المحاضرة الثانية

المصفوفات الجبرية

تعرف المصفوفات بانها مجموعة من الاعداد المرتبة في صفوف(Rows)
واعمدة (Columns) تستخدم لحل المعادلات الخطية والاحصاء والجبر الخطي وغيره وكما مبين في ادناه.

a11 a12 a13 a1n

a21 a22 a23 a2n

am1 am2 am3 amn

اذ ان الm يمثل الصفوف وn يمثل الاعمدة ويعبر عن رتبة المصفوفة(Matrix order) ب m ×n اي بضرب عدد الصفوف في عدد الاعمدة.

مثال: اكتب مصفوفة برتية 2× 4 ؟

[2 5]

4 -1

3 1

5 2

المصفوفة التربيعية SQUARE MATRIX

تلك المصفوفة التي تتكون من عناصر متساوية من الصفوف والاعمدة

7 1

-3 2

عناصرها 2× 2

المصفوفة الصفرية والتي تكةن جميع عناصرها صفر

0	0	0
0	0	0

المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

والتي تكون جميع عناصرها غير القطرية تساوس صفر

0	0	3
0	2	0
1-	0	0

مبدول المصفوفة Transpos of Matrix

تلك المصفوقة التي تبدل فيها الاعمدة بدل الصفوف فاذا كانت المصفوفة A (3 * 2) هي كما يلي:

2	4	5-
1	1-	3

فان مبدول هذه المصفوفة يرمز له ب A^T ويكون المبدول كما يلي:

الصفوف تصبح اعمدة والاعمدة تصبح صفوف وكما يلي:

3	5-
1-	4

2 1

وكذلك الحال اذا كانت المصضفوفة متساوية الابعاد

المصفوفة المتساوية Equal Matrix

تلك المصفوفة التي تتطابق عناصرها متساوية وكما في المثال التالي للمصفوفتين التاليتين:

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 4 \end{matrix}$$

فاذا كانت هذه مصفوفة A فانها تساوي المصفوفة B وتكون قيمها كما يلي:

$$\begin{matrix} \sqrt{1/4} & \sqrt{9} \\ 0 & \sqrt{2} \end{matrix}$$

جمع وطرح المصفوفات

تتم عمليات الجمع والطرح للمصفوفات المتساوية الابعاد فقط

مثال:

$$X = \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{matrix} \quad \text{و} \quad Y = \begin{matrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

فان X+Y تساوي

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 7 & 4 & 1 \end{matrix}$$

ضرب المصفوفات بقيمة ثابتة

يتم في هذه الحالة ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بتلك القيمة الثابتة وكما يلي:

لو تم ضرب المصفوفة السابقة بالقيمة 3 فان الناتج يكون كما يلي:

0 6 9

3 27 12

21 12 3

ضرب المصفوفات

يتم ضرب المصفوفات بشرط ان تكون عدد اعمدة المصفوفة الاولى تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية وتسمى بمصفوفة جديدة .

مثال : المصفوفات التالية A*B=C ففي هذه الحالة يجب ان تكون اعمدة المصفوفة الاولى (A) تساوي عدد سطور المصفوفة الثانية (B) وعدد صفوف المصفوفة الناتجة (C) يجب ان تساوي عدد صفوف المصفوفة الاولى (A) والناتج هي المصفوفة Cij ونتجت من ضرب الصف i من المصفوفة الاولى A في العمود j للمصفوفة الثانية B.

مثال:

A= 2 5

1 5

B=1 0 6
3 -2 5

اوجد ناتج ضرب A*B وكذلك B*A
الجواب:

AB=[2 5] [1 0 6]
1 5 3 -2 5

=1*2+3*5=17
1*4+3*1=7
0*2+ -2*5=-10
0*4+ -2*1=-2
6*2+5*5=37
6*4+5*1=29

اذن المصفوفة الجديدة هي

C=17 -10 37
7 -2 29

اما ضرب ال B في المصفوفة A فلا يمكن لان عدد اعمدة الاولى B (3) لا تساوي عدد صفوف المصفوفة الاخرى B (2)

المحددات Determinants

تلك المصفوفات التي يرمز لها lAl اي استخراج قيمة واحدة للمصفوفة تسمى المحددات ويمكن استخراجها عند حالة المصفوفة المتساوية الابعاد 2×2 من خلال ضرب الطرفين بالوسطين وكما مبين:

A=2 4
3 1

فان l A l تساوي 2* 1 - 3*4=-10

اما بالنسبة للمصفوفات ذات الرتب الاعلى فتستخدم طريقة العوامل المتممة في استخراجها.

تسمى المصفوفة شاذة singular اذا كانت قيمة المحدد لها تساوي صفر l A l=0.

المصفوفة المرافقة Adjoint Matrix

اذا كانت A مصفوفة فان المصفوفة المرافقة لـA برمز لها بالرمز adj A اذا كان عنصرها بالصف i والعمود j يمثل العامل المتمم للعنصر بالصف j والعمود i للمصفوفة A

للمصفوفة التالية جد المرافق Adj A

$$A=\begin{matrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{matrix}$$

الجواب :

$$\begin{matrix} \alpha 11 & \alpha 21 & \alpha 31 \\ \alpha 12 & \alpha 22 & \alpha 32 \\ \alpha 13 & \alpha 23 & \alpha 33 \end{matrix}$$

:

نجد قيم كل واحد وكذلك الاشارة فالحد الاول يكون كما يلي:

$$\alpha 11=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

=(-1^2)=+1(6-0)=6

يتم ايجاد المصفوفة المرافقة من خلال حذف الصف والعمود للقيمة التي تحتويها المصفوفة وضرب الطرقين والوسطين للقيم الاربعة الباقية وطرحهما فمثلا القيمة الاولى a11 تكون قيمتها كما يلي:

الرتبة α11 تستخرج اشارتها من خلال ضرب القيمة (-1) بالاس فهنا تكون الاشارة -1 ×الاس 2 ويساوي +1 او 1 والعملية الاخرى هو ترك الصف والعمود لهذه القيمة في

المصفوفة وايجاد المحدد كقيمة للصفين والعمودين الباقيين من خلال ضرب الطرفين والوسطين مع طرح القيم لذلك الضرب وهنا يساوي $3\times2 - 7\times0=+6$

وهكذا لبقية عناصر المصفوفة ....

والنتيجة النهائية للمصفوفة المرافقة تكون

$$Adj.\ A=\begin{matrix}6 & -4 & 29\\ 28 & 18 & 7\\ -12 & 8 & -3\end{matrix}$$

المتجهات Vectors

عبارة عن مجموعة من الارقام اما بشكل صف او بشكل عمود

المتجه العمودي:

$$\begin{matrix}3\\2\\6\\2\end{matrix}$$

اما المتجه الافقي فمثال عليه: 3 2 6 2

ايجاد معكوس المصفوفة

خطوات ايجاد معكوس المصفوفة بطريقة الصف البسيطة

تتضمن ثلاث خطوات رئيسية هي:

1-تبديل صفين بالمصفوفة

2-عملية ضرب صف بعدد

3-عملية ضرب صف بعدد وجمعه مع صف اخر

مثال:جد المعكوس للمصفوفة التالية

$$A = \begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 5 \end{matrix}$$

خطوات الحل:

اولا تكوين مصفوفة الوحدة بنفس عناصر المثفوفة الاصلية

وكما يلي:

[A: I]

اذ ان I : مصفوفة الوجدة

اول خطوة هي تحويل المصفوفة الاصلية الى مصفوفة الوحدة من خلال جعل القيم القطرية لها تساوي واحد ويتم ذلك من خلال عملية الضرب بالارقام المحددة التي تجعل الناتج واحد.

ففي هذه الحالة تضرب المصفوفة A بالرقم ربع ¼ وبالتالي يتغير فيها الصف الاول لكل من المصفوفة الاصلية ومصفوفة الوحدة ويصبح [0 0 ¼ 0 0 1] اما الصف الثاني والثالث فيبقى كما هو ، بعذلك تاتي الخطوة اللاحقة وهي جعل العناصر تحت الواحد تساوي صفر وهنا يمكن ذلك من خلال الضرب للصف الاول وجمعه مع الصف الثاني لنحصل على الصف الثاني اما قيم الصف الاول فتبقى كما هي دون تغيير في المصفوفة (فقط قيم الصف الثاني تغيرت) والقيمة او الرقم المقترح لجعل تحت الرقم واحد صفر هو العدد الذي عند ضرب الصف الاول وجمعه مع الصف الثاني سنحصل على قيمة صفر تحت الرقم واحد في الصف الاول وكما يلي:

ضرب $2\times$ Row1+Row2

الصف الثاني سيصبح

[0 3 0 : ½ 1 0]

الخطوة الاخرى لجعل اسفل الرتبة او الرقم واحد يساوب صفر يكون ذلك من خلال ضرب الصف الاول بسالب ستة -6 وجمعه مع الصف الثالث وعندها سنحصل على قيم الصف الثالث كما يلي:

[0 -1 5 : -3/2 0 1]

الخطوة التالية هي جعل القيمة التالية القطرية تساوي واحد من خلال الضرب للصف الثاني فقط بالرقم 3/1 وبالتالي سيصبح الصف الثاني كما يلي:

[0 1 0 : 1/6 1/3 0]

بعد ذلك نجعل تحت الواحد صفر من خلال اما الضرب والجمع للصفين التاليين او الجمع بين الصفين التاليين (بحيث نجعل تحت الواحد صفر)

وهنا في هذه الحالة نجمع الصف الثاني مع الصف الثالث سنحصل على قيمة صفر تحت الواحد الذي هو جزء من مصفوفة الوحدة للصف السابق وبذلك تكون قيمة الصف الثالث كما يلي بعد جمعه مع الصف السابق له وهو الصف الثاني:

[0 0 5 : -4/3 1/3 1]

ولجعل الصف الثالث كمصفوفة وحدة في هذه الحالة يضرب الصف الثالث بالخمس 5/1 ويكون الناتج كما يلي:

[0 0 1 : -4/15 1/15 1/5]

وهنا حصلنا على مصفوفة الوحدة للمصفوفة الاصلية ومعها المصفوفة المجاورة وكما يلي:

1 0 0 : ¼ 0 0

0 1 0 : 1/6 1/3 0

0 0 1 : -4/15 1/15 1/5

وبذلك حصلنا في الجهة اليمنى على نضير المصفوفة والتي تمثل معكوس المصفوفة المطلوب وهو :

0	0	¼
0	1/3	1/6
1/5	1/15	-4/15