 + b_2)$ ويمكن أن نميز ثلاث حالات من غلة الحجم وكالآتي:

1-إذا كانت $(b_1 + b_2) > 1$ ، فالدالة تكون ذات عوائد سعة متزايدة
Increasing Return to Scale
2-إذا كانت $(b_1 + b_2) < 1$ ، فالدالة تكون ذات عوائد سعة متناقصة
Decreasing Return to Scale
3-إذا كانت $(b_1 + b_2) = 1$ ، فالدالة تكون ذات عوائد سعة ثابتة
Constant Return to Scale

منحنيات الناتج المتساوي (Isoquant)

يعرف منحنى الناتج المتساوي، بأنه المحل الهندسي لمجموعة عوامل الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية والتي تعطي كل منها نفس المستوى من الإنتاج.

أو هو عبارة **عن مساهمة عوامل الإنتاج في العملية الإنتاجية التي تستطيع أن تنتج نفس المستوى من الناتج، وبتوليفات مختلفة عندما يعتمد الإنتاج على مدخلين.**

ويمثل التوليفات المختلفة من موردي العمل ورأس المال، والتي تمثل مستوى الإنتاج الكلي نفسه، ويبين منحنى الناتج المتساوي المرتفع بأنه يعطي كمية أكبر من الناتج، في حين يمثل المنحنى المنخفض بأنه يعطي كمية أقل من الناتج. وتتصف هذه المنحنيات بأنها لا تتقاطع، وميلها سالب ، كما إنها محدبة تجاه نقطة الأصل. وتنحدر من أعلى اليسار وإلى أسفل اليمين. ويعود السبب في ذلك إلى خاصية الإحلال الحدي المتناقص بين المدخلات لإنتاج مستوى الناتج نفسه.

أما رياضياً فيمكن الحصول على منحنيات الناتج المتساوي من خلال تثبيت الإنتاج عند مستوى معين (Y) كما يأتي.

$$Y = bo \ K^{b1} \ L^{b2}$$

$$L^{b2} = (Y/bo \ K^{b1})$$ بالنسبة لمورد العمل

$$\therefore L = (Y/b0 \ K^{b1})^{1/b2}$$

مذ

$$= Y^{\frac{1}{b2}}\ bo^{-\frac{1}{b2}}\ K^{\frac{-b1}{b2}}$$

بالنسبة لمورد رأس المال $K^{b1}(Y/bo\ L^{b2})$

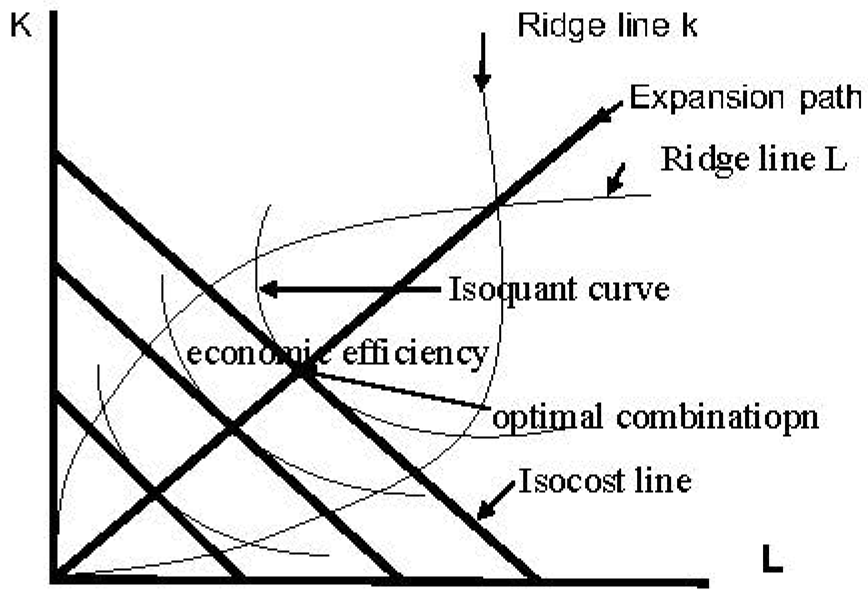
$$\therefore\ K = (Y/bo\ L^{b2})^{\frac{1}{b1}}$$

$$= Y^{\frac{1}{b1}}\ bo^{-\frac{1}{b1}}\ L^{\frac{-b2}{b1}}$$

مسار التوسع (Expansion path)

وهو الخط الذي يصل نقاط التماس بين كل من منحنيات الناتج المتساوي وخطوط التكلفة المتساوية. وفي المدى القصير يكون رأس المال ثابتاً ويجبر المنتج على التوسع على طول الخط المستقيم الموازي للمحور الأفقي الذي يقيس عنصر العمل المتغير، ومع أسعار عناصر الإنتاج الثابتة يحاول المنتج تعظيم أرباحه في المدى القصير في ظل قيد رأس المال الثابت.

وبالإضافة الى ذلك **فهو الخط الذي يربط بين النقاط ذات الميل المتساوي على منحنيات الناتج المتساوي بالخطوط المحددة (Ridge lines) وهي المنحنيات التي تمر بالنقاط التي يكون عندها معدل الاحلال الحدي (MRTS) صفر او ما لانهاية** وتمثل المنطقة المحصورة بين الخطين الطرفين المحددين بالمنطقة الانتاجية الرشيدة. وكما مبين بالشكل البياني الآتي:



شكل (3): منحنيات الناتج المتساوي والخطوط المحددة