

حساب المساحات

1.4 مقدمة

في كثير من الأحيان تكون هنالك حاجة ماسة لمعرفة مساحة قطعة أرض ذات حدود معينة. وربما تكون حدود هذه الأرض موقعة على خريطة بمقياس رسم معلوم. وهنالك طرق مختلفة لإيجاد مساحة قطعة الأرض : بعضها يستخدم في إيجاد المساحة من الخريطة وبعضها يستخدم عند القياس المباشر على الطبيعة . وبعضها يناسب الحدود ذات الخطوط المستقيمة التي تشكل أشكال هندسية منتظمة وبعضها يناسب الحدود ذات الخطوط غير المنتظمة.

أما إيجاد المساحة من الخريطة فهي الطريقة الأكثر استعمالاً إذ أن القياسات المطلوبة كلها تتم من على لوحة الخريطة واستخدام مقياس رسم الخريطة إن كان معلوماً دون الرجوع إلى الموقع . إلا أن عيب هذه الطريقة هو تراكم الأخطاء التي تنتج من توقيع الخريطة نفسها و من القياس على الخريطة . ومع أن هذه المشكلة يمكن علاجها باستخدام الطريقة الثانية وهي أخذ القياسات من الموقع مباشرةً إلا أن ذلك يتطلب تكلفة مادية و جهد عملي أكبر ، ولذلك تظل الطريقة الأولى هي الأكثر استعمالاً .

أما التصنيف الآخر لإيجاد المساحة فهو الذي يتم بالنظر إلى طريقة حساب المساحة . وذلك يمكن أن يتم بالطرق الرياضية والتخطيطية والآلية. أما الطرق الرياضية فيمكن استخدامها مع القياسات التي تتم في الموقع على الأرض كما يمكن استخدامها مع القياسات التي تتم على الخريطة ، وأما الطريقتين الأخرين وهما التخطيطية والآلية فلا بد من استخدامها مع الحدود الموقعة على الخريطة بالمقياس المعلوم.

2.4 الطرق الرياضية لإيجاد المساحة

إذا كانت المنطقة تحد بحدود هندسية منتظمة فيمكن استخدام النموذج الرياضي المناسب للشكل الهندسي للحدود ، أما إذا كانت لا تشكل حدوداً هندسية منتظمة فيمكن استخدام طرق رياضية يتم تطبيقها لإيجاد المساحة تقريبياً.

i- النماذج الرياضية للأراضي ذات الحدود المنتظمة:

هنالك نماذج رياضية تناسب المنطقة ذات الحدود الهندسية المنتظمة مثل تلك التي تشكل شكل مثلث أو مربع أو مستطيل أو معين أو متوازي أضلاع أو شبه منحرف أو أي شكل محدد بخطوط مستقيمة أو دائرية أو قطاع من دائرة أو أي تركيب من هذه الأشكال . وهي وإن كانت معلومة للطالب من دراسته للعلوم الرياضية إلا أننا سنقوم بتقديم بعض منها في هذا الباب .

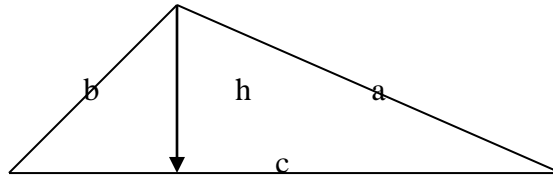
1- المثلث (الشكل 1.4):

(أ) إذا تم قياس أضلاع المثلث الثلاثة (a,b,c) فإن مساحة المثلث (A) تحسب من القانون الرياضي التالي:

$$A = [s*(s - a)*(s - b)*(s - c)]^{1/2} \quad (1.4)$$

حيث: s هي نصف محيط المثلث

$$s = (a + b + c) / 2$$



الشكل 1.4 قطعة الأرض على شكل مثلث أطوال أضلاعه a،b،c.

ب) وإذا تم قياس قاعدة المثلث (أحد أضلاعه الثلاثة ، c مثلاً) وتم قياس العمود النازل عليها من الركن المقابل (ارتفاع المثلث h) فإن المساحة A تحسب من القانون التالي:

$$A = (1/2) * c * h \quad (2.4)$$

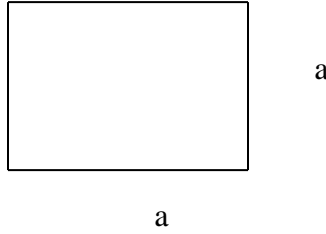
ج) وإذا تم قياس طولي ضلعين متجاورين من المثلث (الضلعين a و b مثلاً) و الزاوية المحصورة بينهما (زاوية C) فإن المساحة A تحسب من العلاقة التالية:

$$A = (1/2) * a * b * \sin C \quad (3.4)$$

2- الأشكال الهندسية غير المثلث:

أ- المربع: الشكل (2.4) إذا كان طول ضلع المربع يساوي a فإن مساحته تساوي الضلع في نفسه :

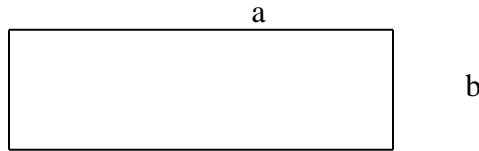
$$A = a^2 \quad (4.4)$$



الشكل 2.4: قطعة الأرض على شكل مربع طول ضلعه a .

ب- المستطيل: (الشكل 3.4) إذا كان طوله يساوي a وعرضه يساوي b فإن مساحته A هي:

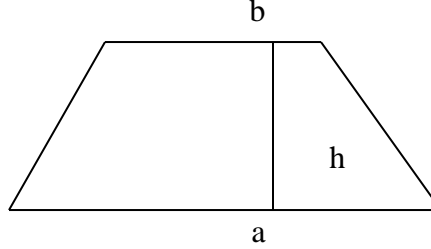
$$A = a * b \quad (5.4)$$



الشكل 3.4: قطعة الأرض على شكل مستطيل.

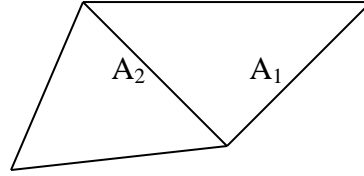
ج- شبه المنحرف: إذا كان طول القاعدة a وطول القاعدة الأخرى الموازية لها يساوي b وارتفاعه (المسافة بين القاعدتين) يساوي h (الشكل 4.4) فإن المساحة A هي:

$$A = (1/2) * (a + b) * h \quad (6.4)$$



الشكل 4.4 : قطعة الأرض على شكل شبه المنحرف.

د) إذا كان شكل قطعة الأرض يمثل أي شكل هندسي مكون من أكثر من ثلاثة أضلاع مستقيمة (الشكل 5.4) ، مثل الشكل الرباعي أو الخماسي أو السداسي ، فيمكن تقسيمه إلى مثلثات يتم قياس أضلاعها وحساب مساحة كل مثلث ثم جمع هذه المساحات لإيجاد المساحة الكلية.



الشكل 5.4 قطعة الأرض ذات الحدود المستقيمة.

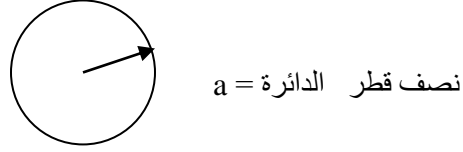
مساحة قطعة الأرض ذات الشكل الرباعي الذي يظهر في الشكل 5.4 تساوي مجموع مساحتي المثلثين:

$$A = A_1 + A_2$$

هـ- الشكل الدائري:

- مساحة الدائرة (الشكل 6.4) التي نصف قطرها a تحسب من العلاقة:

$$A = \pi * a^2 \quad (7.4)$$



الشكل 6.4: قطعة الأرض ذات الشكل الدائري

- مساحة القطاع من هذه الدائرة الذي زاويته عند المركز تساوي α راديان (أو $\alpha * 360$

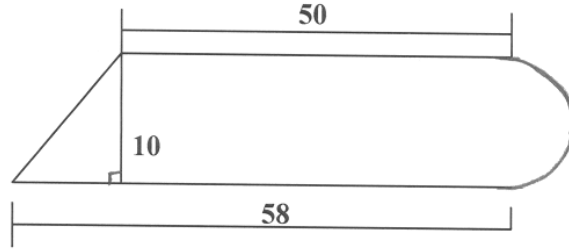
درجة ستيني):

$$A = \pi * a^2 * \alpha \quad (8.4)$$

مثال 1.4

أوجد مساحة قطعة الأرض التي تظهر حدودها في الشكل 7.4 والتي يمكن تقسيمها إلى نصف

دائرة قطرها 10 متر ومستطيل طوله 50 متر وعرضه 10 متر ومثلث قائم الزاوية.



الشكل 7.4: قطعة أرض مكونة من نصف دائرة و مستطيل و مثلث قائم الزاوية

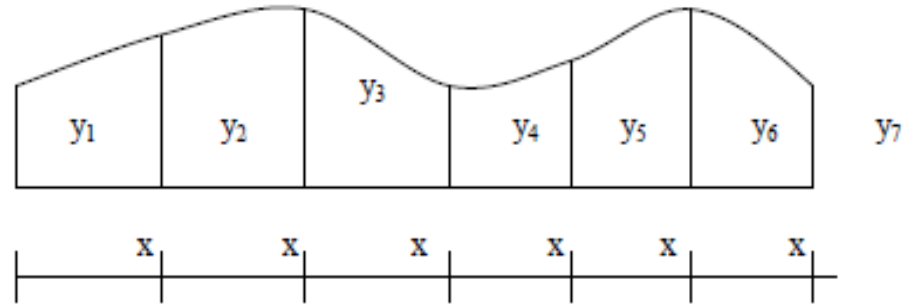
الحل:

$$\text{مساحة نصف الدائرة} = 0.5 \times \pi \times (10/2)^2 = 39.27 \text{ متر مربع}$$

$$\text{مساحة المستطيل} = 50 \times 10 = 500 \text{ متر مربع}$$

i - النماذج الرياضية للأراضي ذات الحدود غير المنتظمة:

في الكثير من الحالات تكون لقطعة الأرض حدود لا تتشكل من خطوط مستقيمة أو أقواس دائرية بحيث يمكن تطبيق النموذج الرياضي المناسب كما تم في الفقرة السابقة. في هذه الحالة تقوم بمد محور على طول المنطقة وتقيم عليه أعمدة - على مسافات متساوية - إلى حدود الأرض كما يتضح في الشكل (8.4).



الشكل 8.4 قطعة أرض ذات حدود غير منتظمة

إذا علمنا المسافة بين كل عمود والذي يليه (x مثلاً) و بقياس أبعاد هذه الأعمدة من حدود المنطقة (y_i) لكل عمود i من 1 إلى n عمود ($n = 7$ في الشكل 8.4) يمكن حساب المساحة حساباً تقديرياً بالطريقة التي توائم شكل حدود المنطقة من الطرق التالية:

1- طريقة متوسط أطوال الأعمدة:

نحسب أولاً متوسط أطوال الأعمدة Y من العلاقة:

$$Y = [y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n] / n \quad (9.4)$$

ومن ثم نحسب المساحة A من العلاقة التالية:

المساحة الكلية =

$$[x * (n - 1)] \times [Y] \text{ متوسط أطوال الأعمدة } \times \text{ طول المحور}$$

2- طريقة أشباه المنحرفات

وهذه الطريقة أكثر دقة من الأولى ، ونعتبر فيها أن كل مساحة بين عمودين هي مساحة شبه منحرف ، فمثلاً مساحة الجزء الأول من اليسار هي :

$$A_1 = x * (y_1 + y_2) / 2$$

ومساحة الجزء الثاني هي:

$$A_2 = x * (y_2 + y_3) / 2$$

ومساحة الجزء الأخير هي:

$$A_{n-1} = x * (y_{n-1} + y_n) / 2$$

وبجمع مساحات كل الأجزاء التي تكون المنطقة نوجد المساحة :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1}$$

أو:

$$A = (x/2) * [y_1 + 2 * y_2 + 2 * y_3 + \dots + 2 * y_{n-1} + y_n] \quad (10.4)$$

3- طريقة سيميسون:

وتعتبر أكثر دقة من سابقتها إذا كانت حدود المنطقة منحنية أو أشبه بالمنحنى من الخط

المستقيم ، ويراعى عند تطبيقها أن يكون عدد الأعمدة n عدداً فردياً.

$$A = (x/3) * [y_1 + 4 * y_2 + 2 * y_3 + 4 * y_4 + 2 * y_5 + \dots + 4 * y_{n-1} + y_n] \quad (11.4)$$

ويمكن صياغتها لفظياً على النحو التالي:

المساحة = $(x/3) * (\text{طول العمود الأول} + \text{طول العمود الأخير} + \text{ضعف مجموع الأعمدة الفردية}$

غير الأول و الأخير + أربعة أضعاف مجموع الأعمدة الزوجية).

ملاحظة: يلاحظ أن الطريقة الثانية يمكن استخدامها لتقدير مساحة القطعة التي تشكل حدودها

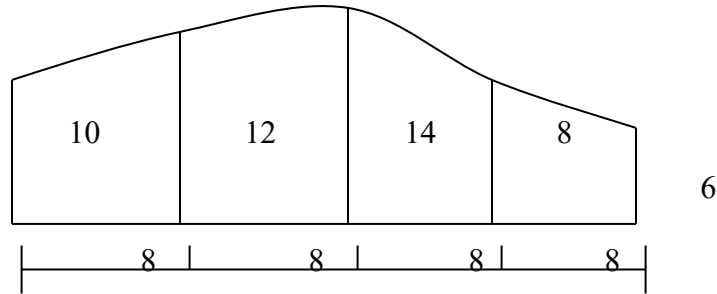
خطوطاً مستقيمة بين الأعمدة ، في حين أن الطريقة الأخيرة تعبر أكثر عن الحدود التي تكون في

شكل منحنى بين الأعمدة.

مثال 2.4

قسمت مساحة قطعة أرض إلى 4 أجزاء كما هو مبين في الشكل 9.4 . كل القياسات بالأمتار. أوجد

مساحة قطعة الأرض باستخدام كل من الطرق الثلاث.



الشكل 9.4 : قطعة أرض حدودها غير منتظمة قسمت إلى 4 أجزاء

الحل:

1- طريقة متوسط أطوال الأعمدة :

متوسط أطوال الأعمدة Y :

$$Y = [6 + 8 + 14 + 12 + 10] / 5$$

$$= 10 \text{ متر}$$

$$\text{طول المحور} = \text{عدد الأجزاء} \times \text{طول الجزء الواحد} = (n-1) * x$$

$$= 8 \times 4 = 32 \text{ متر}$$

$$\text{المساحة} = \text{متوسط أطوال الأعمدة} \times \text{طول المحور}$$

$$= 32 \times 10 = 320 \text{ متر مربع}$$

2- طريقة أشباه المنحرفات:

$$\text{المساحة} = \frac{(8/2)}{2} [10 + 6 + 2x(8 + 14 + 12)]$$

$$= 4 \times 84 = 336 \text{ متر مربع}$$

3- طريقة سيمسون:

$$\text{المساحة} = \frac{(8/3)}{3} [10 + 6 + 4(8 + 12) + 2x14]$$

$$= 3 \div 8 \times 124 = 330.67 \text{ متر مربع}$$

3.4 الطرق التخطيطية لإيجاد المساحة

وهذه الطرق تعتبر تقديرية ولا يلجأ إليها إلا في حالة تجنب إجراء الحسابات وأن تكون حدود

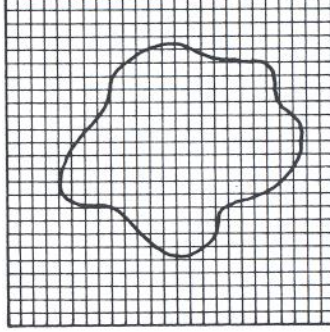
المنطقة موقعة على خريطة ذات مقياس رسم معلوم. وسنقدم طريقة واحدة منها هي طريقة المربعات.

و نستخدم هنا ورقة رسم بياني شفاف توضع على الخريطة مغطية الجزء الذي تقع فيه المنطقة

المراد إيجاد مساحتها (الشكل 10.4) . و نقوم بتعداد المربعات الصغيرة داخل حدود المنطقة.

ونحتاج للقيام بتقدير لكسر المربعات الغير كاملة . و إذا علمنا عدد المربعات الكلية بكسورها وإذا

علمنا المساحة على الأرض التي يغطيها المربع الواحد من مقياس الخريطة يمكن إيجاد المساحة الكلية.



الشكل 10.4 طريقة المربعات التخطيطية لحساب المساحة

مثال 3.4

إذا كانت حدود قطعة الأرض المتعرجة قد تم توقيعها على خريطة ذات مقياس رسم 1:5000 وتم وضع ورقة رسم شفاف مقسمة إلى مربعات على لوحة الرسم لتغطي حدود المنطقة تماماً كما في الشكل 10.4 ، و إذا كان كل مربع عبارة عن 1 سم مربع. وتم إحصاء عدد المربعات وأجزائها داخل حدود المنطقة فكانت 198.5 مربع ، فكم تكون مساحة هذه القطعة على الطبيعة؟

الحل:

بما أن مقياس رسم الخريطة هو 1:5000 فإن كل 1 سم طولي يمثل 5000 سم أو 50 متراً على الطبيعة.

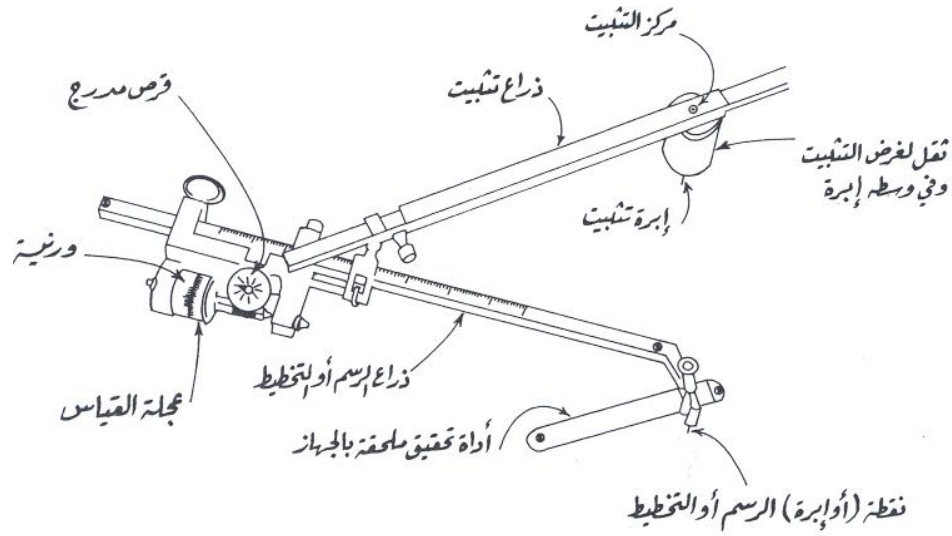
ويمثل كل 1 سم مربع ما مقداره 50×50 متراً مربعاً في الطبيعة (2500 متراً مربعاً).

4.4 الطريقة الآلية لإيجاد المساحة (جهاز قياس المساحة)

ومن الطرق المستخدمة في إيجاد المساحة الأرضية للمنطقة ذات الحدود غير المنتظمة والموقعة على الخريطة الطريقة الآلية التي يتم فيها استخدام جهاز يسمى جهاز قياس المساحة (البلانيمتر). ومن أنواع هذا الجهاز جهاز مقياس المساحة الميكانيكي و الجهاز الرقمي.

ومن أكثر أجهزة مقياس المساحة الميكانيكية المستخدمة جهاز المقياس القطبي. وكما هو مبين في الشكل 11.4 فإن هذا الجهاز يتكون من: 1- ذراع متابعة الحدود وهو عبارة عن قضيب معدني مدرج وفي أحد طرفيه إبرة عمودية يتم تمريرها على حدود قطعة الأرض المراد إيجاد مساحتها . 2- ذراع الثقل أو الذراع الثابت ويتصل عند أحد طرفيه بثقل يثبت بواسطة إبرة من أسفله بحيث لا يتحرك من مكانه عند تمرير ذراع متابعة الحدود . وينتهي هذا الذراع عند طرفه الآخر بمخروط يدخل في ثقب صغير في غلاف ينزلق على ذراع متابعة الحدود . 3- عجلة القياس وهي عجلة رأسية مثبتة على محور أفقي يوازي ذراع المتابعة ويقسم محيطها إلى عشرة أقسام رئيسية ويقسم كل قسم من هذه الأقسام إلى عشرة أقسام متساوية . ويمكن قراءة جزء من عشرة من أحد الأقسام بواسطة ورنية مثبتة بجوار العجلة الرأسية التي تدور على محور أفقي متصل بقرص أفقي مقسم هو الآخر إلى عشرة أقسام عليها مؤشر.

وكلما دارت العجلة الرأسية دورة كاملة دار المؤشر قسماً واحداً على القرص الأفقي ، ويوجد بالغلاف المنزلق على ذراع المتابعة ورنية تقرأ لدقة 10/1 من أصغر جزء من أقسام هذا الذراع ويتحرك الغلاف على الذراع حركة بطيئة و أخرى سريعة بواسطة مسامير خاصة و ذلك من أجل وضع ثابت الجهاز على الذراع والذي يكون محددًا بجدول مرفق مع الجهاز. وتعادل قيمة القسم الواحد على القرص ألف وحدة من وحدات الجهاز. وبالجدول أيضاً عمود لقيم ثابت الجهاز الذي يستخدم مع القراءة المسجلة لإيجاد المساحة على الأرض بالأمتار المربعة.



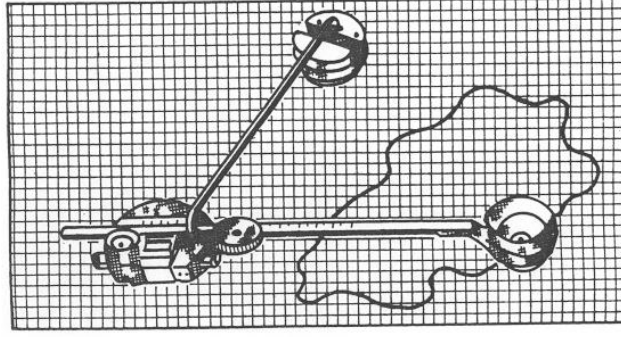
الشكل 11.4: أجزاء جهاز مقياس المساحة الميكانيكي [8]

ولكل جهاز جدول يحوي أربعة أعمدة: العمود الأول يبين مقاييس الرسم المستعملة ومقابل كل مقياس رسم الطول الذي يجب تثبيته ذراع المتابعة عليه في العمود الثاني ، ويحوي العمود

الثالث المساحة الحقيقية المقابلة لكل وحدة من وحدات قياس الجهاز على لوحة الخريطة وفي العمود الأخير المساحة الحقيقية المقابلة لمقياس الرسم المستعمل.

طريقة استخدام جهاز قياس المساحة:

أولاً يتم اختيار طول ذراع المتابعة المقابل لمقياس رسم الخريطة التي تحوي حدود المنطقة وذلك من الجدول المرافق للجهاز (في بعض الأجهزة يتم طبع الجدول على ظهر الجهاز نفسه) ، ومن ثم يتم تحريك الجزء المنزلق على ذراع المتابعة حركة سريعة وبطيئة بواسطة المسامير الخاصة بذلك لضبط طول ذراع المتابعة. الخطوة الثانية هي اختيار نقطة بداية القياس وتعليمها وهي نقطة على حدود المنطقة المبينة على لوحة الخريطة ، ويتم اختيارها بحيث يكون الثقل خارج حدود المنطقة وأن تكون إبرة المتابعة في مركز ثقل المساحة تقريباً (الشكل 12.4) و أن يكون ذراع المتابعة عمودياً على ذراع الثقل بقدر الإمكان وأن تكون الزاوية بين الذراعين حدود 30 إلى 150 درجة أثناء تمرير الإبرة على حدود القطعة . ويمكن التحقق من ذلك بإمرار الإبرة على حدود المنطقة بحركة سريعة. وينبه إلى أنه في حالة ما كانت المساحة كبيرة فيمكن تقسيمها إلى عدة أقسام لتحقيق الوضع المطلوب وإيجاد مساحة كل قسم لحدة و من ثم جمع مساحات هذه الأقسام لإيجاد المساحة الكلية.



الشكل 12.4: الوضع الأمثل لوضع الجهاز بالنسبة للخريطة عند بداية القياس [8].

أما الخطوة الثالثة فهي خطوة القياس وتبدأ بوضع الإبرة على نقطة البداية المختارة وتصفير الجهاز بحيث يكون كل من مؤشر القرص الأفقي وورنية العجلة الرأسية على الصفر ثم تمرير الإبرة على حدود المنطقة في اتجاه عقارب الساعة و ذلك لأن ترقيم العجلة يتزايد مع الدوران في هذا الاتجاه حتى نصل إلى نقطة البداية مرة أخرى. ويتم قراءة الجهاز ومن ثم استخدام معامل الجهاز لتحويل القراءة إلى مساحة على الأرض.

وعلى سبيل المثال إذا كانت المساحة على الطبيعة (بالمتر المربع) المقابلة لوحدة الجهاز تساوي 4 متر مربع على حسب ما هو في جدول الجهاز فإن مساحة هذه القطعة تساوي $28852 = 4 \times 7213$ متر مربع.

أما إذا تم استخدام الجهاز لإيجاد مساحة قطعة أرض على خريطة مرسومة بمقياس رسم غير موجود في جدول الجهاز فإننا نستخدم طول الذراع المقابل لأحد مقاييس الرسم الموجودة في الجدول و نطبق القانون التالي لإيجاد المساحة المطلوبة:

$$\text{المساحة المطلوبة} = \text{المساحة الناتجة} \times (\text{مقياس الرسم المستعمل} \div \text{مقياس الرسم الحقيقي})^2$$

مثال 3.4

استعمل جهاز مقياس المساحة في إيجاد مساحة قطعة أرض على خريطة مقياس رسمها 1:2500 ولكن مقياس الرسم هذا لم يكن موجوداً بجدول الجهاز فقد تم قياس المساحة على أساس مقياس الرسم 1:2000 الموجود بالجدول فكانت المساحة الناتجة 4000 متر مربع ، فما هي المساحة الحقيقية لقطعة الأرض ؟

الحل:

$$\text{المساحة الحقيقية} = \frac{4000 \times (1/2000)^2}{(1/2500)^2} = 6250 \text{ متر مربع.}$$

مثال 4.4

لإيجاد مساحة قطعة أرض مبينة علي خريطة مقياس رسمها 1:2500 تم استخدام جهاز بلانيميتير لا يوجد في الجدول المرافق له المقياس المذكور فاستخدم مقياس الرسم 1:1000 وكانت المساحة التي تمثلها وحدة الورنية لهذا المقياس من الجدول هي 30 متر مربع. وكانت قراءة الجهاز عند بدء القياس 1800 و بعد تمرير الإبرة على حدود المنطقة خمس مرات سجلت القراءة الأخيرة 4900 ، أوجد المساحة الحقيقية لقطعة الأرض بالمتر المربع ، ثم بالهكتار ، ثم بالفدان . (1 هكتار = 10000 متر مربع = 2.39 فدان).