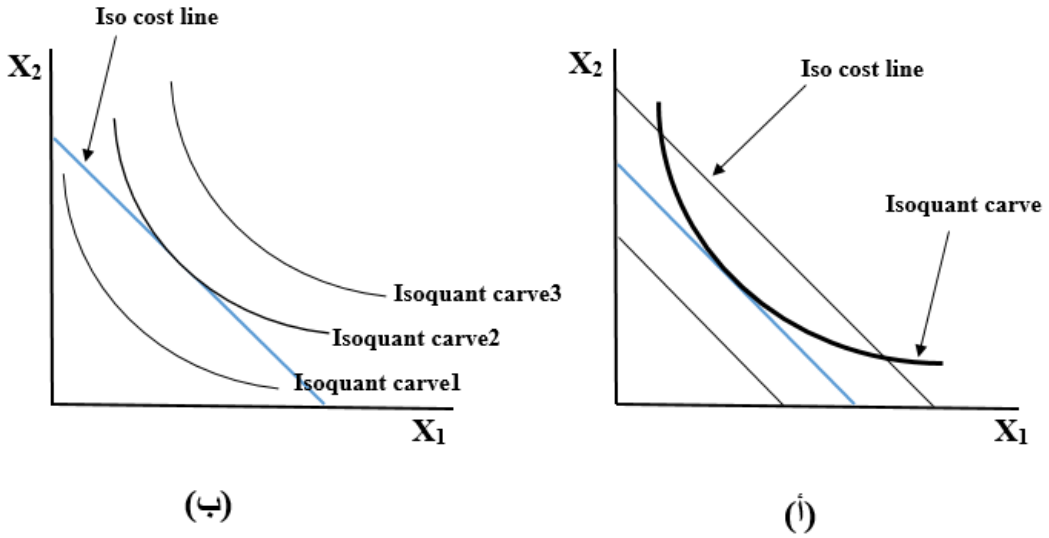
المحاضرة الثانية

تحديد التوليفة الموردیه الاقل تكلفة

يسـتهدف المنتجون اسـتخدام المعلومات التي توفر لديهم حول دوال الانتاج لمنتج معين والتي تبين التوليفات المختلفة من مدخلين التي يمكن اسـتخدامها لانتاج مسـتويات مختلفة من منتج ما وكذلك النسـبة السـعرية بين المدخلين بهدف الوصول الى احد هدفين هما :

1-تحديد التوليفة الاقل كلفة لمستوى معين من الانتاج كما في الشكل (أ)

2-تعظيم الانتاج من ميزانيه معينه الشكل التالي (ب)



1-تحديد التوليفة الاقل كلفة لمستوى معين من الانتاج

تحدد نقطة توازن المنتج عند نقطة تماس منحنى الانتاج وخط التكاليف والتي تبين التوليفة المثلى لمستوى معين من الانتاج ويمكن تحديد هذه النقطة بيانيا او حسابيا غير ان الطريقة البيانية اكثر دقه لان المنحنى يعكس قيم مستمرة , بينما تتضمن الطريقة الحسابية عددا محدودا من القيم المتقطعة.

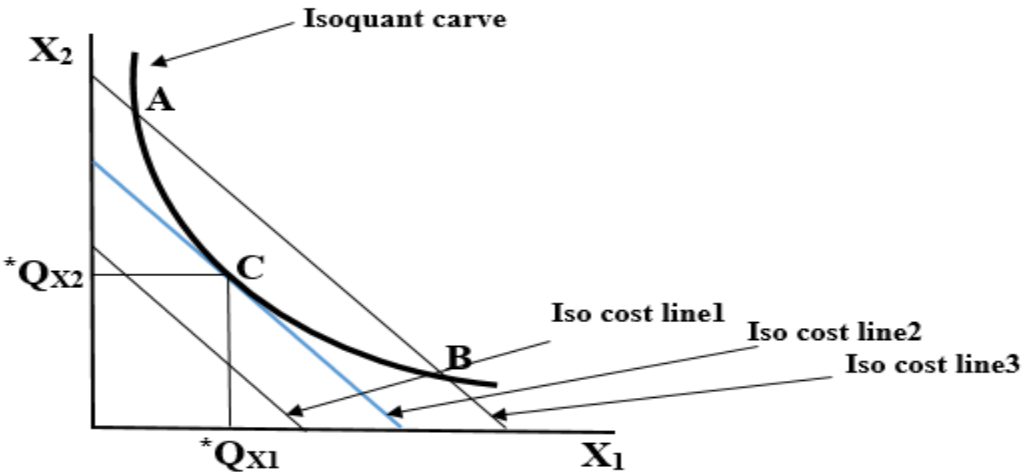
وعند نقطة التوازن يتساوي ميل خط الانتاج المتساوي مع ميل خط التكاليف المتساوية وبما ان ميل خط الانتاج المتساوي يساوي معدل الاستبدال الحدي وميل خط الكلفة يساوي النسبة السعرية فان نقطة التوازن تتحدد عند تساوي معدل الاستبدال مع النسبة السعرية

SLOP isoquant = MRS

Slop iso cost= $-\frac{px}{py}$

:equilibrium point when MRS$\frac{px}{py}$=

فاذا كان هناك مستوى معين من الانتاج وثلاثة خطوط كلفة (1و2و3) متوازية ومتساوية الميل كما في شكل (p) فان خط التكاليف الاول لا يمكن تحقيقه لانه لا يسمح بانتاج مستوى الانتاج المطلوب , بينما (3cost) تقطع منحنى الانتاج المتساوي في النقطتين A,B مما يعني ان نفس مستوى الانتاج يمكن الحصول عليه من مستوى كلفة اقل , وعند المقارنة بين انحدار خط الكلفة isocost والمماس لمنحنى الانتاج المتساوي عند النقطة (A) فان معدل الاستبدال الحدي يكون اكبر من معدل الاستبدال السعري اما معدل الاستبدال الحدي عند النقطة (B) يكون اقل من معدل الاستبدال السعري وبذلك نجد ان (isocost 2) يمس منحنى الانتاج في اخفض نقطة (C) حيث ان المنحنى محدب نحو نقطة الاصل , ولا يمكن انتاج هذا المستوى من الانتاج باقل من هذه الكلفة بمعنى ان النقطة (C) تمثل نقطة التوازن وتحدد التوليفة الاقل كلفة لمستوى معين من الانتاج .



تغطية الانتاج من ميزانية معينة (خط كلفة واحد)

هنا تتحدد نقطة توازن المنتج التي تبين التوليفة المثلى من مدخلين الاقل كلفة وتعرف بانها النقطة التي يحقق عندها المنتج اعلى انتاج ممكن عند ميزانية محدده (القيد على الكلفة) وعند هذه النقطة يتساوى ميل خط الانتاج المتساوي مع ميل خط الكلفة المتساوي

Slop isoequant = slop isocost

$$MRS=\frac{px1}{px2}$$

اذا وضع منتج ميزانية معينة (قيد معين) حط كلفة معين كما مبين في الشكل ( ) للاتفاق كل المدخلين (X1, X2) وكان هناك ثلاثة مستويات من الانتاج (y1,y2,y3) ونجد ان مستوى الانتاج y3 لا يمكن تحقيقه من الميزانية المتاحه لانه لا يوجد تماس بين منحنى الانتاج المتساوي وخط الكلفة (A,B) , بينما المستوى y1 يتقاطع مع خط التكاليف عند النقطتين (N,M) وهو مستوى غي كفوء ولا يمثل المستوى الامثل لان من الممكن انتاجه بتكلفة اقل .

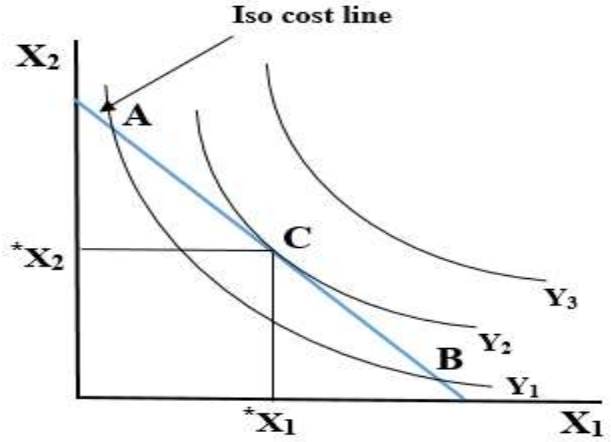
غير انه من الممكن انتاج كمية اكبر بنفس الكلفة وهو المستوي y2 ومستوى الانتاجy2 هو اعلى انتاج يمكن تحقيقه من الميزانية المعينة , حيث انه يمس خط التكاليف في نقطة واحدة ويمكن ملاحظة ذلك عند مقارنة ميل المماس عند اي نقطة على منحنى الانتاج المتساوي y1 اي معدل الاستبدال الحدي مع ميل او انحدار خط التكاليف الثابت

اي النسبة السعرية = $\frac{px1}{px2}$ =MRS

فمعدل الاستبدال عند النقطة (N) اكبر من النسبة السعرية ($\frac{px1}{px2}$ ≤MRS)

وبالعكس فان معدل الاستبدال الحدي (MRS) عند النفقطة (M) يكون اقل من النسبة السعرية ($\frac{px1}{px2}$ ≤MRS)

ولكن معدل الاستبدال الحدي يتساوي مع النسبة السعرية $\frac{px1}{px2}$ =MRS عند نقطة التوازن (C) وما دامت نسبتا التبادل الحدي والسعري غير متساويتين , فان المنتج يستطيع انتاج اكبر كمية او تقليل الكلفة بالاتجاه نحو نقطة المساواة بين النسبتين .



ومنه نستنتج وعند اي مستوى توازن وفي اي توليفة مثلى فان الانتاجية الحدية لكل مدخل نسبة الى سعره تكون متساوية

$$\frac{mpx1}{px1} = \frac{mpx2}{px2} = \frac{mpxn}{pxn}$$

اختيار مستوى الانتاج الذي يحقق اقصى ربح:-

يعتبر معدل الاستبدال الحدي ثابتا بوجه عام عند ثبوت العوامل البايولوجية والمادية بينما تتغير الاسعار النسبية للمدخلات حسب قوى العرض والطلب في السوق , ويترتب على ذلك ان يعمل المنتج على استخدام

كمية اكبر من المدخل الذي اصبح سعره اقل نسبيا ويوفر اسلوب التحليل الحدي الذي يستدعى مقارنة معدل الاستبدال الحدي الثابت مع النسبة السعرية اطارا موضوعيا وعكسيا لتحديد التوليفة الاقل كلفة لمستوى معين من الانتاج .

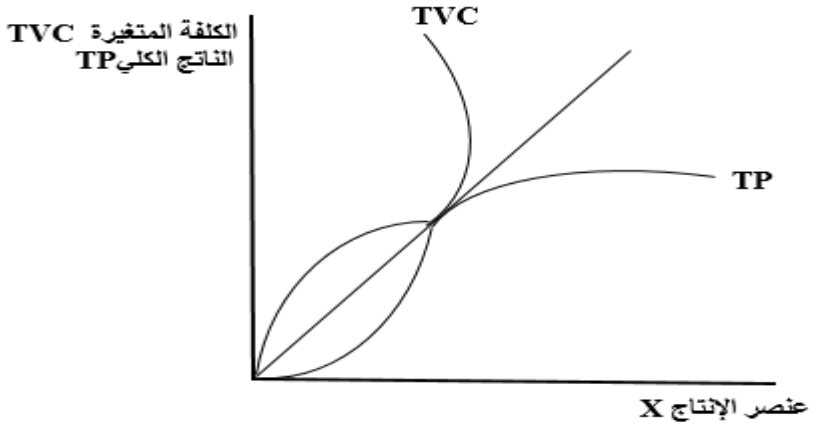
التكاليف المتغيرة TVC الكلية

التكاليف المتغيرة هي التكاليف المرتبطة بعوامل الانتاج المتغيرة خلال فترة زمنية معينة والتي تتغير بتغير كميات او مستويات الانتاج , وتتاثر هذه التكاليف بقرارات المنتج وغالبا ما تستهلك في عملية الانتاج (بذور , اعلاف , سماد) ويمكن التاثير على التكاليف المتغيرة في المدى القصير من خلال زيادة ساعات او عدد العمال او تعديل مدخلات الانتاج (زيادة كمية الاسمدة لزيادة انتاج المحاصيل او الاعلاف لزيادة المنتجات الحيوانية) .

وقد تكون التكاليف المتغيرة نقدية او غير نقدية ومن الامثلة على التكاليف المتغيرة النقدية في مجال الزراعة تكاليف البذار والاسمدة الكيماوية والاعلاف المشتراة والعمالة المستاجرة , اما التكاليف الغير نقدية تكاليف البذار والاسمدة والاعلاف المنتجة في المزرعة , وتقيم تكلفة البذار والسماد العضوي على اساس تكلفة الفرصة البديلة حسب الاسعار السائدة في السوق , بينما تقدر تكلفة الرعي في المراعي الخاصة حسب تكلفة الانتاج او اجرة الارض كمرعى .

وترتبط دالة التكاليف المتغيرة بدالة الانتاج اذا حولنا كميات لمدخل المادية على الاحداثي الافقي في دالة الانتاج الى قيم نقدية فان الاحداثي الافقي يصبح ممثلا للتكاليف بدلا من كميات المدخل وتتحول دالة الانتاج الى دالة للتكاليف المتغيرة . ولذلك تسمى النظرية التكاليف احيانا بالصورة النقدية لنظرية الانتاج .

ونظرا لانه ينظر الى التكاليف كمتغير تابع للانتاج (المتغير المستقل) فان عكسي وضع المتغيرات على الاحداثيين الافقي والعمودي يؤدي الى ان تصبح دالة التكلفة المتغيرة صورة عكسية لدالة الانتاج كما يبين الشكل ( )

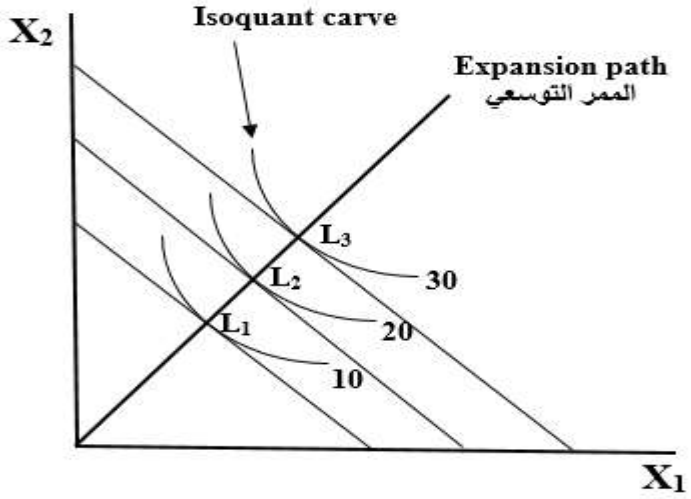


تبين ان التوليفة الاقل كلفة تحدد اكبر ربح ممكن لمســتوى معين من انتاج ولا تحقق بالضــرورة اعلى ربح ممكن للمنتج الذي يهدف الى تعظيم الربح وهنا يتطلب مقارنة الربح الذي يتحقق من عدة مســتويات انتاج ممكنة يتوفر فيها شرط الانتاج باقل كلفة.

ويمكن توضــيح ذلك بيانيا بالشــكل ( ) فان كل من L1, L2, L3 تمثل نقاط توازن مختلفة ناتجة عن تماس مســتويات انتاج مختلفة (30,20,10) مع خطوط كلفة مختلفة , والخط الذي يصــل بين نقاط التوازن يســمى بالممر التوســعي الامثل او نطاق الانتاج expcision path يمثل ممر التوســع الامثل الخط الذي يربط بين نقاط توازن الانتاج نتيجة للتغير في الميزانية مع ثبوت الاســعار , اي ان نقاط التوازن بين مســتويات الانتاج المختلفة وخطوط الكلفة المتساوية الميل الناتجة عن تغير الميزانية مع بقاء الاسعار ثابته وحيث ان الميل عند هذه النقاط يكون واحدا فان الخط الذي يربط بينهما هو من الخطوط متساوية الميل .

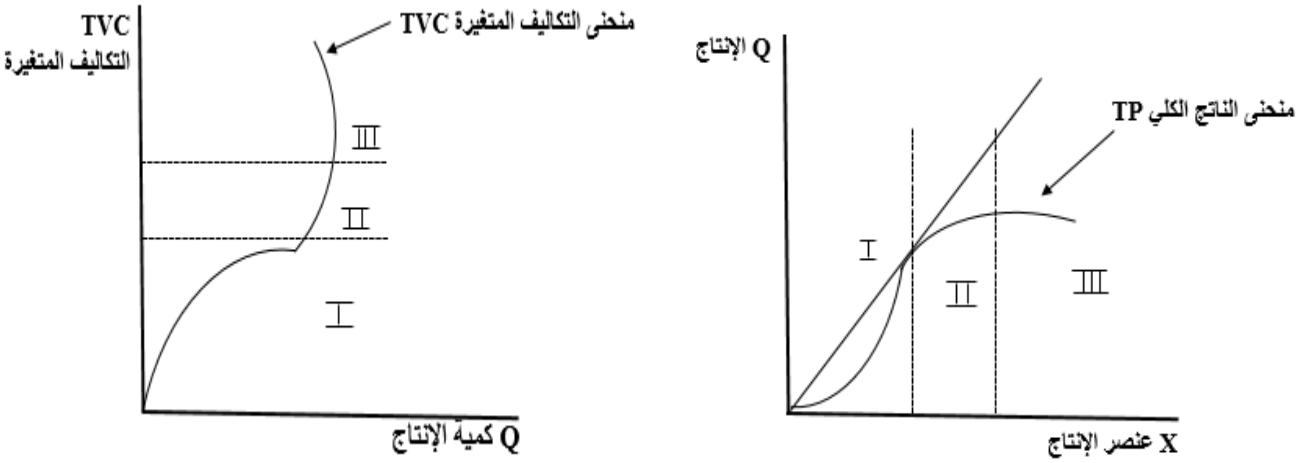
ولاختيار التوليفة المثلى التي تقع على الممر التوسعي الامثل , يتم حساب اجمالي العائدات واجمالي التكاليف للمدخلين ويحتسب هامش الربح بينهما وتساوي العائدات سعر وحدة المنتج المتوقع مضروبا في كمية الانتاج لكل مستوى انتاج والتي تمثلها منحنيات الانتاج المتساوية ويحتسب اجمالي التكاليف بضرب سعر كل مدخل في كميته لكل توليفة .

ويحسب الربح (π) بطرح التكاليف للتوليفة الاقل كلفة لكل مستوى انتاج من اجمالي العائدات لهذا المستوى . وعلى ضوء عملية التحليل هذه يختار المنتج مستوى الانتاج المناسب الذي يحقق اكبر صافي عائد ممكن .



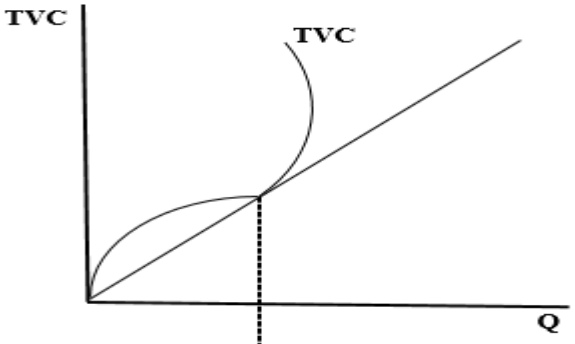
ونظرا لان التكاليف المتغيرة ترتبط بالانتاج فان الشكل الذي تاخذه دالة التكاليف المتغيرة والكلية يرتبط بشكل دالة الانتاج ولكن بشكل عكسي وتبدا دالة التكاليف المتغيرة والكلية من الصفر وتزيد مع زيادة الانتاج وتتزايد دالـة التكـاليف المتغيرة بمعدل متنـاقص عندمـا تزداد دالـة الانتـاج بمعدل متزايد حتى نقطة الانعطاف ثم تاخذ دالـة الكلفـة المتغيرة وايضـــا الكليـة بعد هذه النقطـة بـالتزايد بمعدل متزايد على العكس من دالة الانتاج لان انتاجية العامل المتغير تتناقص حســب قانون تناقص الغلة , واذا كانت دالة الانتاج متناقصـــة من بدايتها فان الكلفة المتغيرة تكون دالة متزايد من بدايتها وعندما يصــبح ميل دالة التكاليف المتغيرة لا نهائيا عندما يصــل

الانتاج الى اقصاه فان ذلك يشكل بداية للمرحلة الثالثة على دالة التكاليف , وبعد هذه النقطة تزيد التكاليف بينما يقل الانتاج وكما مبين بالاشكال التالية ( )

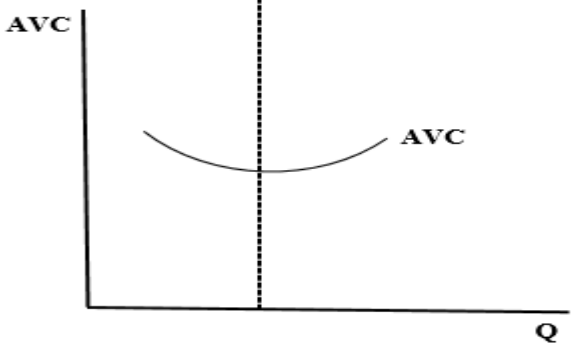


شكل يوضح مراحل الإنتاج على دوال الإنتاج والتكاليف المتغيرة

شكل يوضح منحنى التكاليف المتغيرة



شكل يوضح منحنى متوسط التكاليف المتغيرة



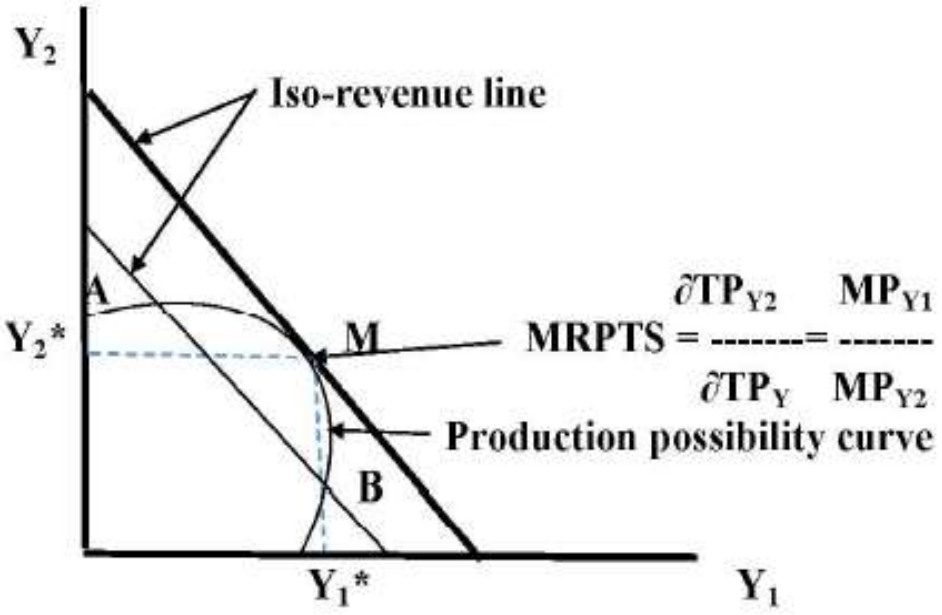
لتحديد التوليفة التي تحقق اقصى عائد اجمالي او ربح من منتجين عند تساوي معدل التبادل بالسوق مع معدل الاحلال الحدي او عند تماس خط العائد المتماثل مع منحنى الانتاج الممكن عند نقطة M حيث يتساوى ميل خط العائد مع ميل منحنى الانتاج الممكن slop Rerenue line= slop line

وتحدد نقطة التوازن التوليفة التي تحقق اعلى ربح صافي نظرا لاستخدام كمية ثابته من المورد وبذلك تكون الكلفة واحدة ولا تحقق اي نقطة اخرى عائدا اكبر لان انخفاض العائد نتيجة خفض الانتاج من احد المنتجين يكون اعلى من زيادة العائد من المنتج الاخر ويمكن تحديد التوليفة المثلى بطريقة بيانية وكالأتي :

الطريقة البيانية

تتحدد التوليفة المثلى بيانيا عند نقطة التماس بين منحنى الانتاج الممكن باعلى خط عائد يمكن تحقيقة فاذا كان خط العائد الذي تمت اقامته اعلى من منحنى الانتاج الممكن , فهذا يعني تعذر تحقيقه بينما اذا كان يقطع المنحنى او يقع تحته فهذا يعني امكانية تحقيق عائد اكبر منه , وبالتالي نقيم خطا موازيا لهذا الخط بحيث يكون مماسا لمنحنى الانتاج الممكن في نقطة واحدة وتحت نقطة تماس M التوليفة المثلى للمنتجات التي تحقق اقصى عائد ممكن عند انتاج $y1^*$ من y1 من 2*y من y2 .

وهذا المستوى هو اعلى عائد يمكن تحقيقه من كمية معينة من المورد , حيث انه يمس منحنى الانتاج الممكن في نقطة واحدة فاذا تقاطع خط العائد مع المنحنى في نقطتي (A,B) فانه يمكن مقارنة ميل المماسين لمنحنى الانتاج عند النقطتين (A,B) مع ميل خط العائد , وتلاحظ ان ميل خط العائد يكون اكبر من معدل الاستبدال الحدي عند النقطة Aمما يعني ان الاستمرار في اضافة y1 هو في مصلحة المنتج الزيادة العائد .وبالعكس عند النقطة B يكون ميل المماس لمنحنى الانتاج الممكن اكبر من معدل وهذا يعني ان التوسع في الانتاج يزيد من العائد . ويكون ميل منحنى الانتاج وخط العائد متساويا عند نقطة التوازن M وبذلك مادامت نسبتا الاحلال الحدي والسوقي غير متساويتين فان المنتج يستطيع الحصول على عائد اكبر بالاتجاه نجو المساواة بين النسبتين .



المحاضرة الثالثة

مثال على ايجاد الكميات المثلى في حالة التعظيم والتدنيه

في حالة التعظيم لدالة الانتاج Q= F(L,K) نضع قيد على دالة التكاليف الاتية:

C= wL+ rK

وفي حالة القيد على خط الكلفة نحول الدالة (1) الى الحاله صفرية وكالأتي

C= wL+ rK……. C-wL-rK=0

تربط هذه الدالة الصفرية بدالة الانتاج غير المقيدة لنحصل على دالة الهدف (2)

دالة الهدف Z= F(L,K) + ʎ((C- wL-rK)

نشتق هذه الدالة بالنسبة ل (μ,K,L) وكالاتي : $W\mu=MPL \quad \mu=\frac{mpl}{w}$

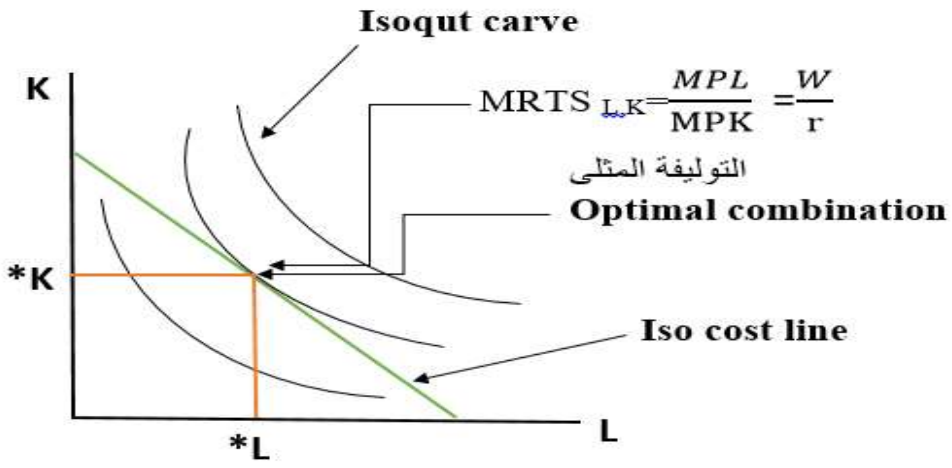
$\frac{dL.C}{dL}$ = MPL- ʎ(W =0 …..(!)

$\frac{dL.C}{dK}$= mpk- ʎ(r =0…(2) $r\mu=MPk \quad \mu=\frac{mpk}{r}$

$\frac{dL.C}{d\mu}$= C- wL- rK=0

ʎ= ʎ= $\frac{mpL}{mpK}=\frac{w}{r}$

$\frac{mpL}{mpK}=\frac{w}{r}$



$\frac{mpL}{\text{mpK}}$

RTS=$\frac{w}{\text{r}}$

في حالة التدنية :-

في حالة التدنية يكون االقيد على دالة الانتاج اي دالة الانتاج هي المقيدة وكالأتي:-

Z= WL+rK + ʎ(Q- F(L,K) دالة الهدف

نشتق هذه الدالة بالنسبة ل (μ,K,L) وكالاتي :

$\frac{dL.C}{\text{dL}}$ =W - MPL ʎ(=0 …..(!) μ=$\frac{W}{MPL}$

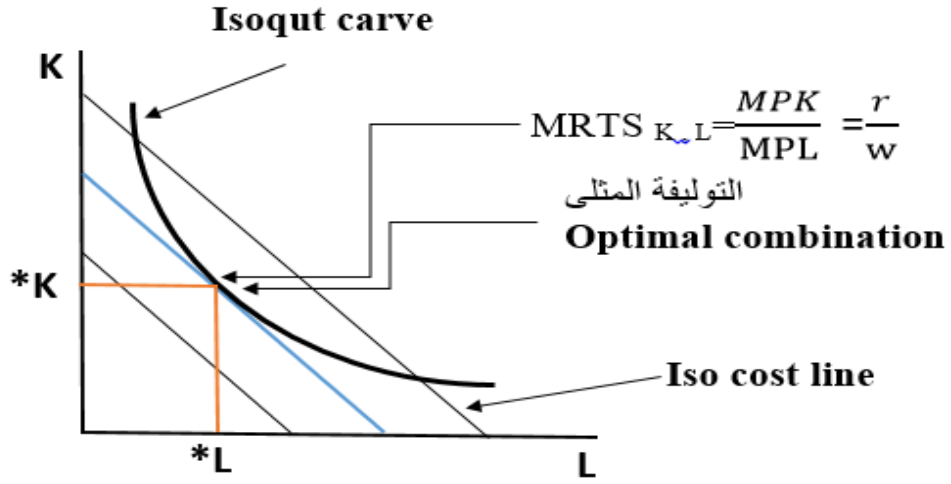
$\frac{dL.C}{\text{dK}}$=r- mpk ʎ(=0…(2) μ=$\frac{mpk}{r}$

$\frac{dL.C}{\text{dμ}}$= Q-F(L,K)=0

ʎ= ʎ= $\frac{W}{\text{mpL}}$=$\frac{r}{\text{MPk}}$

$\frac{mpk}{\text{mpl}}$=

RTS=$\frac{r}{\text{W}}$



س 1:- اذا توفرت لديك دالة الانتاج التالية Q=F(L,K)

ومعادلة الكلفة المقيدة 100= 2L + 5K اوجد الكميات من (L,k) التي تعظم الناتج مع رسم الشكل البياني ؟؟

Q= F(L,K) **دالة الانتاج**

100= 2L+5K

وهنا لابد من تحويل دالة القيد الى دالة صفرية وكالاتي :

100= 2L+ 5K…… 100- 2L -5K=0

نربط دالة الانتاج مع معادلة الكلفة الصفرية وذلك باخذ الدالة الصفرية وضربها ب (μ) ثم اضافتها الى دالة الانتاج لنحصل على دالة الهدف

Z= F(L,K) + ʎ (100-2L-5K) **دالة الهدف**

$\frac{dz}{dL}$= k-2 ʎ =0 …..(1) 2μ= k= μ=$\frac{k}{2}$

$\frac{dz}{dk}$= L-5 ʎ =0 …..(2) 5μ= L= μ=$\frac{L}{5}$

ʎ= ʎ=$\frac{k}{2} = \frac{L}{5}$

2L=5K=(K$\frac{2}{5}$) L

وبتعويض معادلة (4) في معادلة (3) نحصل على

$100-2L-5\frac{2}{5}$ L =0 ……. 4L =100

L= 100/4= 25 …. L= 25 …..(5)

وبتعويض معادلة (5) في معادلة (4) نحصل على :

$K=\frac{2}{5}$ L .. L=25

.. K= 2/5*25=10 … K= 10

الكميات المثلى(10,25) على التوالي

مثال / في حالة المدى القصير لدالة الانتاج

اذا توفرت دالة الانتاج التالية ($Y=-X+3.75X^2-0.4x^3$)

اوجد مستوى (Y,X) عندما يصل كل من (TP,MPX,APX) الى اقصاه

الحل :- نستخرج معادلة APX وذلك بقسمة الناتج على عنصر العمل

1) نشتق APX بالنسبة ل X $APX=\frac{y}{x}$ = -1+3.75X-0.4X²

وكالاتي 4.68= $\frac{dAPX}{dX}$ = 3.75-0.8X =0 = 0.8X-3.75= X=$\frac{3.75}{0.8}$

X= 4.68 مستوى X عندما يصل APX الى اقصاه

وبتعويض (X=4.68) في معادلة APX نحصل على Y عندما يصل APX الى اقصاه

$-1+3.75X-0.4X^2=0$ …. = -1+3.75(4.68) -0.4(4.68)²

7.78 =-1+17.55-8.76= مستوى Yعندما يصل APX الى اقصاه

2) نجد قيمة X,Y عندما يصل MP الى اقصاه وذلك باشتقاق معادلة Y لنحصل على الناتج الحدي MPX ثم اشتقاقها ال MP نحصل على قيمة X ونعوضها في معادلة MPX نحصل على Y عندما يصل MPXالى اقصاه وكالأتي :-

$MPX = \frac{dY}{dX} = -1+7.5X-1.2X^2=0$

وباشتقاق معادلة MPX نحصل على مستوى X عندما يصل MPX اقصاه

$\frac{dMPX}{dX} = 7.5-2.4X=0 \quad = 2.4X=7.5$

$X = \frac{7.5}{2.4} = 3.125$

قيمة X عندما يصل MPX الى اقصاه

بتعويض X= 3.125

في معادلة MPX نحصل على قيمة Y عندما يصل MPX اقصاه

$MPX= -1+7.5X-1.2X^2 \quad = -1+7.5(3.125) -1.2(3.125)^2$

MPX= 10.71 مستوى Y عندما يصل MPX الى اقصاه

بعد ان حصلنا على مستوى (y,x) لكل من mpx,Apx نجد مستوى y,x عندما يصل y الى اقصاه يصل mpx الى الصفر اي يقطع المحور الافقي لذى من خلال معادلة mpx نستطيع ان نحصل على مستوى x عندما يصل y الى اقصاه اعلى مستوى للانتاج وكالأتي :-

$Mpx= -1+7.5X-1.2X^2$

وهذه المعادلة تحل بطريقة الدستور لكونها تربيعية ولكن قبل الحل نضرب المعادلة

ب -1

$1.2X^2-7.5X+1=0$

$X=\frac{b\pm(b)2-4Ac}{2}$

$X=\frac{-7.5\pm(7.5)2-4(1.2)(1)}{2}$

$X=\frac{7.5\pm51.45}{2.4}$

$$X=\frac{7.5\mp7.17}{2.4}$$

$$\text{اما } X=\frac{7.5\mp7.17}{2.4}$$

6.11= مستوى X عندما يصل Tp الى اقصاه

$$\text{او } X=\frac{7.5\mp7.17}{2.4}$$

0.13= تهمل

$$Y= -X+3.75X^2-0.4X^3$$

$$=6.11+3.75(6.11)^2-0.4(6.11)^3$$

$$=139.99+97.34=42.65$$

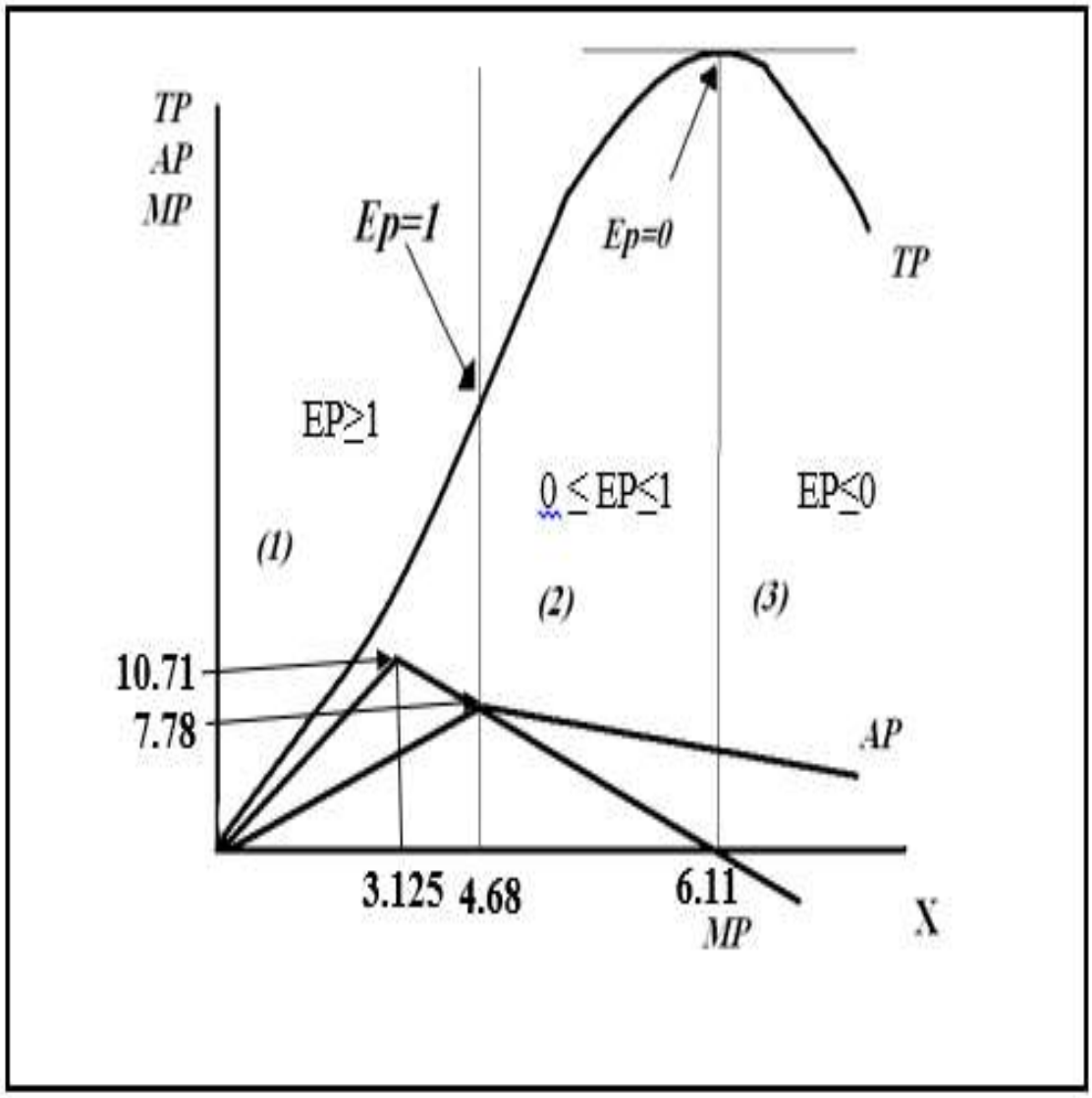
Y=6.11 عندما يصل y الى اقصاه

Y=42.65 عندما يصل Apx الى اقصاه

Y=7.78 عندما يصل mpx الى اقصاه

Y=10.71 المنطقة الاقتصادية المحصورة بين

Y=6.11-4.68 ويفضل المنتج ان ينتج بها


TP
AP
MP
Ep=1
Ep=0
TP
EP≥1
0 ≤ EP≤1
EP≤0
(1)
(2)
(3)
10.71
7.78
AP
3.125
4.68
6.11
MP
X