أساسيات الرياضيات التجارية

وتطبيقاتها الإقتصادية والإدارية

الدكتور
عيد أحمد أبو بكر
رئيس قسم العلوم المالية والمصرفية
كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية
جامعة الزيتونة الأردنية

www.darsafa.net

أساسيات
الرياضيات التجارية
وتطبيقاتها الإقتصادية والإدارية

9789957248598

دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع
المملكة الأردنية الهاشمية - عمّان - شارع الملك حسين
مجمع الفحيص التجاري - هاتف : 4611169 6 962+
تلفاكس: 4612190 6 962+ ص.ب 922762 عمّان 11192 الأردن
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

أساسيات الرياضيات التجارية

وتطبيقاتها الاقتصادية والادارية

الإهداء

إلى زوجتي... حباً ووفاءً

إلى أولادي: منه الله، أحمد، آية، ميس،...

.... اللهم انبتهم نبتا حسنا.

عيد أحمد

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿ إِن كُلُّ مَن فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ إِلَّآ ءَاتِي ٱلرَّحْمَٰنِ عَبْدًا ﴿٩٣﴾ لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴾

سورة مريم الأية (93، 94)

أساسيات الرياضيات التجارية
وتطبيقاتها الاقتصادية والادارية

الدكتور

عيد أحمد أبو بكر

رئيس قسم العلوم المالية والمصرفية

كلية الاقتصاد والعلوم الادارية

جامعة الزيتونه الأردنية

الطبعة الأولى

2013م – 1434هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع ـ عمان

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2012/10/3775)

515
أبو بكر، عيد أحمد
أساسيات الرياضيات التجارية وتطبيقاتها الاقتصادية والإدارية/ عيد أحمد أبو بكر. ـ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع 2012
( ) ص
ر. أ: 2012/10/3775
الواصفات: /الرياضيات// التحليل الاقتصادي/
❖ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى

الطبعة الأولى

2013م – 1434هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري ـ تلفاكس 4612190 6 962+
هاتف: 4611169 6 962+ ص. ب 922762 عمان ـ 11192 الأردن

DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190 -Tel: + 962 6 4611169
P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail:safa@darsafa.net

ISBN 978-9957-24-859-8 ردمك

المحتويات

- مقدمة 15

الفصل الأول: الداله الخطية

- مقدمة 19
- المعادلات.. 19
- الدالة.. 22
- تمثيل الدالة الخطية بيانياً (الحل البياني) 24
- الحل الجبري للداله الخطية........................ 30
- صور أخرى للدالة الخطية وحالات الميل 35
- تحديد معادلة الخط المستقيم (الدالة الخطية) بمعلومية نقطتين............ 39
- تطبيقات اقتصادية على الدالة الخطية........................ 41
  1- تحليل العرض والطلب وتوازن السوق 41
  2- نموذج السلع المرتبطة........................ 56
  3- تحديد الدخل القومي 59
- تمارين 74

الفصل الثاني: الدوال غير الخطية (الدالة التربيعية)

- مقدمة 85
- حل المعادلات التربيعية........................ 86
  1- الحل الجبرى للدالة التربيعية........................ 86
  2- التمثيل البياني للدالة التربيعية (الحل البياني)........................ 93

- تطبيقات اقتصادية على الدالة التربيعية 98
1- توازن السوق غير الخطي 99
2- دالة الايراد ودوال التكاليف ودالة الربح 104
- تمارين 129

الفصل الثالث: الاشتقاق (التفاضل)

- مفهوم التغير.. 139
- متوسط التغير في الدالة 140
- معدل التغير في الدالة.. 141
- ايجاد المشتقة الأولى للدالة باستخدام المبادئ الأولية................... 147
- القواعد الأساسية للاشتقاق 152
- المشتقات العليا للدوال 174
- تمارين 178

الفصل الرابع: تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق

- مقدمة 185
- دالة الأيراد الكلي ودالة الأيراد المتوسط ودالة الايراد الحدي 185
- دالة التكلفة الكلية ودالة التكلفة المتوسطة ودالة التكلفة الحدية 187
- دالة الربح ودالة الربح الحدي 190
- دالة الاستهلاك ودالة الميل الحدي للاستهلاك، دالة الأدخار ودالة الميل الحدي للأدخار 192
- دالة الانتاج ودالة الانتاجية المتوسطة ودالة الانتاجية الحدية للعامل 197
- تمارين 201

الفصل الخامس: النهايات العظمى والصغرى للدوال (الأمثلية)

- مقدمة 209

- تحديد النهايات العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب للدوال باستخـــدام المشتقة الأولى 210
1- تحديد النهاية العظمى للدالة باستخدام المشتقة الأولى............ 210
2- تحديد النهاية الصغري للدالة باستخدام المشتقة الأولى........... 211
3- نقطة الانقلاب (الانعطاف) 213
- تحديد النهايات العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب للدوال باستخدام المشتقة الجزئية الثانية 216
1- تحديد النهاية العظمى للدالة باستخدام المشتقة الثانية 216
2- تحديد النهاية الصغري للدالة باستخدام المشتقة الثانية 217
- تطبيقات اقتصادية على النهايات العظمى والصغرى (الامثلية) للدوال الاقتصادية 221
النهايات العظمى والصغرى للدوال في متغير واحد (الأمثلـــية للـــدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد)........................... 222
- تمارين 256

الفصل السادس: الاشتقاق الجزئي

- مقدمة 263
- المشتقات الجزئية الأولى.. 264
- المشتقات الجزئية الثانية 267
- تمارين 273

الفصل السابع: النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات

- النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات وغيـــر المقيـــدة (الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات وغير المقيدة)................ 279

- النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات والمقيدة (الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات المقيدة) 290
- تمارين 309

الفصل الثامن: التكامل

- مفهوم التكامل 315
- القواعد الأساسية للتكامل 315
- تطبيقات متنوعة على قواعد التكامل.......................... 323
- تحديد ثابت التكامل 328
- تطبيقات اقتصادية على التكامل............................ 329
- التكامل المحدود.. 347
- مفهوم التكامل المحدود................................... 347
- تطبيقات اقتصادية على التكامل المحدود 350
1- فائض المستهلك.. 351
2- فائض المنتج.. 354
- تمارين 361

الفصل التاسع: المحددات والمصفوفات

أولاً: المحددات.. 369
- مفهوم المحددات 369
- شكل المحدد ورتبته....................................... 369
- ايجاد قيمة المحدد: 371
1- ايجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية 371
2- ايجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة 373
- استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية (طريقة كريمر).............. 378
1- حل معادلتين ذات متغيرين................................ 378

2- حل ثلاث معادلات ذات ثلاث متغيرات 382

- تطبيقات اقتصادية على استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية 386

ثانياً: المصفوفات: 397

- تعريف المصفوفه.. 397

- الشكل العام للمصفوفة 398

- أنواع أو أشكال المصفوفات 399

- رياضيات (جبر) المصفوفات 406

1- تساوى المصفوفات 406

2- جمع وطرح المصفوفات 407

3- ضرب المصفوفات.. 410

4- معكوس (مقلوب) المصفوفة 418

- استخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطية......................... 429

أ- حل معادلتين ذات متغيرين.................................... 430

ب- حل ثلاث معادلات ذات ثلاث متغيرات 430

- تطبيقات اقتصادية على استخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطية .. 438

- تمارين 447

- نماذج من أسئلة الاختبارات 450

- المراجع 483

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الخلق والمرسلين سيدنا محمد بن عبد الله ÷ وعلى آله وصحبه والتابعين إلى يوم الدين.

لقد شهدت العلوم الاقتصادية والإدارية تطوراً كبيراً في السنوات الماضية، ويرجع ذلك إلى التطور والتقدم التكنولوجي الهائل، وأستخدام الحاسب الآلي في حل العديد من المشاكل الاقتصادية والادارية، فقد أصبح التحليل الرياضى هو السمة الغالبة على كافة البحوث في العلوم الاقتصادية والادارية في دول العالم المتقدم.

إن استخدام أساليب الرياضيات في التحليل الاقتصادي والإداري قد تطور تطوراً كبيراً خلال السنوات القليلة الماضية، إلا أن اعتماد الباحثين في العالم العربي على أستخدام أساليب التحليل الرياضي في العلوم الاقتصادية والإدارية مازال محدوداً، مما جعل معظم الكتب والابحاث تتصف بالوصيفة والبعد عن الجوانب التطبيقية والتحليل الرياضي.

حيث أن معظم المتغيرات الاقتصادية والإدارية هي متغيرات كمية ترتبط فيما بينها بعلاقات دالية، فقد أصبح أستخدام الأساليب الرياضية ضرورة لا غني عنها إذا ما أردنا التعبير عن هذه العلاقات بدقة ووضوح.

وهذا الكتاب يتناول استخدام أساسيات الرياضيات التجارية (البحتة) في حل العديد من المشاكل الأقتصادية والإدارية، حيث أن الزيادة المضطردة في استخدام الأساليب الرياضية في مجال التطبيقات الاقتصادية والإدارية قد وفّر الكثير

من الوقت والجهد علي متخذى القرارات، ويساعدهم في نفس الوقت في الحصول على نتائج تتسم بدرجة كبيرة من الدقة.

ولقد ظهر في السنوات الأخيرة العديد من الباحثين الذين يحاولون سد الفجوة بين أصحاب المدرسة الوصفية التقليدية وأصحاب المدرسة الكمية الحديثة بالتركيز على أستخدام الأساليب الرياضية في التحليل الاقتصادي والاداري، ويحاول هذا الكتاب أن يساعد أصحاب المدرسة الكمية الحديثة في تحقيق أهدافها، أذ يحتوي على الأساس النظري اللازم لتطبيق الأسلوب الرياضي في التحليل، ويشمل هذه الأساس الأساليب الرياضية الشائعة الأستخدام في العلوم الاقتصادية والإدارية.

يتميز هذا الكتاب عن غيرة من الكتب العربية التي كتبت في هذا المجال، ببساطته وشمولتية وعمق أسلوبة، كما أن هذا الكتاب لا يتناول مجرد المبادئ والبديهات، وأنما يتعمق في التحليل، بالأضافة إلى شموله للعديد من الأمثلة والتطبيقات التي تتدرج من الأسهل إلى الأصعب.

وأخيراً نأمل أن يفيد هذا الكتاب قارئة- سواء كان طالباً أو باحثاً- في استخدام الأساليب الرياضية لفهم وتحليل وصياغة وحل المشاكل الاقتصادية الإدارية.

والله ولي التوفيق

المؤلف

الفصل الأول

الداله الخطية

LINEAR FUNCTION

الفصل الأول
الداله الخطية
Linear Function

مقدمة:

يوجد في حياتنا العملية الكثير من الظواهر والتي يمكن تقسيمها إلى:

- ظواهر ثابتة: وهي الظواهر التي لا تتغير بتغير قيم الظواهر الأخرى.
- ظواهر متغيرة: وهي الظواهر التي تتغير بفعل المؤثرات أو العوامل الطبيعية أو الإنسانية المختلفة خلال فترات زمنية معينة.

والظواهر الثابتة تأخذ قيماً ثابتة بينما الظواهر المتغيرة منها ما يأخذ قيماً كمية فتسمى بمتغيرات كمية (مثل: العمر- الطول- الوزن- حجم الإنتاج- حجم المبيعات- عدد السكان- الارباح- عدد حالات الزواج). ومنها مالا يأخذ قيماً كمية وإنما يتم التعبير عنها بالصفات او الأنواع فتسمى بمتغيرات وصفية أو نوعية (مثل: الحالة الاجتماعية- الحالة التعليمية- المهنة- التقدير- الرآي).

المعادلات:

تتكون المعادلة من طرفين متساويين؛ طرف أيمن وطرف أيسر؛ يحتوي أحد الطرفين أو كلاهما على متغير واحد أو اكثر وكميات ثابتة. فإذا كانت المعادلة تحتوى على متغير واحد وكميات ثابتة تسمى معادلة ذات المتغير الواحد. ولحل هذه المعادلة (أي إيجاد قيمة المتغير) يتم نقل المتغير في طرف واحد والكميات الثابتة في الطرف الآخر مع ملاحظة أنه عند نقل حد من طرف إلى آخر يتم تغيير إشارته. أما اذا كانت المعادلات تحتوى على اكثر من متغير فانه يتم استخدام طريقة الحذف

أو التعويض لحل هذه المعادلات بشرط ان يكون عدد المعادلات يساوى عدد المتغيرات.

والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال: حل المعادلات التالية:

a) $12x - 5x + 8x = 30$

b) $5x + 4x + 3 = 3x + 27$

c) $2Q + 18 = \frac{1}{2}Q + 48$

d) $\frac{1}{2}Q + 15 = -3Q + 36$

الحل

a) $12x - 5x + 8x = 30$

$20x - 5x = 30$

$15x = 30$ وبقسمة الطرفين ÷ 15

$x = 2$

للتأكيد يتم التعويض عن قيمة $x = 2$ نجد أن الطرفين متساويين

b) $5x + 4x + 3 = 3x + 27$

$5x + 4x - 3x = 27 - 3$

$9x - 3x = 24$

$6x = 24$ بالقسمة ÷ 6

$x = 4$

c) $2Q + 18 = \frac{1}{2}Q + 48$

$2Q - \frac{1}{2}Q = 48 - 18$

$2Q - \frac{1}{2}Q = 30$ بضرب المعادلة × 2

$4Q - Q = 60$

$3Q = 60$ بالقسمة على 3

$Q = 20$

c) $\frac{1}{2}Q + 15 = -3Q + 36$

$\frac{1}{2}Q + 3Q = 36 - 15$

$\frac{1}{2}Q + 3Q = 21$ بضرب المعادلة × 2

$Q + 6Q = 42$

$7Q = 42$

$Q = 42/7 = 6$

مثال: حل المعادلات التالية:

a) $4x + 10 = 2x + 20$

b) $1/3Q - 15 = -3Q + 45$

الحل

a) $4x + 10 = 2x + 20$

$4x - 2x = 20 - 10$

$2x = 10$ بالقسمة على 2

$X = 5$

للتأكد:

بالتعويض عن قيمة Q في طرق المعادلة.

b) $1/3Q + 3Q = 45 + 15$

$1/3Q + 3Q = 60$ بضرب المعادلة × 3

$Q + 9Q = 180$

$10Q = 180$

$Q = 18$

للتأكد: بالتعويض عن قيمة Q في طرق المعادلة.

الدالة:

من الظواهر التي نصادفها في حياتنا عادة ما يحدث من بعضها تأثير على البعض الآخر. فإذا تم صياغة هذا التأثير في صورة قانون او معادلة رياضية تفسر العلاقة بين هذه الظواهر ينتج الدالة. كما أن الظواهر المتغيرة والتي يتم التعبير عنها بكميات متغيرة يمكن أن تأخذ أكثر من قيمة في نفس القانون او المعادلة الرياضية، في حين أن الظواهر الثابتة تأخذ قيمة واحدة لا تتغير وتظل ثابتة في القانون أو المعادلة.

على سبيل المثال: (محيط الدائرة= $2\pi x$) نجد أن المقدار 2: كمية ثابتة، π: كمية ثابتة (حيث $\pi = 22/7$)، في حين أن المقدار x: والذي يعبر عن نصف القطر يمثل كمية متغيرة يتغير من دائرة إلى أخرى. فإذا رمزنا إلى محيط الدائرة بالرمز: y ولنصف القطر بالرمز x نجد أن: $y = 2\pi x$ وبالتالي يمكن تقدير قيمة y بمعلومية قيمة x[1].

وبصفة عامة إذا ارتبط المتغيران x، y بعلاقة بينهما بحيث تتحدد قيمة y إذا علمت قيمة x، في هذه الحالة نجد أن y دالة في المتغير x (أي تتغير تبعاً لتغير x) وتسمى x بالمتغير المستقل Dependent Variable ويسمى y بالمتغير التابع أو الدالة Independent Variable، ويعبر عنها بالصورة التالية: $y = f(x)$

وتعتبر العلاقة السابقة دالة وحيدة القيمة، ذلك أن كل قيمة للمتغير المستقل (x) يقابلها قيمة وحيدة فقط للمتغير التابع أو الدالة (y)، كما أن هذه الدالة تم

(1) د. عمر عبد الجواد عبد العزيز، (مذكرات في الرياضيات التجارية: لطلاب جامعة الزيتونة الاردنية، بدون ناشر، عمان، الاردن، 2004.

صياغتها للتعبير عن علاقة ثنائية بين متغيرين؛ وهناك العديد من العلاقات الثنائية والتي يمكن صياغتها على النحو السابق مثل:

- العلاقة بين الدخل والاستهلاك.
- العلاقة بين الدخل والادخار.
- العلاقة بين حجم الإنتاج والأرباح.
- العلاقة بين عدد ساعات العمل وحجم الإنتاج.

كما أن هناك العلاقة بين ثلاث متغيرات أو أكثر مثل:

- العلاقة بين الدخل والاستهلاك والادخار.
- العلاقة بين حجم الإنتاج والتكاليف والأرباح.

في هذه الحالات يكون المتغير التابع (z) دالة في متغيرين (x، y) ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلي: $z = f(x , y)$

مما سبق يمكن القول أن:

الدالة: هي صيغة رياضية للتعبير عن علاقة بين متغيرين أو أكثر أحدهما متغير تابع ويطلق عليه لفظ الدالة والأخر (الأخرى) متغير (متغيرات) مستقلة.

تمثيل الدالة الخطية بيانياً (الحل البياني):

الدالة الخطية هي دالة من الدرجة الأولى وعند تمثيلها بيانيا فإنها تأخذ شكل الخط المستقيم، وتأخذ الصيغة التالية: $dx + ey = f$.

حيث: f, e, d كميات ثابتة؛ مثل هذه العلاقة تسمى دالة أو معادلة خطية، والقيم e , d تسمى المعاملات coefficient، فمعاملات المعادلة: 2 x-y =50 هما 2، 1-.

ولتمثيل الدالة الخطية بيانياً فإنه يكفي فقط معرفة إحداثيات أي نقطتين على الخط المستقيم الممثل للدالة، وبتحديد موقع هاتين النقطتين على الرسم البياني والتوصيل بينهما نحصل على الخط المستقيم.

ولإيجاد إحداثيات نقطتين على الخط المستقيم هناك أكثر من طريقة:

1) الطريقة الاولى: فرض قيمة عددية لأحد المتغيرين وليكن المتغير (x). وبالتعويض عنها في المعادلة نحصل على القيمة المقابلة للمتغير الآخر (y)، وبهذا نكون قد حصلنا على النقطة الأولى ، ثم بتكرار ذلك بفرض قيمة أخرى لهذا المتغير أو ذاك وبالتعويض عنها نحصل على القيمة المقابلة للمتغير الآخر فنحصل على النقطة الثانية:

مثال: إذا كانت العلاقة بين x، y على الصورة:

$$3x + 2y = 7$$

المطلوب: تمثيل الدالة بيانياً.

الحل

- **بوضع $x = 5$ وبالتعويض في الدالة نجد أن:**

$3(5) + 2y = 7$ $\qquad 15 + 2y = 7$

$2y = 7 - 15$ $\qquad 2y = -8$

$y = -4$

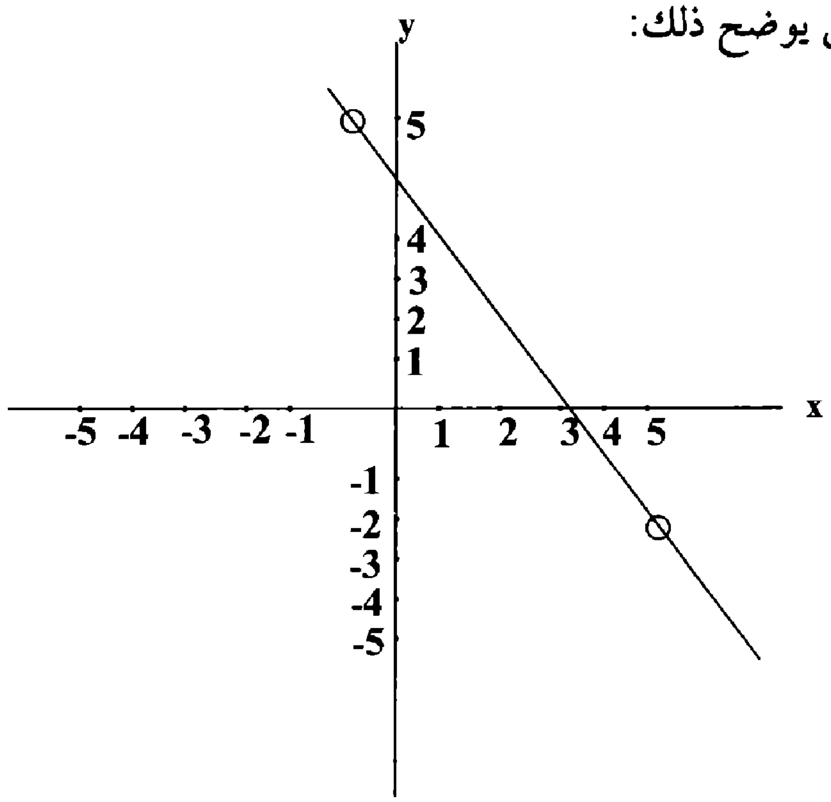
النقطة الأولى هي: (5 , -4)

- بوضع $x = -1$ في الدالة فإن:

$$3(-1) + 2y = 7 \qquad -3 + 2y = 7$$
$$2y = 7 + 3 \qquad 2y = 10$$
$$y = 5$$

النقطة الثانية هي: (-1 , 5)

وبتحديد موقع النقطتين والتوصيل بينهما نحصل على تمثيل الدالة. والرسم البياني التالي يوضح ذلك:



2) الطريقة الثانية: لإيجاد إحداثيات نقطتين على الخط المستقيم تتمثل في تحديد النقطتين الواقعتين على المحورين الأفقي والرأسي وذلك بوضع $x = 0$ ثم تحدد قيمة y فنحصل على النقطة الأولى وإحداثياتها (0 , y)، ثم بوضع $y = 0$ وتحدد قيمة x فنحصل على النقطة الثانية وإحداثياتها (x , 0).

مثال: ارسم معادلة الخط المستقيم

$2x + y = 4$

الحل

- بوضع $x = 0$ فإن:

$2(0) + y = 4 \qquad y = 4$

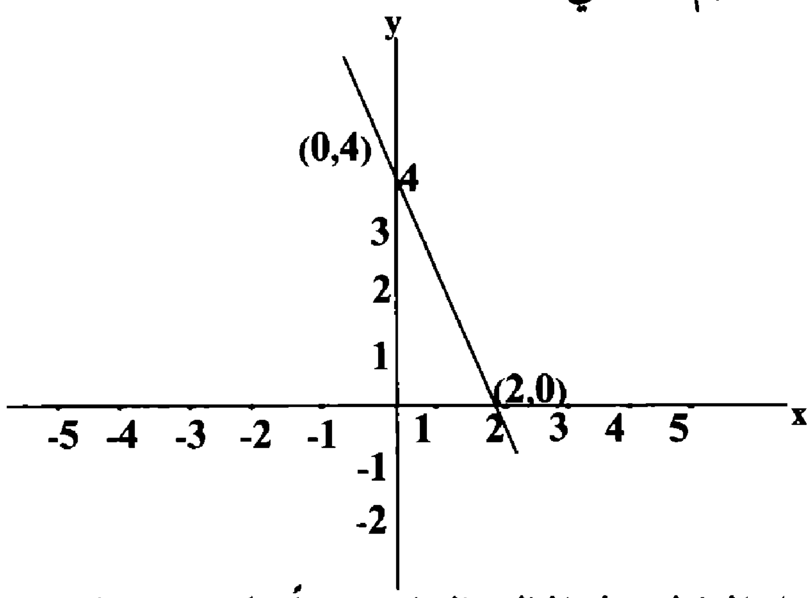
النقطة الأولى هي: $(0 , 4)$

- بوضع $y = 0$ فإن

$2x + 0 = 4 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$

النقطة الثانية هي: $(2 , 0)$

وبتحديد النقطتين على الرسم البياني والتوصيل بينهما نحصل على شكل معادلة الخط المستقيم كما يلي:



عند تمثيل المعادلتين في المثالين السابقين معاً على رسم بياني واحد نجد أنهما يتقاطعان عند النقطة $(1, 2)$ كما في الشكل التالي. ومن السهل التأكد بأن النقطة $(1, 2)$ تحقق المعادلتان معاً، حيث بالتعويض في المعادلتين عن قيمتي y, x $(x = 1, y = 2)$ نجد أن النقطة تحقق المعادلتين كما يلي:

في المعادلة الأولى:

$3x + 2y = 7$

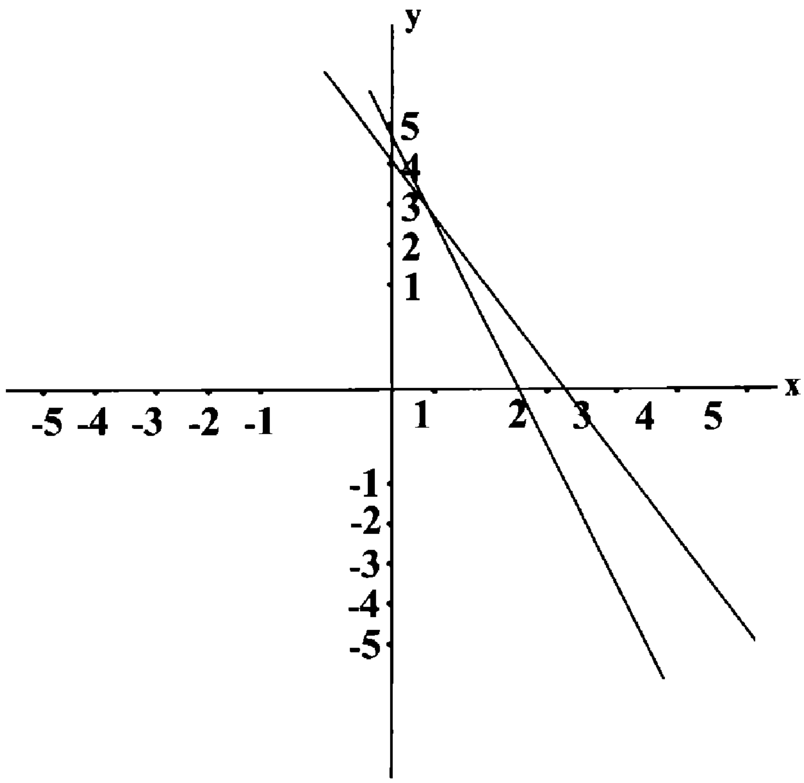
$3(1) + 2(2) = 3 + 4 = 7$

في الحالة الثانية:

$2x + y = 4$

$2(1) + 2 = 2 + 2 = 4$

وتعرف نقطة تقاطع المستقيمان (2 , 1) بحل المعادلتين.



مثال: إذا كانت

$2x + \frac{1}{2}y = 22$

$5x + y = 50$

المطلوب: تمثيل المعادلتين بيانياً (على رسم بياني واحد) ومن الرسم أوجد حل المعادلتين.

الحل

المعادلة الأولى:

$2x + \frac{1}{2}y = 22$

- بوضع $x = 0$

وبالضرب في 2 $\frac{1}{2}y = 22$ $2(0) + \frac{1}{2}y = 22$

∴ النقطة الأولى هي: $(0 , 44)$ $y = 44$

- بوضع $y = 0$

$2x = 22$ $2x + \frac{1}{2}(0) = 22$

∴ النقطة الثانية هي: $(11 , 0)$ $x = 11$

المعادلة الثانية:

$5x + y = 50$

- بوضع $x = 0$ $y = 50$

النقطة الأولى هي: $(0 , 50)$

- بوضع $y = 0$ $5x = 50$

النقطة الثانية هي: $(10 , 0)$ $x = 10$

بوضع هذه البيانات في جدولين كما يلي:

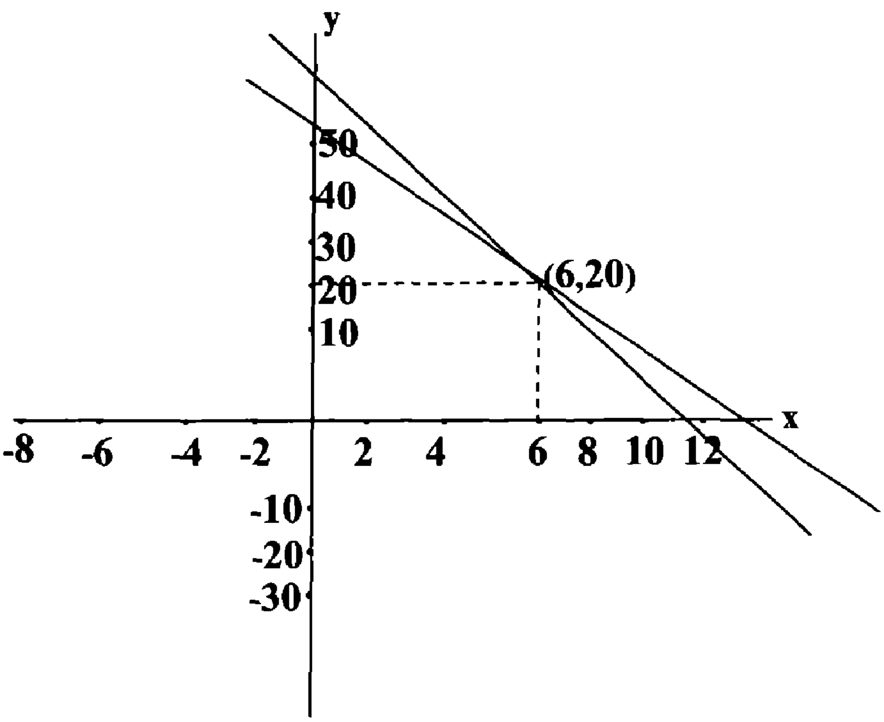
المعادلة الأولى

x	0	11
y	44	0

المعادلة الثانية

x	0	10
y	50	0

وبتحديد هذه النقاط على الرسم البياني لكل معادلة على حده نحصل على الشكل التالي:



من الشكل السابق يتضح أن المستقيمان يتقاطعان عند نقطة إحداثياتها الأفقية (6) والرأسية (20). وعلى هذا فإن حل المعادلتين هو: $x = 6\ ,\ y = 20$

وللتأكد يمكن التعويض عن قيمتي y , x في أي من المعادلتين:

المعادلة الأولى:

$$2x + \tfrac{1}{2}y = 22$$

$$2(6) + \tfrac{1}{2}(20) = 12 + 10 = 22$$

المعادلة الثانية:

$$5x + y = 50$$

$$5(6) + 20 = 30 + 20 = 50$$

أي أن النقطة (20 , 6) تحقق المعادلتين معاً.

الحل الجبري للدالة الخطية:

لحل معادلتين خطيتين جبرياً (أي إيجاد قيمة المتغيرين وليكن (x , y) يشترط ان يكون عدد المعادلات يساوى عدد المتغيرات، ويمكن استخدام طريقة الحذف أو التعويض وتتلخص فيما يلي:

- توحيد معاملات أحد المتغيرين (x أو y).
- طرح أو جمع المعادلتين جبرياً للتخلص من أحد المتغيرين فنحصل على معادلة ذات متغير واحد.
- بحل المعادلة ذات المتغير الواحد فنحصل على قيمة هذا المتغير.
- بالتعويض في أي من المعادلتين عن قيمة المتغير المعلوم فنحصل على قيمة المتغير الآخر.

والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال: حل المعادلات التالية جبريا:

a) $4x + y = 44$

$5x + y = 50$

b) $3x + 2y = 9$

$-2x + y = 1$

الحل

a) $4x + y = 44 \quad \ldots (1)$

$5x + y = 50 \quad \ldots (2)$

بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى:

$4x + y = \quad 44$

$\pm 5x \pm y = \pm 50$

---------------- بالطرح

$-x = -6 \quad \therefore \quad x = 6$

بالتعويض عن قيمة $(x = 6)$ في المعادلة الثانية

$5(6) + y = 50 \quad \therefore \quad 30 + y = 50$

$\therefore\ y = 50 - 30 = 20.$

$\therefore$ حل المعادلتين هو $(6\ ,\ 20)$.

b) $3x + 2y = 9 \quad \ldots (1)$

$-2x + y = 1 \quad \ldots (2)$

بضرب المعادلة رقم (2) في 2

$$3x + 2y = \ \ 9$$

$$\pm 4x \pm 2y = \pm 2$$

بالطرح ------------------

$$7x = 7$$

$$\therefore\ x = 7/7 = 1$$

بالتعويض بقيمة $(x = 1)$ في المعادلة رقم 1

$3(1) + 2y = 9 \quad \therefore \quad 3 + 2y = 9$

$2y = 9 - 3 \quad \therefore \quad 2y = 6$

$\therefore\ y = 3$

حل المعادلتين هو $(1\ ,\ 3)$

مثال: حل المعادلات التالية جبرياً:

1) $x + 3y - z = 4$

$3x - y + z = 4$

$2x + y + 2z = 10$

2) $x - 3y + 2z = 5$

$3x - 2y + z = 20$

$4x + y - z = 35$

الحل

$$1)\ x + 3y - z = 4 \quad \ldots (1)$$
$$3x - y + z = 4 \quad \ldots (2)$$
$$2x + y + 2z = 10 \quad \ldots (3)$$

بجمع المعادلتين 1، 2 ينتج أن:

$$x + 3y - z = 4$$
$$3x - y + z = 4$$

------------------------ بالجمع

$$4x + 2y = 8 \quad \ldots (4)$$

بضرب الأولى في 2 وجمعها مع المعادلة الثالثة:

$$2x + 6y - 2z = 8$$
$$2x + y + 2z = 10$$

------------------------ بالجمع

$$4x + 7y = 18 \quad \ldots (5)$$

بطرح المعادلة رقم (4) من المعادلة رقم (5)

$$4x + 7y = 18$$
$$4x + 2y = 8$$

------------------ بالطرح

$$5y = 10 \qquad y = 2$$

بالتعويض عن قيمة y في المعادلة رقم (4)

$$4x + 2(2) = 8 \qquad 4x + 4 = 8$$

$4x = 8 - 4 \qquad 4x = 4$

$x = 1$

بالتعويض عن قيمتي x، y في المعادلة رقم (1)

$x + 3y - z = 4$

$1 + 3(2) - z = 4 \qquad 1 + 6 - z = 4$

$7 - 4 = z \qquad z = 3$

∴ حل المعادلات هو: $x = 1 \ , \ y = 2 \ , \ z = 3$

2) $x - 3y + 2z = 5 \quad \dots (1)$

$3x - 2y + z = 20 \quad \dots (2)$

$4x + y - z = 35 \quad \dots (3)$

بضرب المعادلة رقم (3) في 2 وجمعها مع المعادلة رقم (1)

$8x + 2y - 2z = 70$

$x - 3y + 2z = 5$

بالجمع --------------------------

$9x - y = 75 \quad \dots (4)$

بجمع المعادلتين (3)، (2) ينتج أن:

$3x - 2y + z = 20$

$4x + y - z = 35$

بالجمع -----------------------

$7x - y = 55 \quad \dots (5)$

بطرح المعادلة رقم (5) من المعادلة رقم (4):

$9x - y = \quad 75$

$\pm 7x \pm y = \pm 55$

بالطرح ------------------

$2x = 20 \qquad\qquad x = 10$

بالتعويض عن قيمة x في المعادلة رقم (4)

$9(10) - y = 75$

$90 - 75 = y \qquad\qquad y = 15$

وبالتعويض عن قيمتي x، y في المعادلة رقم (1)

$x - 3y + 2z = 5$

$10 - 3(15) + 2z = 5$

$-10 + 45 + 5 = 2z$

$2z = 40 \qquad\qquad z = 20$

∴ حل المعادلات هو:

$x = 10 \quad , \quad y = 15 \quad , \quad z = 20$

ويمكن للتأكد من صحة الحل التعويض بقيم المتغيرات الثلاث في أي من المعادلات الأصلية ولتكن المعادلة رقم 3

$4X + Y - Z = 35$

$4(10) + 15 - 20 = 40 + 15 - 20 = 55 - 20 = 35$

صور أخرى للدالة الخطية وحالات الميل:

رأينا الصورة العامة للدالة الخطية:

$dx + ey = f$

يمكن استنتاج صورة أخرى لها وهي:

$y = ax + b$

حيث a، b كميات ثابتة.

a: تمثل ميل الخط المستقيم الممثل للدالة.

b: تمثل الجزء المقطوع من المحور الرأسي.

ولبيان معنى كل من a ، b نفرض أن لدينا المعادلة الخطية

$$y = 4x - 5$$

فإذا كانت $x = 0$ فإن

$$y = 4(0) - 5 = -5$$

أي ان هذا الخط يمر بالنقطة (-5 , 0)، وهذا يعني أن الخط المستقيم الممثل لهذه الدالة يقطع المحور الرأسي عند النقطة (-5 , 0) وبالتالي يكون الجزء المقطوع من المحور الرأسي هو (-5) وهي قيمة b في الدالة. بمعنى أن b في المعادلة: $y = ax + b$ تمثل الجزء المقطوع من المحور (y).

بينما قيمة a في المعادلة: $y = ax + b$ والتي تمثل معامل x فهي تعبر عن ميل الخط المستقيم الممثل للدالة (ويقصد به قيمة التغير في الدالة y عند تغير المتغير المستقل x بوحدة واحدة).

على سبيل المثال: في المعادلة $y = 4x - 5$

وبالتعويض عن قيمة x بقيمتين متتاليتين ولتكن 4، 5 نجد أن:

$$y = 4(4) - 5 = 16 - 5 = 11$$

$$y = 4(5) - 5 = 20 - 5 = 15$$

أي أنه عند تغير قيمة x بوحدة واحدة من 4 الى 5 تبعها تغير قيمة الدالة y بمقدار (4) من 11 إلى 15.

وبالتعويض عن قيمة x بقيمتين أخريين متتاليتين ولتكن 10 ، 11 نجد أن:

$$y = 4(10) - 5 = 40 - 5 = 35$$

$y = 4(11) - 5 = 44 - 5 = 39$

وأيضاً عند تغير قيمة x بوحدة واحدة من 10 إلى 11 تغيرت قيمة y بمقدار 4 من 35 الى 39.

وفي المعادلة:

$y = -3x + 20$

وبالتعويض عن قيمة x بقيمتين متتاليتين ولتكن 5، 4

$y = -3(4) + 20 = -12 + 20 = 8$

$y = -3(5) + 20 = -15 + 20 = 5$

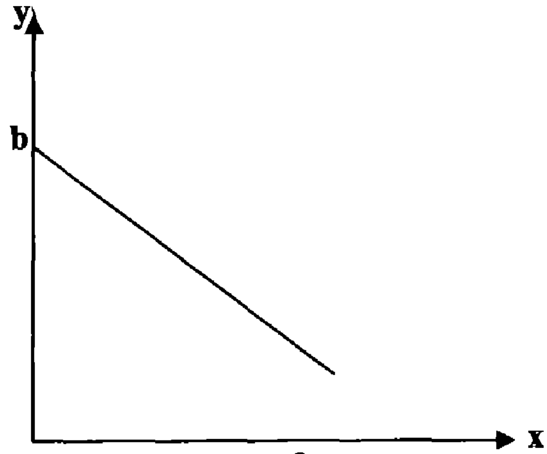
وهذا يعني أنه عند زيادة x بمقدار وحدة واحدة من 4 إلى 5 انخفضت قيمة y بمقدار 3 وحدات نظراً لأن a سالبة (-3).

حالات الميل:

1- إذا كانت $a > 0$ أي موجبة فإن ميل الخط المستقيم يكون موجب وبالتالي تأخذ المعادلة شكل خط مستقيم متزايد (دالة تصاعدية).

2- إذا كانت $a < 0$ أي سالبة فإن ميل الخط المستقيم يكون سالب وبالتالي تأخذ المعادلة شكل خط مستقيم متناقص (دالة تنازلية).

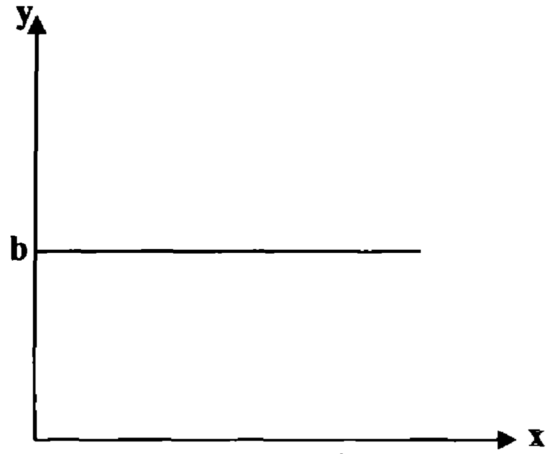
3- إذا كانت $a = 0$ أي ان $y = b$ فيكون الميل = صفر وتأخذ المعادلة شكل خط مستقيم يوازي المحور الأفقي. والشكل التالي يوضح حالات الميل الثلاث:



$a < 0$

(سالبة)

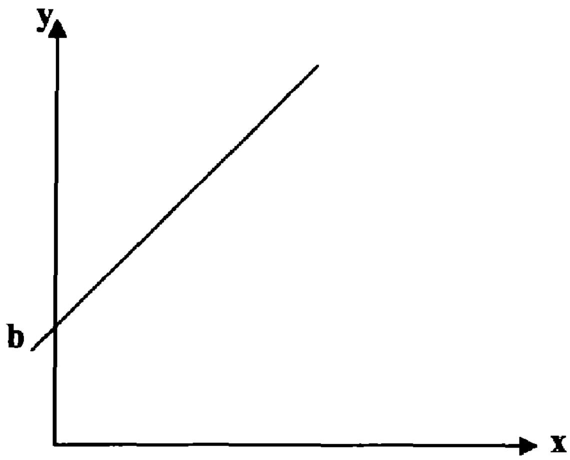
الدالة متناقصه



$a = 0$

$y = b$

الدالة توازي المحور الافقى



$a > 0$

(موجبة)

الدالة متذايدة

تحديد معادلة الخط المستقيم (الدالة الخطية) بمعلومية نقطتين عليه :

إذا علم إحداثيات نقطتين واقعتان على الخط المستقيم الممثل للدالة: $y = f(x)$ (x_1 , y_1) ، (x_2 , y_2) فإنه يمكن استنتاج صيغة العلاقة اللازمة لتحديد الدالة

بالتعويض عن قيم x، y بالنقطتين في الدالة الخطية: $y = ax + b$ يتكون لدينا ثلاث معادلات هي:

$$y = ax + b \quad \ldots (1)$$

$$y_1 = ax_1 + b \quad \ldots (2)$$

$$y_2 = ax_2 + b \quad \ldots (3)$$

- بطرح المعادلة رقم (2) من المعادلة رقم (1) يتضح أن

$$y - y_1 = ax - ax_1$$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \ldots (4)$$

بطرح المعادلة رقم (2) من المعادلة رقم (3) ينتج أن:

$$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots (5)$$

- من المعادلتين 4، 5 ينتج أن:

ومن هذه العلاقة يمكن استنتاج معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- من المعادلة رقم (4) يمكن استنتاج معادلة الخط المستقيم إذا علم الميل ونقطة.

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (-3, -4)؛ (1,8)

الحل

$x_1 = 1 \quad , \quad y_1 = 8$

$x_2 = -3 \quad , \quad y_2 = -4$

وبالتعويض عن إحداثيات النقطتين في الصيغة التالية:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \therefore \qquad \frac{y-8}{x-1} = \frac{-4-8}{-3-1}$$

$$\frac{y-8}{x-1} = \frac{-12}{-4}$$

$$-4y + 32 = -12x + 12$$

$$-4y = -12x + 12 - 32$$

$$-4y = -12x - 20$$

وبالقسمة على 4- نجد أن : $y = 3x + 5$

مثال: إذا كانت تكاليف الانتاج الكلية لأحد المشروعات تمثلها دالة خطية في حجم الإنتاج، فإذا علمت أنه اذا انتج المشروع 5 وحدات كانت التكاليف الكلية 300$ أما إذا أنتج 20 وحدة كانت التكلفة الكلية 450$.

المطلوب: تقدير التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج 100 وحدة.

الحل

من هذا المثال يتضح أن:

التكاليف الكلية دالة في حجم الانتاج أي ان التكاليف الكلية متغير تابع ويأخذ الرمز (y) وحجم الإنتاج متغير مستقل ويأخذ الرمز (x).

كما يتضح أن هناك نقطتان تحققان معادلة الخط المستقيم هما:

$x_1 = 5 \quad , \quad y_1 = 300$

$x_2 = 20 \quad , \quad y_2 = 450$

ومن هاتين النقطتين يمكن استنتاج معادلة الخط المستقيم باستخدام الصيغة التالية:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-300}{x-5}=\frac{450-300}{20-5}$$

$$\frac{y-300}{x-5}=\frac{150}{15}$$

$$(y-300)\,15=(x-5)\,150$$

$$y-300=10x-50$$ بالقسمة على 15 :

$$y=-50+10x+300$$

$$y=10x+250$$

ولإيجاد التكاليف الكلية اللازمة لإنتاج 100 وحدة يتم التعويض في المعادلة عن $x = 100$ وإيجاد قيمة y المناظرة.

$$y=10(100)+250=1250$$

أي أن حجم التكاليف اللازمة لإنتاج 100 وحدة هي 1250 .

- تطبيقات اقتصادية على الدالة الخطية:

1. تحليل العرض والطلب وتوازن السوق:

الدالة $y = f(x)$ تعني أن y دالة في x، بمعنى أن قيمة y تتحدد في ضوء قيمة x حيث تمثل x المتغير المستقل وy المتغير التابع. وبمعنى آخر أن قيمة y تتغير تبعاً لتغير x. والأمثلة على العلاقة بين متغيرين كثيرة ومتعددة ومنها العلاقة بين الكمية والسعر لسلعة ما، وفيما يتعلق بهذه العلاقة نجد أن:

يرى الرياضيون بالنسبة لدالة الطلب: أن الكمية المطلوبة من سلعة ما دالة في سعرها وتأخذ العلاقة بينهما الصورة التالية: $Q = f(P)$

حيث أن: Q: الكمية، P: السعر.

وتعني أن السعر متغير مستقل والكمية متغير تابع.

بينما يرى الاقتصاديون ضرورة التأثير على السعر من خلال التحكم في الكمية المطلوبة من السلعة، وتأخذ دالة الطلب الصورة: $p = f(Q)$

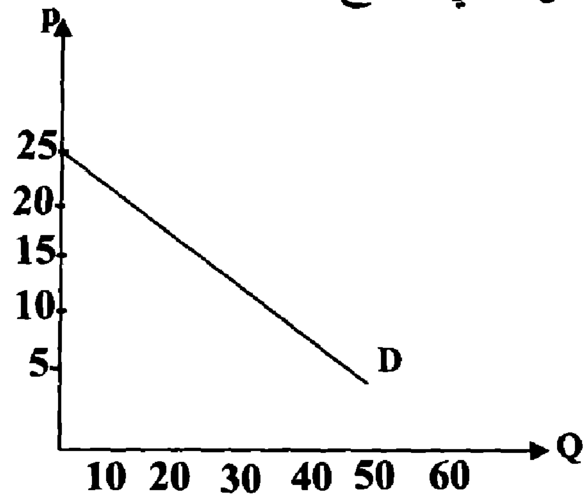
بمعنى أن السعر دالة في الكمية. وفي ضوء هذه العلاقة يمكن تحليل كل من دالتي الطلب والعرض كما يلي:

(a) دالة الطلب:

إذا كانت دالة الطلب على صورة دالة خطية فانها تأخذ الشكل:

$$P = -aQ_d + b$$

حيث أن: $a < 0$ سالبة (الميل سالب). وعند تمثيلها بيانياً فإنها تأخذ شكل خط مستقيم متناقض، ويرجع ذلك إلى العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة من سلعة وسعرها. والشكل التالي يوضح العلاقة بين السعر والكمية.

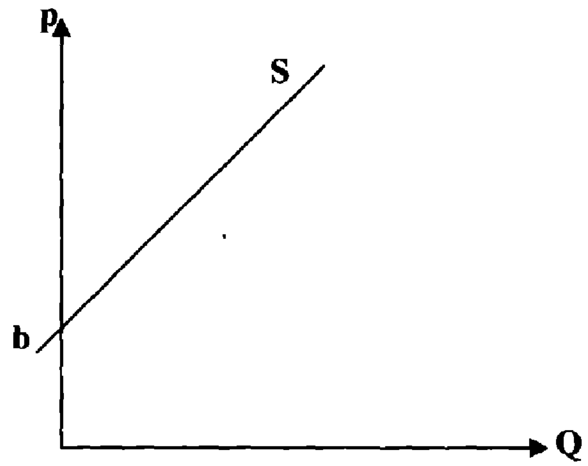


(b) دالة العرض:

إذا كانت دالة العرض على صورة دالة خطية فإنها تأخذ الشكل:

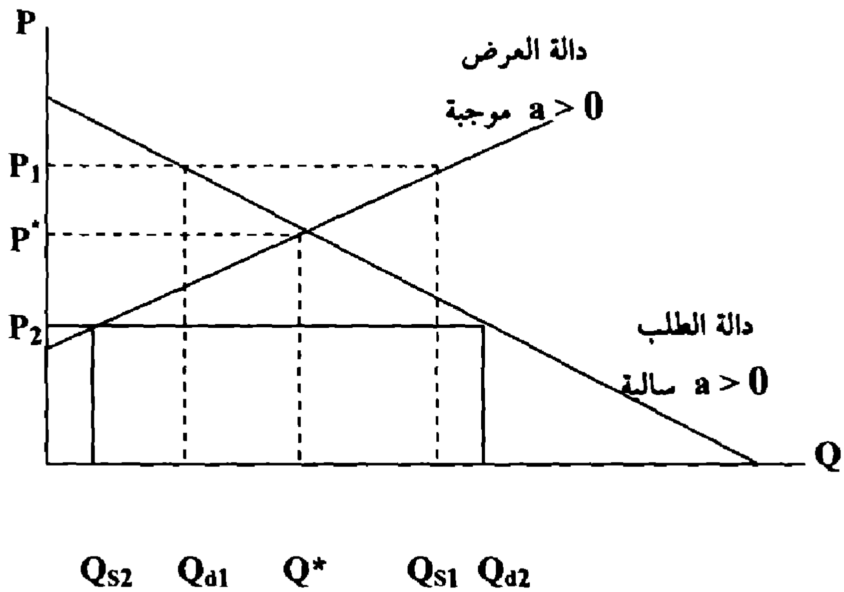
$$P = a\,Q_S + b$$

حيث أن: $a > 0$ موجبة (الميل موجب). وعند تمثيلها بيانياً تأخذ شكل خط مستقيم متزايد، نظراً لأن العلاقة بين سعر السلعة والكمية المعروضة منها علاقة طردية.



(c) توازن السوق

والشكل التالي يبين التمثيل البياني لكل من دالتي الطلب والعرض معاً:



وتعرف نقطة التقاء معادلتي الطلب والعرض بنقطة التوازن (الوضع التوازني للسوق) حيث يتحدد عندها السعر التوازني (P*) والكمية التوازنية (Q*)؛ ويلاحظ ان أي انحراف عن الوضع التوازني سوف يدفع قوى السوق إلى التوازن مرة أخرى.

على سبيل المثال، عند السعر P_1 (وهو أعلى من السعر التوازني P*) نجد أن الكمية المعروضة Qs_1 أكبر بكثير من الكمية المطلوبة Q_{D1} عند هذا السعر مما يترتب عليه وجود مخزون كبير من السلعة لن يباع، وبالتالي يفقد المنتج لجزء كبير من الانتاج مما يدفع المنتج إلى وقف الانتاج، وأيضاً قد يترتب على ذلك خروج عدد كبير من المنشآت من سوق إنتاج السلعة فيقل المعروض من السلعة وتعود إلى وضع التوازن، وهذا يفسر ما يقال دائما أن قوى العرض الطلب تحقق التوازن تلقائياً.

مثال: إذا كانت دالتي الطلب والعرض لسلعة ما على الصورة التالية

$$\tfrac{1}{2} P + Q_d = 65$$

$$2P - Q_s = 60$$

حيث أن P تمثل السعر

Q_d تمثل الكمية المطلوبة

Q_s تمثل الكمية المعروضة

المطلوب:

1- حدد السعر التوازني والكمية التوازنية بيانياً ثم تأكد من ذلك جبرياً

2- إذا قررت الحكومة فرض ضريبة ثابتة على كل سلعة تقدر بـ 5 دنانير، وضع

أثر فرض الضريبة على وضع التوازن ثم بيّن كيفية توزيع الضريبة على وضع التوازن ثم بيّن كيفية توزيع الضريبة بين المنتج والمستهلك.

الحل

- التوازن جبرياً:

1- دالة الطلب

$$\tfrac{1}{2}P + Q_d = 65$$

$$\tfrac{1}{2}P = 65 - Q_d$$

$$P = 130 - 2Q_d$$

2- دالة العرض

$$2P - Q_s = 60$$

$$2P = 60 + Q_s$$

$$P = 30 + \tfrac{1}{2}Q_s$$

عند التوازن فإن: $Q_d = Q_s = Q$

وعلى ذلك فإن:

دالة الطلب: $P = 130 - 2Q$

دالة العرض: $P = 30 + \tfrac{1}{2}Q$

عند التوازن فإن

$$130 - 2Q = 30 + \tfrac{1}{2} Q$$

$$-2Q - \tfrac{1}{2} Q = 30 - 130$$

$$-2\tfrac{1}{2}\ Q = -100$$

$$-\frac{5}{2} Q = -100$$

بالضرب *2

$$-5Q = -200$$

$$Q = \frac{-200}{-5} = 40$$

بالتعويض في احدى المعادلتين نجد أن:

$$P = 130 - 2(40) = 50$$

وبذلك فأن السعر التوازنى والكمية التوازنية هما:

$$Q^* = 40 \quad , \quad P^* = 50$$

- التوازن بيانا

رسم دالة الطلب ودالة العرض:

1- دالة الطلب: $P = 130 - 2Q$

عندما $Q = 0$ فان: $P = 130$

عندما $P = 0$ فان: $0 = 130 - 2Q$

$$130 = 2Q$$

$$Q = \frac{130}{2} = 65$$

∴ نقاط الحل هي $(0, 130)$ ، $(65, 0)$ ، يمكن وضعها في الجدول:

Q	0	65
P	130	0

2- دالة العرض: $P = 30 + \frac{1}{2} Q$

عندما $Q=0$ فان $P = 30$

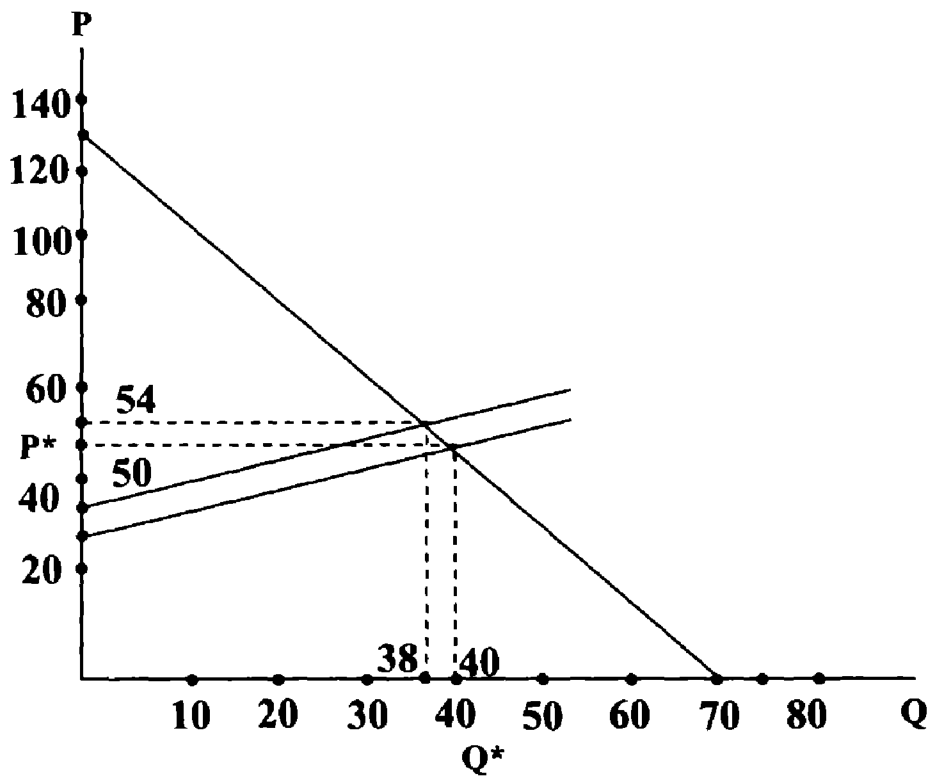
عندما $Q=50$ فأن $P = 30 + \frac{1}{2}(50)$

$p = 30 + 25 = 55$

∴ نقاط الحل هي $(0, 30)$ ، $(50, 55)$، يمكن وضعها في الجدول:

Q	0	50
P	30	55

3- رسم دالتي الطلب والعرض كما يلي:



في حالة فرض ضريبة ثابتة على كل سلعة نجد أن الضـريبة تـؤثر علـى دالـة العرض فقط كما يلي:

$$P-5=30+\frac{1}{2}Q$$

$$P=30+\frac{1}{2}Q+5$$

$$P=35+\frac{1}{2}Q$$

وبذلك فإن:

دالة الطلب: (كما هي): $P=130-2Q$

دالة العرض (بعد الضريبة): $P=35+\frac{1}{2}Q$

- تحديد التوازن (السعة التوازني والكمية التوازنية) بعد فرض الضريبة جبرياً:

$$130-2Q=35+\frac{1}{2}Q$$

$$-2Q-\frac{1}{2}Q=35-130$$

$$-2\frac{1}{2}Q=-95$$

$$-\frac{5}{2}Q=-95$$

بالضرب * 2

$$-5Q=-190$$

$$Q^{*}=\frac{-190}{-5}=38$$

بالتعويض نجد أن:

$$P^{*}=130-2(38)=54$$

وبذلك نجد أن الضـريبة أدت إلى انتقـال منحنـى العـرض إلى أعلـى فيرتفـع السعر التوازن وتقل الكمية التوازنية.

ويمكن رسم دالة العرض لتحديد التوازن بعد الضريبة كما يلي:

$$P=35+\tfrac{1}{2}Q$$

عندما: $0=Q$ فان $P=35$

عندما: $50=Q$ فان $P=60$

النقاط هي $(0\ ,35)$ ، $(50\ ,60)$، يمكن وضعها في الجدول:

50	0	Q
60	35	P

نجد أن السعر التوازنى والكمبة التوازنية كما يلي:

بعد الضريبة	قبل الضريبة	بيان
38	40	Q^*
54	50	P^*

نجد أن الكمية التوازنية قد انخفضت من 40 وحدة إلى 38 وحدة، بينما ارتفع السعر من 50 دينار إلى 54 دينار، وبذلك فإن الضريبة توزع بين المنتج والمستهلك كما يلي:

الضريبة (5)

ما يتحمله المستهلك

يتحمل الفرق بين سعري السلعة بعد الضريبة وقبل الضريبة:

54-50 =4

ما يتحمله المنتج

يتحمل الفرق بين الضريبة ومقدار ما تحمله:

5-4 =1

مثال: إذا كانت دالتي الطلب والعرض لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = -2\,Q_D + 56$$
$$P = \tfrac{1}{2}\,Q_S + 36$$

المطلوب:

1- أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية بيانياً ثم تأكد من الحل جبرياً.

2- إذا فرضت الحكومة ضريبة ثابتة على كل سلعة تقدر بـ 5$، بين تأثير الضريبة على كل من السعر والكمية عند وضع التوازن.

الحل

- التوازن جبرياً:

عند التوازن نجد أن: $Q_D = Q_S = Q$

أي أن الكمية المطلوبة من سلعة تساوي الكمية المعروضة من نفس السلعة. وبذلك يكون دالتي الطلب والعرض كما يلي:

$$P = -2Q + 56 \quad \ldots.\ (1)$$
$$P = \tfrac{1}{2}Q + 36 \quad \ldots.\ (2)$$

وحيث أن كلا المعادلتين= P ∴ الطرفان متساويان.

$$\tfrac{1}{2}Q + 36 = -2Q + 56$$
$$2\tfrac{1}{2}Q = 56 - 36 = 20 \qquad \therefore\ 5/2Q = 20$$

بالضرب * (2)

$$5Q = 40$$
$$\therefore Q = 40/5 = 8$$

وبالتعويض عن قيمة Q في احدى المعادلتين: (المعادلة رقم 2)

$$P = \tfrac{1}{2}(8) + 36 = 40$$

$Q^* = 8 \quad , \quad P^* = 40$

- **التوازن بيانياً:**

دالة الطلب: $P = -2Q + 56$

- بوضع $Q = 0$ ، $P = 56$ $\therefore$ النقطة الأولى $(0 , 56)$
- بوضع $P = 0$

$0=-2Q = 56$

$2Q = 56$

$Q = 56/2 = 28$

تكون النقطة الثانية هي $(0 , 28)$، وبذلك فإن:

Q	0	28
P	56	0

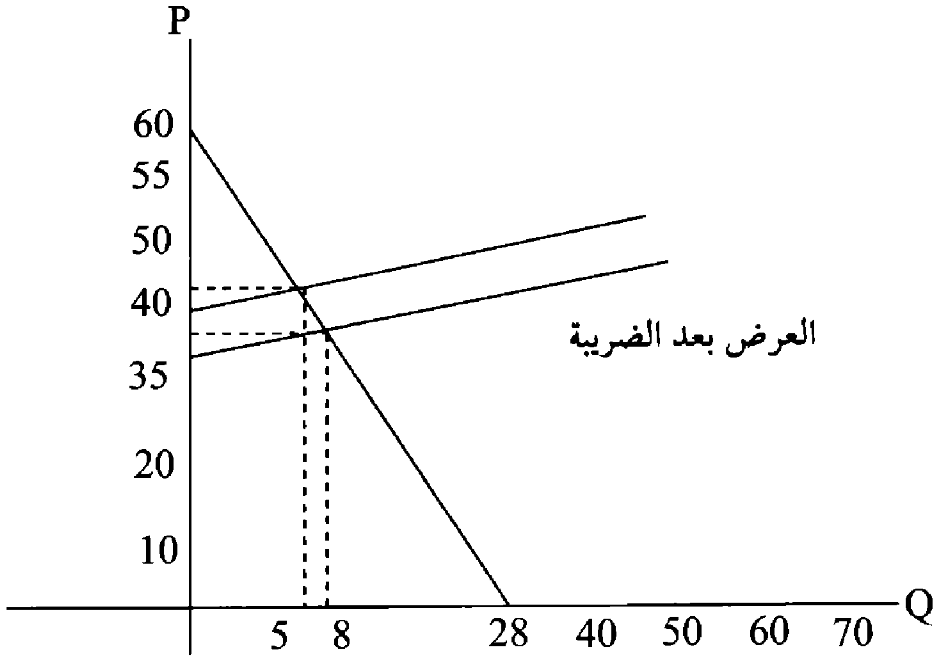
دالة العرض: $P = ½Q + 36$

- بوضع $Q = 0$ ، $P = 36$ $\therefore$ النقطة الأولى $(0 , 36)$
- يوضع $Q = 20$ ، نجد أن: $p = ½ (20) + 36$

$P = 10+ 36 = 46$

تكون النقطة الثالثة هي (46، 20)، وبذلك فإن:

Q	0	20
P	36	46



إذا فرضت الحكومة ضريبة ثابتة على كل سلعة تقدر بـ 5$، فإن ذلـك يـؤثر عل دالة العرض حيث تفرض الضريبة وتحصل من المنتج مباشـرة وبالتـالي تصـبح دالة العرض الجديدة كما يلي:

$P - 5 = ½Q_s + 36$

$P = ½Q_s + 41$

وعند التوازن: $Q = Q_D = Q_S$

$P = -2Q + 56$

$P = ½Q + 41$

$½Q + 41 = -2Q + 56$

$2 ½Q = 56 - 41$

$5/2Q = 15 \quad \therefore \quad Q^* = 6$

وبالتعويض عن قيمة Q^*

$P^* = ½(6) + 41 \qquad P^* = 44.$

- دالة العرض الجديدة بيانياً:

$P = ½Q + 41$

بوضع $Q = 0$ ، $P = 41$ النقطة الأولى (0 , 41).

بوضع $Q = 20$ ، $p = 51$ النقطة الثانية (20, 51)

وبرسم معادلة العرض الجديدة نجد أن التقاء معادلتي العرض والطلب عند النقطة (44 , 6). أي أن السعر ارتفع من $P = 40$ إلى $P = 44$، وانخفضت الكمية من $Q = 8$ إلى $Q = 6$، وهذا يعني أن الضريبة وقدرها 5$ توزعت كما يلي: تحمل المستهلك 4$، وتحمل المنتج 1$.

مثال: إذا كانت دالتي الطلب والعرض لسلعة ما على الصورة التالية:

$P = -2Q_d + 70$

$P = 1/3Q_S + 35$

المطلوب:

1) إيجاد السعر التوازني والكمية التوازنية بيانياً ثم تأكد من الحل جبرياً.

2) إذا قررت الحكومة فرض ضريبة ثابتة على كل سلعة تقدر بـ 7$ بيّن تأثير الضريبة على وضع التوازن ثم بين كيفية توزيع الضريبة بين المنتج والمستهلك؟

الحل

1) قبل الضريبة:

- إيجاد السعر والكمية عند التوازن جبرياً:

عند التوازن $Q_D = Q_S = Q$

$P = -2Q + 70 \quad .... (1)$

$P = 1/3Q + 35$ .... (2)

بحل المعادلتين 1، 2 جبريا ينتج أن:

$1/3Q + 35 = -2Q + 70$

$2Q + 1/3Q = 70 - 35$

$7/3Q = 35$ بالضرب في * 3

$7Q = 105$ $\therefore$ $Q^* = 15$

بالتعويض عن قيمة *Q في احدى المعادلتين (المعادلة رقم (2))

$P = 1/3(15) + 35$ $\therefore$ $P^* = 40$

$\therefore$ الكمية التوازنية = 15 ، السعر التوازني = 40

الحل بيانياً:

- دالة الطلب: $P = -2Q_d + 70$

بوضع $Q_d = 0$ ، $P = 70$ $\therefore$ النقطة الأولى (0 , 70)

بوضع $P = 0$ ، $2Q_d = 70$ $\therefore$ $Q_d = 35$

$\therefore$ النقطة الثانية (35 , 0).

- **دالة العرض:** $P = 1/3Q_S + 35$

بوضع $Q_S = 0$ ، $P = 35$ $\therefore$ النقطة الأولى (0 , 35)

بوضع $Q_S = 60$ ، $P = 55$ $\therefore$ النقطة الثانية (60 , 55)

- **بعد الضريبة:**

دالة العرض بيانيا

$P - 7 = 1/3Q_S + 35$

$P = 1/3Q_S + 42$ .... (3)

بوضع $Q = 0$ ، $P = 42$ ∴ النقطة الأولى (42 , 0).

بوضع $Q = 30$ ، $P = 52$ ∴ النقطة الثانية (52 , 30)

- إيجاد السعر والكمية عند التوازن جبرياً بعد الضريبة:

من المعادلتين: 1، 3

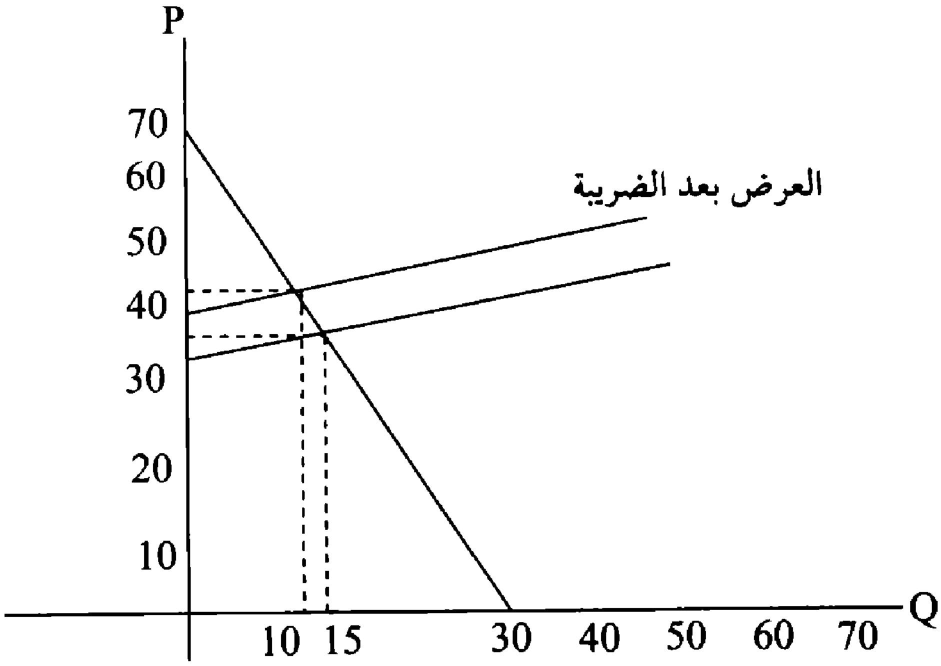
$$P = -2Q + 70$$
$$P = 1/3Q + 42$$
$$\therefore\ 1/3Q + 42 = -2Q + 70$$
$$2Q + 1/3Q = 70 - 42 = 28$$
$$\therefore\ 7/3Q = 28$$

بضرب الطرفين في: 3

$$7Q = 84$$
$$Q = 12$$

بالتعويض في احدى المعادلتين (المعادلة رقم (3)) نجد أن:

$$P = 1/3(12) + 42 = 46$$



من الشكل يتضح أن منحنى العرض بعد الضريبة انتقل إلى أعلى حيث ارتفع السعر من $P = 40$ إلى $P = 46$، وانخفضت الكمية من $Q = 15$ إلى $Q = 12$ وتحمل المستهلك من الضريبة 6$ وتحمل المنتج من الضريبة 1$.

نموذج السلع المرتبطة: Interdependent

يقصد بالسلع المرتبط هى السلع التي يعتمد كل منهما على الآخر، فإذا أخذنا نموذجاً أكثر واقعية لكل من الطلب والعرض بحيث نأخذ في الحسبان السلع البديلة مثل المشروبات الساخنة (الشاي- القهوة- النسكافية ....) أو السلع المكملة مثل السكر والشاي- البنزين والسيارات ... نجد أن الطلب على سلعة منها لا يرتبط بسعر السلعة الأصلية فحسب وإنما يرتبط بأسعار السلع الأخرى حيث يرتبط الطلب على سلعة مثل الشاي بأسعار كل من الشاي والسكر.

مثال: إذا كانت دوال الطلب والعرض لسلعتين مرتبطتين كما يلي:

$$Q_{D1} = 10 - 2P_1 + P_2$$
$$Q_{D2} = 5 + 2P_1 - 2P_2$$
$$Q_{S1} = -3 + 2P_1$$
$$Q_{S2} = -2 + 3P_2$$

حيث أن: P: السعر؛ Q_D: الكمية المطلوبة؛ Q_S: الكمية المعروضة.

المطلوب: تحديد السعر التوازني والكمية التوازنية لكل من السلعتين.

الحل

عند توازن السوق فإن:

الكمية المطلوبة من أي سلعة= الكمية المعروضة من نفس السلعة

$$Q_{D1} = Q_{S1} = Q_1$$
$$Q_{D2} = Q_{S2} = Q_2$$

وعلى هذا تأخذ المعادلات الصور التالية:

بالنسبة للسلعة الأولى:

$$Q_1 = 10 - 2P_1 + P_2 \qquad \ldots (1)$$
$$Q_1 = -3 + 2P_1 \qquad \ldots (2)$$

من المعادلتين 1، 2 نجد أن:

$$10 - 2P_1 + P_2 = -3 + 2P_1$$
$$-2P_1 + P_2 - 2P_1 = -3 - 10$$
$$-4P_1 + P_2 = -13 \qquad \ldots (3)$$

بالنسبة للسلعة الثانية:

$$Q_2 = 5 + 2P_1 - 2P_2 \qquad \ldots (4)$$
$$Q_2 = -2 + 3P_2 \qquad \ldots (5)$$

من 4، 5 نستنتج أن:

$$5 + 2P_1 - 2P_2 = -2 + 3P_2$$
$$2P_1 - 5P_2 = -7 \qquad \ldots (6)$$

ولحل المعادلتين رقم 3، 6 يتم ضرب المعادلة رقم 6 في 2

$$4P_1 - 10P_2 = -14$$
$$-4P_1 + P_2 = -13$$

------------------------ بالجمع

$$-9P_2 = -27 \qquad P_2 = -27/-9 = 3$$

بالتعويض في المعادلة رقم (6)

$$2P_1 - 5(3) = -7 \qquad \therefore\ 2P_1 = -7 + 15$$
$$2P_1 = 8 \qquad P_1 = 4$$

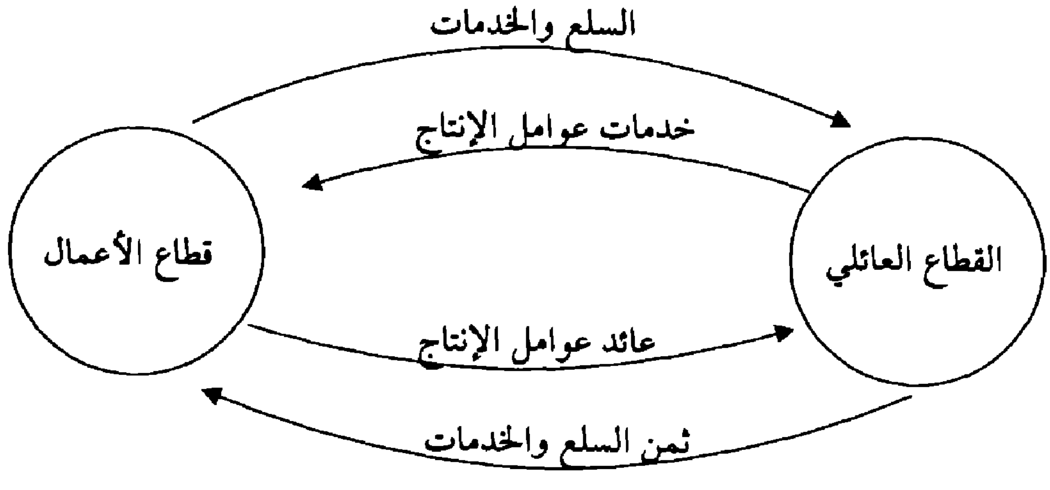
بالتعويض عن P_1؛ P_2 في المعادلات رقم 2، 5 نجد أن:

$$Q_1 = -3 + 2(4) = 5$$
$$Q_2 = -2 + 3(3) = 7$$

تحديد الدخل القومي: National Income

نفترض بداية أن النشاط الاقتصادي ينقسم إلى قطاعين هما: الأفراد (households) أو الأسر والشركات (Firms). وتستخدم الشركات الموارد مثل الأرض- رأس المال- العمل في إنتاج السلع والخدمات، ويطلق على هذه الموارد اسم عوامل الإنتاج. وينفق الأفراد هذه الدخول في اتجاهين:

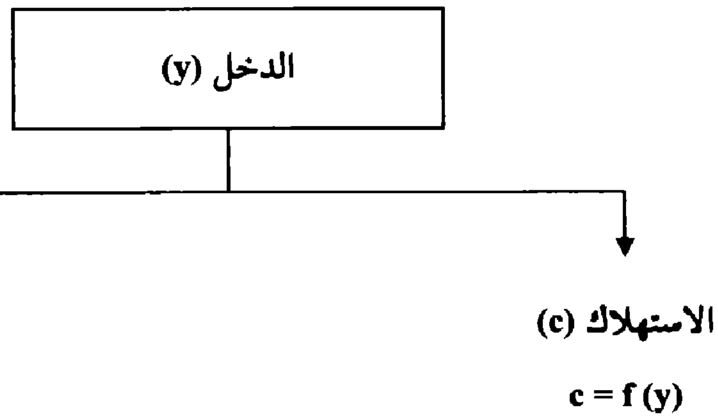
- جزء من الدخول توجه إلى استهلاك السلع المنتجة بواسطة الشركات.
- الجزء الآخر من الدخول توجه إلى مدخرات.



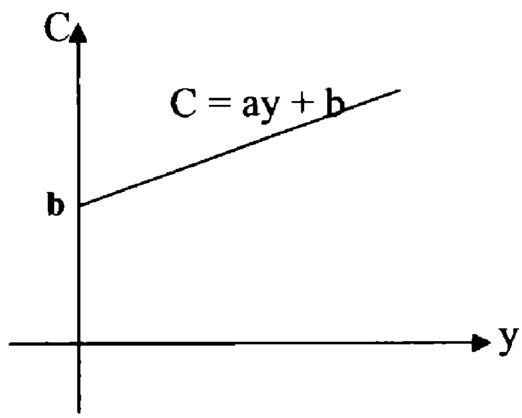
ويمثل الدخل: تدفق الدخل من الشركات إلى الأفراد في صورة مدفوعات لعوامل الإنتاج. أي أن الاستهلاك Consumption، والادخار Savings كل منها دالة في الدخل (y)، حيث أن: $y = C+S$

$$C = f(y) \quad , \quad S = g(y)$$

وأن كل من: S, C دوال متزايدة بالنسبة للدخل. ويمكن توضيح ذلك كما يلي:



النموذج الأول: فإذا كانت العلاقة بين الدخل (y) والاستهلاك (C) في صورة دالة خطية، كما في الشكل التالي: $C = ay + b$



حيث أن: $a > 0$ ، $b > 0$ والجزء المقطوع b يمثل مستوى الاستهلاك في حالة عدم وجود دخل $(y = 0)$ ويسمى الاستهلاك التلقائي.

الميل a يمثل التغير في قيمة الاستهلاك نتيجة التغير في الدخل بوحدة واحدة ويطلق عليه الميل الحدي للاستهلاك Marginal Propensity to

Consumption (MPC)، وهذا يعني أن الدخل يستخدم في الاستهلاك والادخـار، وعليه فإن: $y = C + S$

∴ عند زيادة الدخل y بوحدة واحدة فإن نسبة من هذه الوحدة هي التي توجـه للاستهلاك والباقي يوجه للادخار.

∴ الميل a أقل من الواحد الصحيح أي أن $a < 1$

∴ $0 < a < 1$

من $y = C + S$ يمكن تحديد شكل دالة الادخار ودالة الاستهلاك.

مثال: ارسم دالة الاستهلاك: $C = 0.6y + 10$ ثم حدد دالة الادخار المقابلة.

الحل

- لرسم دالةالاستهلاك: $C = 0.6y + 10$

بوضع $y = 0$ فأن $C = 10$ ∴ الدالة تمر بالنقطة (0 , 10)

بوضع $y = 40$ فأن $C = 34$ ∴ الدالة تمر بالنقطة (40 , 34)

- لإيجاد دالة الادخار نستخدم العلاقة: $y = C + S$

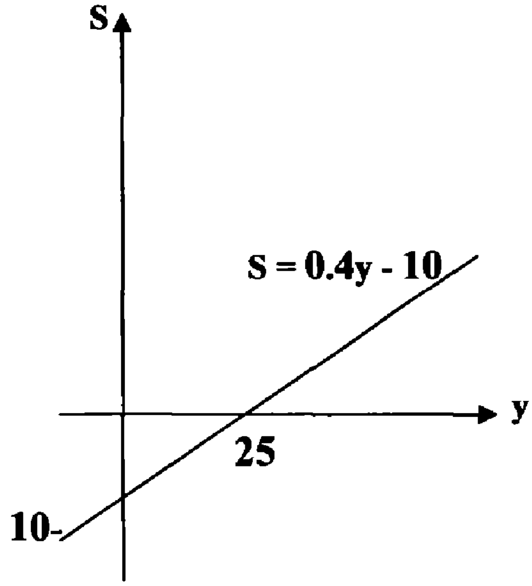
$$\therefore S = y - C$$
$$S = y - (o.6y + 10) = y - 0.6y - 10$$
$$S = 0.4y - 10$$

- لرسم دالة الادخار:

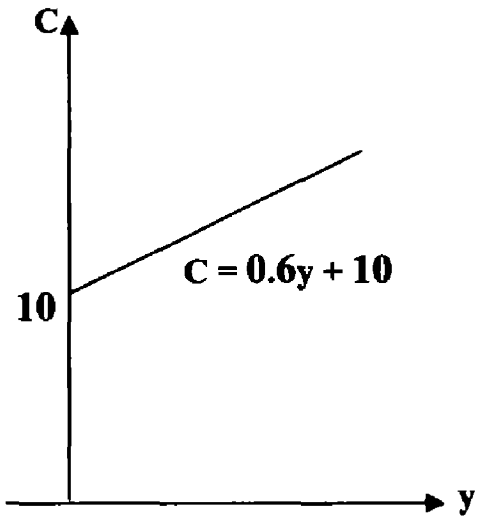
بوضع $y = 0$ فإن $s = -10$ ∴ تمر بالنقطة (0,-10)

بوضع $s = 0$ فإن $y = 25$ ∴ تمر بالنقطة (25 , 0)

والشكل التالي يبين كلا من دالة الاستهلاك ودالة الادخار.



دالة الادخار



دالة الاستهلاك

النموذج الثاني: إذا أخذنا في الاعتبار أنشطة الحكومة أو التجارة الخارجية، حيث يدخل الاستثمار أو توظيف الأموال Investment (I) ضمن التدفقات النقدية من خلال الإنفاق على السلع الرأسمالية حيث تشمل التدفقات النقدية للشركات كل من الاستهلاك والاستثمار (السلع الاستهلاكية، السلع الرأسمالية) أي أن:

$y = C + I$

وبفرض ان: I ثابت ، $\therefore y = C + I$

وهذا يعني أن الاستهلاك دالة في الدخل، أي أن: $C = ay + b$

وبالتالي يمكن تحديد المستوى التوازني لكل من الدخل والاستهلاك عندما يأخذ الاستثمار قيمة محددة.

مثال: إذا كانت دالة الاستهلاك على الصورة:

$C = 0.6y + 10$

المطلوب: حدد الدخل والاستهلاك التوازني إذا كان الاستثمار I = 12.

الحل

حيث أن: $y = C + I$

وحيث أن: $C = 0.6y + 10$ ، $I = 12$

وبالتعويض عن قيمة كل من C، I في دالة الدخل

$$\therefore\ y = 0.6y + 10 + 12$$

$$y = 0.6y + 22$$

$$y - 0.6y = 22$$

$$\therefore\ 0.4y = 220$$

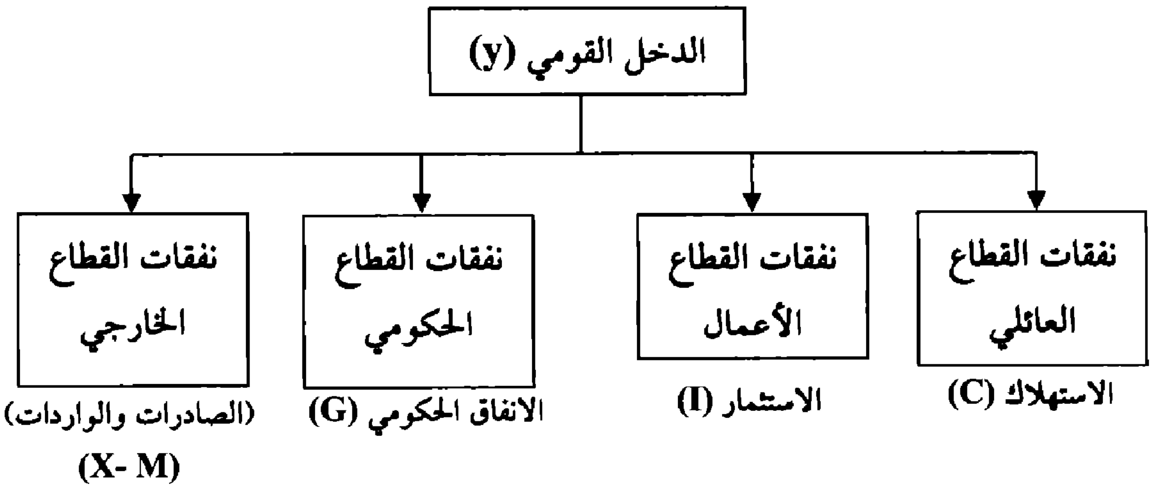
بالقسمة ÷ 4.

$$y = 55$$

وبالتعويض في دالة الاستهلاك: $C = 0.6(55) + 10$

$$\therefore\ C = 43$$

النموذج الثالث: نفرض أن النشاط الاقتصادي يتكون من أربعة قطاعات هي قطاع الأفراد أو القطاع العائلي، وقطاع الأعمال، والقطاع الحكومي والقطاع الخارجي. وبذلك يتكون الانفاق الكلي في أي مجتمع من الأنفاق الاستهلاكي (C) والانفاق الاستثماري (I) والأنفاق الحكومي (G) وصافي نفقات العالم الخارجي (صافي الصادرات والواردات) وهو ما يرمز له بالرمز (X- M)، ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي.



وبذلك فإن الدخل القومي= اجمالي النفقات وهو ما يطلق عليه التوازن في السوق السلعية، حيث يحصل التوازن أذا تساوي العرض الكلي من السلع والخدمات مع الطلب الكلي عليها.

وبذلك فأن:

$$y = C+I + G + (X-M)$$

حيث أن:

y: الدخل القومي.

C: الأنفاق الاستهلاكي.

I: الأنفاق الأستثماري.

G: الأنفاق الحكومي.

X: الصادرات من السلع والخدمات.

M: الواردات من السلع والخدمات.

مثال: حدد المستوى التوازي للدخل القومي في ضوء المعلومات الأتية:

$C = 0.8\,y + 80$ $\qquad$ $I = 70$

$M = 0.2\,y + 50$ $\qquad$ $G = 130$ $\qquad$ $X = 100$

الحل:

حيث أن الدخل القومي= اجمالي النفقات

$$y = C + I + G + (X - M)$$
$$y = 0.8y + 80 + 70 + 130 + 100 - (0.2\,y + 50)$$
$$y = 0.8\,y - .2\,y + 280 - 50$$
$$y = 0.6y + 230$$
$$y - 0.6\,y = 230$$
$$0.4\,y = 230 \qquad \therefore y = \frac{230}{,4} = 575$$

النموذج الرابع: إذا أخذنا في الاعتبار أيضاً الإنفاق الحكومي (G) government expenditure والضرائب Taxation (T) بالإضافة إلى الاستثمار (I) نجد أن الدخل القومي (y) يأخذ الصورة التالية: $y = C + I + G$

كما أن الدخل الحقيقي والمتاح للتصرف yd لدى الأفراد بعد فرض الضريبة سوف يقل بمقدار الضريبة أي: $yd = y - T$

حيث أن: yd الدخل بعد الضريبة disposable income.

وقد تأخذ الضريبة صورة مقدار ثابت: $(T = T^*)$

أو تأخذ صورة نسبة من الدخل: $(T = ty)$

كما قد تأخذ الصورتين معاً: $(T = ty + T^*)$

مثال: إذا كانت دالة الاستهلاك على الصورة: $C = 0.9yd + 70$

ودالة الضريبة على الصورة: $T = 0.2y + 25$

والانفاق الحكومي: $G = 20$ ، الاستثمار: $I = 35$

المطلوب: حدد المستوى التوازني للدخل.

الحل

$y = C + I + G$ ..... (1)

$y = C + 35 + 20$

$y = C + 55$ ..... (2)

$yd = y - T$

$= y - (0.2y + 25)$

$yd = 0.8y - 25$ ..... (3)

وحيث أن: $C = 0.9yd + 70$ .....

وبالتعويض عن قيمة yd $\therefore C = 0.9(0.8y - 25) + 70$

$C = 0.72y - 22.5 + 70$

$C = 0.72y + 47.5$ ..... (4)

حيث أن: $y = C + 55$

$Y = 0.72y + 47.5 + 55$

$0.28Y = 102.5$

$\therefore y = 102.5/0.28 = 366$

يكون: $\therefore C = 366 - 55 = 311$

النموذج الخامس: مما سبق يتبين أن الاستثمار I أخذ في الاعتبار كمقدار ثابت لكن في الحقيقة تعتمد الاستثمارات على معدل الفائدة السائد في السوق (r)، وعادة ما نجد أن معدلات الفائدة تنخفض عند زيادة حجم الاستثمارات، ويكون لدينا العلاقة التالية: $I = ar + d$

حيث أن: $a < 0$, $d > 0$

ولكن: كيف يمكن تحديد الدخل القومي التوازني في ظل هذه المتغيرات (r, I, C, y)؟

على سبيل المثال: إذا كان لديك: $C = 0.8y + 100$

$I = -20r + 1000$

عند توازن السوق نجد أن:

$$y = C + I$$

$$\therefore\ y = (0.8y + 100) + (-20r + 1000)$$

$$y = 0.8y - 20r + 1100$$

$$0.2y + 20r = 1100$$

هذه المعادلة تربط بين الدخل ومعدل الفائدة. ولتحديد قيمة y، r يجب دراسة وبحث التوازن في سوق المال (money market) حيث يكون سوق النقود في وضع التوازن عندما يكون المعروض من النقود Supply of Money (M_S) مساوياً لكمية الطلب على النقود Demand of Money (M_D)

أي أن: $M_S = M_D$

وبفرض أن مستوى المعروض من النقود M_S يمكن التحكم فيه من قبل البنك المركزي أي أن $M_S = M_S^*$، M_S^* قيمة محددة.

وأن الطلب على النقود يأتي من ثلاثة مصادر:

- التبادل (المعاملات التجارية) Transactions
- التدابير الوقائية (الاحتياطى الوقائى) Precautions.
- المضاربة Speculations.

- الطلب على المعاملات التجارية يستخدم في التبادل اليومي للسلع والخدمات.
- الطلب الوقائي يستخدم في رصد مبلغاً للاحتياجات الضرورية والنفقات غير المتوقعة، أي أن:

$$L_1 = k_1 y \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث: L_1 تمثل مجموع الطلب على المعـاملات التجاريـة والطلـب الوقـائي، k_1 ثابت موجب.

- الطلب على المضـاربة للنقـود يسـتخدم كرصـيد احتيـاطي في حالـة الأفـراد والشـركات في الاسـتثمار في الأصـول البديلـة مثـل السـندات الحكوميـة government bonds وتأخذ الرمز (L_2)

$$L_2 = -k_2 r + k_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث أن:

$$M_D = L_1 + L_2$$

من (1)، (2) ينتج أن:

$$MD = k_1 y + (-k_2 r + k_3)$$

مثال: حدد الدخل التوازني ومعدل الفائدة التوازني في ضوء المعلومات التالية عن سوق السلعة:

$$C = 0.8y + 100$$

$$I = -20r + 1000$$

$$M_S = 2375$$

$$L_1 = 0.1y \quad , \quad L_2 = -25r + 2000$$

الحل

- عند توازن السوق نجد أن:

$$y = C + I$$

وبالتعويض عن كل من: C ، I:

$$\therefore\ y = (0.8y + 100) + (-20r + 1000)$$

$$y = 0.8y - 20r + 1100$$

$$0.2y + 20r = 1100 \qquad \ldots\ldots (1)$$

وحيث أن

$$M_S = 2375$$

$$M_D = L_1 + L_2$$

وبالتعويض عن كل من L_1 و L_2:

$$M_D = 0.1y + (-25r + 2000)$$

- عند توازن سوق المال فإن:

$$M_S = M_D$$

$2375 = 0.1y - 25r + 2000$

$0.1y - 25r = 375$ ..... (2)

بضرب المعادلة الثانية في 2 وطرحها من المعادلة رقم 1

$0.2y + 20r = 1100$

$\pm 0.2y \pm 50r = \pm 750$

بالطرح --------------------------

$70r = 350$

$\therefore\ r = 350/70 = 5$

بالتعويض عن r في المعادلة رقم 1

$0.2y + 20(5) = 1100$

$0.2y + 100 = 1100$

$0.2y = 1000$

$\therefore\ y = 5000$

∴ الدخل التوازني هو 5000

ومعدل الفائدة التوازني هو 5

مثال: حدد الدخل التوازني (y) ومعدل الفائدة التوازني (r) بمعلومية البيانات التالية:

$C = 0.7y + 85$

$I = -50r + 1200$

$M_S = 500$

$L_1 = 0.2y \quad , \quad L_2 = -40r + 230$

الحل

$y = C + I$

$y = 0.7y + 85 - 50r + 1200$

$0.3y + 50r = 1285 \quad \ldots\ldots (1)$

$M_S = M_D$

$M_D = L_1 + L_2$

$M_D = 0.2y - 40r + 230$

$500 = 0.2y - 40r + 230$

$0.2y - 40r = 270 \quad \ldots\ldots (2)$

بضرب المعادلة الأولى في 2، والمعادلة الثانية في 3 ثم الطرح :

$0.6y + 100r = 2570$

$\pm 0.6y \pm 120r = \pm 810$

$220r = 1760$

$\therefore r = 1760/220 = 8$

بالتعويض في المعادلة الأولى:

$0.3y + 50(8) = 1285$

$0.3y + 400 = 1285$

$0.3y = 885$

$\therefore\ y = 885/0.3 = 2950$

الدخل التوازني = 2950 $ ، معدل الفائدة = 8%

مثال: حدد الدخل التوازني (y) ومعدل الفائدة التوازني (r) بمعلومية البيانات التالية:

$C = 0.8y + 25$

$I = -20r + 325$

$M_S = 500$

$M_S = 0.2y - 30r + 650$

الحل

- التوازن في سوق السلع (IS)

$$y = C + I$$
$$y = 0.8y + 25 - 20r + 325$$
$$\underline{y - 0.8y + 20r = 350}$$
$$0.2y + 20r = 350 \qquad \longrightarrow \qquad (1)$$

- التوازن في سوق النقد (LM)

$$Md = Ms$$
$$\underline{0.2y - 30r + 650 = 500}$$
$$0.2y - 30r = -150 \qquad \longrightarrow \qquad (2)$$

يحل المعادلة (1)، (2) معاً لإيجاد قيمة r , y

$$0.2y + 20r = 350$$

$$\pm 0.2y \pm 30r = \pm 150$$

$50r = 500$

$\therefore\ r = 5000/50 = 10$

بالتعويض عن قيمة r10 = في إحدى المعادلتين نجد أن

$$0.2y + 20(10) = 350$$
$$0.2y = 350 - 200$$
$$0.2\ y = 150 \qquad y = \frac{150}{0.2} = 750$$

- نجد أن معدل الفائدة التوازني r = 10 %

- نجد أن الدخل التوازني y = 750

بالتعويض في المعادلات نجد أن:

$$C = 0.8y + 25 = 0.8(750) + 25 = 625$$
$$I = -20r + 325 = -20(10) + 325 = 125$$
$$L_1 = 0.2y = 0.2(750) = 150$$
$$L_2 = -30r + 650 = -30(10) + 650 = 350$$
$$M_d = L_1 + L_2 = 500$$

مثال: بمعلومية البيانات التالية:

$$C = 0.8y + 120$$
$$I = -20r + 800$$
$$M_s = 2000$$
$$L_1 = 0.1\ y$$
$$L_2 = -25r + 1750$$

المطلوب:

1- أوجد الدخل التوازني (g) ومعدل الفائدة التوازني (r)

2- أوجد كل من M_d , L_2 , L_1 , I , C

الحل

1- التوازن في سوق السلع والخدمات (IS):

$$y = C + I$$
$$\underline{y = 0.8y + 120 - 20r + 800}$$
$$0.2y + 20r = 920 \longrightarrow (1)$$

2- التوازن في سوق النقد (LM):

حيث أن

$$Md = Ms$$
$$Md = L_1 + L_2$$
$$Md = 0.1y - 25r + 1750$$
$$\therefore$$
$$\underline{0.1y - 25r + 1750 = 2000}$$
$$0.1y - 25r = 250 \longrightarrow (2)$$

بحل المعادلتين (1)، (2) معاً نجد أن

$$0.2y + 20r = 920$$
$$0.1y - 25r = 250$$

بضرب المعادلة رقم (2) * 2 ثم بالطرح

$$0.2y + 20r = 920$$
$$\underline{-0.2y \pm 50r = -500}$$
$$70r = 420$$
$$r = \frac{420}{70} = 6 \ \%$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة y

$$0.2y + 20(6) = 920$$
$$0.2y = 920 - 120$$
$$0.2y = 800$$
$$y = \frac{800}{0.2} = 4000$$

وبـذلك نجـد أن الـدخل التـوازني (y = 4000) ومعـدل الفائـدة التـوازني (r = 6%) بالتعويض في المعادلات نجد أن:

$$C = 0.8(4000) + 120 = 3320$$
$$I = -20(6) + 800 = 680$$
$$L_1 = 0.1(4000) = 400$$
$$L_2 = -25(6) + 1750 = 1600$$
$$M_d = L_1 + L_2 = M_s = 2000$$

تمارين

1) حل المعادلتين التاليتين بيانياً وجبرياً.

a) $4x + 3y = 11$
   $2x + y = 5$

b) $3x + 2y = 9$
   $-2x + y = 1$

c) $2x + 3y = 6$
   $-4x + y = 16$

2) حل المعادلات التالية جبرياً:

a) $x + y + z = 9$
   $3x + 2y - z = 8$
   $4x - y + 2z = 13$

b) $2x + y - z = 7$
   $x - 2y + 3z = 12$
   $3x - y + 2z = 19$

3) إذا كانت دالة الطلب والعرض لسلعة ما على الصورة التالية:

$P = -2Q_D + 50$

$P = \frac{1}{2}Q_S + 25$

المطلوب:

1- أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية بيانياً ثم تأكد من الحل جبرياً.

2- إذا قررت الحكومة فرض ضريبة ثابتة على كل سلعة تقدر بـ $5 بين تأثير الضريبة على وضع التوازن ثم بين كيفية توزيع الضريبة بين المنتج والمستهلك.

4) إذا كانت دالتي الطلب والعرض لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = -4Q_D + 120$$

$$P = 1/3Q_S + 29$$

المطلوب:

1- إيجاد السعر التوازني والكمية التوازنية بيانياً ثم تأكد من الحل جبرياً.

2- إذا فرضت الحكومة ضريبة ثابتة على كل سلعة تقدر بـ 13$، بين تأثير الضريبة على وضع التوازن وبين توزيع الضريبة بين المنتج والمستهلك.

5) إذا كانت دوال الطلب والعرض لسلعتين مرتبطتين كما يلي:

$$Q_{D1} = 40 - 5P_1 - P_2$$

$$Q_{D2} = 50 + 2P_1 - 4P_2$$

$$Q_{S1} = -3 + 4P_1$$

$$Q_{S2} = -7 + 3P_2$$

المطلوب: إيجاد السعر التوازني والكمية التوازنية للسلعتين.

6) إذا كانت دوال الطلب والعرض لسلعتين مرتبطتين كما يلي:

$$Q_{D1} = 15 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_{D2} = 20 + 4P_1 - 2P_2$$

$$Q_{S1} = -10 + 5P_1$$

$$Q_{S2} = -20 + 4P_2$$

المطلوب: إيجاد السعر التوازني والكمية التوازنية للسلعتين.

7) إذا كانت دالة الاستهلاك على الصورة:

$$C = 0.8y + 25$$

المطلوب: حدد المستوى التوازني للدخل إذا كان الاستثمار $I = 17$ ،

ثم أوجد الدخل التوازني الجديد عند زيادة الاستثمار بوحدة واحدة.

8) إذا كانت: $C = 0.8yd + 25$

$T = 0.1y + 10$

$I = 55$

$G = 40$

المطلوب: حدد المستوى التوازني للدخل القومي.

9) حدد المستوى التوازني للدخل في ضوء المعلومات التالية:

$C = 0.8y + 80 \quad , \quad I = 70 \quad , \quad G = 130$

$X = 100 \quad , \quad M = 0.2y + 50$

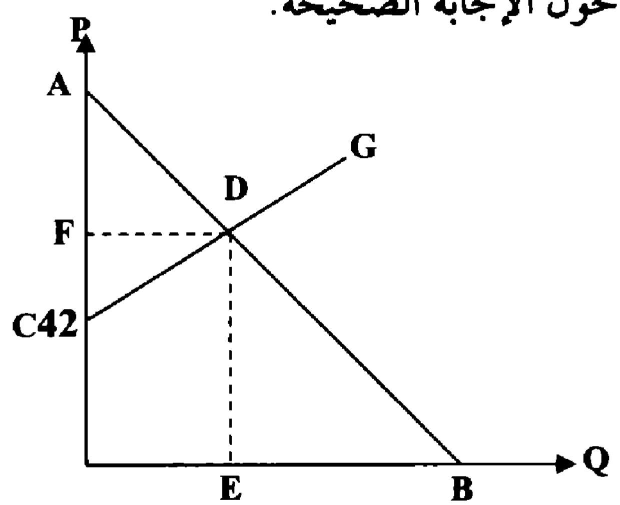
حيث X: الصادرات، M: الواردات (علماً بأن: $y = C + I + G + X - M$).

10) إذا كانت دالتي الطلب والعرض لسلعة ما على الصور التالية:

$P = -2Q_d + 84$

$P = \frac{1}{3}Q_s + 42$

وقررت الحكومة فرض ضريبة على كل سلع تقدر بـ $7 وبالاستعانة بالرسم المقابل ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:



1. الكمية التوازنية قبل الضريبة هي:

أ) 10 ب) 15 ج) 20 د) خلاف ذلك وهو.

2. السعر التوازني قبل الضريبة هو:

أ) 28 ب) 38 ج) 48 د) خلاف ذلك وهو.

3. إحداثيات النقطة A هي:

أ) (0، 42) ب) (42، 2) ج) (42، 84) د) خلاف ذلك وهو.

4. إحداثيات النقطة B هي:

أ) (0، 21) ب) (84، 0) ج) (84، 42) د) خلاف ذلك وهو.

5. إحداثيات النقطة D هي:

أ) (25، 42) ب) (46، 30) ج) (42، 84) د) خلاف ذلك وهو.

6. الكمية التوازنية بعد الضريبة هي:

أ) 15 ب) 20 ج) 25 د) خلاف ذلك وهو.

7. السعر التوازني بعد الضريبة هي:

أ) 45 ب) 54 ج) 56 د) خلاف ذلك وهو.

8. المسافة FC على الرسم يساوي:

أ) 4 ب) 5 ج) 6 د) خلاف ذلك وهو.

9. المسافة EB على الرسم يساوي:

أ) 24 ب) 56 ج) 30 د) خلاف ذلك وهو.

11. يتأثر بالضريبة:

أ) دالة الطلب فقط ب) دالة العرض فقط

ج) دالتي الطلب والعرض د) خلاف ذلك وهو...

12. ميل دالة الطلب هو:

أ) 84 ب) 2 ج) $\frac{1}{3}$ د) خلاف ذلك وهو.

13. ميل دالة العرض هو:

أ) 84 ب) 42 ج) 2- د) خلاف ذلك وهو.

11) في ضوء المعلومات التالية ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

$$C = 0.7Y + 90$$
$$I = -30r + 360$$
$$M_d = 0.3Y - 20r + 600$$
$$M_s = 650$$

1. الدخل التوازني Y هو:

أ) 800 ب) 900 ج) 100 د) خلاف ذلك وهو...

2. معدل الفائدة التوازني R هو:

أ) 6 ب) 7 ج) 9 د) خلاف ذلك وهو...

3. حجم الاستهلاك C هو:

أ) 200 ب) 300 ج) 500 د) خلاف ذلك وهو...

4. حجم الاستثمار I هو:

أ) 50 ب) 100 ج) 200 د) خلاف ذلك وهو...

5. قيمة L_1 هي:

أ) 160 ب) 180 ج) 200 د) خلاف ذلك وهو...

6. قيمة L_2 هي:

أ) 490 ب) 470 ج) 450 د) خلاف ذلك وهو...

12) إذا كانت المعادلات التالية تحقق الأسعار التوازنية لثلاث سلع C, B, A:

$$3P_1 - P_2 + 2P_3 = 11$$
$$4P_1 + 2P_2 = 14$$
$$5P_1 - P_2 + 2P_3 = 15$$

أوجد قيمة P_3, P_2, P_1.

13) إذا كانت المعادلات التالية تحقق الأسعار التوازنية لثلاث سلع C, B, A:

$$4P_1 + 2P_2 - P_3 = 10$$
$$5P_1 - P_2 = 6$$
$$P_1 - P_2 + 3P_3 = 16$$

أوجد قيمة P_3, P_2, P_1.

14) في ضوء المعلومات التالية ضع دائرة حو الإجابة الصحيحة:

$$C = 0.8Y + 25$$

$$I = -20r + 325$$

$$M_d = 0.2Y - 30r + 650$$

$$M_s = 500$$

1. الدخل التوازني Y هو:

أ) 800 ب) 700 ج) 1000 د) خلاف ذلك وهو...

2. معدل الفائدة التوازني R هو:

أ) 6 ب) 7 ج) 8 د) خلاف ذلك وهو...

3. حجم الاستهلاك C هو:

أ) 200 ب) 300 ج) 500 د) خلاف ذلك وهو...

4. حجم الاستثمار I هو:

أ) 50 ب) 100 ج) 150 د) خلاف ذلك وهو...

5. قيمة YL_1 هي:

أ) 60 ب) 80 ج) 100 د) خلاف ذلك وهو...

6. قيمة L_2 هي:

أ) 440 ب) 400 ج) 500 د) خلاف ذلك وهو...

15) بمعلومية البيانات التالية:

$$C = 0.8Y + 120$$

$$I = -20r + 800$$

$$M_s = 2000$$

$$L_1 = 0.1Y$$

$$L_2 = -25r + 1750$$

المطلوب: تحديد الدخل التوازني (Y) ومعدل الفائدة (r).

16) إذا كان منحنى الطلب ومنحنى العرض لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = -7/2Q_d + 100$$

$$P = 1/2Q_s + 20$$

المطلوب:

1. إيجاد السعر التوازني والكمية التوازنية بيانياً ثم تأكد من الحل جبرياً.
2. إذا فرضت الحكومة ضريبة 5 دنانير، وضع تأثير فرض الضريبة على التوازن وما هو مقدار ما يتحمله كل من المنتج والمستهلك من الضريبة.

الفصل الثاني

الدوال غير الخطية

(الدالة التربيعية)

NON-LINEAR FUNCTIONS

(Quadratic Finction)

الفصل الثاني

الدوال غير الخطية

(الدالة التربيعية)

Non-Linear Functions: Quadratic Finction

مقدمة:

تناولنا في الفصل السابق العلاقة الخطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل (وهي العلاقة الخالية من الأس أو من حاصل ضرب المتغير التابع في المتغير المستقل)، ووجدنا أن هذه العلاقة (العلاقة الخطية) تنطبق على سلوك بعض الظواهر الاقتصادية والمالية والإدارية، فإن هناك بعض الظواهر الاقتصادية والمالية والإدارية تسلك سلوك العلاقة غير الخطية، حيث أن المتغير المستقل يحمل أس أو قوة، ومن أهم العلاقات غير الخطية الدالة التربيعية وهي علاقة القطع المكافئ (Quadratic form) وتأخذ إحدى الصور الآتية:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^2 + bx$$

$$y = ax^2 + c$$

$$y = ax^2$$

حيث أن: y : متغير تابع ، X : متغير مستقل

a : معامل x^2، b : معامل x، c : الحد المطلق

وتسمى هذه الدالة دالة من الدرجة الثانية، وتمثل بمعادلات من الدرجة الثانية (تربيعية)، حيث يكون أحد متغيراتها مرفوع إلى الأس اثنين، أما باقي

المتغيرات مرفوعة للأس واحـد، أمـا القـيم (a), (b), (c) فهـي ثوابـت ويمكـن أن تكون قيمة (a) صفرية أي أن: قيمة b=0 أو قيمة c=0 ولكن في الدالـة التربيعيـة لا يمكن أن تكون قيمة $a \neq 0$.

حل المعادلات التربيعية:

1- الحل الجبرى للدالة التربيعية:

هناك عدة طرق لحل المعادلات التربيعية، وسوف نتعرض في هذا الفصل الي طريقتين همـا: الطريقـة الاولى هـى التحليـل الى العوامـل Factoring Analysis، والطريقة الثانية هى الصيغة التربيعيـة أو القـانون Quadratic Formula وهـو مـا يعرف بقانون الجذر المميز. ونتناول فيما يلى هذه الطرق:

الطريقة الاولى: التحليل الي العوامل:

حيث يتم الاعتماد على اساليب التحليل المتعارف عليها رياضـيا إمـا بأخـذ عامل مشترك أو بتحليل المقدار الثلاثي أو بتحليل الفـرق بـين مـربعين أو بتحليـل الفرق أو مجموع مكعبين.

وتعتمد هـذه الطريقـة في حـل المعادلـة التربيعيـة: $ax^2 + bx + c = 0$ علـى الخطوات التالية:

- تحليل الحد الأول ax^2 لعاملين حاصل ضربهما = ax^2.
- تحليل الحـد الثالـث c لعـاملين حاصـل ضـربهما = c بحيـث يكـون المجمـوع الجبري لحاصل الضرب التبادلي مساوياً للحد الأوسط.

على سبيل المثال إذا كان حاصل ضرب القوسين التاليين

$$(3x + 3)(x - 5) = 3x^2 - 15x + 3x - 15$$

$$= 3x^2 - 12x - 15$$

فإذا كان لدينا المعادلة

$$3x^2 - 12x - 15 = 0$$

ولحل هذه المعادلة يجب تحليلها إلى عواملها الأولية المتمثلة في القوسين السابقين وهما $(3x + 3)$، $(x - 5)$ وذلك كما يلي:

أ) تحليل الحد الأول ($3x^2$) إلى x، $3x$.

ب) تحليل الحد الثالث (15-) إلى 5-، 3 بحيث يكون المجموع الجبري لحاصل الضرب التبادلي أي: (5-) في $3x$، 3 في x مساوياً للحد الأوسط أي ($-12x$) مع مراعاة ما يلي:

* إذا كانت إشارة الحد الثالث سالبة فيتم تحليله إلى رقمين أحدهما موجب والآخر سالب.

* إذا كانت إشارة الحد الثالث موجبة فيتم تحليله إلى رقمين كلاهما موجب (إذا كانت إشارة الحد الأوسط موجبة) أو كلاهما سالب (إذا كانت إشارة الحد الأوسط سالبة).

مثال: حل المعادلات التربيعية التالية:

1) $2x^2 + 9x - 5 = 0$

2) $3x^2 - 20x + 12 = 0$

الحل

1) $2x^2 + 9x - 5 = 0$

$(2x - 1)(x + 5) = 0$

يلاحظ أن المجموع الجبري لحاصل ضرب 2x في 5= 10x

و (1-) في x = x- وبالجمع نجد أن:

$10x - x = 9x$ الحد الأوسط

وإذا كان حاصل ضرب القوسين

$(2x - 1)(x + 5) = 0$

فإن أحدهما يجب أن يساوي صفر أي

$2x - 1 = 0 \qquad 2x = 1 \qquad x = ½$

أو $x + 5 = 0 \qquad x = -5$

∴ حل المعادلة هما {½, -5}.

2) $3x^2 - 20x + 12 = 0$

$(3x - 2)(x - 6) = 0$

نلاحظ أن المجموع الجبري لحاصل الضرب التبادلي= الحد الأوسط= (-20x)

$3x - 2 = 0 \qquad 3x = 2 \qquad x = 2/3$

$x - 6 = 0 \qquad x = 6$

فيكون حل المعادلة هما {2/3 , 6}

مثال: حل المعادلات التالية:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$

2) $x^2 + x - 6 = 0$

الحل

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-2)(x-4)=0$

$x-2=0 \qquad x=2$

$x-4=0 \qquad x=4$

حل المعادلة هما $\{2, 4\}$.

يلاحظ هنا أن إشارة الحد الثالث (+8) موجبة وبالتالي تم تحليله إلى رقمين حاصل ضربهما يساوي (8) ومجموعهما = معامل الحد الأوسط (-6) وهما 2-، 4-.

2) $x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x+3=0 \qquad x=-3$

أو $\qquad x-2=0 \qquad x=2$

حل المعادلة هما $\{-3, 2\}$

نلاحظ هنا أن إشارة الحد الثالث في المقدار الثلاثي (-6) سالبة وبالتالي تم تحليله إلى رقمين حاصل ضربهما= 6 والفرق بينهما = معامل الحد الأوسط = 1 وهما 3 , 2-.

مثال: حل المعادلات التالية:

1) $3x^2-9x=0$

2) $2x^2-18=0$

الحل

1) $3x^2-9x=0$

باستخراج العامل المشترك (3x) نجد أن

$3x(x - 3) = 0$

$3x = 0 \quad \therefore \quad x = 0$

أو $x - 3 = 0 \quad \therefore \quad x = 3$

$\therefore$ حل المعادلة هو: $\{0, 3\}$.

2) $2x^2 - 18 = 0$

$2x^2 = 18$ بالقسمة ÷ 2 نجد أن:

$x^2 = 9$

باخذ الجذر التربيعي للعدد 9 ويكون حل المعادلة $\{3, -3\}$.

الطريقة الثانية: الحل باستخدام قانون الجذر المميز (النموذج التربيعي):

- حيث أن الدالة التربيعية تكون على الشكل:

$$ax^2 - bx + c = 0$$

فإن:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث أن a: معامل x^2 ، b: معامل x ، c: الحد المطلق

وباستخدام دالة المميز لحل المعادلة التربيعية (أي إيجاد قيمة x) جبرياً، نجد أن لها ثلاث حالات وهي:

1) أن يكون للدالة التربيعية حلان.

2) أن يكون للدالة التربيعية حل وحيد.

3) ألا يكون لها حل(ليس لها حل).

والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال: حل المعادلات التربيعية التالية:

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$

2) $x^2 - 6x + 9 = 0$

3) $2x^2 - 5x + 4 = 0$

الحل

1) $x^2 - 6x + 8 = 0$

من الدالة يمكن استخراج قيمة معلماتها وهي:

$a = 1 \quad , \quad b = -6 \quad , \quad c = 8$

وبالتعويض في دالة الجذر المميز:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

حل المعادلة هو: $\{4 , 2\}$.

2) $x^2 - 6x + 9 = 0$

من الدالة يمكن استخراج قيمة معلماتها وهي:

$a = 1 \quad , \quad b = -6 \quad , \quad c = 9$

وبالتعويض في دالة الجذر المميز ينتج أن:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6^2) - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

حل المعادلة الوحيد هو: $\{3\}$.

3) $2x^2 - 5x + 4 = 0.$

من الدالة يمكن استخراج قيمة معلماتها وهي:

$a = 2 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad c = 4$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25-32}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

ونظراً لأن العدد أسفل الجذر بإشارة سالبة فلا يكون له جذر وبالتالي فإن المعادلة ليس لها حل.

مما سبق يتضح ان:

a) إذا كان المقدار أسفل الجذر (قيمة المميز) أكبر من صفر (موجب) أي:

$b^2 - 4ac > 0$

فيكون للمعادلة حلان.

b) إذا كان المقدار أسفل الجذر (قيمة المميز) تساوى صفر أي:

$$b^2 - 4ac = 0$$

يكون للمعادلة حل وحيد وهو (-b/2a)

c) إذا كان المقدار أسفل الجذر (قيمة المميز) أقل من صفر (سالب) أي:

$$b^2 - 4ac < 0$$

فإن المعادلة ليس لها حل.

2- التمثيل البياني للدالة التربيعية (الحل البياني):

لتمثيل الدالة التربيعية بيانياً فإن الامر يتطلب معرفة عدداً من النقاط يتراوح من 5 إلى 10 نقاط وذلك بفرض قيماً متباينة لـ x ثم إيجاد قيم y المناظرها (قيم الدالة). والأمثلة التالية توضح ذلك:

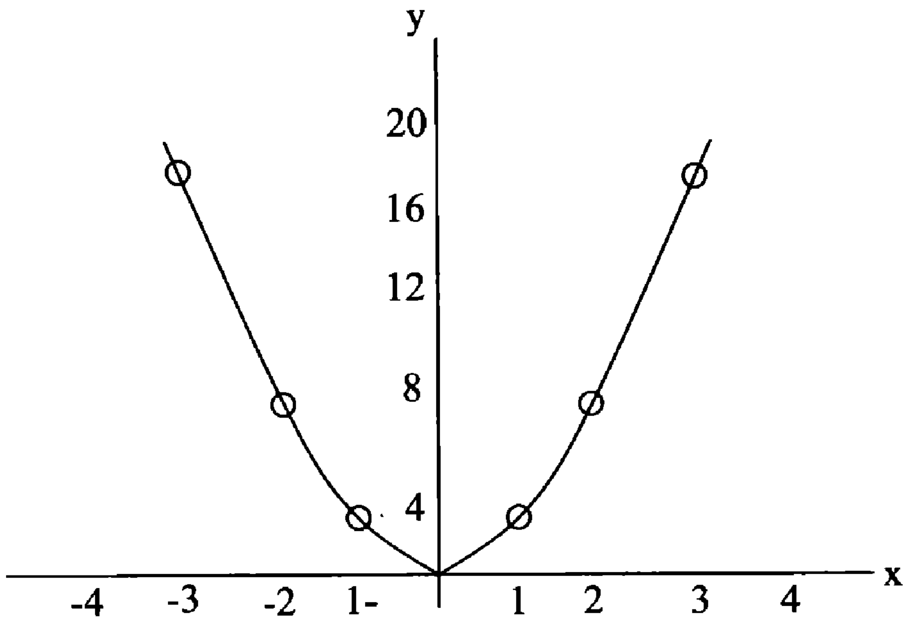
مثال: ارسم الدالة: $y = 2x^2$

الحل

نفرض قيماً لـ x ثم بالتعويض في الدالة نحصل على قيم y كما في الجدول التالي:

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

وبرسم المحورين الأفقي والرأسي وتحديد موقع هذه النقاط على الرسم البياني وتوصيلها نحصل على شكل المنحنى الممثل للدالة كما يلي:

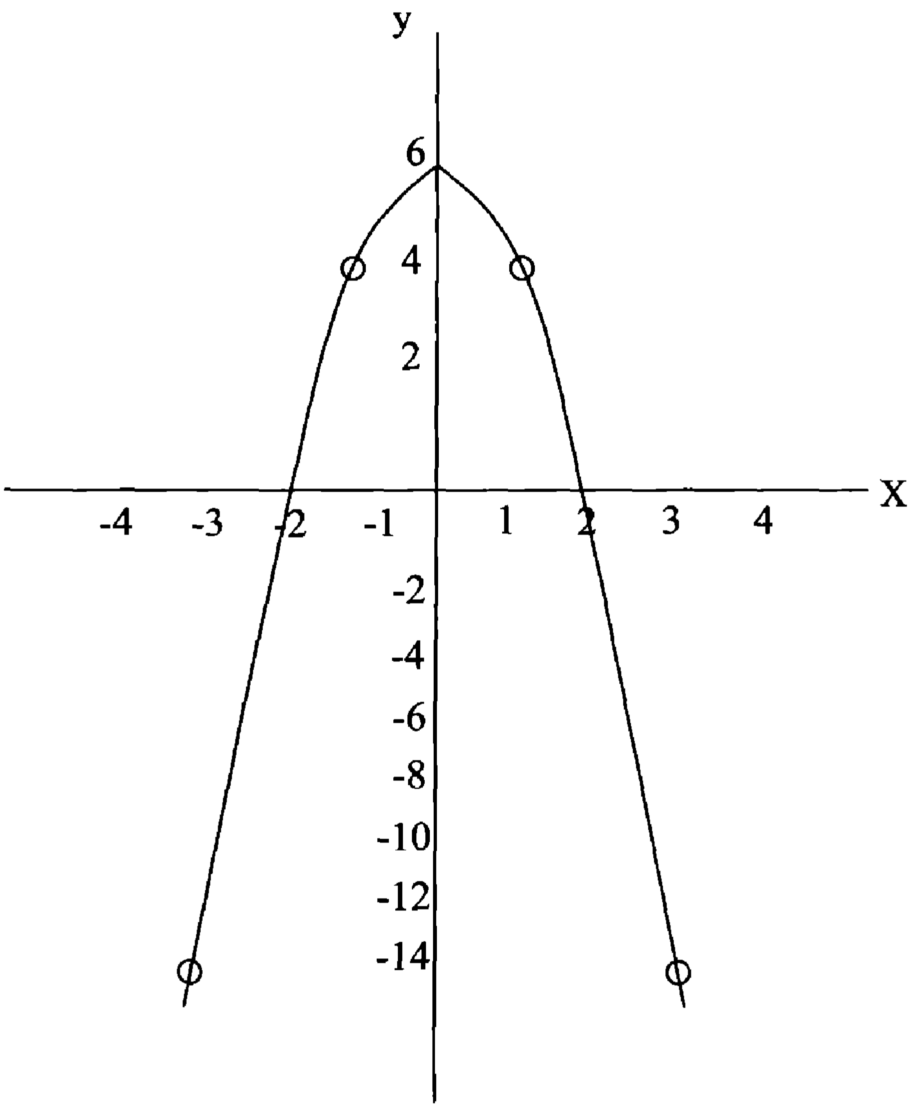


مثال: ارسم الدالة التربيعية التالية: $y = -2x^2 + 5$

الحل

نفرض قيماً لـ x ثم بالتعويض في الدالة نحصل على قيم y كما في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	5	3	-3	-13	3	-3	-13



طريقة أخرى لتمثيل الدالة التربيعية بيانيا:

1- تحديد شكل المنحنى وذلك بالنظر إلى إشارة (a) (معامل x^2) تأخذ الشكل $\cup$ إذا كانت (a) موجبة، وتأخذ الشكل $\cap$ إذا كانت (a) سالبة.

2- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي وذلك بوضع x =0

3- تحديد نقطة أو نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع y =0 ثم حل المعادلة التربيعية باستخدام التحليل أو باستخدام الجذر المميز.

4- تحديد قيمة المنحنى (النهاية العظمى) أو قاع المنحنى (النهاية الصغرى) عند نقطة وهي تمثل الوسط الحسابي لنقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي الحسابي لنقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي $x' = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ثم بالتعويض في المعادلة لإيجاد قيمة y.

وبذلك يمكن رسم المعادلة التربيعية بتحديد أربعة نقاط كما يلي:

x	0	x_1	x_2	x'
y	y	0	0	y'

مثال: ارسم الدالة التربيعية الآتية: $y = -x^2 + 8x - 12$

الحل

لرسم الدالة التربيعية يمكن إتباع الخطوات التالية:

1- تحديد شكل المنحنى وذلك بالنظر إلى إشارة معامل x^2 نجد أن $(a = -1)$ سالبة وبذلك فإنها تأخذ الشكل ∩.

2- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي وذلك بوضع x=0 نجد أن $y = -12$.

3- تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع $y = 0$ نجد أن: $-x^2 + 8x - 12 = 0$

بالتحليل أو باستخدام الجذر المميز نجد أن:

$(x-2)(x-6) = 0$

$x = 2$ أو $x = 6$

4- تحديد أعلى نقطة على المنحنى (قيمة المنحنى) وذلك بأخذ متوسط قيمتي x السابق إيجادهم في الخطوة السابقة.

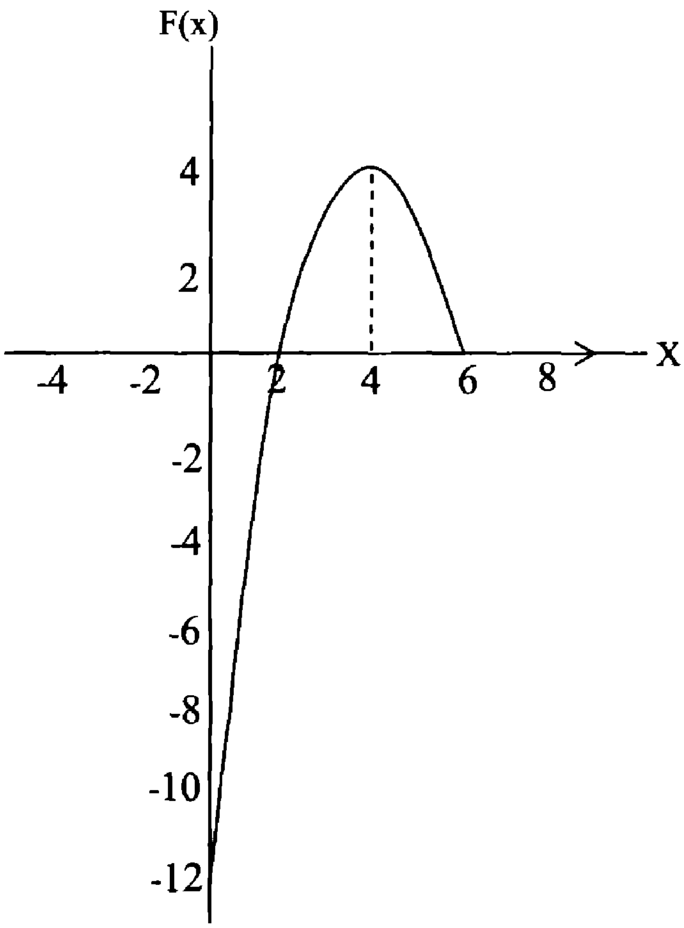
$$x = \frac{2+6}{2} = 4$$

ثم بالتعويض في المعادلة لإيجاد قيمة y:

$$y = -(4)^2 + 8(4) - 12$$
$$= -16 + 32 - 12 = 4$$

وبذلك يتم تحديد النقاط الأربعة التالية:

x	0	2	6	4
y	-12	0	0	4



تطبيقات اقتصادية على الدالة التربيعية

معظم دوال العرض والطلب هي دوال غير خطية، ولكن للتبسيط في التحليل قد اعتمدنا في الفصل السابق على دوال العرض والطلب الخطية، ولإيجاد التوازن في نموذج سوق غير خطي، والتي كثيراً ما تتمثل فيه دوال العرض والطلب بمعادلات غير خطية من الدرجة الثانية (التربيعية) سيتم اعتماد أساليب جديدة في التحليل، ولأنه من الممكن أن يكون العرض والطلب ممثلاً بمنحى وليس بخط مستقيم، أيضاً حتى ولو كانت دوال الطلب والعرض دوال خطية، فإن الدوال المشتقة منها (المبنية عليها) مثل دوال الإيراد الكلي، دوال التكلفة ودوال الربح هي دوال غير خطية، وفي هذه الحالة فإنه من الضروري التعامل مع هذه الظواهر باستخدام دوال أكثر تعقيداً (دوال غير خطية)، ومن أبسط الدوال غير الخطية ما يعرف بالدالة التربيعية.

ونتناول فيما يلي بعض التطبيقات الاقتصادية للدالة التربيعية مثل:

1- توازن السوق غير الخطي.

2- دالة الايراد ودوال التكلفة ودالة الربح.

1- توازن السوق غير الخطي:

كثير ما يفترض أن دوال الطلب والعرض تكون خطية وبناء على ذلك فإنه يتم الاعتماد على الطرق الرياضية في حل المعادلات الخطية، وكان من أهمها طريقة الحذف أو طريقة التعويض أو باستخدام المحددات أو باستخدام المصفوفات، وذلك لحل معادلتي العرض والطلب والوصول إلى الوضع التوازني، حيث يتم تحديد السعر التوازني والكمية التوازنية.

ولكن في الحياة العملية كثيراً ما نجد بعض دوال العرض والطلب غير الخطية، ولذا فإننا سوف نستخدم أساليب الدالة التربيعية للتعامل مع دوال العرض والطلب غير الخطية، والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال: أوجد التوازن في سوق أحد السلع، إذا كانت دوال العرض والطلب على الصورة التالية:

$$P = -Q_d^2 - 5Q_d + 52$$
$$P = 2Q_s^2 + 10Q_s + 10$$

الحل

عند التوازن: $Q_d = Q_s = Q$

حيث أن: Q_d ← تمثل الكمية المطلوبة

Q_s ← تمثل الكمية المعروضة

Q ← تمثل الكمية التوازنية

وبذلك فإنه عند التوازن تصبح دالتي العرض والطلب كما يلي:

$$P = -Q^2 - 5Q + 52$$
$$P = 2Q^2 + 10Q + 10$$

وبذلك فإنه عند التوازن يكون:

$$-Q^2 - 5Q + 52 = 2Q^2 + 10Q + 10$$

وذلك لأن كلا الطرفين مساوياً لـ (P).

$$-3Q^2 - 15Q + 42 = 0$$

وهي معادلة غير خطية (تربيعية) ويتم حلها باستخدام الجذر المميز أو باستخدام التحليل للعوامل الأولية كما يلي:

- بقسمة المعادلة على (-3): $Q^2 + 5Q - 14 = 0$

بالتحليل:

$$(Q + 7)\,(Q - 2) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} Q + 7 = 0 & Q - 2 = 0 \\ Q = -7 & Q = 2 \end{array}$$

مرفوض

ملحوظة: يمكن استخدام الجذر المميز حيث أن:

$a = 1 \quad , \quad b=5 \quad , \quad c=-14$

$$Q= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وبذلك فإن الكمية التوازنية تساوي $Q = \underline{\underline{2}}$ ولذا فإنه لإيجاد السعر التوازني يتم التعويض في معادلة الطلب أو معادلة العرض.

- بالتعويض في دالة الطلب:

$$P=-(2)^2 - 5(2) + 52$$
$$= -4 - 10 + 52 = 38$$

- بالتعويض في دالة العرض:

$$P=2(2)^2 + 10(2) + 10$$
$$= 8 + 20 + 10 = 38$$

وبذلك فإن السعر التوازني يساوي 38.

مثال: حدد الكمية التوازنية والسعر التوازني لدوال الطلب والعرض التالية:

$$P = -Q_d^2 - 4Q_d + 68$$
$$P = Q_s^2 + 2Q_s + 12$$

الحل

عند التوازن فإن: $Q_d = Q_S = Q$

وبذلك فإنه عند التوازن تصبح دالتي العرض والطلب كما يلي:

$$P = -Q^2 - 4Q + 68$$
$$P = Q^2 + 2Q + 12$$

∴ عند التوازن فإن

$$-Q^2 - 4Q + 68 = Q^2 + 2Q + 12$$

وذلك لأن كلا الطرفين= السعر (P)

$$-2Q^2 - 6Q + 56 = 0$$

يصبح لدينا دالة تربيعية (غير خطية) ولحلها نستخدم النموذج التربيعي.

- بالقسمة على 2-

$$Q^2 + 3Q - 28 = 0$$

ثم الحل باستخدام تحليل مقدار ثلاثي كما يلي

$$(Q + 7)\ (Q - 4) = 0$$

$Q - 7 = 0$	$Q - 4 = 0$
$Q = -7$	$Q = 4$

مرفوض

∴ فإن الكمية التوازنية تساوي (4)

ويمكن الحل باستخدام الجذر المميز كما يلي:

حيث أن: $c = -28 \quad , \quad b = 3 \quad , \quad a = 1$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-28)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2}$$

Q

$\frac{-3+11}{2}$	$\frac{-3-11}{2}$
$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{-14}{2} = -7$
	مرفوض

ولإيجاد السعر التوازني يتم التعويض في إحدى المعادلتين كما يلي:

بالتعويض في دالة الطلب:

$$P = -(4)^2 - 4(4) + 68$$
$$= -16 - 16 + 68 = -32 + 68 = 36$$

أو بالتعويض في دالة العرض

$$P = (4)^2 - 2(4) + 12$$
$$= 16 + 8 + 12 = 36$$

يلاحظ أنه عند حل الدالة التربيعية السابقة وجد أن لها حلين وقد أهملنا الحل السالب وذلك لأن السعر التوازني والكمية التوازنية يجب إن يكونا موجبان، وبذلك نجد أن نقطة تقاطع منحنى الطلب ومنحنى العرض، عند النقطة (36 ,4).

2- دالة الإيراد ودوال التكاليف ودالة الربح.

يتم تناول دوال الإيراد الكلي والتكاليف الكلية والربح إذا كانت تأخذ شكل دالة خطية من الدرجة الأولى وذلك بغرض تحديد نقطة التعادل. ولكن إذا كانت دوال الإيراد والتكاليف والربح تأخذ شكل دوال غير خطية، فإن التحليل الخطي لا يصلح ولذا فإننا نلجأ إلى استخدام طرق أكثر تقدماً. وفي هذا الفصل سوف نقوم بتحديد حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل وحجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى إيراد أو أقصى ربح أو أقل تكلفة وذلك إذا كانت دوال الإيراد والتكلفة والربح من الدرجة الثانية (دالة تربيعية) ولتوضيح ذلك نتعرض للأمثلة التالية:

أولاً: دالة الإيراد الكلي: Total Revenue Function

يمثل الإيراد الكلي إجمالي ما تحصل عليه المنشأة من أموال نظير بيع حجم معين من السلع وبسعر معين للسلعة.

وإذا رمزنا لحجم الإنتاج بالرمز: Q

وسعر السلعة بالرمز: P

والإيراد الكلي بالرمز: TR

وعليه فإن الإيراد الكلي هو عائد بيع الكمية Q بسعر P

أي أن الإيراد الكلي= الكمية × السعر

$$TR = PQ$$

مثال: إذا كانت دالة الطلب لإحدى السلع على الصورة:

$$P = 80 - 2Q$$

المطلوب تمثيل دالة الإيراد الكلي بيانياً بالنسبة لحجم الإنتاج. ومن الرسم أوجد:

1- حجم الإنتاج الذي يجعل الإيراد الكلي= صفر.

2- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد كلي ممكن، وقيمة هذا الإيراد.

الحل

$$TR = PQ$$
$$= (80 - 2Q)\,Q$$
$$TR = 80Q - 2Q^2$$

ولرسم الدالة بيانياً نلاحظ ما يلي:

1- شكل المنحنى يأخذ الصورة ∩ حيث أن قيمة a سالبة (-2).

2- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي وذلك بوضع $Q = 0$

النقطة هي: $(0 , 0)$ $\quad TR = 0$

3- نقطة (نقاط) تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع: $TR = 0$

$$80Q - 2Q^2 = 0$$
$$Q(80 - 2Q) = 0$$

إما $Q = 0$ أو $80 - 2Q = 0$

$80 = 2Q \qquad Q = 40$.

نقطتي التقاطع هما (0 , 0)، (0 , 40).

4- تحديد أعلى نقطة على المنحنى وذلك بإيجاد الوسط الحسابي لنقطتي Q

$Q = \frac{1}{2}(0 + 40) = 20$

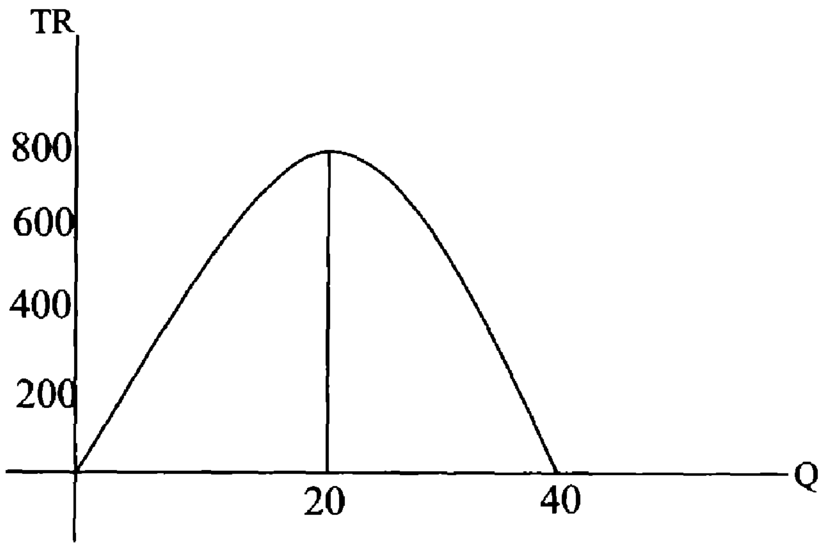
وبالتعويض عن قيمة Q في دالة الإيراد الكلي:

$$TR = 80(20) - 2(20)^2$$
$$= 1600 - 800 = 800 .$$

∴ النقطة هي (800 , 20)

وعلى هذا يأخذ المنحنى الشكل التالي:

x	0	0	40	20
y	0	0	0	800



ومن الشكل يتضح ما يلي:

1- حجم الإنتاج الذي يجعل الإيراد الكلي= صفر هو:

$Q = 0 \quad , \quad Q = 40$

2- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد كلي ممكن هو: $Q = 20$

وقيمة الإيراد عند هذا الحجم من الانتاج هو: $TR = 800$

ثانياً: دوال التكلفة: Costs Functions

هناك الصورالعديدة من دوال التكلفة، ويمكن استنتاج الصور العامة لها فيما يلي:

1- التكاليف الكلية (Total Cost): ويرمز لها بالرمز TC وهي تمثل إجمالي ما تنفقه المنشأة من أموال في سبيل إنتاج حجم معين من السلعة. وهذه التكاليف تتوقف على حجم الإنتاج أي أنها دالة في حجم الإنتاج.

2- التكاليف الثابتة (Fixed Cost): ويرمز لها بالرمز FC وهذه التكاليف لا ترتبط بحجم الإنتاج وإنما تنفق بصرف النظر عن التشغيل والإنتاج مثل تكلفة الأرض والمعدات والإيجار وغيرها.

3- التكاليف المتغيرة (Variable Cost): ويرمز لها بالرمز VC وتمثل التكلفة المتغيرة لكل وحدة منتجة. وهذه التكلفة تتغير بتغير حجم الإنتاج مثل تكلفة المواد الخام، ساعات العمل.

4- التكاليف المتغيرة الكلية (Total Variable Cost): ويرمز لها بالرمز TVC وهذه تمثل محصلة التكلفة المتغيرة للمنشأة ككل مرجحة بحجم الإنتاج. أي أن:

$$TVC = (VC)Q$$

وعلى هذا فإن:

التكاليف الكلية= التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة الكلية

$$TC = FC + TVC$$

$$TC = FC + (VC)Q$$

5- التكلفة المتوسطة (Average Cost): ويرمز لها بالرمز AC ويقصد بها متوسط تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة، وبعبارة أخرى تكلفة الوحدة الواحدة في المتوسط حيث

$$\text{التكلفة المتوسطة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{حجم الإنتاج}}$$

$$\therefore\ AC = TC \setminus Q$$

ومنها يمكن استنتاج أن:

$$TC = AC(Q).$$

مثال: إذا كانت التكاليف الثابتة تقدر بـ 500$ والتكلفة المتغيرة لكل وحدة تقدر بـ 5$

المطلوب: أوجد دالتي التكلفة الكلية (TC) والتكلفة المتوسطة (AC) بالنسبة لحجم الإنتاج.

الحل

$FC = 500 \quad , \quad VC = 5$

$TVC = (VC)Q = 5Q$

$TC = FC + TVC$

$\therefore\ TC = 500 + 5Q$

$\therefore\ AC = TC \setminus Q$

$= (500 + 5Q) \setminus Q \quad = \ 500 \setminus Q \ + \ 5$

مثال: إذا كانت التكاليف الثابتة لإحدى المنشآت تقدر بـ 32$ والتكلفة المتغيرة لكل وحدة تقدر بـ 4$ وكانت دالة الطلب على السلعة تأخذ الصورة:

$$P = 16 - Q$$

المطلوب: تمثيل دالة الربح (π) بيانياً بالنسبة لحجم الإنتاج ومن الرسم أوجد:

1- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل.

2- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن وقيمة هذا الربح.

الحل

الربح هو الفرق بين الإيراد الكلي والتكاليف الكلية

فإذا رمزنا للربح بالرمز π فإن:

$$\pi = TR - TC$$
$$TR = PQ = (16 - Q)Q$$
$$TR = 16Q - Q^2 \quad \ldots\ldots (1)$$
$$TC = FC + TVC$$
$$TC = 32 + 4Q \quad \ldots\ldots (2)$$
$$\pi = (16Q - Q^2) - (32 + 4Q)$$
$$= 16Q - Q^2 - 32 - 4Q$$
$$\pi = -Q^2 + 12Q - 32$$

ولرسم دالة الربح بيانياً نتبع ما يلي:

1- تحديد شكل المنحنى: يأخذ الشكل $\cap$ حيث a سالبة (1-).

2- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي وذلك بوضع: $Q = 0$ نجد أن: $\pi = -32$ النقطة هي: $(0, -32)$

3- تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع: $\pi = 0$

$$-Q^2 + 12Q - 32 = 0$$

بالضرب في (1-)

$$Q^2 - 12Q + 32 = 0$$

$$(Q - 4)(Q - 8) = 0$$

$$Q - 4 = 0 \quad \therefore \quad Q = 4$$

$$Q - 8 = 0 \quad \therefore \quad Q = 8$$

النقطتين هما (0 , 8)، (0 , 4)

4- تحديد أعلى نقطة على المنحنى:

$$Q = \tfrac{1}{2}(4 + 8) = \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

وبالتعويض في دالة الربح الأصلية عند $Q = 6$ نجد أن:

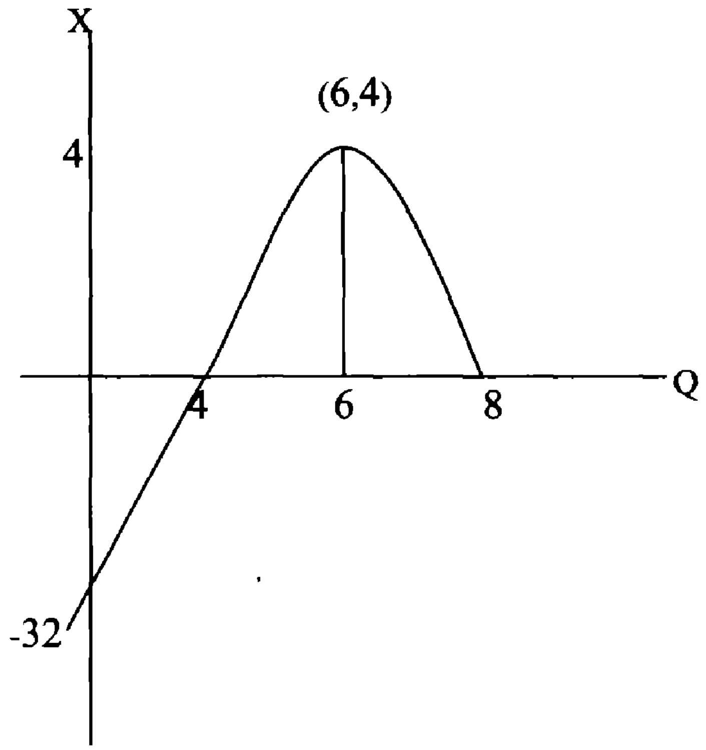
$$\pi = -(6)^2 + 12(6) - 32$$

$$= -36 + 72 - 32 = 72 - 68 = 4$$

النقطة هي (4 , 6)

ويأخذ المنحنى الشكل التالي:

Q	0	4	8	6
π	-32	0	0	4



ومن الشكل يتضح ما يلي:

1- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو: $Q = 8$ ، $Q = 4$

2- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن هو: $Q = 6$

وقيمة الربح عند هذا الحجم من الانتاج هو: $\pi = 4$.

مثال: إذا كانت دالة الطلب على الصورة: $2Q + P = 25$

ودالة التكلفة المتوسطة على الصورة : $AC = 32/Q + 5$

المطلوب: ارسم دالة الربح (π) ومن الرسم أوجد:

1- قيمة Q التي تحقق نقطة التعادل.

2- قيمة Q التي تحقق أقصى ربح ممكن وقيمة هذا الربح

الحل

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = PQ \quad ، \quad P = 25 - 2Q$$

$$TR = (25 - 2Q)Q = 25Q - 2Q^2$$
$$TC = AC(Q) = (32/Q + 5)Q = 32 + 5Q$$
$$\pi = 25Q - 2Q^2 - 32 - 5Q$$
$$\pi = -2Q^2 + 20Q - 32$$

رسم دالة الربح بيانيا:

- **تحديد شكل المنحنى: يأخذ الشكل $\cap$ حيث a سالبة (1-).**

- **بوضع:** $Q = 0 \quad , \quad \pi = -32$

النقطة الأولى (0 , -32)

- **بوضع** $\pi = 0$

$$-2Q^2 + 20Q - 32 = 0$$
$$-Q^2 + 10Q - 16 = 0$$
$$a = -1 \quad , \quad b = 10 \quad , \quad c = -16$$
$$Q = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4(-1)(-16)}}{2(-1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{-2}$$
$$Q = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{-2}$$
$$\therefore Q_1 = \frac{-10 + 6}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$
$$\therefore Q_2 = \frac{-10 - 6}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$$

النقطتين الثانية والثالثة هما (0 , 2)، (0 , 8)

∴ حجم الإنتاج الذي يحقق نقطة التعادل هما (2 , 8)

- أعلى نقطة على المنحنى هي:

$$Q^* = \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(2 + 8) = \tfrac{1}{2}(10) = 5$$

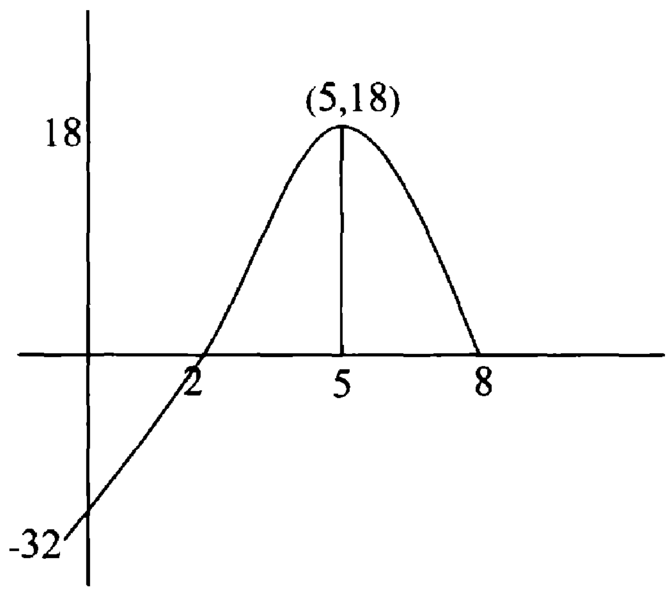
وبالتعويض عن قيمة $Q = 5$ في دالة الربح الأصلية نجد أن:

$$\pi = -2(5)^2 + 20(5) - 32 = -50 + 100 - 32$$

$$= 100 - 82 = 18$$

النقطة هي (5 , 18).

حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح هو $Q = 5$ وقيمة هذا الربح هو $\pi = 18$.



مثال: إذا كانت دالة التكلفة الثابتة (Fc) تقدر بـ 96 وكانت التكلفة المتغيرة للوحدة (vc) تأخذ الصورة: $VC = 48 + Q$

وكانت دالة الطلب للسلعة على الصورة التالية: $P + Q = 80$

المطلوب:

1- أوجد كل من π , TC , TR بالنسبة لحجم الإنتاج.

2- ارسم دالة الربح (π) ومن الرسم أوجد:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل.
- حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

3- عند حجم الإنتاج الأمثل أوجد كل من: $AC , TC , TVC , VC , TR , P$

الحل

1- حيث أن دالة الطلب على السلعة هي: $P + Q = 80$

فأن: $P = 80 - Q$

فإن دالة الإيراد الكلي: $TR = P * Q$

$$\therefore TR = (80 - Q)Q$$

$$TR = 80Q - Q^2$$

2- حيث أن: $VC = 48 + Q \quad , \quad FC = 96$

$\therefore$ التكلفة الكلية:

$$TC = FC + TVC$$

$$TVC = VC\,(Q)$$

$$= (48 + Q)\,Q$$

$$TVC = 48Q + Q^2$$

$$TC = FC + TVC$$

$$= 96 + 48Q + Q^2$$

3- دالة الربح π

$$\pi = TR - TC$$
$$= \left(80Q - Q^2\right) - \left(96 + 48Q + Q^2\right)$$
$$= 80Q - Q^2 - 96 - 48Q - Q^2$$
$$\pi = -2Q^2 + 32Q - 96$$

4- رسم دالة الربح (π)

- تحديد شكل المنحنى الممثل لدالة الربح نجد أنه يأخذ الشكل $\cap$ حيث أن معامل Q^2 سالب.
- تحديد نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأس وذلك بوضع: $Q=0$ نجد أن $\pi = -96$.
- تحديد نقاط تقاطع المحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع: $\pi=0$ ثم الحل باستخدام الجذر المميز أو بالتحليل نجد أن:

$$-2Q^2 + 32Q - 96 = 0$$

بالقسمة على (-2) نجد أن

$$Q^2 - 16Q + 48 = 0$$
$$(Q - 12)(Q - 4) = 0$$

$Q - 12 = 0$	$Q - 4 = 0$
$Q = 12$	$Q = 4$

- تحديد قمة المنحنى (النهاية العظمى) وذلك بأخذ متوسط قيمتي Q السابق إيجادهم نجد أن:

$$Q' = \frac{12+4}{2} = 8$$

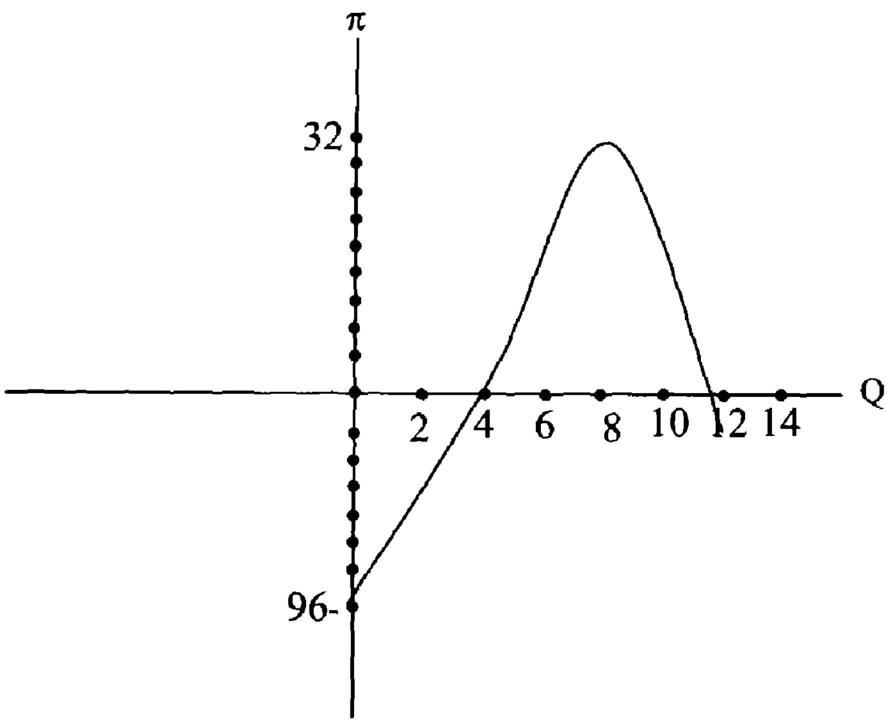
بالتعويض في دالة الربح نجد أن:

$$\pi = -2(8)^2 + 32(8) - 96$$
$$= -128 + 256 - 96 = 32$$

وبذلك نجد أن النقاط الأربعة اللازمة لرسم الدالة التربيعية (دالة الربح) هي:

Q	0	4	12	8
π	-96	0	0	32

ثم رسم دالة الربح كما يلي:



من الرسم السابق نجد أن:

1- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو: $Q = 12$, $Q = 4$.

2- يحقق أقصى ربح ممكن وهو: $\pi = 32$.

3- عند حجم الإنتاج الأمثل $(Q = 8)$ نجد أن:

$$P = 80 - Q = 80 - 8 = 72$$

$$TR = 80Q - Q^2 = 80(8) - (8)^2 = 640 - 64 = 576$$

$$VC = 48 + Q = 48 + 8 = 56$$

$$TVC = 48Q + Q^2 = 48(8) + (8)^2 = 384 + 64 = 448$$

$$TC = FC + TVC = 96 + 448 = 544$$

$$= 96 + 48Q + Q^2 = 544$$

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{544}{8} = 68$$

$$= \frac{96}{Q} + 48 + Q$$

$$= 12 + 48 + 8 = 68$$

مثال: إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما على الصورة: $P + Q = 70$

- وكانت دالة التكلفة الثابتة: $FC = 56$

- وكانت دالة التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة (VC) على الصورة:

$$VC = 38 + Q$$

المطلوب:

1- أوجد كل من π , TC , TR بالنسبة لحجم الإنتاج (Q).

2- ارسم دالة الربح ومن الرسم أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل وحجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح.

3- عند حجم الإنتاج الأمثل أوجد AC , TVC , TR , TC , P , π , VC.

الحل

1- دالة الإيراد الكلي (TR) هي:

$$TR = P * Q$$
$$= (70 - Q)Q$$
$$TR = 70Q - Q^2$$

2- دالة التكلفة الكلية TC هي:

$$TC = FC + TVC$$

حيث أن:

$$TVC = VC(Q)$$
$$TC = 56 + (Q + 38)Q$$
$$TC = 56 + Q^2 + 38Q$$

3- دالة الربح (π) هي:

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = 70Q - Q^2 - 56 - Q^2 - 38Q$$
$$\pi = -2Q^2 + 32Q - 56$$

4- رسم دالة الربح كما يلي:

- شكل الدالة $\cap$ حيث أن إشارة معامل Q^2 سالبة.
- نقطة تقاطع المنحنى مع المحدد الرأسي عندما $Q = 0$ نجد أن $\pi = -56$
- نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي عندما $\pi=0$ ثم حل المعادلة التربيعية بالتحليل أو باستخدام الجذر المميز نجد أن

$$-2Q^2 + 32Q - 56 = 0$$

بالقسمة على (-2) نجد أن

$$Q^2 + 16Q - 28 = 0$$
$$(Q - 14)\ (Q - 2) = 0$$

أو

$$Q-14=0 \qquad\qquad Q-2=0$$
$$Q=14 \qquad\qquad\quad Q=2$$

- تحديد قيمة المنحنى وذلك بأخذ متوسط قيمتي Q السابق إيجادهم في الخطوة السابقة

$$Q'=\frac{14+2}{2}=8$$

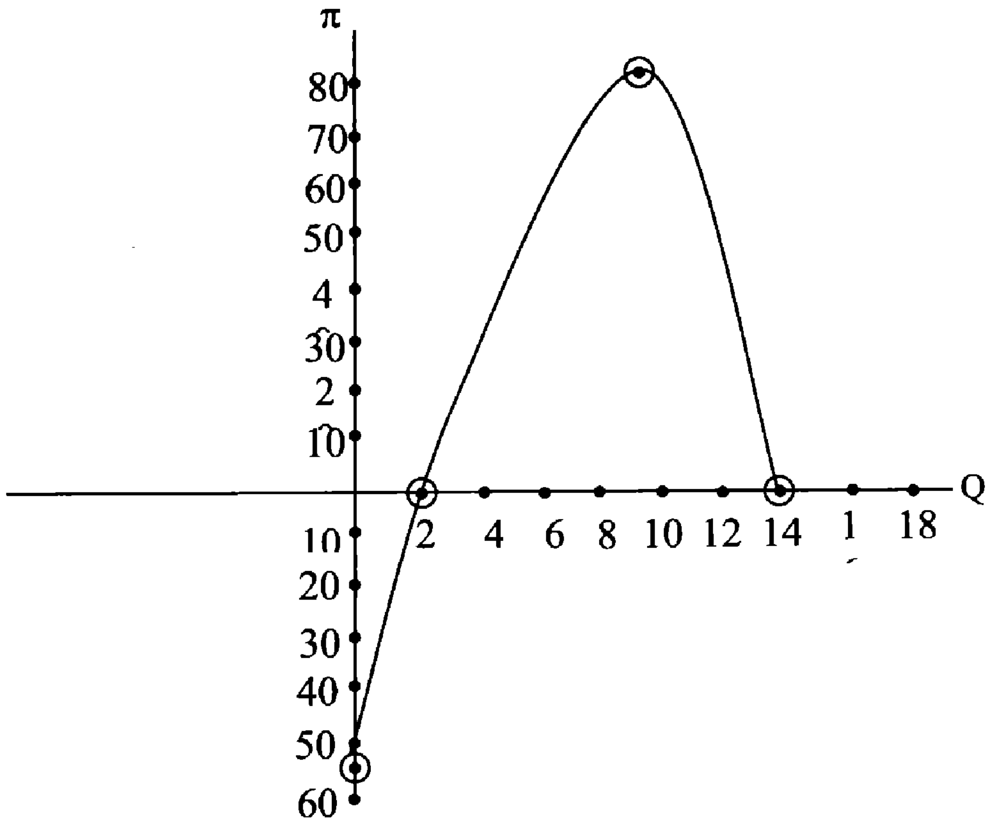
بالتعويض في المعادلة لإيجاد قيمة π

$$\pi=-2(8)^2+32(8)-56$$
$$=-128+256-56=72$$

وبذلك فإن النقاط هي:

Q	0	2	14	8
π	-56	0	0	72

رسم دالة الربح كما يلي:



من الرسم نجد أن:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو: $Q = 14$, $Q = 2$
- حجم الإنتاج الأمثل هو: $Q = 8$
- أقصى ربح هو: $\pi = 72$

عند حجم الإنتاج الأمثل: (بالتعويض عن قيمة $Q = 8$ في المعادلات) فإن:

$P = 62$, $VC = 46$, $TVC = 368$
$TC = 424$, $TR = 469$, $\pi = 72$
$AC = 53$

مثال: إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما على الصورة التالية:

$$P = 35 - 2Q$$

وكانت دالة التكلفة المتوسطة (AC) على الصورة الآتية:

$$AC = Q + 5 + \frac{48}{Q}$$

المطلوب:

1- أوجد دالة الإيراد الكلي (TR)، ودالة التكلفة الكلية (TC) ودالة الربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج.

2- ارسم دالة الربح ومن الرسم أوجد:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل
- حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح

3- عند حجم الإنتاج الأمثل أوجد

$$TVC,\ VC,\ ,TC,\ AC,\ TR,\ P,\ \pi,\ FC$$

الحل

1- حيث أن دالة الطلب على السلعة $P = 35 - 2Q$

فإن دالة الإيراد الكلي:

$$TR = P * Q$$
$$= (35 - 2Q)Q$$
$$TR = 35Q - 2Q^2$$

2- حيث أن دالة التكلفة المتوسطة للسلعة على الصورة

$$AC = Q + 5 + \frac{48}{Q}$$

فإن دالة التكلفة الكلية:

$$TC = AC * Q$$
$$= \left(Q + 5 + \frac{48}{Q}\right)Q$$
$$TC = Q^2 + 5Q + 48$$

3- دالة الربح

$$\pi = TR - TC$$
$$= \left(35Q - 2Q^2\right) - \left(Q^2 + 5Q + 48\right)$$
$$= 35Q - 2Q^2 - Q^2 - 5Q - 48$$
$$\pi = -3Q^2 + 30Q - 48$$

4- رسم دالة الربح:

- شكل الدالة تأخذ الشكل $\cap$ حيث أن اشارة معامل X^2 سالبة.
- نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الرأسي. $\pi = -48$
- نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي وذلك بوضع $\pi=0$ نجد أن:

$$-3Q^2 + 30Q - 48 = 0$$

بالقسمة على (-3) نجد أن

$$Q^2 - 10Q + 16 = 0$$
$$(Q - 8)(Q - 2) = 0$$

$Q - 8 = 0$	$Q - 2 = 0$
$Q = 8$	$Q = 2$

- تحديد قيمة المنحنى (أقصى ربح) وذلك بأخذ متوسط قيمتي Q السابق إيجادها:

$$Q' = \frac{8+2}{2} = 5$$

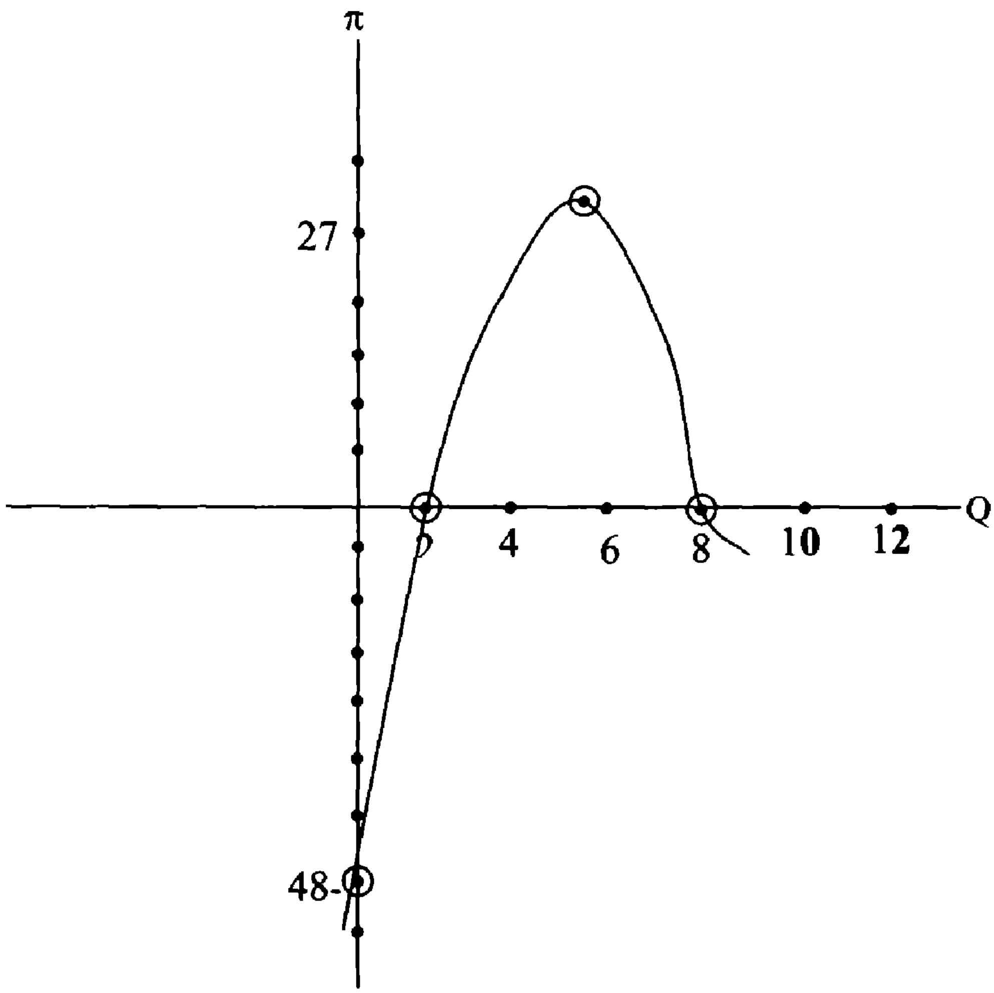
ثم بالتعويض في دالة الربح نجد أن:

$$\pi = -3(5)^2 + 30(5) - 48$$
$$= -75 + 150 - 48 = 27$$

نقاط الحل هي:

Q	0	2	8	5
π	-28	0	0	27

رسم دالة الربح:



من الرسم نجد أن:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو $Q = 2$, $Q = 8$
- حجم الإنتاج الأمثل هو $Q = 5$
- أقصى ربح يتحقق عند حجم الإنتاج الأمثل هو $\pi = 27$
- عند حجم الإنتاج الأمثل $Q=5$ نجد أن

$$P = 35 - 2Q = 35 - 2(5) = 25$$

$$TR = 35Q - 2Q^2 = 35(5) - 2(5)^2 = 125$$

$$AC = 5 + 5 + \frac{48}{5} = 19.6$$

$$TC = AC(Q)$$
$$= 19.6 * 5 = 98$$

أو

$$TC = Q^2 + 5Q + 48$$
$$= (5)^2 + 5(5) + 48 = 98$$

$$TVC = Q^2 + 5Q$$
$$= (5)^2 + 5(5) = 50$$

$$VC = \frac{TVC}{Q} = Q + 5 = 10$$

$$FC = 48$$

$$\pi = TR - TC = 125 - 98 = 27$$

مثال: ارسم على شكل واحد كلاً من دالة الإيراد الكلي ودالة التكلفة الكلية:

$$TR = -2Q^2 + 14Q$$

$$TC = 2Q + 10$$

ثم استخدم الرسم في إيجاد قيمة Q التي:

1- تحقق نقطة التعادل

2- تعظم الربح.

الحل

دالة الإيراد الكلي: $TR = -2Q^2 + 14Q$

- بوضع $Q = 0$ ∴ نجد أن : $TR = 0$

النقطة الأولى: $(0 , 0)$

- بوضع $TR = 0$

$$\therefore\ -2Q^2 + 14Q = 0$$
$$Q(-2Q + 14) = 0$$
$$Q = 0 \quad \text{أو} \quad -2Q + 14 = 0$$
$$\therefore\ 2Q = 14$$
$$Q = 7$$

النقطة الثانية: $(7 , 0)$

- تحديد أعلى نقطة على المنحنى بإيجاد المتوسط بين قيمتي: Q

$$Q = \tfrac{1}{2}(0 , 7) = 3.5$$
$$TR = -2(3.5)^2 + 14(3.5)$$
$$= -2(12.25) + 49$$
$$TR = -24.5 + 49 = 24.5$$

∴ أعلى نقطة على المنحنى هي: $(3.5 \ , \ 24.5)$

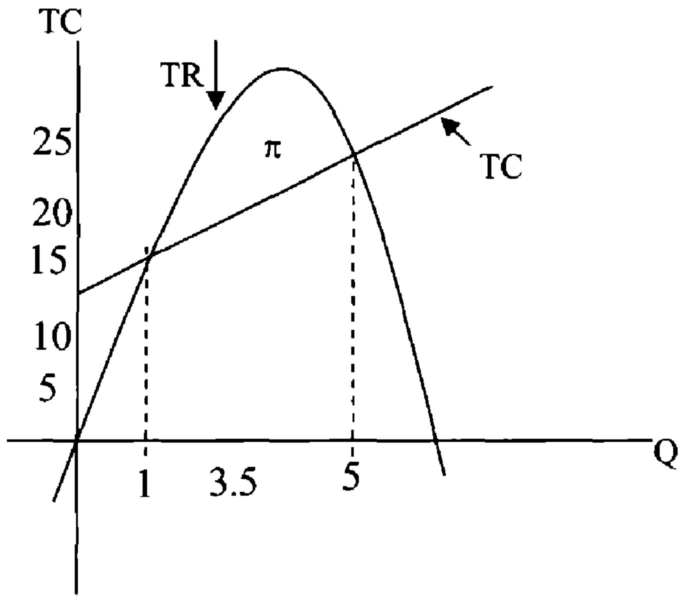
دالة التكلفة الكلية(دالة خطية): $TC = 2Q + 10$

- بوضع $Q = 0$ $TC = 10$

النقطة الأولى (0 , 10).

بوضع: $Q = 5$ بالتعويض: $TC = 2(5) + 10 = 20$

النقطة الثانية (5 , 20).



من الشكل يتضح أن حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هما عند نقاط تقاطع منحنى الإيراد الكلي مع دالة التكلفة الكلية أي عند: $Q = 1$ ، $Q = 5$.

لبيان حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل وحجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن يمكن الاستعانة بالحل الجبري لدالة الربح كما يلي:

$$\pi = TR - TC$$
$$= -2Q^2 + 14Q - 2Q - 10$$
$$\pi = -2Q^2 + 12Q - 10$$

بوضع $Q = 0$

∴ نجد أن $\pi = -10$

بوضع $\pi = 0$

$$-2Q^2 + 12Q - 10 = 0$$
$$Q^2 - 6Q + 5 = 0$$
$$(Q - 1)(Q - 5) = 0$$
$$Q = 1 \quad , \quad Q = 5$$

تحديد نقطة النهاية العظمي بإيجاد المتوسط بين قيمي Q:

$$Q = \tfrac{1}{2}(1 + 5) = 3$$

بالتعويض في دالة الربح الأصلية:

$$\pi = -2(3)^2 + 12(3) - 10$$
$$= -18 + 36 - 10 = 36 - 28 = 8$$

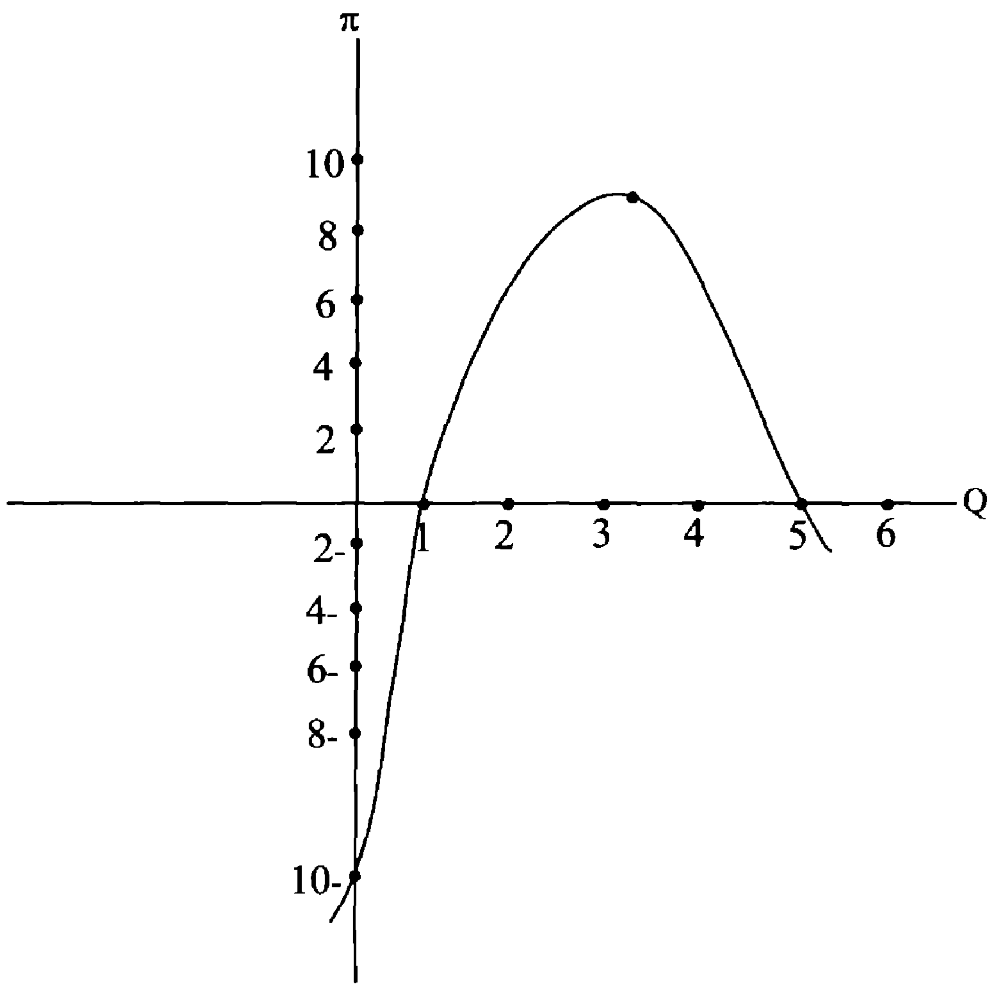
∴ حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هما: 5 ، 1

حجم الإنتاج الذي يعظم الربح هو 3 ومقدار الربح هو 8

وبالتالي يمكن رسم الدالة التربيعية بأربعة نقاط حيث أن

Q	0	1	5	3
π	-10	0	0	8

يمكن رسم دالة الربح كما يلي:



من الرسم نجد أن:

1) حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو: $Q=1$, $Q=5$

2) حجم الإنتاج الأمثل هو: $Q=3$

3) أقصى ربح (قيمة الربح عند حجم الإنتاج الأمثل): $\pi=8$

تمارين

1- حل المعادلات التالية بطريقة المميز وبطريقة تحليل المقدار الثلاثي:

a) $Q^2 - 12Q + 20 = 0$

b) $Q^2 - 21Q + 20 = 0$

c) $Q^2 - 8Q - 20 = 0$

d) $3\ Q^2 - 30Q + 48 = 0$

e) $2\ Q^2 - 11Q - 40 = 0$

2- ارسم الدوال التربيعية التالية:

a) $f(x) = 3x^2 - 5$

b) $f(x) = -2x^2 + 5$

3- إذا كانت التكاليف الثابتة (FC) تقدر بـ 600$ والتكلفة المتغيرة لكل وحدة (VC) تقدر بـ 10$ ، استنتج دالة التكلفة الكلية (TC) والتكلفة المتوسطة (AC).

4- إذا كانت دالة الربح (π) لإحدى الشركات على الصورة التالية:

$\pi = -2Q^2 + 24Q - 54$

حيث أن: Q: حجم الإنتاج

المطلوب: تمثيل دالة الربح بيانياً ومن الرسم أوجد:

a) حجم الإنتاج Q الذي يحقق التعادل.

b) حجم الإنتاج Q الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

5) إذا علمت أن:

$FC = 4\$$ ؛ $VC = 1\$$

$P = 10 - 2Q$

المطلوب: ارسم دالة الربح π بالنسبة لحجم الإنتاج (Q) ومن الرسم أوجد:

- حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل.
- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

6) إذا كانت دالة الطلب ودالة التكلفة المتوسطة لسلعة ما على الصورة التالية

$$2Q + P = 17$$
$$AC = 12/Q + 3$$

المطلوب: تمثيل دالة الربح (π) بيانياً بالنسبة للسعر (P) ومن الرسم أوجد:

a) السعر P الذي يحقق التعادل.

b) السعر P الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

7) إذا كانت دالة الطلب ودالة التكلفة المتوسطة لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = 30 - 2Q$$
$$AC = 54/Q + 6$$

المطلوب: استنتاج دالة الإيراد الكلي (TR) ودالة التكلفة الكلية (TC) بالنسبة لحجم الإنتاج (Q) ثم تمثيل دالة الربح (π) بيانياً ومن الرسم أوجد:

a) قيمة حجم الإنتاج (Q) الذي يحقق التعادل.

b) قيمة حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن وقيمة هذا الربح.

8) إذا كانت التكلفة الكلية (TC) ودالة الإيراد الكلي (TR) لأحد المشروعات على الصورة التالية:

$$TC = 16 + 10Q$$
$$TR = 20Q - Q^2$$

المطلوب: على رسم بياني واحد ارسم كلاً من TR، TC ومن الرسم استنتج قيمة Q التي:

- لاتحقق نقطة التعادل.
- تعظم الربح (يحقق أكبر ربح ممكن).

9) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. حل المعادلة $X^2 - 2X - 24 = 0$ هو:

أ) (7، 4) ب) (-14، 2) ج) (14، -2) د) خلاف ذلك هو..

2. تقدر قيمة الجذر المميز في المعادلة: $X^2 - 16X + 28 = 0$ القيمة:

أ) (368) ب) (224) ج) (144) د) خلاف ذلك هو..

10) استخدام الجذر المميز لحل المعادلات الآتية:

$$1)\ 2X_2 - 3X + 12 = 0$$

$$2)\ 4X_2 - 10X + 8 = 0$$

11) إذا كانت التكلفة الثابتة (Fc) لإحدى المنشآت تقدر بـ $4 والتكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة (VC) تقدر بدولار واحد فقط، وكانت دالة الطلب على السلعة تأخذ الصورة التالية: $P + 2Q = 10$

المطلوب:

1. استنتج دالة التكلفة الكلية (Tc) ودالة الإيراد الكلي (TR) ودالة الربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج (Q).
2. ارسم دالة الربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج ومن الرسم أوجد:

أ) حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل.

ب) حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

12) ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. حل المعادلة $X^2 - 7X - 18 = 0$ هو:

أ) (3 ، 6)   ب) (18- ، 1)   ج) (9 ، 2-)   د) خلاف ذلك وهو..

2. تقدر قيمة المميز في المعادلة $X^2 - 10X + 21 = 0$ هو:

أ) (184)   ب) (16)   ج) (144)   د) خلاف ذلك وهو..

13) إذا كانت دالة الطلب لسلعة ما على الصورة التالية: $P = 35 - 2Q$

ودالة التكلفة المتوسطة (Ac) على الصورة الآتية: $Ac = Q + 5 + \frac{48}{Q}$

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. دالة الإيراد الكلي TR بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $35 - 2Q^2$ ب) $35Q^2 - 2Q$

ج) $35Q - 2Q^2$ د) خلاف ذلك هو...

2. دالة التكلفة الكلية TC بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $\frac{48}{Q^2} + Q - Q^2$ ب) $Q + 48 - Q^2$

ج) $Q^2 + 5Q + 48$ د) خلاف ذلك هو...

3. دالة الربح (IT) بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $Q^2 + 30Q + 48$ ب) $20Q - 2Q^2 + 48$

ج) $Q^2 + 10Q + 24$ د) خلاف ذلك هو...

4. تأخذ دالة الربح (Π) شكل:

أ) حرف U ب) حرف ∩ ج) خط مستقيم د) خلاف ذلك هو..

5. تقطع دالة الربح المحور الرأسي عند النقطة:

أ) (48 ، 0) ب) (24 ، 0) ج) (0 ، 48) د) خلاف ذلك هو..

6. حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو:

أ) (24، 2) ب) (16، 3) ج) 12، 2) د) خلاف ذلك هو..

7. حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن هو:

أ) 5 ب) 7 ج) 13 د) خلاف ذلك هو..

8. عند حجم الإنتاج الأمثل فإن السعر P هو:

أ) 8 ب) 10 ج) 12 د) خلاف ذلك هو..

9. الإيراد الكلي (TR) عند حجم الإنتاج الأمثل يبلغ:

أ) 260 ب) 350 ج) 460 د) خلاف ذلك هو..

10. التكلفة الثابتة (FC) تقدر بـ:

أ) 13 ب) 45 ج) 54 د) خلاف ذلك هو..

11. التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة (VC) تقدر بـ:

أ) 6 ب) 7 ج) 8 د) خلاف ذلك هو..

12. التكلفة المتغيرة الكلية (TVC) عند حجم الإنتاج الأمثل تقدر بـ:

أ) 50 ب) 60 ج) 70 د) خلاف ذلك هو..

14) إذا كانت دالة الطلب لسلعة ما على الصورة التالية: $P = 45 - 3Q$

ودالة التكلفة المتوسطة على الصورة: $AC = 13 - Q + 56/Q$

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. دالة الإيراد الكلي (TR) بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $45-3Q^2$ ب) $45Q^2-3Q$

ج) $45Q-3Q^2$ د) خلاف ذلك هو...

2. دالة التكلفة الكلية (TR) بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $\frac{56}{Q^2}+13Q-Q^2$ ب) $13Q-35-Q^2$

ج) $56Q-Q^2+13$ د) خلاف ذلك هو...

3. دالة الربح (IT) بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $-2Q^2+77Q-56$ ب) $32Q-Q^2+56$

ج) $Q^2+13Q-26$ د) خلاف ذلك هو...

4. تأخذ دالة الربح (II) شكل:

أ) حرف $\cup$ ب) حرف $\cap$ ج) خط مستقيم د) خلاف ذلك هو..

5. تقطع دالة الربح المحور الرأسي عند النقطة:

أ) (0 ،56) ب) (0 ،26) ج) (0، 56) د) خلاف ذلك هو..

6. حجم الإنتاج الذي يحقق التعادل هو:

أ) (2 ،28) ب) (13، 3) ج) (14، 4) د) خلاف ذلك هو..

7. حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن هو:

أ) 8 ب) 9 ج) 15 د) خلاف ذلك هو.

8. عند حجم الإنتاج الأمثل فإن السعر (P) هو:

أ) 20 ب) 21 ج) 22 د) خلاف ذلك هو..

9. الإيراد الكلي (TR) عند حجم الإنتاج الأمثل يبلغ:

أ) 260 ب) 350 ج) 460 د) خلاف ذلك هو..

10. التكلفة الثابتة (FC) تقدر بـ:

أ) 13 ب) 45 ج) 56 د) خلاف ذلك هو..

11. التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة (VC) تقدر بـ:

أ) 6 ب) 7 ج) 70 د) خلاف ذلك هو..

12. التكلفة المتغيرة الكلية (TVC)عند حجم الإنتاج الأمثل تقدر بـ:

أ) 50 ب) 73 ج) 126 د) خلاف ذلك هو..

13. التكلفة الكلية (TC) عند حجم الإنتاج الأمثل تقدر بـ:

أ) 63 ب) 73 ج) 126 د) خلاف ذلك هو...

14. عند حجم الإنتاج الأمثل فإن قيمة هذا الربح هو:

أ) 58 ب) 70 ج) 27 د) خلاف ذلك هو...

الفصل الثالث

الاشتقاق (التفاضل)

DERIVATIVES

الفصل الثالث

الاشتقاق (التفاضل)

Derivatives

مفهوم التغير:

من خلال الدراسة السابقة للدوال أمكن إيجاد قيمة المتغير التابع (أو قيمة الدالة) عند أي قيمة يأخذها المتغير المستقل، وفي هذا الجزء نتناول قياس التغيرات التي تحدث في قيمة المتغير التابع (قيمة الدالة) عند حدوث تغير طفيف في قيمة المتغير المستقل، وبمعنى آخر قياس معدل التغير في الدالة بالنسبة للمتغير المستقل وهو ما يقوم به علم الاشتقاق (أو التفاضل).

كما أن دراسة التغير في قيمة الدالة سواء بالزيادة أو النقص بهدف الوصول إلى معدل التغير هو الأكثر أهمية في الدراسات الاقتصادية والتجارية وذلك لاهتمام رجال الاقتصاد والإدارة من الاستفادة منها في مجال العمل وتطبيقها على دوال الإنتاج والمبيعات والايراد والتكلفه والربح والإعلان والتسويق....... الخ؛ ودراسة التغير في حد ذاته قد لا يفيد الإدارة قدر اهتمامها بدراسة معدل التغير والذي يؤدي في النهاية إلى التأثير على القرارات الإدارية والاقتصادية.

على سبيل المثال: إذا أنتج أحد المصانع 200 وحدة من سلعة معينة بسعر 4$ للوحدة. فإن الإيراد الكلي يبلغ 800$ بينما إذا أنتج 150 وحدة فقط في فترة أخرى ونتيجة لارتفاع الأسعار بصفة عامة ارتفع سعر بيع الوحدة من 4$. إلى 6$ فإن الإيراد الكلي سوف يرتفع إلى 900$ وعلى هذا لا يمكن القول أن زيادة الإيراد نتج عن زيادة الإنتاج وأن حقيقة الأمر أن هناك انخفاضاً في حجم الإنتاج

وأن الزيادة في الإيراد الكلي ترجع لأسباب أخرى خلاف زيادة الإنتاج أهمها ارتفاع الأسعار. وعليه فإن دراسة معدل التغير يكون أكثر إفادة في المجالات الاقتصادية والتجارية وأكثر فعالية في ترشيد القرارات الإدارية والاقتصادية.

فإذا كان لدينا الدالة: $y = f(x)$ وكانت (y) دالة متصلة لجميع قيم (x) داخل فترة معينة وأنها أيضاً دالة وحيدة القيمة في هذه الفترة (بمعنى أن لكل قيمة من قيم المتغير المستقل x تقابلها قيمة وحيدة للدالة y). ونفرض أن حدث تغير طفيف في المتغير المستقل x ونرمز له بالرمز Δx. وتقرأ (دلتا x) بحيث يصبح قيمته $(x + \Delta x)$. فإن هذا التغير يتبعه تغير طفيف أيضاً في قيمة الدالة y ويأخذ الرمز Δy وبالتالي تصبح القيمة الجديدة للدالة $(y + \Delta y)$.

متوسط التغير في الدالة:

إذا كانت الدالة $y = x^2$ وبفرض أن المتغير المستقل (x) يأخذ قيمة معينة ولتكن $x = 2$ فإن الدالة (y) تأخذ القيمة 4، فإذا تغيرت x بمقدار طفيف قدره (1) إي أن: $\Delta x = 1$

فإن قيمة x الجديدة تصبح $x+\Delta x = 2+1 = 3$

وبالتالي تصبح قيمة الدالة الجديدة: $y = (3)^2 = 9$

أي أن التغير في الدالة (Δy): $\Delta y = 9 - 4 = 5$

وعلى هذا الأساس فإن متوسط التغير في الدالة y بالنسبة للتغير في x هو:

$$\frac{y\Delta}{x\Delta} = \frac{5}{1} = 5$$

أي أن متوسط التغير في الدالة هو: النسبة بين مقدار التغير في الدالة إلى مقدار التغير في المتغير المستقل.

معدل التغير في الدالة:

إذا اقتربت قيمة Δx من الصفر، وكان التغير في (x) تغيراً طفيفاً جداً فإن التغير المناظر في الدالة (Δy) يقترب أيضاً من الصفر. وبالتالي فإن متوسط التغير في الدالة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ في هذه الحالة يقترب من قيمة محددة هي: ما تسمى بمعدل تغير الدالة (y) بالنسبة للمتغير المستقل (x)، أي أن معدل تغير الدالة (y) هو:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

فإذا أخذنا الدالة: $y = x^2$

فإذا كانت $X=2$ فإن: $Y = (2)^2 = 4$

فإذا تغيرت (x) تغيراً ضئيلاً جداً سواء بالزيادة أو النقص فإنه يمكن الوصول إلى متوسط التغير في الدالة (y) بالنسبة للتغير في (x) من الجدول التالي:

التغير في (x) وهو (Δx)	التغير المناظر في (y) وهو (Δy)	متوسط التغير في الدالة $\Delta y/\Delta x$	التغير في (x) وهو Δx	التغير المناظر في (y) وهو (Δy)	متوسط التغير في الدالة $\Delta y/\Delta x$
0.1	0.41	4.1	-0.1	-0.39	3.9
0.01	0.0401	4.01	-0.01	-0.0399	3.99
0.001	0.00400	4.001	-0.001	-0.00399	3.999
0.0001	0.0004	4.0001	-0.0001	-0.000399	3.9999

من الجدول السابق تبين أن:

كلما اقترب التغير في (x) من الصفر (من 10. إلى 0.0001) كلما اقترب التغير المناظر في الدالة (y) من الصفر (من 0.41 إلى 0.0004)، وبالتالي اقترب متوسط التغير في الدالة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ من قيمة محددة هي: 4.

ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي:

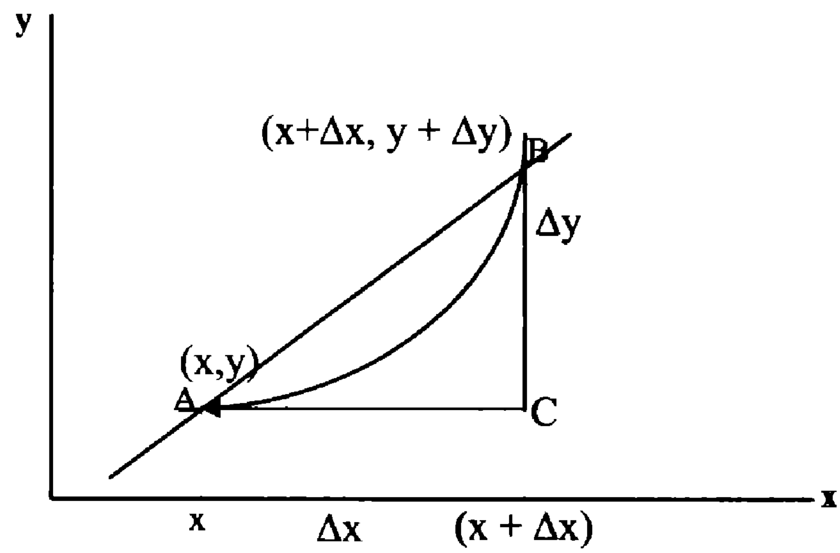
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$$

ويرمز للرقم (4) بمعدل تغير الدالة ($y = x^2$) بالنسبة لـ x (عند $x = 2$) ويطلق على معدل التغير في الدالة (y) بالنسبة لـ x عند قيمة معينة: بالمشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول للدالة ويرمز لهذا المعدل بالرمز: $\frac{dy}{dx}$، (ونقرأ dy بالنسبة لـ (dx))، وعلى هذا فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ويرمز للمشتقة الأولى بالرمز $f'(x)$ أو y'

ولبيان المعنى الهندسي لمعدل التغير في الدالة أو المشتقة الأولى نستعين بالرسم البياني التالي:



شكل يبين المعنى الهندسي لمعدل التغير في الدالة

وبفرض أن المنحنى الممثل للدالة $y = f(x)$ كما هو مبين في الشكل وإن النقطة (A) تقع على المنحنى إحداثياتها هي (x,y). فإذا انتقلنا إلى النقطة (B) على نفس المنحنى وأن إحداثياتها هي $(x + \Delta x\ ,\ y + \Delta y)$، وعلى هذا إن:

$$\Delta x = Ac \qquad ; \qquad \Delta y = Bc$$

متوسط التغير في الدالة (y) بالنسبة للمتغير في (x) هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Bc}{Ac}$$

وهي تمثل ظل الزاوية (BAC) والتي يصنعها المستقيم (AB) مع المحور الأفقي حيث تساوي المقابل على المجاور أو تمثل ميل الخط المستقيم AB. وكلما تضاءلت قيمة (Δx) فإن النقطة (B) تتحرك على المنحنى مقتربة من النقطة (A). ويكون ميل المماس للمنحنى عند النقطة (A) هو نهاية التغير في الدالة (y) بالنسبة لـ (x) عندما تؤول Δx إلى الصفر، أي أنه المشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول والذي يرمز له بالرمز: $\frac{dy}{dx}$ حيث:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أي أن ميل المماس للمنحنى عند نقطة عليه= $\frac{dy}{dx}$ عند هذه النقطة.

وتختلف قيمة الميل من نقطة إلى أخرى على المنحنى، حيث يمكن استنتاج أن:

1- إذا كانت $\frac{dy}{dx} > 0$ ، (موجبة) فإن هذا يعني أن منحنى الدالة يكون صاعداً وتكون الدالة متزايدة.

2- إذا كانت $\frac{dy}{dx} < 0$ ؛ (سالبة) فإن هذا يعني أن منحنى الدالة يكون هابطاً وتكون الدالة متناقصة.

3- إذا كانت $\frac{dy}{dx} = 0$ فإن ذلك يعني أن مماس المنحنى عند هذه النقطة يكون موازياً للمحور الأفقي.

ومما سبق تبين أن ميل الخط المستقيم (Slope) هو التغير في قيمة (y) نتيجة تغير قيمة (x) بوحدة واحدة. وحقيقة الامر أنه لا يجب التقيد بأن يكون التغير في قيمة (x) عند وحدة واحدة. وإنما يمكن القول بصفة عامة أن ميل الخط (Slope) : هو التغير في قيمة (y) مقسوماً على التغير المناظر في قيمة (x) بين أي نقطتين على الخط. أي أن: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (Slope) الميل.

مثال: أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية:

1- B (4, 5) ; A (2, 3)

2- C (5, 2) ; A (2, 3)

3- D (6, 3) ; A (2, 3)

الحل

1- يمكن رسم النقطتين A (2, 3) ؛ B (4, 5) بيانياً بالشكل رقم (1) نجد أنه بالانتقال من النقطة A إلى النقطة B فإن:

التغير في (x) هو: $\Delta x = 4 - 2 = 2$

التغير في (y) هو: $\Delta y = 5 - 3 = 2$

∴ الميل موجب حيث:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$$

∴ الخط متصاعد.

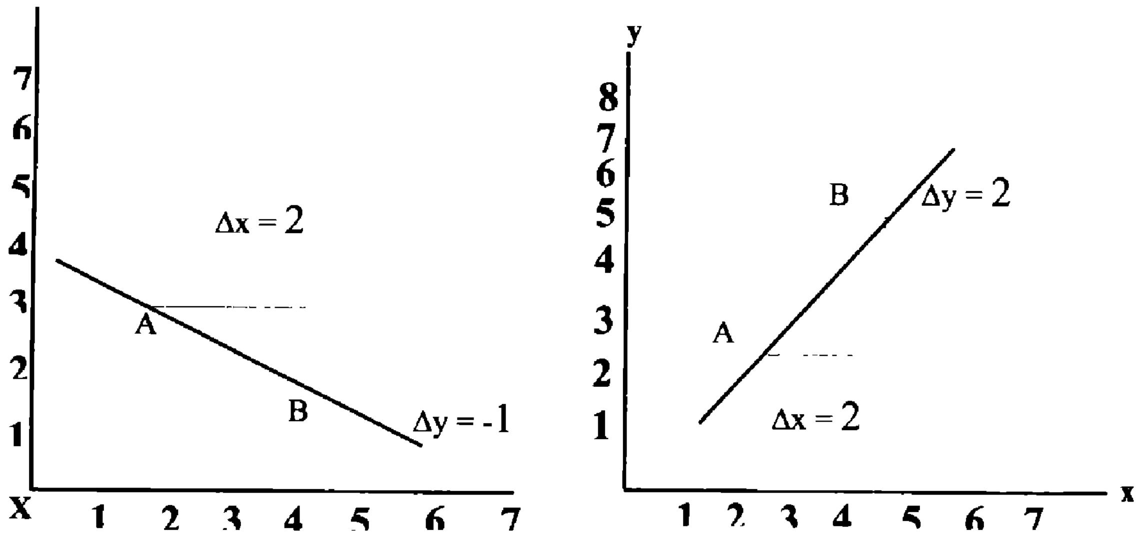
2- يمكن رسم النقطتين A (2 , 3)؛ C (5 , 2) بيانياً بالشكل رقم (2) نجد أنه بالانتقال من النقطة (A) إلى النقطة (C) فإن:

التغير في (x) هو: $\Delta x = 5 - 2 = 3$

التغير في (y) هو: $\Delta y = 2 - 3 = -1$

الميل سالب حيث: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$

الخط منحدر لأسفل



شكل رقم (2) شكل رقم (1)

3- يمكن رسم النقطتين: A (2 , 3) , D (6 , 3) على الشكل رقم (3) نجد أنه بالانتقال من النقطة (A) إلى النقطة (D) فإن:

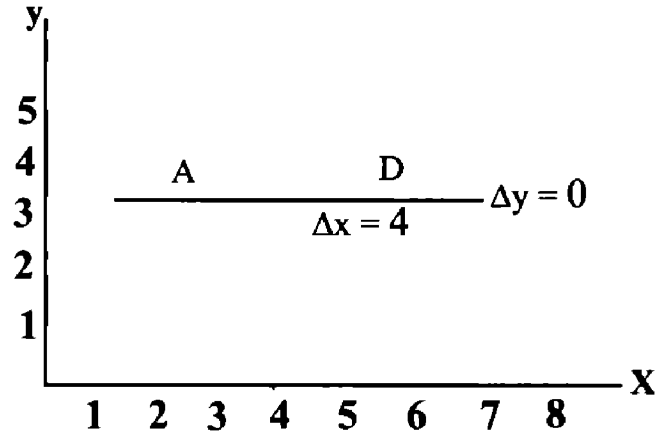
التغير في x هو: $\Delta x = 6 - 2 = 4$

التغير في y هو: $\Delta y = 3 - 3 = 0$

الميل = صفر حيث أن:

الخط يوازي المحور الأفقي فان:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{4} = 0$$



شكل رقم (3)

- **إيجاد المشتقة الأولى للدالة باستخدام المبادئ الأولية:**

لإيجاد المشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول من المبادئ الأولية يتطلب ذلك ما يلي:

1- تحديد قيمة التغير في (x) وهو ما يرمز له بالرمز: Δx

2- تحديد قيمة التغير المناظر في (y) وهو ما يرمز له بالرمز: Δy

3- إيجاد متوسط التغير في الدالة أي: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

4- إيجاد نهاية متوسط التغير في الدالة عندما يؤول (Δx) إلى الصفر أي:

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وهو ما يعبر عنه بمعدل تغير الدالة: $\frac{dy}{dx}$.

مثال: من المبادئ الأولية أوجد المشتقة الأولى للدالة : $y = x^2$

الحل

إذا تغيرت (x) إلى $(x + \Delta x)$ فإن (y) تتغير إلى $(y + \Delta y)$.

فإذا كانت الدالة $y = x^2 .... (1)$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 ......(2)$$

بطرح (1) من (2) ينتيج أن: $\therefore\ y + \Delta y - y = (x + \Delta x)^2 - x^2$

$$\Delta y = x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2$$

$$\therefore\ \Delta y = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2$$

وبالقسمة، Δx ينتج أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x.\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x[2x + \Delta x]}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x$$

وبإيجاد نهاية الطرفين عندما تؤول Δx إلى الصفر ينتج أن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [2x + \Delta x]$$

$$= 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

مثال: من المبادئ الأولية أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = 2x^3 + 1$$

الحل

$y = 2x^3 + 1$ .... (1)

عند تغير (x) إلى $(x + \Delta x)$ فإن (y) تتغير إلى $(y + \Delta y)$

$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 1$ .... (2)

بطرح (1) من (2) ينتج أن:

$$Y + \Delta y - y = 2(x + \Delta x)^3 + 1 - (2x^3 + 1)$$

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 1 - (2x^3 + 1)$$

$$\Delta y = 2[x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] + 1 - [2x^3 + 1]$$

$$\Delta y = 2x^3 + 6x^2(\Delta x) + 6x.(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 1 - 2x^3 - 1$$

$$\Delta y = 6x^2(\Delta x) + 6x.(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3$$

بالقسمة على (Δx) ينتج أن:

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x[6x^2 + 6x(\Delta x) + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= 6x^2 + 6x.\Delta x + 2(\Delta x)^2$$

وبإيجاد نهاية الطرفين عندما تؤول Δx إلى الصفر ينتج أن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [6x^2 + 6x.\Delta x + 2(\Delta x)^2]$$

$$= 6x^2 + 6x(0) + 2(0)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2$$

مثال: إذا كانت: $y = 3x^2 + 2x$

أوجد

1- معادلة المماس لمنحنى الدالة عندما: $x = 1$.

2- معادلة الخط العمودي على منحنى الدالة عندما: $x = 2$.

الحل

1- لإيجاد معادلة المماس لمنحنى الدالة يتطلب ذلك معرفة ميل المماس (S) ونقطة واحدة على المنحنى إحداثياتها (x_1, y_1) حيث أن الميل:

$$S = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{الميل}$$

كما أن الميل = المشتقة الأولى للدالة أي أن:

$$S = \frac{dy}{dx}$$

ولإيجاد $\frac{dy}{dx}$ من المبادئ الأولية نتبع ما يلي:

$$y = 3x^2 + 2x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$y + \Delta y - y = 3(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) - (3x^2 + 2x)$$

وبطرح (1) من (2) ينتج أن:

$$\Delta y = 3[x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2] + 2(x + \Delta x) - (3x^2 + 2x)$$

$$\Delta y = 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 3x^2 - 2x$$

$$\Delta y = 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)$$

وبقسمة الطرفين، Δx:

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x[6x + 3(\Delta x) + 2]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3(\Delta x) + 2$$

وبإيجاد نهاية الطرفين عندما (Δx) تؤول إلى الصفر نجد أن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [6x + 3(\Delta x) + 2)]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x + 2$$

وعند: $x_1 = 1$ نجد أن قيمة y_1 تساوي:

$$y_1 = 3(1)^2 + 2(1) = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 6(1) + 2 = 8$$

حيث أن الميل $(S) =$ **8** والنقطة (1.5) فإن:

$$S = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$8 = \frac{y - 5}{x - 1} \qquad \therefore y - 5 = 8x - 8$$

$$y = 8x - 3$$

أي أن معادلة المماس للمنحنى عند $x = 1$ هي: $y = 8x - 3$

2- لإيجاد معادلة الخط العمودي على منحنى الدالة عند $x = 2$، يجب معرفة أن:

الخط العمودي على المنحنى عند أي نقطة يكون عمودياً على المماس لهذا المنحنى عند نفس النقطة، أي أن:

ميل أي مستقيم مضروبا في ميل العمودي عليه= 1-

∴ ميل العمودي على المنحنى = $\frac{-1}{\text{ميل الخط المستقيم}}$

$$-1 \div \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{6x + 2}$$

وحيث أن معادلة الخط المستقيم هي : $\therefore y = 3x^2 + 2x$

∴ عند $x_1 = 2$ فإن قيمة y_1 تساوي $y_1 = 3(2)^2 + 2(2)$

$y_1 = 12 + 4 = 16$

∴ ميل العمودي (S):

$$S = \frac{-1}{6(2)+2} = \frac{-1}{14}$$

العمودي هو المستقيم الذي ميله $\left(\frac{-1}{14}\right)$ ويمر بالنقطة (16 ، 2):

$$\therefore S = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{-1}{14} = \frac{y - 16}{x - 2}$$

$$14(y - 16) = -1(x - 2)$$

$$14y - 224 = -x + 2$$

$$\therefore \quad 14y = 226 - x$$

$$y = \frac{226}{14} - \frac{x}{14}$$

معادلة العمودي على المنحنى هي: $Y = 16{,}14 - 0.07x$

القواعد الأساسية للاشتقاق:

القاعدة الأولى:

إذا كانت الدالة على الصورة: $\mathbf{y = x^n}$

فإن المشتقة الأولى للدالة تكون على الصورة: $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

حيث ان: n عدد صحيح موجب.

ملحوظة:

هذه القاعدة صحيحة لجميع قيم n مع تحفظات معينة: فمثلاً إذا كانت n كسر أقل من (1) يجب أن تكون $x > 0$ بينما إذا كانت n عدد صحيح سالب يجب أن تكون $x \neq 0$.

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = x^7$ 2) $y = x^{10}$ 3) $y = x$

4) $y = \frac{1}{x^4}$ 5) $y = \sqrt{x}$

الحل

حيث انه اذا كانت الدالة على الصورة: $y = x^n$

فان المشتقة الاولى للدالة تكون على الصورة:

1) $y = x^7$ فأن: $\frac{dy}{dx} = 7x^{7-1} = 7x^6$

2) $y = x^{10}$ فأن: $\frac{dy}{dx} = 10x^{10-1} = 10x^9$

3) $y = x$ فأن: $\frac{dy}{dx} = (1)x^{1-1} = 1$

4) $y = \frac{1}{x^4}$ فأن: $y = x^{-4}$ $\frac{dy}{dx} = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4}{x^5}$$

5) $y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y = x^{1/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

القاعدة الثانية:

إذا كانت الدالة على الصورة: $\qquad y = c\,f(x)$

فإن المشتقة الأولى للدالة تكون على الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = c\,f'(x)$$

حيث أن: c مقدار ثابت، $f'(x)$: المشتقة الأولى للدالة.

أي أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب ثابت* دالة = حاصل ضرب الثابت * مشتقة الدالة.

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = 3x^4$ $\qquad$ 2) $y = \frac{4}{3}x^{-3}$ $\qquad$ 3) $y = 3\sqrt[3]{x^2}$

الحل

1) $y = 3x^4$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = 3(4)x^{4-1} = 12x^3$

2) $y = \frac{4}{3}x^{-3}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}(-3)x^{-3-1} = -4x^{-4} = \frac{-4}{x^4}$

3) $y = 3\sqrt[3]{x^2}$

$\therefore y = 3x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1} = 2x^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

القاعدة الثالثة:

إذا كانت الدالة على الصورة: $\mathbf{y = c}$

حيث أن: c مقدار ثابت

فإن المشتقة الأولى للدالة: $\frac{dy}{dx} = 0$

1) $y = 5$ $\qquad$ 2) $y = 100$

فإن :

1) $y = 5$ فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

2) $y = 100$ فإن $\frac{dy}{dx} = 0$

القاعدة الرابعة:

تفاضل المجموع الجبري لعدد من الدوال:

$y = e(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm$ ....

حيث e ; g ; h دوال للمتغير x فإن المشتقة الاولى للدالة:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(e \pm g \pm h \pm ....)$$

$$=\frac{de}{dx} \pm \frac{dg}{dx} \pm \frac{dh}{dx} \pm ....$$

"المشتقة الأولى للمجموع الجبري لعدد محدود من الدوال القابلة للاشتقاق = المجموع الجبري لمشتقات هذه الدوال."

مثال: أوجد المشتقة الاولي للدوال التالية:

1) $y = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

2) $y = \frac{2}{x^3} - x^2 + \sqrt{x}$

الحل

1) $y = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3 + 3x^2 + 2x + 6)$$

$$= 5(3)x^{3-1} + 3(2)x^{2-1} + 2(1)x^{1-1} + 0$$

$$= 15x^2 + 6x + 2$$

2) $y = \frac{2}{x^3} - x^2 + \sqrt{x}$

$$y = 2x^{-3} - x^2 + x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(-3)x^{-3-1} - (2)x^{2-1} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= -6x^{-4} - 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-6}{x^4} - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

القاعدة الخامسة:

المشتقة الأولى الحاصل ضرب دالتين.

إذا كانت الدالة علي الصورة : $y = e . g$

حيث e , g دالتين للمتغير x فإن المشتقة الاولى:

$$\frac{dy}{dx} = e\left(\frac{dg}{dx}\right) + g\left(\frac{de}{dx}\right)$$

ألمشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين كل منها قابلة للاشتقاق عند (x) = حاصل ضرب الدالة الأولى x مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى.

نتيجة (1): إذا كانت الدالة علي الصورة: $y = e . g . h$

حيث h , g , e دوال للمتغير x فإن:

$$\frac{dy}{dx} = e . g\left(\frac{dh}{dx}\right) + e . h\left(\frac{dg}{dx}\right) + g . h\left(\frac{de}{dx}\right)$$

ألمشتقة الأولى لحاصل ضرب ثلاث دوال = مجموع حاصل ضرب كل دالتين معاً x مشتقة الدالة الثالثة.

نتيجة (2): - إذا كانت الدالة علي الصورة : $y = e , g$

يمكن وضع القاعدة السابقة على صورة أخرى كما يلي:

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{de}{dx}\right) + \frac{1}{g}\left(\frac{dg}{dx}\right)$$

- إذا كانت الدالة علي الصورة: $y = e , g , h$ فإن:

$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{de}{dx}\right) + \frac{1}{g}\left(\frac{dg}{dx}\right) + \frac{1}{h}\left(\frac{dh}{dx}\right)$$

مقلوب الدالـة * مشـتقتها = مقلـوب الدالـة الاولى * مشـتقتها + مقلـوب الدالة الثانية * مشتقها + مقلوب الدالة الثالثة * مشتقتها.

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1) $y = (2x+1)(x^2-3)$

2) $y = (x+1)(3x+2)(x^2-3)$

الحل

1) $y = (2x+1)(x^2-3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (2x+1)(2x) + (x^2-3)(2)$$
$$= 4x^2 + 2x + 2x^2 - 6$$
$$= 6x^2 + 2x - 6$$

حل آخر:

يمكن فك الأقواس ينتج مجموع جبري لعدد محدود من الدوال ثـم اشـتقاقها وفقاً لقاعدة اشتقاق المجموع الجبري للدوال كما يلي:

$$y = (2x+1)(x^2-3)$$
$$= 2x^3 - 6x + x^2 - 3$$
$$y = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x - 6$$

حل ثالث: بتطبيق نتيجة (2) نجد أن:

$$y = (2x+1)(x^2-3)$$
$$\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2x+1}(2) + \frac{1}{x^2-3}(2x)$$

بضرب الطرفين في y ينتج أن:

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2}{2x+1} + \frac{2x}{x^{-3}}\right]$$

$$= (2x+1)(x^2 - 3)\left[\frac{2}{2x+1} + \frac{2x}{x^2 - 3}\right]$$

$$= 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x$$

$$= 6x^2 + 2x - 6$$

2) $y = (x+1)\ (3x+2)\ (x^2-3)$

بتطبيق القاعدة العامة للاشتقاق ينتج أن:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (x+1)(3x+2)(2x) + (x+1)(x^2 - 3)(3)$$

$$+ (3x+2)(x^2 - 3)(1)$$

$$= 2x(3x^2 + 5x + 2) + 3(x^3 + x^2 = 3x - 3)$$

$$+ (3x^3 + 2x^2 - 9x - 6)$$

$$= 6x^3 + 10x^2 + 4x + 3x^3 + 3x^2 - 9x - 9$$

$$+ 3x^3 + 2x^2 - 9x - 6$$

$$= 12x^3 + 15x^2 - 14x - 15$$

ويمكن تطبيق نتيجة (1) ونتيجة (2) في إيجاد الاشتقاق لحاصل ضرب ثلاث دوال.

القاعدة السادسة:

المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين:

إذا كانت الدالة على الصورة: $y = \frac{e}{g}$

حيث أن: e ; g دالتين للمتغير x؛ $g \neq 0$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\left(\frac{de}{dx}\right) - e\left(\frac{dg}{dx}\right)}{g^2}$$

المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين =

دالة المقام × مشتقة دالة البسط − دالة البسط × مشتقة دالة المقام

مربع دالة المقام

بشرط أن دالة المقام ≠ صفر.

مثال: إذا كانت الدالة على الصورة : $y = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x-2}$

المطلوب: أوجد المشتقة الاولي: $\dfrac{dy}{dx}$

الحل

$$y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)(2x+3) - (x^2 + 3x - 10)(1)}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - x - 6 - x^2 - 3x + 10}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2} = 1$$

وهذه النتيجة صحيحة لجميع قيم (x) الحقيقية ما عدا $(x = 2)$.

القاعدة السابعة:

وهي تسمى بقاعدة دالة الدالة ، وهي ما يعرف بقاعدة قوس مرفوع لاس: حيث انه إذا كانت y دالة في g كما يلي: $y = f(g)$ ، وكانت g هي الاخرى دالة في x كما يلي: $g = f(x)$

فإن المشتقة الاولى :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} * \frac{dg}{dx}$$

المشتقة الأولى لدالة الدالة: إذا كانت (y) دالة في (g) وقابلة للاشتقاق بالنسبة لـ g وكانت (g) دالة في (x) وقابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x، فإن (y) يطلق عليها دالة الدالة وتكون قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x .

مثال: إذا كانت $y = (x^3 - 2)^2$

المطلوب: أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$y = (x^3 - 2)^2$

$g = x^3 - 2$

وبفرض أن: $\frac{dg}{dx} = .3x^2$

وبالتعويض عن قيمة g في الدالة الأصلية نجد أن:

$y = g^2$ $\qquad$ $\frac{dy}{dg} = 2g$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dg}*\frac{dg}{dx}$$

$$=2g*3x^{2}$$

$$=2(x^{3}-2)*3x^{2}$$

$$=6x^{2}(x^{3}-2)=6x^{5}-12x^{2}$$

وهكذا الحل يكن الوصول إليه مباشرة باستخدام النتيجة التالية:

نتيجة: إذا كان هناك دالة في صورة قوس مرفوع لقوه فإن مشتقة الدالة = مشتقة القوس * مشتقة ما بداخل القوس. أي أنه إذا كان لدينا الدالة:

$$y=g^{n}$$

حيث (g) دالة في (x) فإن:

$$\frac{dy}{dx}=.n*g^{n-1}*\frac{dg}{dx}$$

وعلى هذا الأساس يمكن إيجاد المشتقة الأولى للدالة السابقة مباشرة كما يلي:

$$y=(x^{3}-2)^{2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=.2(x^{3}-2)*3x^{2}$$

$$=6x^{5}-12x^{2}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

(a) $y=(2x^{3}+1)^{9}$

(b) $y=\left(\frac{2+x^{2}}{3-x}\right)^{7}$

الحل

(a) $y=(2x^{3}+1)^{9}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 9(2x^3 + 1)^8 * 6x^2$$

$$= 54x^2 * (2x^3 + 1)^8$$

(b) $y = \left(\frac{2 + x^2}{3 - x}\right)^7$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 7\left(\frac{(2 + x^2)}{3 - x}\right)^6 * \frac{(3 - x)\ 2x - (2 + x^2)(-1)}{(3 - x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 7\,\frac{(2 + x^2)^6}{(3 - x)^6} * \frac{6x - 2x^2 + 2 + x^2}{(3 - x)^2}$$

$$= \frac{7(2 + x^2)^6\ (2 + 6x - x^2)}{(3 - x)^8}\ .$$

القاعدة الثامنة: الدالة الضمنية:

رأينا فيما سبق من الدوال أن العلاقة بين المتغير المستقل (x) والمتغير التابع أو الدالة (y) علاقة صريحة حيث يكون من السهل مباشرة إيجاد قيمة وحيدة للدالة (y) بدلالة أي قيمة يأخذها المتغير المستقل (x) ولكن قد يحدث في بعض الأحيان أن تكون هذه العلاقة غير صريحة حيث يكون هناك تداخل بين المتغير المستقل والمتغير التابع فتسمى الدالة بالدالة الضمنية.

وتكون الدالة في هذه الحالة على الصورة: $f(x,y) = c$

حيث ان: C: مقدار ثابت

ولإيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة تجرى عملية الاشتقاق بالنسبة إلى (x) لجميع المتغيرات على طرفي المعادلة كما في الأمثلة التالية:

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

$$2x^2 + y^2 = 5$$

الحل

يتم إجراء عملية الاشتقاق بالنسبة إلى (x) لجميع المتغيرات.

$$\therefore \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(5)}{dx}$$

$$4x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{2y} = \frac{-2x}{y}$$

يلاحظ هنا أن:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{dy^2}{dx} * \frac{dy}{dx}$$

$$= 2y * \frac{dy}{dx}$$

مثال: اوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

$5x^2y^3=10$

الحل

هي عبارة عن حاصل ضرب دالتين

$$5x^2 * 3y^2\frac{dy}{dx} + y^3 * 10x = 0$$

$$15x^2 y^2\frac{dy}{dx} + 10x\, y^3 = 0$$

$$15x^2y^2\frac{dy}{dx} = -10x\, y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10x\,y^3}{15x^2y^2} = \frac{-2y}{3x}$$

مثال: إذا كانت الدالة علي الصورة: $3y^2 + 3x^2y^3 - 5x^3 - 3y + 8 = 0$

المطلوب: أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

في هذه الحالة أيضاً يتم اجراء عملية الاشتقاق لجميع المتغيرات بالنسبة لـ (x) مع ملاحظة أن مشتقة المتغير التابع (y^n) بالنسبة لـ (x) كما يلي:

$$\frac{d(y^n)}{dx} = ny^{n-1} * \frac{dy}{dx}$$

وبذلك يكون تفاضل الدالة كما يلي:

$$6y\frac{dy}{dx} + (3x^2.3y^2\frac{dy}{dx} + y^3.6x) - 15x^2 - 3\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}(6y + 9x^2y^2 - 3) = 15x^2 - 6xy^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{15x^2 - 6xy^3}{6y + 9x^2y^2 - 3}$$

$$= \frac{3(5x^2 - 2xy^3)}{3(2y + 3x^2y^2 - 1)}$$

$$= \frac{5x^2 - 2xy^3}{2y + 3x^2y^2 - 1}$$

مثال: أذا كانت الدالة على الصورة: $x^3 + 5x^2y^2 + y^3 = 100$

المطلوب: أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$9x^2 + \left[5x^2 * 2y\frac{dy}{dx} + y^2 * 10x\right] + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$9x^2 + 10x^2y\frac{dy}{dx} + 10xy^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(10x^2y + 3y^2\right) = -9x^2 - 10xy^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-9x^2 - 10xy^2}{10x^2y + 3y^2}$$

القاعدة التاسعة: الدالة العكسية:

إذا كانت (y) دالة في (x) فإن الدالة تأخذ الصورة: $y = f(x)$.

فإذا أمكن استنتاج أن (x) دالة في (y) تصبح الدالة على الصورة: $x = h(y)$

في هذه الحالة يقال أن الدالة $x = h(y)$ دالة عكسية وبالتالي فإن المشتقة الأولى للدالة العكسية هي $\frac{dx}{dy}$ كما يمكن استنتاج أن:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

أي أن: مشتقة الدالة العكسية = مقلوب مشتقة الدالة الأصلية.

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة العكسية للدوال التالية:

(a) $y = 2x + 5$

(b) $y = \sqrt{x}$

(c) $6y = 5x^3 + 3x^2 + 4$

الحل

(a) $y = 2x + 5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \qquad\qquad \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

حل آخر:

$$y = 2x + 5$$

$$2x = y - 5 \qquad\qquad \therefore X = \frac{y - 5}{2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2(1) - (y-5)(0)}{(2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

من هذا المثال يتضح أن مشتقة الدالة العكسية هي مقلوب مشتقة الدالة الأصلية:

(b) $y = \sqrt{x}$

أولاً: يتم إيجاد $\frac{dy}{dx}$ **كمايلي:**

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ثانياً: يتم إيجاد $\frac{dx}{dy}$ **كمايلي:**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 2\sqrt{x}$$

حل آخر: بتربيع الطرفين:

$\therefore y^2 = x \qquad \frac{dx}{dy} = 2y$

$y = \sqrt{x}$

وحيث أن:

$\therefore \frac{dx}{dx} = 2\sqrt{x}$

(c) $6y = 5x^3 + 3x^2 + 4$

$6\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 6x$ بالقسمة ÷ 6

$\frac{dy}{dx} = \frac{3(5x^2 + 2x)}{6} = \frac{5x^2 + 2x}{2}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{5x^2 + 2x}$

القاعدة العاشرة:

الدالة الأسية The exponential function

1- إذا كانت الدالة على الصورة: $y = e^{mx}$

حيث أن: e العدد الطبيعي $e = 2.718$

فإن المشتقة الأولى هي: $\frac{dy}{dx} = m.e^{mx}$

أي أن مشتقة الدالة الاسية = مشتقة الأس × الدالة نفسها.

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

(a) $y = 2e^{(2x^3 + 5x^2 + 3)}$

(b) $y^3 = e^{3x^4 + 5x^3}$

(c) $y = (2x + 1)\, e^{2x^3 - 3}$

الحل

(a) $y = 2e^{2x^3 + 5x^2 + 3}$

$$\frac{dy}{dx} = 2(6x^2 + 10x)\,.\,e^{2x^3 + 5x^2 + 3}$$

$$= (12x^2 + 20x) - e^{2x3 + 5x2 + 3}$$

(b) $y^3 = (e^{3x^4 + 5x^3})$

$$y = (e^{3x^4 + 5x^3})^{\frac{1}{3}}$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$$y = e^{\frac{1}{3}(3x^4 + 5x^3)}$$

$$y = e^{x^4 + \frac{5}{3}x^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (4x^3 + 5x^2)\, e^{(x^4 + \frac{5}{3}x^3)}$$

(c) $y = (2x + 1)e^{2x^3 - 3x}$

الدالة هنا عبارة عن حاصل ضرب دالتين هما:

$(2x + 1)$، $e^{2x^3 - 3x}$ وعلى هذا تكون المشتقة الأولى للدالة (y) كما يلي:

= الداله الأولى * مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية * مشتقة الدالة الأولى

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)*(6x^2-3)e^{2x^3-3x} + e^{2x^3-3x} * 2$$

$$= (12x^3 - 6x + 6x^2 - 3)e^{2x^3-3x} + 2e^{2x^3-3x}$$

$$= e^{2x^3-3x}(12x^3 + 6x^2 - 6x - 1)$$

القاعدة الحادي عشر:

الدالة اللوغاريتميه: The Logarithmic Function

اللوغاريتم:

لوغاريتم أي عدد لأساس معلوم هو الأس الذي إذا رفع له الأساس ينتج العدد المفروض، أي أن:

$$Log_5(25) = Log_5(5)^2 = 2$$

$$Log_2(8) = Log_2(2)^3 = 3$$

$$Log_{10}(100) = Log_{10}(10)^2 = 2$$

$$Log_5(10000) = Log_{10}(10)^3 = 3$$

$$Log_{10}(0.01) = Log_{10}(10)^{-2} = -2$$

وهذا يعني أنه إذا كانت:

$$Log_m(x) = c$$

$$x = (m)^c$$

- من الخواص الأساسية للوغارتيمات ما يلي:

1) $Log_m(x.y.z) = Log_m(x) + Log_m(y) + Log_m(z)$

2) $\text{Log}_m(\frac{x}{y}) = \text{Log}_m(x) - \text{Log}_m(y)$

3) $\text{Log}_m(x)^n = n\,\text{Log}_m(x)$

4) $\text{Log}_m(m) = 1$

ويختلف أساس اللوغاريتمات كما سبق وعادة إذا كان أساس اللوغاريتم هو (10) يطلق عليه اللوغاريتم المعتاد أو الشائع (Log) أما إذا كان أساس اللوغاريتم هو (e) يسمى باللوغاريتم الطبيعي (Ln) وتأخذ الدالة اللوغاريتمية الصور التالية:

1) $y = \text{Log}_m(z)$

حيث: $z = f(x)$، إذا كان أساس اللوغاريتم (m). فإن:

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = (\frac{1}{z}.\text{Log}_m e.\frac{dz}{dx}$$

مثال: إذا كانت الدوال على الصورة:

(a) $y = \text{Log}_m x^3$

(b) $y = \text{Log}_m(x^2 + 2)^3$

المطلوب: أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

(a) $y = \text{Log}_m x^3$

بفرض أن: $z = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}.\text{Log}_m e.\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{x^3}.\text{Log}_m e.3x^2$$

$$= \frac{3}{x}\text{Log}_m e$$

(b) $y = Log_m(x^2+2)^3$

نفرض أن: $z = (x^2 + 2)^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} . Log_m e . \frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{(x^2+2)^3} . Log_m e . 3(x^2+2)^2 . 2x$$

$$= \frac{6x}{(x^2+2)^3} . Log_m e`$$

(2) $\mathbf{y = Ln(z)}$

حيث: $Z = f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} . \frac{dz}{dx}$$

أى أن المشتقة الأولى للدالة اللوغاريتمية للأساس الطبيعي (e) والتي يرمز لها عادة بالرمز (Ln) تساوي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{الدالة}} * \text{المشتقة الأولى للدالة} = \frac{\text{المشتقة الأولى للدالة}}{\text{الدالة نفسها}}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

(a) $y = Ln(x)$

(b) $y = Ln(6x)$

(c) $y = Ln(100x)$

(d) $y = Ln(2x^3 + 5x - 4)$

الحل

(a) $y = Ln(x)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

(b) $y = Ln(6x)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6x}.(6) = \frac{1}{x}$

(c) $y = Ln(100x)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{100x}.(100) = \frac{1}{x}$

(d) $y = Ln\ (2x^3 + 5x - 4)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^3 + 5x - 4}.(6x^2 + 5) = \frac{6x^2 + 5}{2x^3 + 5x - 4}$$

المشتقات العليا للدوال: higher-order Derivatives of functions

إذا كانت: $y = f(x)$

فإنه مما سبق تبين عند إيجاد المشتقة الأولى أو المعامل التفاضلي الأول للدالة فإنه يتم إجراء عملية الاشتقاق للدالة مرة واحدة، فإذا كانت الدالة الجديدة قابلة للاشتقاق أيضا بالنسبة لـ (x) وتم إجراء الاشتقاق مرة ثانية فإن الناتج يسمى المشتقة الثانية للدالة ويرمز له بالرمز: $\frac{d^2y}{dx^2}$ أ، y''

فإذا ما أجريت عملية الاشتقاق مرة ثالثة يسمى الناتج بالمشتقة الثالثة للدالة ويأخذ الرمز: y''' أو $\frac{d^3y}{dx^3}$ وبالتالي فإن $\frac{d^4y}{dx^4}$ يسمى المشتقة الرابعة للدالة.. وهكذا.

مثال: أوجد المشتقات العليا للدالة التالية:

$$y = 5x^3 + 3x^2 + 10x + 18$$

الحل

$$y = 5x^3 + 3x^2 + 10x + 8$$

المشتقة الأولى هي: $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 6x + 10$

المشتقة الثانية هي: $\frac{d^2y}{dx^2} = 30x + 6$

المشتقة الثالثة هي: $\frac{d^3y}{dx^3} = 30$

المشتقة الرابعة هي: $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$

مثال: أوجد المشتقة الأولى والثانية للدوال التالية:

(a) $y = e^{3x^2 - 5x}$

(b) $y = Ln(x)^3$

الحل

(a) $y = e^{3x^2 - 5x}$

$$\frac{dy}{dx} = (6x - 5)\, e^{3x^2 - 5x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (6x - 5)\,(6x - 5)e^{3x^2 - 5x} + e^{3x^2 - 5x}(6)$$

يلاحظ ان: المشتقة الثانية وهي عبارة عن حاصل ضرب دالتين كما يلي:

الدالة الأولى * مشتقة الثانية + الدالة الثانيه * مشتقة الأولى

$$= e^{3x^2-5x}\left[(6*-5)^2 + 6\right]$$

$$= e^{3x^2-5x}\left[36x^2 - 60x + 25 + 6\right]$$

$$= e^{3x^2-5x}\left(36x^2 - 60x + 31\right)$$

(b) $y = Ln(x)^3$

المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} . (3x^2) = \frac{3}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{-1}$$

المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(-1)x^{-2} = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$$

مثال: إذا كانت الدالة: $y = 15x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 12x + 25$

المطلوب: أوجد المشتقة الأولى والثانية والثالثة:

الحل

- المشتقة الأولى:

$$y' \text{ أو } \frac{dy}{dx} = 60x^3 - 18x^2 + 10x - 12$$

- المشتقة الثانية:

$$y'' \text{ أو } \frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 - 36x + 10$$

- المشتقة الثالثة:

$$y''' \text{ أو } \frac{d^3y}{dx^3} = 360x - 36$$

مثال: إذا كانت الدالة (y) على الصورة:

$$y = (4x^3 + 5)(5x^2 + 10)$$

المطلوب: أوجد المشتقة الأولى والثانية:

الحل

المشتقة الأولى: وهي عبارة عن حاصل ضرب دالتين

$$y' = (4x^3 + 5) \times 10x + (5x^2 + 10) \times 12x^2$$
$$= 40x^4 + 50x \quad 60x^4 + 120x^2$$
$$= 100x^4 + 120x^2 + 50x$$

المشتقة الثانية:

$$y'' = 400x^3 + 240x + 50$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = \frac{3x^2 - 5}{3x^4 + 2}$$

الحل

هي عبارة عن خارج قسمة دالتين

$$y' = \frac{(3x^4 + 2) \times 6x - (3x^2 - 5) \times 12x^3}{(3x^4 + 2)^2}$$
$$= \frac{18x^5 + 12x - (36x^5 - 60x^3)}{(3x^4 + 2)^2}$$
$$= \frac{18x^5 + 12x - 36x^5 - 60x^3}{(3x^4 + 2)^2}$$
$$= \frac{-18x^5 - 60x^3 + 12x}{(3x^4 + 2)^2}$$

تمارين

1- من المبادئ الأولية أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

(a) $y = x^2 - 3$

(b) $y = \frac{1}{x}$

(c) $y = 3x^2 + 2x + 5$

2- أوجد ميل المماس للمنحنيات التالية ثم أوجد معادلة المنحنى لكل منها عند: (x=1)

(a) $y = 3x-1$

(b) $5\ x(x - y) + 2 = 0$

3- إذا كانت: $y = 5x^2 - 3x + 1$

المطلوب: أوجد:

(a)- معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $x = 2$.

(b)- معادلة العمودي على منحنى الدالة عند $x = 1$.

4- أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

$(a)\quad y = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 18$

$(b)\quad y = \frac{5}{x^3} - 3x^2 + 4\sqrt{x}$

$(c)\quad y = (5x+2)(x^2 - 1)$

(d) $y = (2x - 1)(3x^2 + 1)(x + 2)$

(e) $y = \dfrac{x^2 + 6x - 27}{x - 3}$

(f) $y = \dfrac{(x^2 + 3)(x - 1)}{x - 2}$

(g) $y = (5x^3 + 2)^8$

(h) $y = \left(\dfrac{3x^2 + 2)}{x - 1}\right)^6$

(i) $y = e^{3x+2}$

(j) $y = e^{5x^2 + x}$

(k) $y = \text{Ln}(5x^3 + 2x^2 + 4)$

5- أوجد المشتقة الأولى للدوال العكسية للدوال التالية:

(a) $y = x^2 + 1$

(b) $y = 2\sqrt[3]{x}$

(c) $5y = 2x^5 + 5x^2 + 3$

6- أوجد المشتقة الأولى للدوال الضمنية التالية:

(a) $x^2 + y^2 = 9$

(b) $5x^2 + xy - 3y^2 = 0$

(c) $2(x - y)^2 = 2xy^2 + 5x^2$

7- أوجد المشتقة الأولى والثانية للدوال التالية:

(a) $y = x^2 + 5x + 8$

(b) $y = ex^3$

(c) $y = x^3 + \dfrac{3}{x^3} + 5\sqrt{x}$

(d) $y = \text{Ln}(x^2 + 2x)$

8- أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $Y = X^2 - 4 + 500\sqrt{X}$

2. $Y = \left(\frac{3X^2 - 2}{5X + 1}\right)^2$

3. $Y = e^{-3X^2 - 5X + 7}$

9- أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $Y = 4X - 4 + \sqrt{X}$

2. $Y = \left(\frac{3 - X}{2 + 3X}\right)^4$

3. $Y = e^{-2X+3}$

4. $4X^3 Y^2 = 9$

10- ضع دارة حول الإجابة الصحيحة:

1. المشتقة الأولى للدالة: $Y = \frac{4}{X^3}$ هي:

أ) $\frac{-12}{\sqrt[3]{X}}$ ب) $\frac{-4}{X^4}$ ج) $\frac{4}{X^2}$ د) خلاف ذلك هو...

2. المشتقة الأولى للدالة: $Y = 6\sqrt{X^3}$ هي:

أ) $\frac{9}{\sqrt[3]{X}}$ ب) $\frac{6}{\sqrt{X^3}}$ ج) $18\sqrt[3]{X^2}$ د) خلاف ذلك هو...

3. المشتقة الأولى للدالة: $Y = 8\sqrt[4]{X^3}$ هي:

أ) $\frac{12}{\sqrt[4]{X}}$ ب) $24\sqrt{X^3}$ ج) $12\sqrt[4]{X}$ د) خلاف ذلك هو...

4. مشتقة الدالة: $Y = -5\,e^{3X-2}$ هي:

أ) $-2e^{2X}$ ب) $-15X\,e^{3X-2}$ ج) $-6X\,e^{3X-1}$ د) خلاف ذلك هو...

5. مشتقة الدالة: $4X^3Y^4 = 10$ هي:

أ) $-2Y/3X$ ب) $2X/3Y$ ج) $-2X/Y$ د) خلاف ذلك هو...

6. المشتقة الأولى للدالة: $Y = L_nX^4$ هي:

أ) $5X$ ب) $5L_nX^4$ ج) $\frac{5}{X}$ د) خلاف ذلك هو...

11- أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $Y = 4Y - \frac{4}{X} + 4\sqrt{X}$
2. $Y = \left(\frac{3-X}{2+3X}\right)^4$
3. $Y = e^{-5X+3}$
4. $4X^3Y^2 = 9$

12- ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. المشتقة الأولى للدالة: $Y=\frac{4}{X^4}$ هي:

أ) $\frac{-12}{\sqrt[3]{X}}$ ب) $\frac{-4}{X^4}$ ج) $\frac{3}{X^5}$ د) خلاف ذلك هو...

2. المشتقة الأولى للدالة: $Y=8\sqrt{X^3}$ هي:

أ) $\frac{8}{\sqrt[3]{X}}$ ب) $\frac{3}{\sqrt{X^3}}$ ج) $\frac{24}{\sqrt[3]{X^2}}$ د) خلاف ذلك هو...

3. المشتقة الأولى للدالة: $Y=12\sqrt[4]{X^3}$ هي:

أ) $\frac{9}{\sqrt[4]{X}}$ ب) $\frac{\sqrt{X^3}}{16}$ ج) $\frac{12}{\sqrt[4]{X}}$ د) خلاف ذلك هو...

4. مشتقة الدالة: $y= -5e^{3x-2}$ هي:

أ) $-2e^{2X}$ ب) $-6X\,e^{3X-2}$ ج) $-6\,e^{3X-1}$ د) خلاف ذلك هو...

5. مشتقة الدالة: $5X^2\,Y^3 =15$ هي:

أ) $-2Y / 3X$ ب) $2X / 3Y$ ج) $-2X / Y$ د) خلاف ذلك هو.

6. المشتقة الأولى للدالة: $Y = L_n X^4$ هي:

أ) $4X$ ب) $4L_n\,X_3$ ج) $\frac{4}{X}$ د) خلاف ذلك هو.

الفصل الرابع

تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق

ECONOMIC APPLICATION OF DERVIATIVES

الفصل الرابع

تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق

Economic Application of Dervaitives

مقدمة:

تناولنا في الفصل السابق معنى الاشتقاق وقواعد الاشتقاق، وفي هذا الفصل نتناول كيفية استخدام قواعد الاشتقاق في العلوم الاقتصادية الإداريه المختلفة، وتتمثل في النقاط الآتية:

- دالة الإيراد الكلي ودالة الايراد المتوسط ودالة الإيراد الحدي.
- دالة التكلفة الكلية ودالة التكلفة المتوسطة ودالة التكلفة الحدية.
- دالة الربح ودالة الربح الحدي.
- دالة الاستهلاك ودالة الميل الحدي للاستهلاك، دالة الادخار ودالة الميل الحدي للادخار.
- دالة الإنتاج ودالة الإنتاجية المتوسطة ودالة الإنتاجية الحدية للعامل.

دالة الإيراد الكلي ودالة الإيراد المتوسط ودالة الإيراد الحدي:

- الإيراد الكلي (TR): يمثل الإيراد الكلي لأي منشأة إجمالي ما تحصل عليه من أموال نظير بيع كمية معينة من السلع بسعر معين. وهذا يعني أن:

الإيراد الكلي= السعر× الكمية

$$TR = P \times Q$$

حيث أن:

P : تمثل السعر.

Q : تمثل الكمية

- الإيراد المتوسط (AR): يمثل خارج قسمة الإيراد الكلي على عدد وحدات الإنتاج

$$\text{الإيراد المتوسط} = \frac{\text{الإيراد الكلي}}{\text{حجم الإنتاج}}$$

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

- الإيراد الحدي (MR): يمثل معدل التغير في الإيراد الكلي بالنسبة للتغير في حجم الوحدات المنتجة (المباعة). وهذا يعني أن: الإيراد الحدي= المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي بالنسبة لحجم الإنتاج.

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

مثال: إذا كانت دالة الطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = 500 - 50Q$$

حيث أنP: السعر، Q: حجم الإنتاج

المطلوب:

1- أوجد دالة الإيراد الكلي (TR)، دالة الإيراد المتوسط (AR)، ودالة الإيراد الحدي (MR).

2- أوجد قيمة كل من TR , AR , MR عندما Q=5

الحل

1- دالة الإيراد الكلي (TR):

$$TR = P \times Q$$
$$= (500-50Q)$$
$$TR = 500Q - 50Q^2$$

2- دالة الإيراد المتوسط (AR):

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{500Q - 50Q^2}{Q}$$
$$= 500 - 50Q$$

3- دالة الإيراد الحدي (MR):

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 500 - 100\,Q$$

2- بالتعويض من دالة TR , AR , MR عندما Q=5

$$TR = 500(5) - 50(5)^2$$
$$= 2500 - 1250 = 1250$$
$$AC = 500 - 50(5) = 250$$
$$MC = 500 - 100(5) = \text{صفر}$$

دالة التكاليف الكلية، دالة التكاليف المتوسطة، دالة التكاليف الحدية:

1- التكاليف الكلية (TC): يقصد بالتكاليف الكلية لأي منشأة إجمالي ما تنفقه المنشأة من أموال لإنتاج عدد معين من الوحدات.

وتتمثل التكاليف التي تنفقها اي منشأة فيمايلي:

2- التكاليف الثابتة (FC): هي التكاليف التي تنفق بغض النظر عن حجم

الإنتاج أي أنها التكاليف التي لا تتغير مع تغير حجم الإنتاج (لا ترتبط بالإنتاج).

3- التكاليف المتغيرة الكلية (TVC): هي التكاليف التي تتغير مع تغير حجم الإنتاج. وهي عبارة عن حاصل ضرب التكاليف المتغيرة للوحدة الواحدة في عدد الوحدات.

∴ التكاليف المتغيرة الكلية= التكاليف المتغيرة للوحدة × عدد الوحدات

$$TVC = VC \times Q$$

4- التكاليف المتغيرة للوحدة (VC): هي نصيب الوحدة الواحدة من التكاليف المتغيرة، وهي التكاليف التي تتغير مع تغير حجم الإنتاج.

$$VC = \frac{TVC}{Q}$$

5- التكاليف المتوسطة (AC): يقصد به نصيب الوحدة الواحدة من التكاليف الكلية. وبذلك فإن:

$$\text{التكاليف المتوسطة} = \frac{\text{التكاليف الكلية}}{\text{حجم الإنتاج}}$$

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

6- التكاليف الحدية(MC): يقصد بالتكاليف الحدية معدل التغير في حجم التكاليف الكلية بالنسبة للتغير في حجم الوحدات المنتجة. أي أن التكاليف الحدية تمثل المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج. وبذلك فإن

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الكلية بأحد المصانع تأخذ الصورة التالية:

$$TC = 20 + 2Q + 0.3\,Q^2$$

المطلوب: أوجد التكلفة الحديه (MC) والتكلفة المتوسطة (AC) عندما (Q=20) .

الحل

- التكلفة الحدية (MC) تمثل المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية (TC)

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 2 + 0.6Q$$
$$= 2 + 0.6(20)$$
$$= 2 + 12 = 14$$

- التكلفة المتوسطة (AC)

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{20 + 2Q + 0.3Q^3}{Q}$$

$$= \frac{20}{Q} + 2 + 0.3Q$$

$$= 1 + 2 + 6 = 9$$

مثال: إذا كانت تكاليف إنتاج (Q) وحدة من منتج معين تتحدد بالعلاقة:

$$TC = 10Q - 0.6Q^2 + 0.02\,Q^3$$

المطلوب: أوجد التكلفة الحدية عند إنتاج 20 وحدة.

الحل

حيث أن التكلفة الكلية (TC) هي:

$$TC = 10Q - 0.6Q^2 + 0.02\,Q^3$$

1- إن التكلفة الحدية تمثل المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية.

$$\therefore MC = \frac{dC}{dQ}$$

$$MC = 10 - 1.2Q + 0.06Q^2$$

∴ التكلفة الحدية عند إنتاج 20 وحدة $(Q=20)$.

$$MC = 10 - 1.2(20) + 0.06(20)^2 = 10$$

دالة الربح ودالة الربح الحدي:

1- الربح (π): يمثل الربح في أي منشأة الفرق بين الإيراد الكلي والتكاليف الكلية.

$$\pi = TR - TC$$

2- الربح الحدي (π'): يمثل معدل التغير في الربح بالنسبة للتغير في حجم الإنتاج، وهذا يعني أن الربح الحدي يمثل المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي بالنسبة لحجم الإنتاج.

$$\pi' = \frac{d\Pi}{dQ}$$

مثال: إذا كانت دالة الربح الكلي (π) بالنسبة لحجم الإنتاج لإحدى السلع تأخذ الصورة التالية: $\pi = 4Q^3 + 50Q + 30$

المطلوب: أوجد الربح الحدي عندما $(5=Q)$

الحل

حيث أن دالة الربح الكلي: $\pi = 4Q^3 + 50Q + 30$

حيث أن الربح الحدي يمثل المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي.

$$\pi' = \frac{d\Pi}{dQ}$$

$$\pi' = 12Q^2 + 50$$

وعندما Q=5 فإن الربح الحدي

$$\pi' = 12(5)^2 + 50 = 350$$

مثال: إذا كانت دالة الإيراد الكلي لإحدى السلع هي:

$$TR = 5Q^2 - 10Q + 75$$

وكانت دالة التكلفة الكلية على الصورة:

$$TC = 4Q^2 + 8Q - 25$$

المطلوب: أوجد الربح الحدي عند إنتاج 30 وحدة.

الحل

- الربح الكلي = الإيراد الكلي- التكاليف الكلية

$$\begin{aligned}\pi &= TR - TC \\ &= (5Q^2 - 10Q + 75) - (4Q^2 + 8Q - 25) \\ &= 5Q^2 - 10Q + 75 - 4Q^2 - 8Q + 25 \\ &= Q^2 - 18Q + 100\end{aligned}$$

- الربح الحدي يمثل المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي

$$\pi' = \frac{d\pi}{dQ} = 2Q - 18$$

عند إنتاج 30 وحدة فإن الربح الحدي

$$\pi' = 2(30) - 18 = 42$$

حل آخر:

الربح الحدي = الإيراد الحدي- التكاليف الحدية

$$\pi' = MR - MC$$

- وحيث أن الإيراد الحدي يساوي:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 10Q - 10$$

- والتكلفة الحدية تساوي:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 8Q + 8$$

∴ الربح الحدي (π')

$$\begin{aligned} \pi' &= MR - MC \\ &= (10Q - 10) - (8Q + 8) \\ &= 10Q - 10 - 8Q - 8 \\ &= 2Q - 18 \end{aligned}$$

∴ عند إنتاج 30 وحدة فإن الربح الحدي

$$\pi' = 2(30) - 18 = 42$$

دالة الاستهلاك ودالة الميل الحدي للاستهلاك، ودالة الادخار (s) ودالة الميل الحدي للادخار.

بفرض أن الدخل القومي (y) يُستخدم في الاستهلاك (c) والادخار وعلى ذلك فإن: $y = c + s$

وهذا يعني أن التأثير على كل من الاستهلاك (c) والادخار (s) يرجع فقط إلى التغير في قيمة الدخل (y)، وأن زيادة الدخل بمقدار معين سوف يدفع الأفراد إلى إنفاق هذه الزيادة إما في السلع الاستهلاكية أو في الادخار. ولتحليل سلوك الأفراد تجاه الزيادة في الدخل سوف نتناول مفهوم كل من:

1- الميل الحدي للاستهلاك Marginal propensity to consume (MPC)

2- الميل الحد للادخار Marginal propensity to save (MPS)

حيث أن:

* الميل الحدي للاستهلاك: يمثل المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك بالنسبة للدخل.

$$MPC=\frac{dc}{dy}$$

* الميل الحدي للادخار: يمثل المشتقة الأولى لدالة الادخار بالنسبة للدخل.

$$MPS=\frac{ds}{dy}$$

حيث أن: $MPC + MPS = 1$

ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

الدخل (y)

الاستهلاك (c)	الادخار (s)
$c = f(y)$	$s = f(y)$
- الميل الحدي للاستهلاك	- الميل الحدي للادخار
$MPC = \frac{dc}{dy}$	$MPS = \frac{ds}{dy}$
$MPS = 1 - MPC$	$MPC = 1 - MPS$

مثال: إذا كانت دالة الاستهلاك على الصورة التالية: $C = 0.02\,y^2 + 0.1\,y + 6$

المطلوب: أوجد قيمة الميل الحدي للاستهلاك (MPC)، الميل الحدي للادخار (MPS) عندما $y = 20$

الحل

- الميل الحدي للاستهلاك (MPC):

$$MPC = \frac{dc}{dy} = 0.04\,y + 0.1$$

بالتعويض عن قيمة $y = 20$

$$MPC = 0.04(20) + 0.1 = 0.9$$

- الميل الحدي للادخار (MPS):

حيث أن: $MPC + MPS = 1$

فإن: $MPS = 1 - MPC$

$$MPS = 1 - 0.9 = 0.1$$

وهذا يعني أن عند زيادة الدخل بمقدار وحدة واحدة عن المستوى الحالي $(y = 20)$ فإن ذلك سوف يؤدي إلى زيادة الاستهلاك بمقدار 0.9 والادخار يزيد بمقدار 0.1.

مثال: إذا كانت دالة الادخار (S) على الصورة:

$$y = \frac{200 + y^2}{1 + 2y}$$

المطلوب: أوجد قيمة كل من MPC , MPS، **عندما** $y = 30$

الحل

- الميل الحدي للادخار (MPS):

$$MPS = \frac{ds}{dy} = \frac{(1 + 2y) \times 2y - (200 + y^2) \times 2}{(1 + 2y)^2}$$

$$= \frac{2y + 4y^2 - 400 - 2y^2}{(1 + 2y)^2} = \frac{2y^2 + 2y - 400}{(1 + 2y)^2}$$

بالتعويض عن قيمة $y = 30$

$$MPC = \frac{2(30)^2 + 2(30) - 400}{(1 + 2(30))^2}$$

$$= \frac{1800 + 60 - 400}{3721} = \frac{14600}{3721} = 0.39$$

- الميل الحدي للاستهلاك (MPC):

حيث أن: $MPC + MPCS = 1$

$$\therefore MPC = 1 - MPS$$

$$= 1 - 0.39 = 0.61$$

بمعنى أن زيادة الدخل بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الاستهلاك بمقدار 0.61 وزيادة الادخار بمقدار 0.39

مثال: إذا كانت دالة الاستهلاك (c) بالنسبة للدخل (y) على الصورة التالية:

$$C = 8y - 0.024y^2 - 500$$

المطلوب: أوجد قيمة كل من MPC , MPS، **عندما** $y = 150$

الحل

- دالة الاستهلاك بالنسبة للدخل:

$$C = 8y - 0.024y^2 - 500$$

* الميل الحدي للاستهلاك (MPC):

$$MPC = \frac{dc}{dy} = 8 - 0.048y$$

بالتعويض عن قيمة $y = 150$

$$MPC = 8 - 0.048(150)$$

$$= 8 - 7.2 = 0.8$$

* الميل الحدي للادخار (MPS):

حيث أن: $MPC + MPS = 1$

$$\therefore \quad MPS = 1 - MPC$$

$$= 1 - 0.8 = 0.2$$

وهذا يعني أن أي زيادة في الدخل سوف يذهب منها 0.8 إلى الاستهلاك، 0.2 إلى الادخار.

دالة الإنتاج، دالة الإنتاجية المتوسطة للعامل، دالة الإنتاجية الحدية للعامل:

تناولنا فيما سبق أن الإنتاج (Q) متغير مستقل في العديد من الدوال مثل دالة الطلب، دالة العرض، دالة الإيراد الكلي، دوال التكلفة الكلية والمتوسطة والحدية، ودالة الربح، إلا أن حجم الإنتاج هو الآخر دالة في العديد من المتغيرات (عوامل أو عناصر الإنتاج وهي: الأرض، رأس المال، العمل، التنظيم)، وبالتالي فإن العامل الأساسي الذي يؤثر في حجم الإنتاج هو حجم العمل، ممثلاً إما بعدد العاملين أو عدد ساعات العمل.

فإذا رمزنا لحجم الإنتاج بـ(Q)، الحجم العمل بـ(L) ممثلاً بعدد العاملين، فإن العلاقة بينهما (دالة الانتاج) على الصورة التالية:

$$Q = f(L)$$

حيث أن: L : عدد العاملين

Q : حجم الإنتاج

- الإنتاجية المتوسطة $(APL) = \frac{\text{حجم الإنتاج}}{\text{عدد العاملين}}$

$$APL = \frac{Q}{L}$$

- الإنتاجية الحدية (MPL): وهي تمثل معدل التغير في حجم الإنتاج بالنسبة للتغير في عدد العاملين (المشتقة الاولي لدالة الانتاج بالنسبة لعدد العاملين).

$$MPL = \frac{dQ}{dL}$$

مثال: إذا كانت دالة الإنتاج بإحدى الشركات على الصورة التالية:

$$Q = 300\sqrt[3]{L^2} - 25L$$

المطلوب:

1- أوجد الإنتاجية الحدية للعامل (MPL) عندما:

$$L = 1000 \,,\ L = 125 \,,\ L = 8 \,,\ L = 1$$

2- أوجد دالة الإنتاجية المتوسطة.

الحل

1- الإنتاجية الحدية للعامل (MPL) تمثل المشتقة الأولى لدالة الإنتاج

$$MPL = \frac{dQ}{dL}$$

حيث أن دالة الإنتاج:

$$Q = 300\sqrt[3]{L^2} - 25L$$

$$Q = 300\,L^{\frac{2}{3}} - 25L$$

∴ الإنتاجية الحدية للعامل MPL:

$$MPL = 300 \times \frac{2}{3} L^{\frac{2}{3}-1} - 25L$$

$$= 200\, L^{-\frac{1}{3}} - 25$$

$$= \frac{200}{L^{\frac{1}{3}}} - 25$$

$$MPL = \frac{200}{\sqrt[3]{L}} - 25$$

ثم بالتعويض عن قيمة (L) في الإنتاجية الحدية للعامل (MPL):

- عندما $L = 1$ فإن: $MPL = \frac{200}{\sqrt[3]{1}} - 25 = 175$

- عندما $L = 8$ فإن: $MPL = \frac{200}{\sqrt[3]{8}} - 25 = 75$

- عندما $L = 125$ فإن: $MPL = \frac{200}{\sqrt[3]{125}} - 25 = 15$

- عندما $L = 1000$ فإن: $MPL = \frac{200}{\sqrt[3]{1000}} - 25 = -5$

من المثال السابق يتضح أن الإنتاجية الحدية للعامل (MPL) تتناقص مع زيادة حجم العمل (عدد العاملين) حيث أن:

1- إذا كان عدد العاملين الحالي هو عامل واحد فقط، مع زيادة عدد العاملين بمقدار عامل واحد فإن الإنتاجية الحدية للعامل تصبح (175) وحدة، بمعنى أن إجمالي الإنتاج سوف يزيد بمقدار 175 وحدة.

2- إذا كان عدد العاملين الحالي (8) عمال، مع زيادة عدد العاملين بعامل

واحد انخفضت الإنتاجية الحدية للعامل إلى (75) وحدة كما يعني أن إجمال الإنتاج سوف يزيد بمقدار 75 وحدة.

3- إذا كان عدد العاملين الحالي (125) عامل، مع زيادة عدد العاملين بعامل واحد انخفضت الإنتاجية الحدية للعامل إلى (15) وحدة، بمعنى أن إجمال الإنتاج سوف يزيد بمقدار 15 وحدة.

4- إذا كان عدد العاملين الحالي (1000) عامل، مع زيادة عدد العاملين بعامل واحد انخفضت الإنتاجية الحدية للعامل إلى (5-)، أي أن الإنتاج الإجمالي سوف ينخفض بمقدار 3 وحدات.

والأمثلة السابقة تفسر ما يعرف بقانون تناقص الإنتاجية الحدية (Law of Diminishing Marginal production) والتي تعرف أحياناً بقانون تناقص الغلة Law of Diminishing Returns والذي يعني أن الزيادة الناتجة عن حجم الإنتاج سوف تتناقص في النهاية: بمعنى أن كلما زاد عدد العاملين انخفضت الإنتاجية الحدية للعامل.

تمارين

السؤال الأول:

أولاً: إذا كانت دالة الاستهلاك (C) بالنسبة للدخل (Y) على الصورة التالية:

$$C = 0.02Y^2 - 3.2Y + 200$$

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

1. قيمة MP_C عند $Y=100$ هي:

أ) 0.7 ب) 1.7 ج) 0.8- د) خلاف ذلك وهو.

2. قيمة MP_S عند $Y=100$ هي:

أ) 0.2 ب) 0.3- ج) 1.2 د) خلاف ذلك وهو.

3. إذا كانت قيمة MP_S= صفر فهذا يعني أن:

أ) أي زيادة في الدخل تذهب إلى الادخار

ب) أي زيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك

ج) ليس هناك زيادة في الدخل

د) خلاف ذلك وهو...

ثانياً: إذا كانت دالة الإنتاج بالنسبة لعدد العاملين (L) بإحدى الشركات على الصورة التالية:

$$Q = 120\sqrt[3]{L^2}$$

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

1. قيمة MP_L عند $L=8$ هي:

أ) 0.7 ب) 2.7 ج) 0.8- د) خلاف ذلك وهو.

2. قيمة MP_L عند $L=27$ هي:

أ) 0.7 ب) 2.7 ج) 22 د) خلاف ذلك وهو.

3. قيمة MP_L عند $L=1000$ هي:

أ) 0.2 ب) 0.3- ج) 4 د) خلاف ذلك وهو.

4. من النتائج السابقة يتضح:

أ) تناقص حجم الإنتاج ب) تناقص الإنتاجية المتوسطة

ج) زيادة الإنتاجية المتوسطة د) خلاف ذلك وهو...

السؤال الثاني: إذا كانت دالة الادخار (S) بالنسبة للدخل (Y) على الصورة التالية:

$$S= 0.01Y^2 -3.8Y+ 400$$

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

1. قيمة MP_S عند $Y=200$ هي:

أ) 0.8 ب) 0.8- ج) 1.2 د) خلاف ذلك وهو.

2. قيمة MP_C عند $Y=100$ هي:

أ) 0.2 ب) 0.8 ج) 1.2 د) خلاف ذلك وهو.

3. إذا كانت قيمة MPS= صفر فهذا يعني أن:

أ) أي زيادة في الدخل تذهب إلى الادخار

ب) أي زيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك

ج) ليس هناك زيادة في الدخل

د) خلاف ذلك وهو...

السؤال الثالث:

أولاً: إذا كانت دالة الإنتاج بالنسبة لعدد العاملين (L) بإحدى الشركات على الصورة التالية: $Q = 90\sqrt[3]{L^2} - 3L$

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

1. قيمة MP_L عند L=8 هي:

أ) 0.8 ب) 37 ج) 0.8- د) خلاف ذلك وهو.

2. قيمة MP_L عند L=64 هي:

أ) 0.2 ب) 1 ج) 4 د) خلاف ذلك وهو.

3. قيمة MP_L عند L=125 هي:

أ) 0.2 ب) 9 ج) 21 د) خلاف ذلك وهو.

4. من النتائج السابقة يتضح:

أ) تناقص حجم الإنتاج ب) تناقص الإنتاجية المتوسطة

ج) زيادة الإنتاجية المتوسطة د) خلاف ذلك وهو...

ثانياً: إذا كانت دالة الادخار (S) بالنسبة للدخل (Y) على الصورة التالية:

$$S = 4.2Y^2 - 0.02Y^2 - 200$$

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

1. فإن قيمة MP_S عند $Y=200$ هي:

أ) -0.3 ب) 0.3 ج) 1.2 د) خلاف ذلك وهو.

2. فإن قيمة MP_C عند $Y=100$ هي:

أ) 1.7 ب) 0.7 خ) -0.8 د) خلاف ذلك وهو.

3. إذا كانت قيمة MPS= صفر فهذا يعني أن:

أ) أي زيادة في الدخل تذهب إلى الادخار

ب) أي زيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك

ج) ليس هناك زيادة في الدخل. د) خلاف ذلك وهو...

السؤال الرابع:

أولاً: إذا كانت دالة الإنتاج بالنسبة لعدد العاملين (L) بإحدى الشركات على الصورة التالية:

$$Q = 60\sqrt[3]{L^2} - 3L$$

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

1. قيمة MP_L عند $L=8$ هي:

أ) 0.7 ب) 2.7 ج) -0.8 د) خلاف ذلك وهو.

2. قيمة MP_L عند $L=27$ هي:

أ) 0.7 ب) 2.7 ج) 22 د) خلاف ذلك وهو.

3. قيمة MP_L عند $L=1000$ هي:

أ) 0.2 ب) -0.3 ج) 1 د) خلاف ذلك وهو.

4. من النتائج السابقة يتضح:

أ) تناقص حجم الإنتاج ب) تناقص الإنتاجية المتوسطة

ج) زيادة الإنتاجية المتوسطة د) خلاف ذلك وهو...

ثانياً: إذا كانت دالة الإنتاج (Q) بالنسبة لعدد العاملين (L) على الصورة التالية:

$$Q = 400\sqrt{L} - 5L$$

أوجد قيمة MPL عندما $L=16$, $L=100$, $L=400$ مع تفسير مختصر.

الفصل الخامس

النهايات العظمى والصغرى للدوال

(الامثلية)

MAXIMUM & MINIMUM OF FUNCTIONS(OPTIMIZATION)

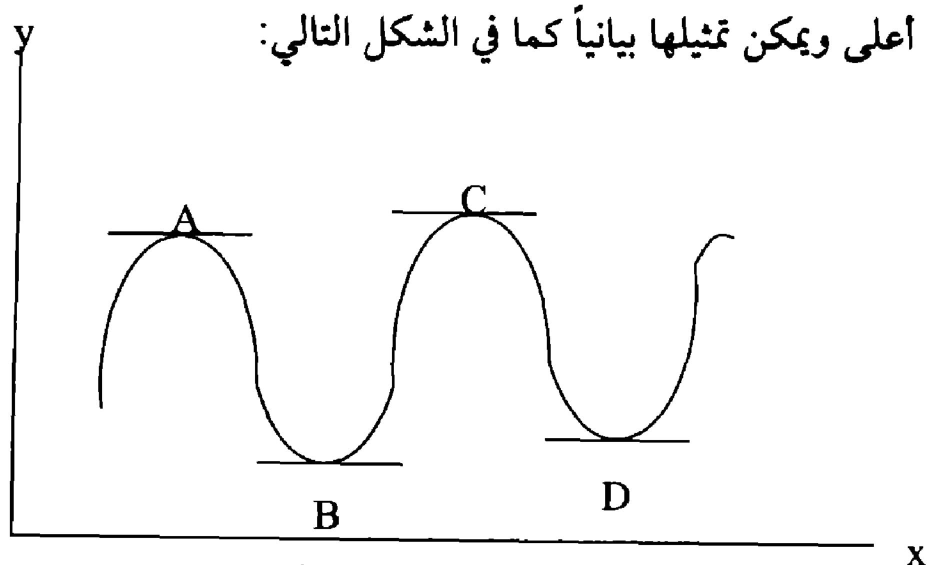
الفصل الخامس

النهايات العظمى والصغرى للدوال (الامثلية)

Maximum & Minimum of functions (Optimization)

- **مقدمة:**

إذا كان لدينا الدالة $y=f(x)$ دالة متصلة ويمثلها معادلة من الدرجة الثانية أو من درجة أعلى ويمكن تمثيلها بيانياً كما في الشكل التالي:



شكل يوضح النهايات العظمى والصغري

يتضح من الشكل السابق:

1- أن الدالة $y=f(x)$ لها أكثر من قمة مثل (A)، (C) كما أن لها أكثر من قاع مثل (B)، (D) ومن ثم يمكن إيجاد أكثر من نهاية عظمى وأكثر من نهاية صغرى حسب طبيعة الدالة.

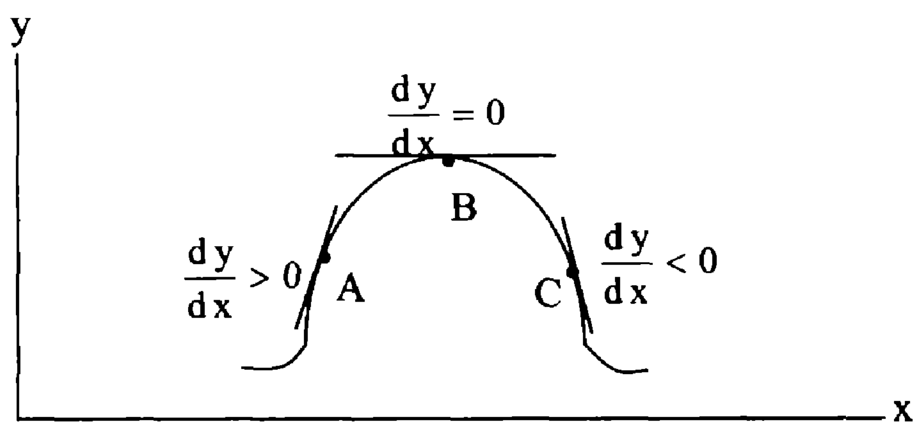
2- أن المماس للمنحنى عند نقط النهايات العظمى والصغرى يكون موازياً للمحور الأفقي وهذا يعني أن ميل المماس للمنحنى عند النهايات العظمى والصغرى يساوي صفر أي أن:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

تحديد النهايات العظمى والصغري ونقطة الانقلاب للدوال باستخدام المشتقة الأولى:

1- تحديد النهاية العظمى للدالة باستخدام المشتقة الأولى:

يقال أن لدالة ما نهاية عظمى عند نقطة ما إذا كانت قيمة الدالة عند هذه النقطة أكبر من أية قيمة أخرى لها، بذلك تبلغ الدالة نهايتها العظمى عند النقطة (B) إذا كانت قيمتها عند هذه النقطة أكبر من قيمتها عند كل النقط السابقة والنقط التالية لها مباشرة- ويتضح ذلك من الشكل التالي:



شكل يوضح النهاية العظمي

في ضوء الشكل السابق يمكن تحديد النهاية العظمى للدالة باستخدام المشتقة الأولى كما يلي:

1- أن الدالة تتزايد في الجزء (AB) بمعنى أن (y) تتزايد بازدياد قيمة (X) في هذا الجزء وإن ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ يكون موجب عند جميع النقاط التي تسبق

النقطة (B) مباشرة، أي أن ميـل المماس عنـد أي نقطـة سـابقة للنقطـة (B) موجباً أي أن: $\frac{dy}{dx} > 0$.

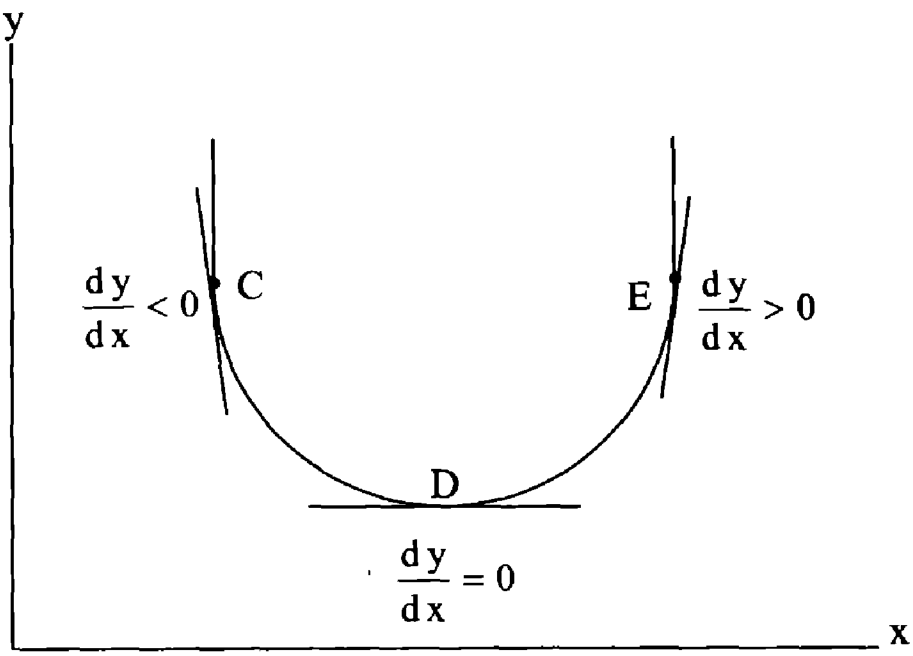
2- إن النقطة (B) تمثل النهاية العظمى للدالة وعند هذه النقطة نجـد أن ميـل المماس يساوي صفر، أي أن $\frac{dy}{dx} = 0$ حيث يكون المماس موازياً للمحور الأفقي.

3- الدالة تتناقص من الجزء (BC) بمعنى أن (y) تتناقص بازديـاد قيمـة (X) في هذا الجزء وإن ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ يكون سالباً عند جميع النقـاط الـتي تسبق النقطة (B) مباشرة. أي أن: ميل المماس عند أي نقطة سابقة للنقطة (B) يكون سالباً، أي أن: $\frac{dy}{dx} < 0$.

4- مما سبق يتضح أن إشـارة الميـل $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تـتغير مـن موجـب (+) عنـد أي نقطـة سـابقة للنقطـة (B) إلى سـالب (-)عنـد أي نقطـة للنقطـة (B) وبذلك فإن $\frac{dy}{dx}$ يجب أن يساوي صفر عنـد النهايـة العظمـى للدالـة أي عند النقطة (B).

2- تحديد النهاية الصغرى للدالة باستخدام المشتقة الأولى:

يقال أن لدالة ما نهاية صغرى عند نقطة ما، إذا كانت قيمة الدالـة عنـد هـذه النقطة أقل من أية نقطة أخرى لها، وبـذلك تتحـدد النهايـة الصـغرى للدالـة عنـد النقطة (D) إذا كانت قيمتها عند هذه النقطة أقل من قيمتها عنـد أي نقطـة أخـرى سواء كانت سابقة لها أو تالية لها مباشرة. ويتضح ذلك من الشكل التالي.



في ضوء الشكل السابق يمكن تحديد النهاية الصغرى للدالة باستخدام المشتقة الأولى كما يلي:

1- إن النقطة (D) تمثل النهاية الصغرى للدالة، وعند هذه النقطة نجد أن ميل المماس يساوي صفر، حيث يكون موازياً للمحور الأفقي، أي أن: $\frac{dy}{dx} = 0$

2- أن الدالة تتناقص من الجزء (CD) بمعنى أن (y) تتناقص مع زيادة (x) في هذا الجزء، وأن ميل المماس أي $\frac{dy}{dx}$ يكون سالب عند جميع النقط التي تسبق النقطة (D) مباشرة، أي أن ميل المماس عند أي نقطة سابقة للنقطة (D) يكون سالباً، أي أن: $\frac{dy}{dx} < 0$.

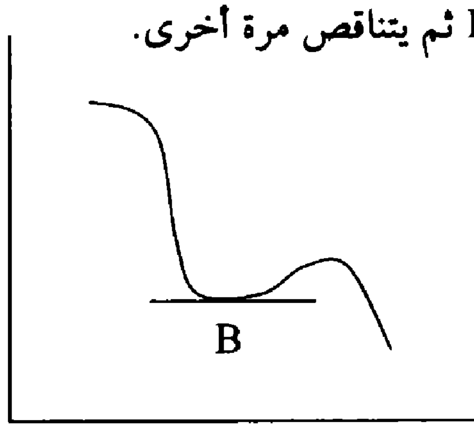
3- أن الدالة تتزايد من الجزء (DE) بمعنى أن (y) تتزايد مع زيادة (x) من هذا

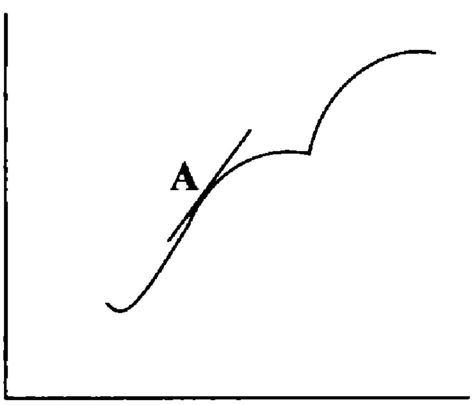
الجزء، وأن ميل المماس أي $\frac{dy}{dx}$ يكون موجب عند جميع النقط التي تلي النقطة (D) مباشرة. أي أن ميل المماس عند أي نقطة تالية (D) يكون موجب، أي أن: $\frac{dy}{dx} > 0$

4- مما سبق يتضح أن إشارة الميل $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ تتغير من سالب (-) عند اي نقطة سابقة للنقطة (D) إلى موجب (+) عند اي نقطة تالية للنقطة (D)، وبذلك فإن $\frac{dy}{dx}$ يجب أن يساوي صفر عند النهاية الصغرى للدالة أي عند النقطة (D).

3- نقطة الانقلاب (الانعطاف): Inflexion point

قد يحدث في بعض المنحنيات خاصة منحنيات الدرجة الثالثة فما فوقها أن اتجاه المنحنى يتغير عند نقطة معينة من مقعر إلى محدب كما من النقطة (A) أو بالعكس من محدب إلى مقعر كما من النقطة (B). حيث أن ميل المماس قبل النقطة (A) متزايد ثم عند النقطة (A) يساوي صفر، ثم بعدها يتزايد مرة أخرى، بينما عند النقطة B نجد أن ميل المماس قبلها يتناقص حتى يصل إلى الصفر عند النقطة B ثم يتناقص مرة أخرى.





مثال: حدد النهايات العظمى والصغرى للدالة الآتية باستخدام المشتقة الأولى:

$$y = 4X^3 - 21X^2 + 18X + 20$$

الحل

- الدالة (y) هي:

$$y = 4X^3 - 21X^2 + 18X + 2$$

1- إيجاد المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = 12X^2 - 42X + 18$$

2- مساواة المشتقة الأولى بالصفر: $\frac{dy}{dx} = 0$ ،

$$\therefore \quad 12X^2 - 42X + 18 = 0$$

ثم الحل باستخدام التحليل أو باستخدام الجذر المميز كما يلي

$$12X^2 - 42X + 18 = 0$$

بالقسمة على 6

$$2X^2 - 7X + 3 = 0$$

$$(2X - 1)(X - 3) = 0$$

$2X - 1 = 0$	$X - 3 = 0$
$X = \frac{1}{2}$	$\underline{\underline{X = 3}}$

أي أن يكـون للدالـة نهايـة عظمـى أو صـغرى عنـدما $X = \frac{1}{2}$ أو عنـدما $x = 3$ كما يلي:

* عندما $X = \frac{1}{2}$ فإننا نأخذ قيمة أقل من قيمة (X) وليكن صفر ثـم بـالتعويض من المشتقة الأولى نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 12\,(0)^2 - 42(0) + 18 = 18$$

تكون إشارة المشتقة الأولى موجبة

ثم نأخذ قيمة أكبر من قيمة (X) وليكن (1) ثم بالتعويض من المشتقة الأولى نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 12\,(1)^2 - 42(1) + 18 = -12$$

تكون إشارة المشتقة الأولى سالبة.

أي أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت مـن موجـب (+) إلى سـالب (–) يكـون للدالة نهاية عظمى عندما $X = \frac{1}{2}$، وبالتعويض الدالة الأصلية y عن قيمـة $X = \frac{1}{2}$ نجد أن y=24.25 وبذلك يكون للدالة نهاية عظمى عند النقطة $\left(\frac{1}{2}\,,\,24.25\right)$.

* عندما X=3 فإننا نأخذ قيمة أقل من قيمة (X) وليكن (1) ثم بالتعويض مـن المشتقة الأولى للدالة نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = 12\,(1)^2 - 42(1) + 18 = -12$$

تكون إشارة المشتقة الأولى سالبة، ثم نأخذ قيمة أكبر مـن قيمـة (X) ولـيكن (4) ثم بالتعويض في المشتقة الأولى نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = 12\,(4)^2 - 42(4) + 18 = +42$$

تكون إشارة المشتقة الأولى موجبة.

أي أن إشارة المشتقة الأولى تغيرت من سالب (−) إلى موجب (+) يكون للدالة نهاية صغرى عندما $X = 3$ ثم بالتعويض في الدالة الأصلية (y) عن قيمة $X = 3$ نجد أن قيمة $y = -7$ وبذلك يكون للدالة نهاية صغرى عند النقطة $(3 , -7)$

تحديد النهايات العظمى والصغرى ونقطة الانقلاب للدوال باستخدام المشتقة الجزئية الثانية:

1- تحديد النهاية العظمى للدالة باستخدام المشتقة الثانية.

رأينا فيما سبق أنه عند نقطة النهاية العظمى للدالة تكون المشتقة الأولى $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ موجبة الإشارة قبل نقطة النهاية العظمى ثم تساوي الصفر عند نقطة النهاية العظمى، ثم تكون سالبة الإشارة بعدها، أي أن المشتقة الأولى حول نقطة النهاية العظمى تتحول من موجبة إلى صفر إلى سالبة، أي أنها دالة متناقصة في حد ذاتها وبالتالي فإن معدل تغيرها سالب، ومن ثم فإن المشتقة الأولى لدالة الميل (المشتقة الثانية للدالة الأصلية) تكون سالبة، أي أن: $\frac{d^2 y}{dx} < 0$

مما سبق يتضح أن المشتقة الثانية $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)$ وهي معدل التغير في المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$، وأن المشتقة الأولى تغيرت من موجب (+) أي سالب (−) أي تتناقص عند النهاية العظمى لها، فإن المشتقة الثانية تكون سالبة وبذلك فإن:

يكون للدالة $y = f(x)$ نهاية عظمى إذا تحقق شرطان هما:

1- المشتقة الأولى تساوي صفر: $\frac{dy}{dx} = 0$

2- المشتقة الثانية تكون سالبة: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

2- تحديد النهاية الصغرى للدالة باستخدام المشتقة الثانية:

رأينا فيما سبق أن المشتقة الأولى $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ حول نقطة النهاية الصغرى للدالة تكون سالبة الإشارة قبلها ثم تساوي صفر عندها ثم تكون موجبة بعدها، أي أن المشتقة الأولى للدالة (الميل) حول نقطة النهاية الصغرى تتحول من سالبة إلى صفر إلى موجبة، أي أن دالة الميل متزايدة، وبالتالي فإن معدل تغيرها موجب أي أن المشتقة الأولى لدالة الميل (المشتقة الثانية للدالة الأصلية) تكون موجبة عند نقطة النهاية الصغرى. أي أن: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

مما سبق يتضح أن المشقتة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ وهو معدل التغير في الميل (المشتقة الأولى) $\frac{dy}{dx}$، ولما كانت المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ تتغير من سالب (-) إلى موجب (+) أي تتزايد عند النهاية الصغرى، فإن $\frac{d^2y}{dx}$ تكون موجبة.

مما سبق يتضح أن للدالة $y = f(x)$ نهاية صغرى إذا تحقق شرطان هما:

1- المشتقة الأولى تساوي صفر: $\frac{dy}{dx} = 0$

2- المشتقة الثانية تكون موجبة: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

مما سبق يتضح أنه لإيجاد النهايات العظمى والصغرى للدوال باستخدام المشتقة الثانية نجد أن:

1- إيجاد المشتقة الأولى للدالة: $\frac{dy}{dx}$

2- مساواة المشتقة الأولى بالصفر: $\frac{dy}{dx} = 0$، وذلك لإيجاد قيم المتغير.

3- إيجاد المشتقة الثانية: $\frac{d^2y}{dx^2}$

4- بالتعويض عن قيمة المتغير(السابق ايجادها) في المشتقة الثانية نواجـه بإحـدى الحالات الثلاثة:

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

(سالبة)

يكون للدالة نهاية عظمى

وبذلك فإن:

شروط النهاية العظمى

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

(موجبة)

يكون للدالة نهاية صغرى

وبذلك فإن:

شروط النهاية الصغرى

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

(صفر)

يكون للدالة نقطة انقلاب أو انعطاف

وبذلك فإن:

شروط نقطة الانقلاب

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

مثال: حدد النهايات العظمى والصغرى للدالة باستخدام المشتقة الثانية

$$y = 4X^3 - 21X^2 + 18X + 20$$

الحل

- الدالة (y) هي:

$$y = 4X^3 - 21X^2 + 18X + 20$$

1- إيجاد المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = 12X^2 - 42X + 18$$

2- مساواتها بالصفر: $\frac{dy}{dx} = 0$

$$12X^2 - 42X + 18 = 0$$

ثم الحل بالتحليل أو باستخدام الجذر المميز كما سبق نجد أن:

$X = \frac{1}{2}$ أو $X = 3$

3- إيجاد المشتقة الثانية: $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24X - 42$$

4- بالتعويض في المشتقة الثانية عن قيم X السابق إيجادها كما يلي:

* عندما $X = \frac{1}{2}$ فإن المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24\left(\frac{1}{2}\right) - 42 = -30$$

تكون إشارة المشتقة الثانية سالبة وبذلك يكون للدالة (y) عندما $X = \frac{1}{2}$ نهاية عظمى

* عندما $X = 3$ فإن المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 24(3) - 42 = +18$$

تكون إشارة المشتقة الثانية موجبة وبذلك يكون للدالة (y) نهاية صغرى عندما $X = 3$.

مثال: حدد النهايات العظمى والصغرى للدالة:

$$y = 200 + 5X^4 - X^5$$

الحل

- الدالة هي:

$$y = 200 + 5X^4 - X^5$$

1- إيجاد المشتقة الأولى: $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 20X^3 - 5X^4$$

2- مساواة المشتقة الأولى بالصفر: $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore 20X^3 - 5X^4 = 0$$

$$5X^3(4 - X) = 0$$

$5X^3 = 0$	$4 - x = 0$
$\therefore X = 0$	$\therefore X = 4$

3- إيجاد المشتقة الثانية: $\frac{d^2 y}{d x^2}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 60\, X^2 - 20X^3$$

4- بالتعويض في المشتقة الثانية عن قيم x نجد أن:

* عندما $X = 0$ فإن المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 60\,(0)^2 - 20(0)^3 = 0$$

يكون للدالة نقطة انقلاب أو انعطاف عندما $X = 0$

* عندما $X=4$ فإن المشتقة الثانية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 60\,(4)^2 - 20(4)^3$$

$$= 960 - 1280 = -320$$

حيث أن إشارة المشتقة الثانية سالبة يكون للدالة نهاية عظمى عندما $X=4$

تطبيقات اقتصادية على النهايات العظمى والصغرى: (الأمثلية للدوال الاقتصادية)

سوف نركز اهتمامنا في هذا الجزء على الوضع الأمثل للمنشأة الاقتصادية، حيث تسعى المنشأة إلى الوصول إلى ذلك الوضع الأمثل، ومن أهم المعايير المعروفة في علم الاقتصاد للوصول إلى الوضع الأمثل هو هدف التعظيم، سواء تعظيم الربح أو تعظيم المنفعة أو تعظيم الإيراد أو تعظيم إنتاجية العامل وأحياناً يكون الوضع الأمثل يتطلب الوصول إلى تخفيض التكلفة، فيكون الهدف تخفيض التكاليف الكلية أو المتوسطة.

النهايات العظمى والصغرى للدوال في متغير واحد (الأمثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد)

تظهر أهمية دراسة الأمثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد من خلال التحليل الساكن المقارن، حيث أن هذا التحليل يقوم على أساس مقارنة الدالة قبل وبعد التغير ومن الدوال التي تنطبق عليها هذه الحالة، دالة الإيراد الكلي، دالة التكلفة الكلية، دالة التكلفة المتوسطة، دالة الربح، دالة الإنتاج، دالة الإنتاجية المتوسطة للعامل، وتعتمد الأمثلية للدوال الاقتصادية (النهايات العظمى والصغرى) على دراسة سلوك المشتقات الأولى والثانية ومن ثم شروط النهايات العظمى والصغرى.

وفيما يلي توضح شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات المتغير الواحد.إذا كانت الدالة $y = f(x)$ وكان للدالة قيمة عند النقطة $x=x_1$ نهاية عظمى أو صغرى فإن:

* الشروط اللازم، إن المشتقة الأولى تساوي صفر:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

* الشرط الكافي:

- يكون للدالة نهاية عظمى عند النقطة $x=x_1$، إذا كانت المشتقة الثانية سالبة (أقل من الصفر)

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

- يكون للدالة نهاية صغرى عند النقطة $x=x_1$، إذا كانت المشتقة الثانية موجبة (أكبر من الصفر)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$$

- أما إذا كانت المشتقة الثانية تساوي صفر فإنه يكون للدالة نقطة انقلاب أو نقطة انعطاف (تساوي صفر)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

ويمكن تلخيص ذلك من الجدول التالي:

الشرط	نهاية عظمى	نهاية صغرى	نقطة انقلاب
الشرط اللازم	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$
الشرط الكافي	$\frac{d^2 y}{dx^2} < 0$ (سالبة)	$\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$ (موجبة)	$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ (صفر)

نتناول فيما يلي بعض التطبيقات الاقتصادية على النهايات العظمي والصغري للدوال والتي تتمثل فيما يلي:

- دالة الإيراد الكلي.
- دالة التكلفة الكلية.
- دالة الربح.
- دالة التكلفة المتوسطة.
- دالة الإنتاج.
- دالة الإنتاجية المتوسطة.

مثال: إذا كانت دالة الإيراد الكلي (TR) على الصورة:

$$TR = -50Q^2 + 500Q$$

حيث أن: Q تمثل حجم الإنتاج

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يجعل الإيراد الكلي أكبر ما يمكن.

عند هذا الحجم من الإنتاج أوجد قيمة الإيراد الكلي.

الحل

-دالة الإيراد الكلي TR

$$TR = -50Q^2 + 500Q$$

1- إيجاد المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي

$$\frac{dTR}{dQ} = -100Q + 500$$

2- مساواة المشتقة الأولى بالصفر وذلك لإيجاد قيمة Q

$$-100Q + 500 = 0$$

$$-100Q = -500$$

$$\therefore Q = \frac{-500}{-100} = 5$$

3- إيجاد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -100$$

حيث أن المشتقة الثانية سالبة، يكون هناك نهاية عظمى للدالة عندما Q =5.

- بالتعويض في دالة الإيراد الكلي عن قيمة $Q = 5$ وذلك لإيجاد قيمة الإيراد الكلي. $TR = -50Q^2 + 500Q$

$$TR = -50(5)^2 + 500(5) = 1250$$

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الكلية في إحدى الشركات على الصورة التالية:

$$TC = 10Q^2 - 60Q + 100$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقل تكلفة كلية ممكنة وعند هذا الحجم أوجد قيمة التكلفة الكلية.

الحل

دالة التكلفة الكلية (TC) هي:

$$TC = 10Q^2 - 60Q + 100$$

- إيجاد المشتقة الأولى:

$$\frac{dTC}{dQ} = 20Q - 60$$

- مساواتها بالصفر: $\left(\frac{dTC}{dQ} = 0\right)$

$$\therefore\ 20Q - 60 = 0$$

$$20Q = 60$$

$$\therefore\ Q = \frac{60}{20} = 3$$

- المشتقة الثانية: $\frac{d^2TC}{dQ} = 20$

حيث أن إشارة المشتقة الثانية موجبة تكون للدالة نهاية صغرى عندما Q=3

- قيمة التكلفة الكلية عندما Q=3

$$TC = 10(3)^2 + 60(3) + 100 = 10$$

مثال: إذا كانت دالة الطلب لإحدى السلع تأخذ الصورة التالية:

$$P = -3Q + 24$$

وكانت دالة التكلفة الكلية للمنشأة على الصورة:

$$TC = Q^3 - 3Q^2 - 24Q + 100$$

المطلوب:

1- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد ممكن.

2- حجم الإنتاج الذي يحقق أقل تكلفة كلية ممكنة.

3- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

4- عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن أوجد كل من MC , MR

الحل

1- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى إيراد ممكن

$$TR = P \times Q = (-3Q + 24)Q$$

$$TR = -3Q^2 + 24Q$$

- المشتقة الأولى: $\frac{dTR}{dQ} = -6Q + 24$

- مساواتها بالصفر: $\left(\frac{dTR}{dQ} = 0\right)$

$$-6Q+24=0$$

$$60=24 \qquad Q=\frac{24}{6}=4$$

- المشتقة الثانية: $\frac{d^2TR}{dQ^2}=-6$

نجد أن إشارة المشتقة الثانية سالبة وهذا يعني أن لدالـة الإيـراد الكلـي نهايـة عظمى عندما Q=4

2- حجم الإنتاج يحقق أقل تكلفة كلية ممكنة:

$$TC=Q^3+3Q^2+24Q+100$$

- إيجاد المشتقة الأولى

$$\frac{dTC}{dQ}=3Q^2+6Q-24$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر: $\left(\frac{dTR}{dQ}=0\right)$

$$3Q^2+6Q-24=0$$

بالقسمة على (3)

$$Q^2-2Q-8=0$$

بالتحليل أو باستخدام الجذر المميز:

$$(Q-4)(Q+2)=0$$

$$Q-4=0 \qquad | \qquad Q+2=0$$

$$Q=4 \qquad | \qquad Q=-2$$

عندما Q=2- مرفوض

- المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2 TR}{dQ^2} = 6Q - 6$$

- بالتعويض عن قيمة Q=4 من المشتقة الثانية

$$\frac{d^2 TR}{dQ^2} = 6(4) - 6 = 18$$

نجد أن إشارة المشتقة الثانية موجبة ولذا نجد أن لدالـة التكلفـة الكليـة نهايـة صغرى عندما Q=4

3- حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن:

$$\pi = TR - TC$$

$$= (24Q - 3Q^2) - (Q^3 - 3Q^2 - 24Q + 100)$$

$$= 240 - 3Q^2 - Q^3 + 3Q^2 + 24Q - 100$$

$$\pi = -Q^3 + 48Q - 100$$

- المشتقة الأولى:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 48$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر:

$$-3Q^2 + 48 = 0$$

$$3Q^2 = 48$$

$$Q^2 = \frac{48}{3} = 16$$

$$Q = \sqrt{16} = \pm 4$$

عندما Q=4- مرفوض

$$Q = 4$$

- المشتقة الثانية:
$$\frac{d^2 \pi}{dQ^2} = -6Q$$

- بالتعويض من المشتقة الثانية عند قيمة Q=4

$$\frac{d^2 \pi}{dQ^2} = -6(4) = -24$$

نجد أن المشتقة الثانية سالبة، يكون لدالة الربح (π) نهاية عظمى عندما Q=4

- عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح $(Q = 4)$ فإن

- الإيراد الحدي MR:

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = -6Q + 24$$
$$= -6(4) + 24 = 0$$

- التكلفة الحدية MC:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 6Q - 24$$
$$= 3(4)^2 + 6(4) - 24$$
$$= 48 - 24 - 24 = 0$$

عند حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن نجد أن

$$MR = MC$$

مثال: إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع تأخذ الصورة:

$$P = 205 - 0.95Q$$

وكانت دالة التكلفة الكلية تأخذ الصورة:

$$TC = 200 + 5Q + 0.05Q^2$$

المطلوب:

1- أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

2- عند حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن أوجد قيمة الربح وقيمة السعر الذي تباع به السلعة.

3- عند حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح أوجد قيمة كل من MR , MC

الحل .

- دالة الإيراد الكلي (TR):

$$TR = P \times Q$$
$$= 205Q - 0.95\,Q^2$$

- دالة التكلفة الكلية (TC):

$$TC = 200 + 5Q + 0.05Q^2$$

- دالة الربح (π):

$$\pi = TR - TC$$
$$= 205Q - 0.95Q^2 - 200 - 5Q - 0.05Q^2$$
$$\pi = -Q^2 + 200Q - 200$$

- إيجاد المشتقة الأولى:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -2Q + 200$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر:

$$-2Q + 200 = 0$$

$$Q = 100$$

- المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2 \pi}{dQ^2} = -2$$

نجد أن المشتقة الثانية سالبة يكون لدالة الربح نهاية عظمى عندما $Q = 100$

- قيمة دالة الربح

$$\pi = -(100)^2 + 200(100) - 200$$

$$= -10000 + 20000 - 200 = 9800$$

- قيمة سعر البيع

$$P = 205 - 0.95\,(100)$$

$$= 205 - 95 = 110$$

* عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح نجد أن:

- الربح الحدي(MR):

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 205 - 1.9\,(200)$$

$$= 205 - 190 = 15$$

- التكلفة الحدية (MC):

$$MC = \frac{dTR}{dQ} = 5 + 0.1\,Q$$

$$= 5 + 0.1(100) = 15$$

نجد أن عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح أن $MC = MR$

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الكلية على الصورة التالية:

$$TC=4Q^2-24Q+100$$

المطلوب:

1- أوجد حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة الكلية (TC) أقل ما يمكن.

2- أوجد حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة (AC) أقل ما يمكن.

3- عند حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة (AC) أقل ما يمكن أوجد قيمة كل من (AC)، (MC)

الحل

1- دالة التكلفة الكلية (TC):

$$TC=4Q^2-24Q+100$$

- المشتقة الأولى:

$$TC'=8Q-24$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر:

$$8Q-24=0$$

$$8Q=24 \qquad \therefore Q=\frac{24}{8}=3$$

- المشتقة الثانية:

$$TC''=8$$

- حيث أن المشتقة الثانية موجبة، وبذلك أن لدالة التكلفة الكلية نهاية صغرى عندما Q=3

2- دالة التكلفة المتوسطة (AC):

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{4Q^2 - 24Q + 100}{Q}$$
$$= 4Q - 24 + \frac{100}{Q}$$
$$= 4Q - 24 + 100Q^{-1}$$

- إيجاد المشتقة الأولى لدالة التكلفة المتوسطة:

$$AC' = 4 - 100Q^{-2}$$
$$= 4 - \frac{100}{Q^2}$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر: $(AC' = 0)$

$$4 - \frac{100}{Q^2} = 0$$
$$4 = \frac{100}{Q^2}$$
$$4Q^2 = 100 \qquad \therefore\ Q^2 = \frac{100}{4} = 25$$
$$Q^2 = \sqrt{25} = 5$$

- المشتقة الثانية (AC''):

$$AC'' = 200Q^{-3}$$
$$= \frac{200}{Q^3}$$

- بالتعويض عن قيمة $(Q = 5)$ من المشتقة الثانية نجد أن

$$AC'' = \frac{200}{(5)^3} = +1.6$$

حيث أن إشارة المشتقة الثانية موجبة وبذلك يكون للدالة نهاية صغرى عندما $(Q=5)$

* عندما $(Q=5)$ نجد أن قيمة التكلفة المتوسطة

$$AC = 4Q - 24 + \frac{100}{Q}$$
$$= 4(5) - 24 + \frac{100}{5}$$
$$= 20 - 24 + 20 = 16$$

* عندما $(Q = 5)$ نجد أن قيمة التكلفة الحدية

$$MC = \frac{d\,TC}{d\,Q} = 8Q - 24$$
$$= 8(5) - 24 = \underline{\underline{16}}$$

مما سبق نجد أنه عند حجم الإنتاج الذي يحقق أقل تكلفة متوسطة نجد أن $(AC = MC)$.

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الكلية على الصورة:

$$TC = 3Q^3 - 90Q^2 + 1500Q + 9000$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج (Q) الذي يجعل متوسط التكلفة المتغيرة الإجمالية أقل مما يمكن.

الحل

- دالة التكلفة الكلية هي:

$$TC = 3Q^3 - 90Q^2 + 1500Q + 9000$$

وأن 9000 تمثل التكلفة الثابتة حيث أن:

$$TC = FC + TVC$$

وبذلك فإن التكلفة المتغيرة الإجمالية TVC:

$$TVC = 3Q^3 - 90Q^2 + 1500Q$$

∴ متوسط التكلفة المتغيرة = $\dfrac{\text{التكلفة المتغيرة}}{\text{حجم الإنتاج}}$

$$ATVC = \frac{3Q^3 - 90Q^2 + 1500Q}{Q}$$

$$= 3Q^2 - 90Q + 1500$$

- إيجاد المشتقة الأولى لمتوسط التكلفة المتغيرة:

$$\frac{d\,ATVC}{dQ} = 6Q - 90$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر:

$$6Q - 90 = 0$$

$$6Q = 90 \qquad \therefore Q = \frac{90}{6} = 15$$

- المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2\,ATVC}{dQ^2} = 6$$

حيث أن المشتقة الثانية موجبة (+) وبذلك تتحقق النهاية الصغرى لمتوسط التكلفة المتغيرة الإجمالية عند إنتاج 15 وحدة.

مثال: إذا كانت التكلفة الثابتة هي:

$$FC = 50000$$

- وكانت التكلفة المتغيرة للوحدة (VC)

$$VC = (1500 + 0.2Q)$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة (AC) أقل ما يمكن.

وعند هذا الحجم من الإنتاج أوجد قيمة كل من (AC)، (MC)

الحل

- حتى يمكن إيجاد التكلفة المتوسطة لابد من إيجاد التكلفة الكلية (TC) كما يلي:

$$TC = FC + TVC$$

$$= FC + VC\,(Q)$$

$$= 50000 + (1500 + 0.2\,Q)\,Q$$

$$TC = 50000 + 1500Q + 0.2Q^2$$

- وحيث أن التكلفة المتوسطة تحسب كما يلي: $AC = \dfrac{TC}{Q}$

$$AC = \frac{50000 + 1500Q + 0.2Q^2}{Q}$$

$$= \frac{50000}{Q} + 1500 + 0.2Q$$

$$= 50000Q^{-1} + 1500 + 0.2Q$$

- إيجاد المشتقة الأولى:

$$AC' = -50000\,Q^{-2} + 0.2$$

$$= \frac{-50000}{Q^2} + 0.2$$

- مساواتها بالصفر:

$$\frac{-50\,000}{Q^2} + 0.2 = 0$$

$$\frac{50\,000}{Q^2} = 0.2$$

$$\therefore Q^2 = \frac{50\,000}{0.2} =$$

$$Q^2 = 250000$$

$$Q = \sqrt{250000} = 500$$

- إيجاد المشتقة الثانية AC'':

$$AC'' = 100000\ Q^{-3}$$

$$= \frac{100\,000}{Q^3}$$

- بالتعويض من المشتقة الثانية AC'' عن قيمة $Q = 500$

$$AC'' = \frac{100\,000}{500} = +200$$

نجد أن إشارة المشتقة الثانية موجبة وبالتالي يكون للدالة نهاية صغرى عندما $Q = 500$.

- عندما $Q = 500$ فإن التكلفة المتوسطة (AC) تساوي:

$$AC = \frac{50\,000}{500} + 1500 + 0.2(500)$$

$$= 100 + 1500 + 100 = 1700$$

- عندما $Q = 500$ فإن التكلفة الحدية (MC) تساوي:

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 1500 + 0.4Q$$

$$= 1500 + 0.4(500)$$

$$= 1500 + 200 = 1700$$

نجد أنه عند حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن نجد أن $AC = MC$.

مثال: في ضوء البيانات الآتية:

- التكلفة الثابتة (fc) = 8 مليون دولار.
- التكلفة المتغيرة للوحدة (vc) بالمليون دولار.

$$VC = 0.5 + 0.02Q$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن، وعند هذا الحجم من الإنتاج أوجد قيمة كل من AC , MC.

الحل

- التكلفة الكلية (TC) على الصورة

$$TC = FC + TVC$$

$$= 8 + (0.5 + 0.02Q)\,Q$$

$$TC = 8 + 0.5Q + 0.02Q^2$$

- التكلفة المتوسطة = $\frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{حجم الإنتاج}}$

$$AC = \frac{TC}{Q} = \frac{8+0.5Q+0.02Q^2}{Q}$$

$$= \frac{8}{Q} + 0.5 + 0.02Q$$

لإيجاد النهاية الصغرى لدالة التكلفة المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- المشتقة الأولى:

$$AC' = -8Q^{-2} + 0.02$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر ($AC'=0$):

$$-8Q^{-2} + 0.02 = 0$$

$$8Q^{-2} = 0.02$$

$$\frac{8}{Q^2} = 0.02$$

$$\therefore\ 0.02\,Q^2 = 8$$

$$Q^2 = \frac{8}{0.02} = 400$$

$$Q = \pm\sqrt{400} = 20$$

- إيجاد المشتقة الثانية:

$$AC'' = 16Q^{-3}$$

$$= \frac{16}{Q^3}$$

- بالتعويض عن قيمة $Q=20$ في المشتقة الثانية:

$$AC'' = \frac{16}{(20)^3} = +0.002$$

حيث أن إشارة المشتقة الثانية موجبة يكون لدالة التكلفة المتوسطة نهاية صغرى عندما Q=20

* عندما Q=20 فإن كل من التكلفة المتوسطة (AC) والتكلفة الحدية

$$AC = \frac{8}{20} + 0.5 + 0.02(20) = 1.3$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 0.5 + 0.04Q = 0.5 + 0.04(20) = 1.3$$

مثال: إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع تتحدد بالعلاقة:

$$P = 80 - 0.5Q$$

وكانت دالة التكاليف الكلية تتحدد بالعلاقة:

$$TC = 160 + 60Q$$

المطلوب:

أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أكبر ربح ممكن، وما هو مقدار هذا الربح، وما هو السعر الذي ينبغي أن تباع به هذه السلعة.

الحل

- دالة الإيراد الكلي (TR):

$$TR = P \times Q = (80 - 0.5Q)\,Q$$

$$TR = 80Q - 0.5Q^2$$

- دالة التكلفة (TC):

$$TC = 160 + 60Q$$

- دالة الربح (π):

$$\pi = TR - TC$$

$$= 80Q - 0.5\,Q^2 - (160 + 60Q)$$

$$= 80Q - 0.5Q^2 - 160 - 60Q$$

$$= -0.5Q^2 + 20Q - 160$$

- إيجاد المشتقة الأولى لدالة الربح:

$$\frac{d\pi}{dQ} = -Q + 20$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر:

$$-Q + 20 = 0$$

$$Q = 20$$

- إيجاد المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -1$$

حيث أن المشتقة الثانية لدالة الربح سالبة يكون للدالة نهاية عظمى عندما Q=20.

- عندما (Q=20) فإن قيمة الربح

$$\pi = -0.5(20)^2 + 20(20) - 160$$

$$= -200 + 400 - 160 = 40$$

- عندما (Q=20) فإن سعر بيع الوحدة

$$P = 80 - 0.5(20) = 70$$

- عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح فإن:

* الإيراد الحدي (MR)

$$MR = \frac{dTR}{dTC} = 80 - Q = 80 - 20 = 60$$

* التكلفة الحدية (MC)

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 60$$

نلاحظ أنه عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن نجد أن

$$MR = MC$$

مثال: إذا كانت دالة الإنتاج لشركة توشيبا لإنتاج الأجهزة الكهربائية على الصورة:

$$Q = 6L^2 - 0.2L^3$$

حيث أن L : تمثل عدد العاملين.

Q : تمثل حجم الإنتاج.

المطلوب أوجد:

1- الإنتاجية الحدية للعامل عندما $L=10$ ، $L=15$ ، $L=20$ ، $L=30$

2- إيجاد عدد العاملين الذي يجعل الإنتاج أكبر ما يمكن.

3- إيجاد عدد العاملين الي يجعل الإنتاجية المتوسطة للعامل (APL) أكبر ما يمكن، ثم احسب كلا من الإنتاجية الحدية للعامل (MPL)، والإنتاجية المتوسطة للعامل (APL) عند هذا العدد من العاملين.

الحل

1- الإنتاجية الحدية للعامل (MPL) تمثل المشتقة الأولى لدالة الإنتاج بالنسبة للعدد العاملين

$$MPL = \frac{dQ}{dL}$$

$$MPL = 12L - 0.6L^2$$

- عندما L=10 فإن MPL تساوي:

$$MPL = 12(10) - 0.6(10)^2$$
$$= 120 - 60 = 60$$

- عندما L=15 فإن MPL تساوي:

$$MPL = 12(15) - 0.6(15)^2$$
$$= 180 - 135 = 45$$

- عندما L=20 فإن MPL تساوي:

$$MPL = 12(20) - 0.6(20)^2$$
$$= 240 - 240 = 0$$

- عندما L=30 فإن MPL تساوي:

$$MPL = 12(30) - 0.6(30)^2$$
$$= 360 - 540 = -180$$

2- إيجاد عدد العاملين الذي يجعل الإنتاج أكبر ما يمكن:

$$Q = 6L^2 - 0.2L^3$$

نتبع الخطوات التالية:

- المشتقة الأولى:

$$\frac{dQ}{dL} = 12L - 0.6\ L^2$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر:

$$12L - 0.6L^2 = 0$$

$$L(12 - 0.6L) = 0$$

$$L = 0$$

$$(12 - 0.6L) = 0$$

$$12 = 0.6L$$

$$L = \frac{12}{0.6} = 20$$

- المشتقة الثانية:

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = 12 - 1.2\ L$$

- بالتعويض عن قيمة L في المشتقة الثانية:

* عندما L=0 فإن:

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = 12$$

إشارة موجبة ← نهاية صغرى ← مرفوض

* عندما L=20 فإن:

$$\frac{d^2 Q}{d L^2} = 12 - 1.2\,(20)$$

$$= 12 - 24 = -12$$

حيث أن إشارة المشتقة الثانية سالبة يكون لدالة الإنتاج نهاية عظمى عنـدما

$L=20$

وتكون قيمة الإنتاج

$$Q = 6(20)^2 - 0.2(20)^3$$

$$= 2400 - 1600 = 800$$

3- إيجاد عدد العاملين الذي يجعل الإنتاجية المتوسطة أقل ما يمكن.

$$\text{الإنتاجية المتوسطة} = \frac{\text{حجم الإنتاج}}{\text{عدد العاملين}}$$

$$APL = \frac{Q}{L} = \frac{6L^2 - 0.2L^3}{L}$$

$$APL = 6L - 0.2L^2$$

نتبع الخطوات التالية:

- إيجاد المشتقة الأولى:

$$APL' = 6 - 0.4L$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر $(APL' = 0)$:

$$6 - 0.4\,L = 0$$

$$6 = 0.4\,L$$

$$L = \frac{6}{0.4} = 15$$

- المشتقة الثانية:

$$APL'' = -0.4$$

نجد أن المشتقة الثانية سالبة وبذلك تتحقق النهاية العظمى لدالة الإنتاجية المتوسطة عندما L=15 .

عندما 15=L فإن:

* الإنتاجية المتوسطة (APL) هي:

$$APL = 6(15) - 0.2(15)^2$$
$$= 90 - 45 = 45$$

* الإنتاجية الحدية (MPL) هي:

$$MPL = \frac{dQ}{dL} \; 12L - 0.6L^2$$
$$= 12(15) - 0.6(15)^2$$
$$= 45$$

وبذلك فإن عند عدد العاملين الذي يجعل الإنتاجية المتوسطة أكبر ما يمكن فإن (MPL=APL) .

مثال: إذا كانت دالة الإنتاج (Q) بالنسبة لعدد العاملين (L) بإحدى الشركات على الصورة التالية:

$$Q = 6L^3 - 0.2L^4$$

المطلوب: أوجد عدد العاملين الذي يجعل الإنتاجية المتوسطة أكبر ما يمكن، وعند هذا العدد أوجد قيمة كل من APL , MPL .

الحل

- دالة الإنتاج (Q) هي:

$$Q = 6L^3 - 0.2L^4$$

- دالة الإنتاجية المتوسطة (APL)

$$APL = \frac{Q}{L} = \frac{6L^3 - 0.2L^4}{L}$$
$$APL = 6L^2 - 0.2L^3$$

* بتحديد النهاية العظمى لدالة الإنتاجية المتوسطة نتبع الخطوات التالية:

- المشتقة الأولى لدالة الإنتاج المتوسطة:

$$APL' = 12L - 0.6L^2$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر (APL′=0):

$$12L - 0.6L^2 = 0$$
$$L(12 - 0.6L) = 0$$

$L = 0$	$(12 - 0.6L) = 0$ $12 = 0.6\,L$ $L = \frac{12}{06} = 20$

-إيجاد المشتقة الثانية (APL″):

$$APL' = 12 - 0.6L$$

- بالتعويض عن قيمة L في المشتقة الثانية:

* عندما L=0 فإن:

$$APL' = 12$$

إشارة موجبة ← نهاية صغرى ← مرفوض

* عندما L=20 فإن:

$$APL'' = 12 - 1.2(20) = -12$$

سالبة ← نهاية عظمى

حيث أن إشارة المشتقة الثانية سالبة يكون لدالة الإنتاجية المتسوطة نهاية عظمى عندما L=20.

* عندما L=20 فإن كل من APL , MPL

$$APL = 6(20)^2 - 0.2(20)^3 = 2400 - 1600 = 800$$

$$MPL = \frac{dQ}{dL} = 18L^2 - 0.8L^3$$

$$= 18(20)^2 - 0.8\,(20)^3$$

$$= 7200 - 6400 = 800$$

مثال: إذا كانت تكلفة بناء أحد الأبراج السكنية بعدد (x) من الطوابق تتكون من:

- 18 مليون دولار ثمن شراء الأرض.
- (0.02×-0.5) تكاليف البناء والتشطيب الخاصة بكل طابق.

المطلوب: تحديد عدد الطوابق الذي يجعل التكلفة المتوسطة لكل طابق أقل ما يمكن، وعند هذا العدد أوجد قيمة كل من AC , MC

الحل

1- ثمن شراء الأرض يمثل تكلفة ثابتة لا ترتبط بعدد الطوابق: $\therefore fc = 18$

2- تكـاليف البنـاء والتشـطيب الخاصـة بكـل طـابق هـي تكلفـة مـتغيرة

$$vc = (0.02x - 0.5)$$

وعلى ذلك فإن التكلفة المتغيرة الكلية (لكل الطوابق)

$$\begin{aligned} TVC &= VC \times X \\ &= (0.02X - 0.5)X \\ &= 0.02X^2 - 0.5X \end{aligned}$$

∴ التكلفة الكلية للبناء TC حيث

$$\begin{aligned} TC &= fc + tvc \\ &= 18 + 0.02x^2 - 0.5x \end{aligned}$$

وحيث أن: $\text{التكلفة المتوسطة} = \dfrac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد الطوابق}}$

$$\begin{aligned} AC &= \frac{TC}{X} \\ &= \frac{18 + 0.02X^2 - 0.5X}{X} \end{aligned}$$

$$AC = \frac{18}{X} + 0.02X - 0.5$$

يكون المطلوب تحديد عدد الطوابق الـذي يخفـض التكلفـة المتوسـطة إلى أقـل مـا يمكن.

- المشتقة الأولى:

$$\begin{aligned} AC' &= -18x^{-2} + 0.02 \\ &= \frac{-18}{x^2} + 0.02 \end{aligned}$$

- مساواتها بالصفر:

$AC' =$ صفر

$$-18x^{-2} + 0.02$$

$$\frac{-18}{x^2} = 0.02$$

$$0.02x^2 = 18 \qquad \therefore X^2 = \frac{18}{0.02} = 900$$

$$X = \pm\sqrt{900} = 30$$

- المشتقة الثانية:

$$AC'' = 36X^{-3}$$
$$= \frac{36}{X^3}$$

- بالتعويض عن قيمة X من المشتقة الثانية لدالة التكلفة المتوسطة

$$AC'' = \frac{36}{(30)^3} = +0.004$$

وحيث أن إشارة المشتقة الثانية موجبة يكون لدالة التكلفة المتوسطة نهاية صغرى عند عدد طوابق يساوي 30 وعند عدد الطوابق $(X=30)$ فإن:

* التكلفة المتوسطة (AC):

$$AC = \frac{18}{X} + 0.02X - 0.5$$
$$= \frac{18}{30} + 0.02(30) - 0.5$$
$$= 0.6 + 0.6 - 0.5 = 0.7$$

* التكلفة الحدية (MC):

$$MC = \frac{d\,tc}{dQ} = 0.04X - 0.5$$
$$= 0.04(30) - 0.5$$
$$= 1.2 - 0.5 = 0.7$$

عند عدد الطوابق الذي يحقق أقل تكلفة متوسطة ممكنة يكون: $(MC = AC)$.

مثال: إذا كانت تكلفة بناء أحد المباني بعدد (X) من الطوابق تتمثل في ثلاثة عناصر كما يلي:

1- 4 مليون دولار ثمن شراء الأرض.

2- ربع مليون دينار(0.25) تكلفة بناء كل طابق.

3- (0.01x) مليون دينار تكلفة تشطيب كل طابق.

المطلوب: أوجد عدد الطوابق الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن، وعند هذا العدد من الطوابق أوجد AC, MC.

الحل

- التكاليف الثابتة (ثمن شراء الأرض): $fc = 4$

- التكاليف المتغيرة (تكاليف بناء كل طابق+ تكاليف تشطيب كل طابق)

$$vc = 0.25 + 0.01x$$

- التكاليف المتغيرة الكلية= التكاليف المتغيرة لكل طابق× عدد الطوابق

$$Tvc = (vc) \times x$$

$$= (0.25 + 0.01x)\, x$$

$$= 0.25x + 0.01x^2$$

- تكون التكاليف الكلية= التكاليف الثابتة+ التكاليف المتغيرة الكلية

$$TC = fc + Tvc$$

$$TC = 4 + 0.25 + 0.01x^2$$

$$\text{التكلفة المتوسطة} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{عدد الطوابق}}$$

$$AC = \frac{TC}{X} = \frac{4 + 0.25X + 0.01X^2}{X}$$
$$= \frac{4}{X} + 0.25 + 0.01X$$

لتحديد عدد الطوابق الذي يجعل التكاليف المتوسطة أقل ما يمكن نتبع الخطوات الآتية:

- المشتقة الأولى لدالة التكاليف المتوسطة:

$$AC' = -4x^{-2} + 0.01$$
$$= \frac{-4}{x^2} + 0.01$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر $(AC' = 0)$:

$$\frac{-4}{x^2} + 0.01 = 0$$

$$\frac{4}{x^2} = 0.01$$

$$0.01x^2 = 4 \qquad \therefore x^2 = \frac{4}{0.01} = 400$$

$$\therefore X = \sqrt{400} = \pm 20$$

تهمل القيمة السالبة، وبذلك فإن $x = 20$

- المشتقة الثانية:

$$AC'' = 8X^{-3}$$
$$= \frac{8}{X^3}$$

- بالتعويض عن قيمة X من المشتقة الثانية لدالة التكلفة المتوسطة

$$AC'' = \frac{8}{(20)^3} = +0.001$$

نجد أن إشارة المشتقة الثانية موجبة وبذلك نجد أن لدالة التكاليف المتوسطة نهاية صغرى عند عدد طوابق (X) يساوي 20.

عند عدد الطوابق (X=20) نجد أن:

* التكاليف المتوسطة (AC):

$$AC = \frac{4}{X} + 0.25 + 0.01x$$
$$= \frac{4}{20} + 0.25 + 0.01(20) = 0.65$$

* التكاليف الحدية (MC):

$$MC = \frac{d\,tc}{d\,x} = 0.25 + 0.02x$$
$$= 0.25 + 0.02(20) = 0.65$$

نجد أن $(MC = AC)$ عند عدد الطوابق الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن.

مثال: إذا كانت دوال العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = Q_s + 8$$
$$P = -3Q_d + 80$$

فإذا قررت الحكومة فرض ضريبة قدرها (t) لكل وحدة.

المطلوب: أوجد قيمة (t) التي تعظم إجمالي العائد من الضرائب بفرض بقاء السوق في وضع التوازن.

الحل

عند التوازن فإن: $Q_s = Q_d = Q$

وحيث ان دالة الطلب هي: $P = -3Q + 80$

ودالة العرض هي: $P = Q + 8$

إجمالي العائد من الضريبة: $T = tQ$

بعد فرض الضريبة فإن دالة العرض تصبح:

$$p - t = Q + 8$$
$$p = Q + 8 + t$$

دالة الطلب كما هي:

$$P = -3Q + 80$$

∴ عند التوازن: دالة العرض = دالة الطلب

$$Q + 8 + t = -3Q + 80$$
$$Q + 3Q = 80 - 8 - t$$
$$4Q = 72 - t$$

بالقسمة على 4

$$Q = 18 - \frac{1}{4}t$$

بالتعويض عن (Q) في معادلة إجمالي العائد من الضريبة:

$$T = t\left(18 - \frac{1}{4}t\right)$$
$$T = 18t - \frac{1}{4}t^2$$

يتم إيجاد قيمة t التي تعظم إجمالي العائد من الضريبة T نتبع ما يلي:

- المشتقة الأولى:

$$\frac{dT}{dt} = 18 - \frac{1}{2}t$$

- مساواة المشتقة الأولى بالصفر

$$18 - \frac{1}{2}t = 0$$

$$18 = \frac{1}{2}t \qquad t = 36$$

- المشتقة الثانية

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{2}$$

نجد أن إشارة المشتقة الثانية سالبة وبذلك فإن إجمالي العائد من الضريبة يصل إلى أقصى قيمة له عندما $t = 36$ وتكون قيمة إجمالي الضرائب تساوي

$$T = 18t - \frac{1}{4}t^2$$

$$= 18(36) - \frac{1}{4}(36)^2 = 648 - 324 = 324$$

تمارين

السؤال الاول: إذا كانت التكلفة الثابتة (FC) تقدر بـ 96 وكانت التكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة (VC) تأخذ الصورة: $VC=22-Q$ وكانت دالة الطلب للسلعة على الصورة التالية: $P=54-3Q$

المطلوب:

- استنتج كلاً من دالة الإيراد الكلي (TR) والتكلفة الكلية (TC) والربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج.
- أوجد قيمة Q التي تحقق أقصى ربح ممكن ثم أوجد عند هذا الحجم من الإنتاج قيمة كلاً من MC , MR مع تفسير مختصر.

السؤال الثاني: بمعلومية البيانات التالية ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

$$FC=98 \quad , \quad VC = 2Q - 10$$

1. دالة التكلفة الكلية المتغيرة TVC تأخذ الصورة:

أ) $(2Q^2 - 10)$ ب) $(98 + 2Q^2 - 10Q)$

ج) $(Q^2 - 98Q)$ د) خلاف ذلك وهو...

2. دالة التكلفة الكلية TC تأخذ الصورة:

أ) $(2Q^2 + 10Q)$ ب) $(98 + 2Q^2 + 10Q)$

ج) $(Q^2 + 98Q)$ د) خلاف ذلك وهو...

3. دالة التكلفة المتوسطة (AC) بالنسبة لحجم الإنتاج يأخذ الصورة:

أ) $\left(2Q^3 - 10Q^2 + 98Q\right)$ ب) $\left(Q - 10 + 98Q\right)$

ج) $\left(Q - 10 + \frac{98}{Q}\right)$ د) خلاف ذلك وهو...

4. المشتقة الأولى لدالة التكلفة المتوسطة AC' هي:

أ) $\left(6Q^2 - 20Q + 98\right)$ ب) $\left(Q - \frac{98}{Q}\right)$

ج) $\left(\frac{-98}{Q}\right)$ د) خلاف ذلك وهو...

5. المشتقة الثانية للتكلفة المتوسطة AC'' هي:

أ) $\left(12Q - 20\right)$ ب) $\left(1 + \frac{98}{Q^2}\right)$

ج) $\left(\frac{196}{Q}\right)$ د) خلاف ذلك وهو...

6. حجم الإنتاج الي يجعل التكلفة المتوسطة AC أقل ما يمكن هو:

أ) 4 ب) 5

ج) 6 د) خلاف ذلك وهو...

7. عند حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن فإن قيمة AC هي:

أ) 10 ب) 14

ج) 16 د) خلاف ذلك وهو...

8. عند حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن فإن قيمة MC هي:

أ) 14   ب) 16

ج) 10   د) خلاف ذلك وهو...

السؤال الثالث: بمعلومية البيانات التالية ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

$FC = 90 \quad , \quad VC = 0.1Q + 0.6$

1. دالة التكلفة الكلية المتغيرة TVC تأخذ الصورة:

أ) $0.10^2 + 0.6$ ب) $90 + 0.1Q^2 + 0.6Q$

ج) $90Q + 0.1Q^2$ د) خلاف ذلك وهو...

2. دالة التكلفة الكلية TC تأخذ الصورة:

أ) $0.1Q^2 + 0.6Q$ ب) $90 + 0.1Q + 0.6Q$

ج) $Q^2 + 90Q$ د) خلاف ذلك وهو...

3. دالة التكلفة المتوسطة AC تأخذ الصورة:

أ) $90 + 0.1Q$ ب) $\frac{0.6}{Q} + 0.1$

ج) $\frac{90}{Q} + 0.1$ د) خلاف ذلك وهو...

4. المشتقة الأولى لدالة التكلفة المتوسطة AC' على الصورة:

أ) $\frac{90}{Q^2} + 0.1Q$ ب) $\frac{-90}{Q^2} + 0.1$

ج) $0.2Q + 0.6$ د) خلاف ذلك وهو...

5. المشتقة الثانية لدالة التكلفة المتوسطة AC'' أقل ما يمكن هو:

أ) $\frac{-90}{Q^3}$ ب) $\frac{90}{Q^3}$

ج) $\frac{180}{Q^3}$ د) خلاف ذلك وهو...

6. حجم الإنتاج الي يجعل التكلفة المتوسطة AC أقل ما يمكن هو:

أ) 15 ب) 25

ج) 36 د) خلاف ذلك وهو...

7. عند حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن فإن قيمة AC تقدر بـ:

أ) 6.6 ب) 7.7

ج) 8.8 د) خلاف ذلك وهو...

8. عند حجم الإنتاج الذي يجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن فإن قيمة MC تقدر بـ:

أ) 4.4 ب) 6.6 ج) 8.8 د) خلاف ذلك وهو...

السؤال الرابع: إذا كانت دالة الإنتاج بمصنع الوحدة على الصورة:

$$Q = 0.9L^3 - 0.01L^4$$

حيث L: عدد العاملين

المطلوب:

- أوجد عدد العاملين (L) الذي يعظم متوسط إنتاجية (APL).
- أوجد عند هذا العدد من العاملين قيمة كل من AP_L , MP_L مع تفسير مختصر.

الفصل السادس

الاشتقاق الجزئي

PARTIAL DERIVATIVES

الفصل السادس

الاشتقاق الجزئي

Partial Derivatives

مقدمة:

تناولنا فيما سبق العديد من الدوال التي تحتوي على متغيرين فقط أحدهما متغير تابع (y) والآخر متغير مستقل (x) وكانت الدالة تأخذ الصورة $y = f(x)$ أو على الصورة: $ax + dy = c$، ولكن في الحياة العملية نجد العديد من الدوال التي تحتوي أكثر من متغير، فالدوال الاقتصادية تتضمن العديد من المتغيرات المستقلة، ومنها على سبيل المثال، نجد أن دالة الطلب لسلعة ما لا تعتمد على سعر السلعة الأصلية فحسب، وإنما تعتمد الكمية المطلوبة على سعر السلعة الأصلية، وسعر السلعة البديلة، وسعر السلعة المكملة، بالإضافة إلى دخل المستهلك وحجم المنفق على الدعاية الإعلان، وذوق المستهلك... الخ.

$$Q_a = f(P_a, P_b, P_c, y, T, M)$$

حيث أن:

Q_a: الكمية المطلوبة من السلعة (a).

P_a: سعر السلعة (a).

P_b: سعر السلعة البديلة.

P_c: سعر السلعة المكملة.

y: الدخل

T : حجم المنفق على الدعاية والإعلان.

M : ذوق المستهلك.

كذلك فإن حجم الإنتاج لسلعة ما يعتمد أيضاً على الكثير من المتغيرات منها الأرض، ورأس المال، وحجم العمل، والتنظيم، ولقياس التغير الذي يطرأ على الدالة نتيجة تغير أي من هذه المتغيرات نستخدم أسلوب الاشتقاق الجزئي.

المشتقات الجزئية الأولى:

ولإيجاد المشتقات الجزئية نستخدم نفس قواعد الاشتقاق السابق تناولها مع ملاحظة أنه في حالة الاشتقاق الجزئي فإن التعامل يكون مع دوال تشتمل على أكثر من متغير مستقل وبالتالي تتعدد المشتقات الجزئية التي يمكن الحصول عليها من الدالة الواحدة، حيث يتم حساب مشتقة الدالة بالنسبة لكل متغير من المتغيرات المستقلة كل على حدة.

ولا يختلف أسلوب إيجاد المشتقات الجزئية عن أسلوب إيجاد المشتقات للدوال ذات المتغير المستقل الواحد إلا في معاملة باقي المتغيرات المستقلة حيث تعامل باقي المتغيرات خلاف المتغير الذي يتم الاشتقاق بالنسبة له معاملة المقدار الثابت.

فإذا كان لدينا الدالة Z دالة في متغيرين هما (x , y) وهذا يعني أن قيمة Z تعتمد على قيمة كل من المتغيرين x , y.

$$Z = f(x, y)$$

حيث أن المتغيرين (x , y) متغيرات مستقلة Independent variables، ويسمى (Z) متغير تابع Dependent variables، ولإيجاد المشتقات الجزئية الأولى

للدالة Z يتم إجراء اشتقاق الدالة بالنسبة لكل متغير على حدة مع اعتبار المتغير الآخر بمثابة مقدار ثابت فإذا كانت الدالة $Z = f(x, y)$.

فإن المشتقات الجزئية الأولى هي:

- المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (x) ويرمز لها بالرمز $\frac{dz}{dx}$ ويعامل (y) كمقدار أو رقم ثابت.
- المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (y) ويرمز لها بالرمز $\frac{dz}{dy}$ ويعامل (x) كمقدار أو رقم ثابت.

إذا كانت لدينا الدالة: $h = f(x, y, z)$

فإن هذه الدالة تحتوي على ثلاث متغيرات مستقلة وبالتالي يكون لها ثلاث متغيرات جزئية أولي كما يلي:

- المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (x) ويرمز لها بالرمز $\frac{dh}{dx}$، وتعامل باقي المتغيرات (y, z) معاملة المقادير أو الأرقام الثابتة.
- المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (y) ويرمز لها بالرمز $\frac{dh}{dy}$ وتعامل باقي المتغيرات (x, z) كمقادير أو الأرقام الثابتة.
- المشتقة الجزئية الأولى بالنسبة لـ (z) ويرمز لها بالرمز $\frac{dh}{dz}$، وتعامل باقي المتغيرات (x, y) كمقادير أو أرقام الثابتة.

والأمثلة التالية توضح كيفية إيجاد المشتقات الجزئية الأولى.

مثال: أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدوال الآتية:

1- $Z = 10x^2 + 5y^3$

2- $Z = 4x^3 y^2 + 3x$

3- $Z = 3x^3 + 4x^2 y^2 - 2y^3 - 100$

4- $h = 3x^2 y^3 z^4$

الحل

1- المشتقات الجزئية الأولى للدالة: $Z = 10x^2 + 5y^3$ -1

$$\frac{dz}{dx} = 20x$$

$$\frac{dz}{dy} = 15y^2$$

2- المشتقات الجزئية الأولى للدالة: $Z = 4x^3 y^2 + 3x$ -2

$$\frac{dz}{dx} = 12x^2 \ y^2 + 3$$

$$\frac{dz}{dy} = 8x^3 \ y$$

3- المشتقات الجزئية الأولى للدالة: $Z = 3x^3 + 4x^2 y^2 - 2y^3 - 100$ -3

$$\frac{dz}{dx} = 9x^2 + 8x \ y^2$$

$$\frac{dz}{dy} = 8x^2 \ y - 6y^2$$

4- المشتقات الجزئية الأولى للدالة: $h = 3x^2 \ y^3 z^4$ -4

$$\frac{dz}{dx} = 6x y^3 z^4$$

$$\frac{dh}{dy} = 9x^2 \ y^2 \ z^4$$

$$\frac{dh}{dy} = 12x^2 \ y^3 \ z^3$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدوال التالية:

1- $Z = (4x^2 + 2y^3)^5$

2- $Z = e^{-x^3 + 5y^2}$

الحل

1- المشتقات الجزئية الأولى للدالة: $Z = (4x^2 + 2y^3)^5$ 1-

$$\frac{dz}{dx} = 5\,(4x^2 + 2y^3)^4 \times 8x$$

$$= 40x(4x^2 + 2y^3)^4$$

$$\frac{dz}{dy} = 5\,(4x^2 + 2y^3)^4 \times 6y^2$$

$$= 30y^2\,(4x^2 + 2y^3)^4$$

2- المشتقات الجزئية الأولى للدالة: $Z = e^{-x^3 + 5y^2}$ 2-

$$\frac{dz}{dx} = -3x^2 \times e^{-x^3 + 5y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = 10y \times e^{-x^3 + 5y^2}$$

المشتقات الجزئية الثانية:

بنفس الطريقة التي تم استخدامها لإيجاد المشتقات الجزئية الأولى يمكن إيجاد المشتقات الجزئية الثانية، وحيث أن عدد المشتقات الجزئية الأولى يساوي عدد المتغيرات المستقلة (حيث يتم إيجاد المشتقة الجزئية الأولى للدالة بالنسبة لكل متغير من المتغيرات المستقلة على حدة)، فإن عدد المشتقات الجزئية الثانية يساوي مربع عدد المتغيرات المستقلة.

فإذا كان لدينا الدالة Z دالة في متغيرين هما (x, y) كمـا يلـي: $z=f(x,y)$ يكون لدينا عدد (2) من المشتقات الجزئية الأولى هما $\frac{dz}{dx}$ ، $\frac{dz}{dy}$ ويكون لدينا عدد (4) من المشتقات الجزئية الثانية وهي:

1- المشتقة الجزئية الثانية لـ (x) بالنسبة لـ (x): $\frac{d^2z}{dx^2}$

2- المشتقة الجزئية الثانية لـ (x) بالنسبة لـ (y): $\frac{d^2z}{dxdy}$

3- المشتقة الجزئية الثانية لـ (y) بالنسبة لـ (y): $\frac{d^2z}{dy^2}$

4- المشتقة الجزئية الثانية لـ (y) بالنسبة لـ (x): $\frac{d^2z}{dydx}$

مع ملاحظة أن المشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة متساوية، أي أن

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة:

$$Z=3x^3y^2-2xy^2$$

الحل

- المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{dz}{dx}=9x^2\ y^2-2y^2$$

$$\frac{dz}{dy}=6x^3y-4xy$$

- المشتقات الجزئية الثانية

$\frac{dz}{dx} = 9x^2 y^2 - 2y^2$	$\frac{dz}{dy} = 6x^3 y - 4xy$
$\frac{d^2 z}{dx^2} = 18xy^2$ $\frac{d^2 z}{dxdy} = 18x^2 y - 4y$	$\frac{d^2 z}{dy^2} = 6x^3 - 4x$ $\frac{d^2 z}{dydx} = 18x^2 y - 4y$

يلاحظ من المثال السابق أن عدد المشتقات الجزئية الأولى يساوي عدد المتغيرات المستقلة، بينما عدد المشتقات الجزئية الثانية يساوي مربع عدد المتغيرات المستقلة، وأن المشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة متساوية.

$$\frac{d^2 z}{dydx} = \frac{d^2 z}{dx\,dy}$$

مثال: أوجد المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدوال:

1- $Z = 5x^3 - 4y^4$

2- $Z = 3x^2 y^3 + 4x^3 - 6y^2$

3- $h = 2x^2 y^3 z^4$

4- $\pi = 3Q_1^4 + 2Q_1^2 Q_2^3 + 5Q_2 Q_3^2 + 4Q_3^4$

الحل

1- المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة $Z = 5x^3 - 4y^4$

- المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dz}{dx} = 15x^2$$

$$\frac{dz}{dy} = -16y^3$$

- المشتقات الجزئية الثانية:

$\frac{dz}{dx}=15x^2$	$\frac{dz}{dy}=-16y^3$
$\frac{d^2z}{dx^2}=30x$ $\frac{d^2z}{dxdy}=0$	$\frac{d^2z}{dy^2}=-48y^2$ $\frac{d^2z}{dydx}=0$

2- المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة:

$$Z=3x^2y^3+4x^3-6y^2$$

- المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dz}{dx}=6xy^3+12x^2$$

$$\frac{dz}{dy}=9x^2y^2-12y$$

- المشتقات الجزئية الثانية:

$\frac{dz}{dx}=6xy^3+12x^2$	$\frac{dz}{dy}=9x^2y^2-12y$
$\frac{d^2z}{dx^2}=6y^3+24x$ $\frac{d^2z}{dxdy}=18xy^2$	$\frac{d^2z}{dy^2}=18x^2y-12$ $\frac{d^2z}{dydx}=18xy^2$

- يلاحظ من المثالين السابقين (1)، (2) ما يلي:

- عدد المشتقات الجزئية الأولى يساوي عدد المتغيرات المستقلة.

- عدد المشتقات الجزئية الثانية يساوي مربع عدد المتغيرات المستقلة.

- المشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة متساوية

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{d^2 z}{dy\,dx}$$

3- المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة:

$$h = 2x^2 y^3 z^4$$

- المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dh}{dx} = 4xy^3 z^4$$

$$\frac{dh}{dy} = 6x^2 y^2 z^4$$

$$\frac{dh}{dz} = 8x^2 y^3 z^3$$

- المشتقات الجزئية الثانية:

$\frac{dh}{dx} = 4xy^3 z^4$	$\frac{dh}{dy} = 6x^2 y^2 z^4$	$\frac{dh}{dz} = 8x^2 y^3 z^3$
$\frac{d^2 h}{dx^2} = 4y^3 z^4$ $\frac{d^2 h}{dx\,dy} = 12x y^2 z^4$ $\frac{d^2 h}{dx\,dz} = 16xy^3 z^3$	$\frac{d^2 h}{dy^2} = 12x^2 y z^4$ $\frac{d^2 h}{dy\,dx} = 12xy^2 z^4$ $\frac{d^2 h}{dy\,dz} = 24x^2 y^2 z^3$	$\frac{d^2 h}{dz^2} = 24x^2 y^3 z^2$ $\frac{d^2 h}{dz\,dx} = 16xy^3 z^3$ $\frac{d^2 h}{dz\,dy} = 24x^2 y^2 z^3$

4- المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة:

$$\pi = 3Q_1^4 + 2Q_1^2 Q_2^3 + 5Q_2 Q_3^2 + 4Q_3^4$$

* المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{d\pi}{dQ_1} = 12Q_1^3 + 4Q_1\ Q_2^3$$

$$\frac{d\pi}{dQ_2} = 6Q_1^2\ Q_2^2 + 5Q_3^2$$

$$\frac{d\pi}{dQ_3} = 10Q_2\ Q_3 + 16Q_3^3$$

* المشتقات الجزئية الثانية

$\frac{d\pi}{dQ_1} = 12Q_1^3 + 4Q_1\ Q_2^3$	$\frac{d\pi}{dQ_2} = 6Q_1^2\ Q_2^2 + 5Q_3^2$	$\frac{d\pi}{dQ_3} = 10Q_2\ Q_3 + 16Q_3^3$
$\frac{d^2\pi}{dQ_1^2} = 36Q_1^2 + 4Q_2^3$ $\frac{d^2\pi}{dQ_1\, dQ_2} = 12Q_1\ Q_2^2$ $\frac{d^2\pi}{dQ_1\, dQ_3} = 0$	$\frac{d^2\pi}{dQ_2^2} = 12Q_1^2\ Q_2$ $\frac{d^2\pi}{dQ_2\, dQ_1} = 12Q_1\ Q_2^2$ $\frac{d^2\pi}{dQ_2\, dQ_3} = 10Q_3$	$\frac{d^2\pi}{dQ_3^2} = 10Q_2 + 48Q_3^2$ $\frac{d^2\pi}{dQ_3\, dQ_1} = 0$ $\frac{d^2\pi}{dQ_3\, dQ_2} = 10Q_3$

- يلاحظ من المثالين السابقين (3)، (4) ما يلي:
- عدد المشتقات الجزئية الأولى= عدد المتغيرات المستقلة.
- عدد المشتقات الجزئية الثانية= مربع عدد المتغيرات المستقلة.
- عدد المشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة متساوية.

$$\frac{d^2\pi}{dQ_1\, dQ_2} = \frac{d^2\pi}{dQ_2\, dQ_1}$$

$$\frac{d^2\pi}{dQ_1\, dQ_3} = \frac{d^2\pi}{dQ_3\, dQ_1}$$

$$\frac{d^2\pi}{dQ_2\, dQ_3} = \frac{d^2\pi}{dQ_3\, dQ_2}$$

تمارين

(1) اوجد المشتقات الجزئية الاولى والثانية للدالة: $Z=4XY^2-3X^2Y$

(2) إذا كانت الدالة على الصورة التالية: $Z=3XY^3-2X^2Y^3$

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. المشتقة الجزئية الأولى $\frac{\partial Z}{\partial X}$ هي:

أ) $3X^2-2Y^2$ ب) $6X-2Y$

ج) $8XY-2XY^2$ د) خلاف ذلك وهو...

2. المشتقة الجزئية الأولى $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ هي:

أ) $3X^2-4XY^2$ ب) $6X-2XY$

ج) $6Y^2$ د) خلاف ذلك وهو...

3. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$ هي:

أ) $6X$ ب) $4X$

ج) $18XY^2-6Y^3$ د) خلاف ذلك وهو...

4. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ هي:

أ) $-4X$ ب) $-2X$

ج) $6X^3-12X^2Y$ د) خلاف ذلك وهو...

5. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}$ هي:

أ) $-2X$ ب) $-4Y$

ج) $6-4X$ د) خلاف ذلك وهو...

6. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y\,\partial X}$ هي:

أ) $-3X$ ب) $8Y-12XY$

ج) $8Y-6XY$ د) خلاف ذلك وهو...

(3) إذا كانت الدالة على الصورة: $Z=3X^2Y^3-2X^3Y^2$

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. المشتقة الجزئية الأولى $\frac{\partial Z}{\partial X}$ هي:

أ) $3X^2-2Y^2$ ب) $6X-2Y$

ج) $6XY-2XY^2$ د) خلاف ذلك وهو...

2. المشتقة الجزئية الأولى $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ هي:

أ) $3X^2-4XY^2$ ب) $6X-2XY$

ج) $6XY-2Y^2$ د) خلاف ذلك وهو...

3. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$ هي:

أ) $6X$ ب) $6Y$

ج) $6Y^3$ د) خلاف ذلك وهو...

4. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ هي:

أ) $-4X$ ب) $-2X$

ج) $18X^2-4X^3$ د) خلاف ذلك وهو...

5. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial X\, \partial Y}$ هي:

أ) $-2Y$ ب) -2

ج) $6X-4XY$ د) خلاف ذلك وهو...

6. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y\, \partial X}$ هي:

أ) $-2X$ ب) $-4Y$

ج) $6-4X$ د) خلاف ذلك وهو...

(4) إذا كانت الدالة على الصورة: $Z=3X^2Y - 2XY^2$

ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. المشتقة الجزئية الأولى $\frac{\partial Z}{\partial X}$ هي:

أ) $(3X^2-2Y^2)$ ب) $(6X-2Y)$

ج) $(6XY - 2XY^2)$ د) خلاف ذلك وهو...

2. المشتقة الجزئية الأولى $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ هي:

أ) $(3X^2 - 4XY^2)$ ب) $(6X-2XY)$

ج) $(6XY - 2Y^2)$ د) خلاف ذلك وهو...

3. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$ هي:

أ) $6X$ ب) 6

ج) $(6Y-2Y^2)$ د) خلاف ذلك وهو...

4. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$ هي:

أ) $-4X$ ب) $-2X$

ج) $6X-4Y$ د) خلاف ذلك وهو...

5. المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 Z}{\partial X\, \partial Y}$ هي:

أ) $-4Y$ ب) -2

ج) $6X-4XY$ د) خلاف ذلك وهو...

الفصل السابع

النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات

MAXMIUM & MINIMUIM OF MULTIVARIABLE FUNCTION

الفصل السابع

النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات

Maxmium & Minimuim of Multivariable function

النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات وغير المقيدة (الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات وغير المقيدة)

نفرض أن لدينا الدالة التالية $Z = f(x , y)$، حيث أن y , x متغيران مستقلان، ولكي تكون هذه الدالة عند نهايتها العظمى أو الصغرى يجب توافر الشروط الآتية:

1- الشرط اللازم: المشتقات الجزئية الأولى لهذه الدالة يجب أن تساوي صفراً، أي أن:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \qquad , \qquad \frac{dz}{dy} = 0$$

2- الشرط الكافي: أن تكون قيم المشتقات الجزئية الثانية للدالة عند القيم الحرجة كما يلي:

- أن تكون موجبة في حالة النهايات الصغرى، أي أن:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} > 0 \qquad , \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} > 0$$

- أن تكون سالبة في حالة النهايات العظمى، أي أن:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} < 0 \qquad , \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} < 0$$

- أما إذا كانت قيم المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية للدالة تساوي صفر، يكون للدالة نقطة انقلاب أو نقطة انعطاف.

3- أما لمعرفة كون الدالة في حالتها العظمي أو الصغري (المثلى) عند النظر إليها من جميع الاتجاهات فيجب أن تكون قيمة حاصل ضرب المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية ببعضها عند القيم الحرجة أكبر من قيمة مربع المشتقة الجزئية الثانية المتقاطعة أي أن:

$$\left[\frac{d^2 z}{d x^2}\right] \times \left[\frac{d^2 z}{d y^2}\right] > \left[\frac{d^2 z}{dx\, dy}\right]^2$$

ويمكن تلخيص شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات متغيرين $Z = f(x , y)$ كما يلي:

الشرط	النهايات العظمى	النهايات الصغرى
الشرط اللازم	$\frac{dz}{dx} = 0 \;,\; \frac{dz}{dy} = 0$	$\frac{dz}{dx} = 0 \;,\; \frac{dz}{dy} = 0$
الشرط الكافي	$\frac{d^2 z}{d x^2} < 0 \;,\; \frac{d^2 z}{d y^2} < 0$	$\frac{d^2 z}{d x^2} > 0 \;,\; \frac{d^2 z}{d y^2} > 0$
الشرط الثابت	$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) > \left(\frac{d^2 z}{dx\, dy}\right)^2$	$\left(\frac{d^2 z}{d x^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{d y^2}\right) > \left(\frac{d^2 z}{dx\, dy}\right)^2$

خطوات الحل:

إذا كان لدينا الدالة على الصورة:

$$Z = f(x , y)$$

فإنه يلزم لإيجاد النهايات العظمى والصغرى إتباع الخطوات التالية:

1- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dz}{dx} \quad , \quad \frac{dz}{dy}$$

2- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر لإيجاد قيم المتغيرات:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{dz}{dy} = 0$$

3- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^2 z}{dy^2}$$

4- بالتعويض عن قيم المتغيرات السابقة إيجادها من الخطورة رقم (2) في المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية.

- فإذا كانت إشارة المشتقات الجزئية الثانية سالبة: بمعنى أن

$$\frac{d^2 z}{dx^2} < 0 \quad , \quad \frac{d^2 z}{dy^2} < 0$$

يكون للدالة نهاية عظمى.

- إذا كانت إشارة المشتقات الجزئية الثانية موجبة بمعنى أن:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} > 0 \quad , \quad \frac{d^2 z}{dy^2} > 0$$

يكون للدالة نهاية صغرى.

- عندما يكون للدالة نهاية عظمى أو نهاية صغرى يجب أن يكون حاصل ضرب المشتقات الجزئية الرئيسية أكبر من مربع المشتقة المتقاطعة:

$$\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right) > \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)^2$$

مثال: إذا كانت دالة التكاليف الكلية لمصنع ميس الذي ينتج نوعين من السلع على الصورة التالية:

$$TC = 2Q_1^2 + Q_2^2 - 60Q_1 - 50Q_2 + 80$$

حيث أن Q_1 , Q_2 يمثلان حجم الإنتاج من السلعتين

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج Q_1 , Q_2 الذين يحققان أقل تكلفة كلية ممكنة.

الحل

- دالة التكاليف الكلية (TC) هي:

$$TC = 2Q_1^2 + Q_2^2 - 60Q_1 - 50Q_2 + 80$$

لتحديد حجم الانتاج الذي يخفض دالة التكلفة الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج نتبع الخطوات التالية:

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{dTC}{dQ_1} = 4Q_1 - 60$$

$$\frac{dTC}{dQ_2} = 2Q_2 - 50$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر

$$4Q_1 - 60 = 0$$

$$4Q_1 = 60 \qquad Q_1 = \frac{60}{4} = 15$$

$$2Q_2 - 50 = 0$$

$$2Q_2 = 50 \qquad Q_2 = \frac{50}{2} = 25$$

- المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية:

$$\frac{d^2\,TC}{d\,Q_1^2} = 4$$
$$\frac{d^2\,TC}{d\,Q_2^2} = 2$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية موجبة يكون لدالة التكاليف الكلية نهاية صغرى عندما $Q_1 = 15$, $Q_2 = 25$

مثال: ينتج مصنع أحمد للأثاث نوعين من الأثاث هما $(2,1)$ وكانت دوال الطلب على السلعتين كما يلي:

$$P_1 = -2Q_1 - Q_2 + 100$$
$$P_2 = -2Q_1 - 3Q_2 + 150$$

حيث أن:

P_1 , P_2 : أسعار السلعتين.

Q_1 , Q_2 : حجم الإنتاج من السلعتين.

المطلوب: تحديد حجم الإنتاج الواجب إنتاجية من كلا السلعتين (Q_1 , Q_2) الذين يحققان أقصى إيراد ممكن.

الحل

حيث أن المطلوب هو تعظيم دالة الإيراد الكلي بالنسبة لحجم الإنتاج فإن:

الإيراد الكلي = إيراد السلعة الأولى + إيراد السلعة الثانية

= الكمية المطلوبة من السلعة الأولى × سعرها + الكمية المطلوبة من السلعة الثانية × سعرها

$$TR = TR_1 + TR_2$$
$$= P_1Q_1 + P_2Q_2$$
$$= (-2Q_1 - Q_2 + 100)Q_1 + (-2Q_1 - 3Q_2 + 150)Q_2$$
$$= -2Q_1^2 - Q_1Q_2 + 100Q_1 - 2Q_1Q_2 - 3Q_2^2 + 150Q_2$$
$$= -2Q_1^2 + 100Q_1 - 3Q_1Q_2 - 3Q_2^2 + 150Q_2$$

تكون دالة الإيراد الكلي هي:

$$TR = -2Q_1^2 + 100Q_1 - 3Q_1Q_2 - 3Q_2^2 + 150Q_2$$

ولتحديد حجم الانتاج الذي يعظم دالة الإيراد الكلي بالنسبة لحجم الإنتاج نتبع الخطوات التالية:

1- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dTR}{dQ_1} = -4Q_1 + 100 - 3Q_2$$
$$\frac{dTR}{dQ_2} = -3Q_1 - 6Q_2 + 150$$

2- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر.

$$-4Q_1 + 100 - 3Q_2 = 0$$
$$-3Q_1 - 6Q_2 + 150 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات كما يلي:

$$4Q_1 + 3Q_2 = 100$$
$$3Q_1 + 6Q_2 = 150$$

يتم استخدام طريقة الحذف (أو التعويض) لحل المعادلتين: بضرب المعادلة الأولى × 2

$$\begin{array}{r} 8Q_1 + 6Q_2 = 200 \\ \underline{-3Q_1 \mp 6Q_2 \equiv 150} \end{array}$$

بالطرح $5Q_1 = 50$

$$\therefore Q_1 = \frac{50}{5} = 10$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين:

$$4(10) + 3Q_2 = 100$$
$$40 + 3Q_2 = 100$$
$$3Q_2 = 60$$
$$Q_2 = \frac{60}{3} = 20$$
$$\therefore \quad Q_2 = 20 \quad , \quad Q_1 = 10$$

3- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية:

$$\frac{d^2 TR}{dQ_1^2} = -4$$
$$\frac{d^2 TR}{dQ_2^2} = -6$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية سالبة، يكون لدالة الايراد الكلي نهاية عظمى عند إنتاج 10 وحدات من النوع الأول، 20 وحدة من النوع الثاني.

مثال: ينتج مصنع المنال نوعين من الأجهزة الكهربائية، وكانت دوال الطلب على الجهازين على الصورة التالية:

$$P_1 = 60 - 2Q_1 + Q_2$$
$$P_2 = 40 + 3Q_1 - 2Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية على الصورة التالية:

$$TC = -Q_1^2 - 70Q_1 - 140\,Q_2 + 7Q_1Q_2 + 3600$$

المطلوب:

1- أوجد حجم الإنتاج من كلا النوعين (Q_2 , Q_1) الواجب إنتاجه التي تحقق أقصى ربح ممكن.

2- عند هذا الحجم من الإنتاج أوجد قيمة كل من MR , MC لكل نوع على حدة.

3- حساب الإيراد الكلي والتكاليف الكلية والربح عند هذا الحجم من الإنتاج.

الحل

- دالة الإيراد الكلي (TR)

$$TR = TR_1 + TR_2$$

$$= P_1 \times Q_1 + P_2 \times Q_2$$

$$= (60 - 2Q_1 + Q_2)Q_1 + (40 + 3Q_1 - 2Q_2)Q_2$$

$$= 60Q_1 - 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 40Q_2 + 3Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

$$TR = 60Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 40Q_2 - 2Q_2^2$$

- دالة التكلفة الكلية (TC)

$$TC = -Q_1^2 - 70Q_1 - 140\ Q_2 + 7Q_1Q_2 + 3600$$

- دالة الربح (π) = دالة الإيراد الكلي (TR)- دالة التكلفة الكلية (TC)

$$\pi = TR - TC$$
$$= 60Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 40Q_2 - 2Q_2^2$$
$$-\left(-Q_1^2 - 70Q_1 - 140Q_2 + 7Q_1Q_2 + 3600\right)$$
$$= 60Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 40Q_2 - 2Q_2^2$$
$$+Q_1^2 + 70Q_1 + 140Q_2 - 7Q_1Q_2 - 3600$$
$$\pi = 130Q_1 - Q_1^2 - 3Q_1Q_2 + 180Q_2 - 2Q_2^2 - 3600$$

لتعظيم دالة الربح نتبع الخطوات التالية:

1- المشتقات الجزئية الأولى

$$\frac{d\pi}{dQ_1} = 130 - 2Q_1 - 3Q_2$$

$$\frac{d\pi}{dQ_2} = -3Q_1 + 180 - 4Q_2$$

2- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر

$$130 - 2Q_1 - 3Q_2 = 0$$
$$-3Q_1 + 180 - 4Q_2 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات التالية:

$$2Q_1 + 3Q_2 = 130$$
$$3Q_1 + 4Q_2 = 180$$

حل المعادلتين معاً بضرب المعادلة الأولى× 3 والمعادلة الثانية × 2 ثم الطرح

$$6Q_1 + 9Q_2 = 390$$
$$\underline{-6Q_1 \mp 8Q_2 = -360}$$

$Q_2 \quad = 30$ بالطرح

ثم نعوض في إحدى المعادلتين عن قيمة Q_2 نجد أن:

$$130 = 2Q_1 + 3(30)$$

$$130 - 90 = 2Q_1$$

$$40 = 2Q_1$$

$$Q_1 = \frac{40}{2} = 20$$

$$\therefore \quad 20 = Q_1 \quad , \quad 30 = Q_2$$

- المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية:

$$\frac{d^2 \pi}{dQ_1^2} = -2$$

$$\frac{d^2 \pi}{dQ_2^2} = -4$$

حيث أن إشارة المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية سالبة يكون لدالة الربح نهاية عظمى عندما $20 = Q_1$, $30 = Q_2$.

- عند حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم الربح $20 = Q_1$, $30 = Q_2$ فإن:

* الإيراد الحدي (MR)

MR

$$MR_2 = \frac{dTR}{dQ_2}$$

$$MR_2 = 4Q_1 + 40 - 4Q_2$$

$$= 4(20) + 40 - 4(30)$$

$$= 0$$

$$MR_1 = \frac{dTR}{dQ_1}$$

$$MR_1 = 60 - 4Q_1 + 4Q_2$$

$$= 60 - 4(20) + 4(30)$$

$$= 100$$

* التكلفة الحدية (MC)

MC

$$MC_1 = \frac{dTC}{dQ_1}$$

$$MC_1 = -70 - 2Q_1 + 7Q_2$$
$$= -70 - 2(20) + 7(30)$$
$$= 100$$

$$MC_2 = \frac{dTC}{dQ_2}$$

$$MC_2 = 140 + 7Q_1$$
$$= 140 + 7(20)$$
$$= 0$$

نلاحظ أن:

$$MR_1 = MC_1$$
$$MR_2 = MR_2$$

وهذا يعني أنه عند حجم الإنتاج الذي يعظم الربح نجد أن الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية لكل سلعة على حدة.

3- حساب TR , TC , π عند حجم الإنتاج الأمثل

* حساب الإيراد الكلي (TR)

$$TR = 60Q_1 - 2Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 40Q_2 - 2Q_2^2$$
$$= 60(20) - 2(20)^2 + 4(20)(30) + 40(30) - 2(30)^2$$
$$= 1200 - 800 + 2400 + 1200 - 1800$$
$$= 2200$$

* حساب التكلفة الكلية (TC)

$$\begin{aligned} TC &= -Q_1^2 - 70Q_1 - 140\,Q_2 + 7Q_1Q_2 + 3600 \\ &= -(20)^2 - 70(20) - 140(30) + 7(20)(30) + 3600 \\ &= -400 - 1400 - 4200 + 4200 + 3600 \\ &= 1800 \end{aligned}$$

* حساب الربح (π)

يتم حساب الربح بطريقتين:

$$\begin{aligned} \pi &= TR - TC \\ &= 2200 - 1800 = 400 \end{aligned}$$

أو

2- بالتعويض في دالة الربح.

$$\begin{aligned} \pi &= 130Q_1 - Q_1^2 - 3Q_1Q_2 + 180Q_2 - 2Q_2^2 - 3600 \\ &= 130(20) - (20)^2 - 3(20)(30) + 180(30) - 2(30)^2 - 3600 \\ &= 2600 - 400 - 1800 + 5400 - 1800 - 3600 \\ &= 400 \end{aligned}$$

النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات والمقيدة (الأمثلية للدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات والمقيدة)

عادة ما ترغب أي منشأة في تعظيم أرباحها وكذلك تخفيض تكاليفها، ومن ثم أيضاً تعظيم إنتاجها، إلا أن هناك بعض القيود التي تحول دون تحقيق هذه الأهداف، مثل الإمكانيات المادية والموارد البشرية والمواد الخام المتاحة، .... الخ، وبالنسبة لمستهلك ما يرغب في تعظيم منفعته من خلال استغلال بعض السلع

والخدمات، ويواجه أيضاً بعض القيود مثل أسعار هذه السلع والخدمات أو دخلة المتاح، ولإيجاد الحل الأمثل في مثل هذه الحالات يتم استخدام دالة لاجرانج Lagrange function، وتعتمد دالة لاجرانج على الخطوات التالية:

1- تحديد دالة الهدف، والتي تأخذ الصورة التالية:

$$F\left(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n\right)$$

2- تحديد دالة القيد، والتي تأخذ الصورة التالية:

$$G\left(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n\right) = C$$

حيث تشير (G) إلى رمز الدالة، إن (C) تشير إلى المقدار الثابت.

ثم تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية، كما يلي:

$$G\left(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n\right) - C = 0$$

3- تحديد دالة لاجرانج وتأخذ الصورة التالية:

L = [دالة الهدف] − λ [دالة القيد]

حيث أن λ (لامدا) تمثل معامل (مضاعف) لاجرانج.

$$\therefore L = f\left(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n\right) - \lambda\left[G\left(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n\right) - C\right]$$

4- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج

$$\frac{dL}{dx_1} , \frac{dL}{dx_2} , \frac{dL}{dx_3} \ldots\ldots \frac{dL}{dx_n} , \frac{dL}{\lambda}$$

5- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر وذلك لإيجاد قيم المتغيرات أي أن:

$$\frac{dL}{dx_1} = 0 \quad , \quad \frac{dL}{dx_2} = 0 \quad , \quad \frac{dL}{\lambda} = 0$$

6- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية.

- فإذا كان موجبة:

$$\frac{d^2L}{dx_1^2} \quad , \quad \frac{d^2L}{dx_2^2} > 0$$

يكون للدالة نهاية صغرى

- أما إذا كان سالبة:

$$\frac{d^2L}{dx_1^2} \quad , \quad \frac{d^2L}{dx_2^2} < 0$$

يكون للدالة نهاية عظمى

المقصود بمعامل لاجرانج (λ)

يشير (λ) معامل لاجرانج إلى درجة حساسية دالة الهدف للتغير الذي يحدث في قيمة ثابت القيد، أو هو مقياس لتلك الحساسية، حيث يمثل مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة تغير ثابت قيمة دالة القيد بمقدار وحدة واحدة، وبذلك فإن معامل لاجرانج يكتسب الصفة الحدية بما يمثله من مقادير اقتصادية، هو بذلك يلعب دوراً هاماً في تغير سلوك العديد من الدوال الاقتصادية.

مثال: منشأة تقوم بإنتاج نوعين من السلع هما $(x \ , \ y)$ وكانت دالة ربح المنشأة على الصورة التالية:

$$\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$$

علماً بأنه يمكن إنتاج 12 وحدة فقط من كلا النوعين.

المطلوب: بدون استخدام دالة لاجرنج اوجد حجم الانتاج من كلا النوعين لتعظيم الربح (باستخدام طريقة التعويض).

الحل

- دالة الهدف $\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$

- دالة القيد $x + y = 12$

- بالتعويض من دالة القيد في دالة الهدف كما يلي:

$$y = 12 - x$$

تكون دالة الهدف:

$$\begin{aligned}\pi &= 80x - 2x^2 - x(12-x) - 3(12-x)^2 + 100(12-x)\\ &= 80x - 2x^2 - 12x + x^2 - 3(144 - 24x + x^2) + 1200 - 100x\\ &= 80x - 2x^2 - 12x + x^2 - 432 + 72x - 3x^2 + 1200 - 100x\end{aligned}$$

تجميع الحدود المتشابهة كما يلي:

$$\pi = 40x - 4x^2 - 768$$

يصبح لدينا دالة الربح من متغير واحد وبذلك يمكن إيجاد النهاية العظمى كما يلي:

- إيجاد المشتقة الأولى: $\dfrac{d\pi}{dx} = 40 - 8x$

- مساواتها بالصفر: $40 - 8x = 0$

$$40 = 8x \qquad \therefore x = \frac{40}{8} = 5$$

- المشتقة الثانية: $\dfrac{d^2\pi}{dx^2} = -8$

حيث أن المشتقة الثانية سالبة وبذلك يكون لدالة الربح نهاية عظمى عندما $x = 5$ وبالتعويض عن x لإيجاد قيمة y نجد أن $y = 7$.

مثال: تقوم منشأة الأنوار بإنتاج نوعين من الأجهزة الكهربائية وكانت دالـة الـربح للمنشأة كما يلي:

$$\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$$

المطلوب: باستخدام دالة لاجرانج أوجد قيمة (y , x) اللذين يحققان اقصى ربح ممكن علماً بأن: $x + y = 12$.

الحل

- دالة الهدف:

$$\pi = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$$

- دالة القيد:

$$x + y = 12$$

تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية:

$$x + y - 12 = 0$$

- صياغة دالة لاجرانج

L = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

$$L = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y - \lambda (x + y - 12)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج كما يلي:

$$\frac{dL}{dx} = 80 - 4x - y - \lambda$$

$$\frac{dL}{dy} = -x - 6y + 100 - \lambda$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -x - y + 12$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر

$$80 - 4x - y - \lambda = 0$$
$$-x - 6y + 100 - \lambda = 0$$
$$-x - y + 12 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات ثم الحل باستخدام طريقة الحذف أو التعويض نجد أن:

$$4x + y + \lambda = 80$$
$$x + 6y + \lambda = 100$$
$$x + y = 12$$

بحل المعادلتين الاولي والثانية معا وذلك لحذف λ ونحصل على معادلة جديدة نحل هذه المعادلة مع المعادلة الثالثة نحصل على قيم x , y , λ كما يلي:

$$\lambda = 53 \quad , \quad y = 7 \quad , \quad x = 5$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية

$$\frac{d^2L}{dx^2} = -4 \quad , \quad \frac{d^2L}{dy^2} = -6$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية سالبة يكون لدالة الربح نهاية عظمى.

مثال: المطلوب تعظيم دالة المنفعة التالية:

$$U = 26x - 3x^2 + 5xy - 6y^2 + 12y$$

في ظل القيد: $3x + y = 170$

الحل

- صياغة دالة الهدف:

$$U = 26x - 3x^2 + 5xy - 6y^2 + 12y$$

- صياغة دالة القيد وتحويلها إلى دالة صفرية:

$$3x + y = 170$$
$$3x + y - 170 = 0$$

- صياغة دالة لاجرانج كما يلي:

L = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

$$L = 26x - 3x^2 + 5xy - 6y^2 + 12y - \lambda(3x + y - 170)$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج كما يلي:

$$\frac{dL}{dx} = 26 - 6x + 5y - 3\lambda$$
$$\frac{dL}{dy} = 5x - 12y + 12 - \lambda$$
$$\frac{dL}{dL} = -3x - y + 170$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر

$$26 - 6x + 5y - 3\lambda = 0$$
$$5x - 12y + 12 - \lambda = 0$$
$$-3x - y + 170 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات كما يلي:

$$-6x + 5y - 3\lambda = -26$$
$$5x - 12y - \lambda = -12$$
$$-3x - y = -170$$

ثم حل المعادلات الثلاثة معا نحصل على قيم المتغيرات كما يلي:

$$\lambda = 70.3 \quad , \quad y = 25 \quad , \quad x = 48.3$$

- المشتقات الجزئية الثانية:

$$\frac{d^2L}{dx^2} = -6$$
$$\frac{d^2L}{dy^2} = -12$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثانية سالبة يكون لدالة المنفعة نهاية عظمى.

مثال: مصنع ينتج نوعين من السلع هي (y , x) وكانت دالة التكلفة الكلية كما يلي:

$$TC = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$$

المطلوب: باستخدام دالة لاجرانج أوجد حجم الإنتاج (y , x) الواجب إنتاجهما من كلا النوعين لتخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، علماً بأنه يمكن إنتاج 34 وحدة من كلا النوعين.

الحل

1- صياغة دالة الهدف: تخفيض التكلفة

$$TC = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30$$

2- صياغة دالة القيد وتحويلها إلى دالة صفرية.

$$x + y = 34$$
$$x + y - 34 = 0$$

3- صياغة دالة لاجرانج كما يلي:

L = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

$$L = 6x^2 + 10y^2 - xy + 30 - \lambda (x + y - 34)$$

4- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dL}{dx} = 12x - y - \lambda$$

$$\frac{dL}{dy} = 20y - x - \lambda$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -x - y + 34$$

5- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر:

$$12x - y - \lambda = 0$$
$$20y - x - \lambda = 0$$
$$-x - y = -34$$

إعادة ترتيب المعادلات:

$$12x - y - \lambda = 0$$
$$-x + 20y - \lambda = 0$$
$$-x - y = -34$$

بحل المعادلات الثلاثة معاً بطريقة الحذف أو التعويض نجد أن:

$$\lambda = 239 \quad , \quad y = 13 \quad , \quad x = 21$$

6- إيجاد المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية:

$$\frac{d^2L}{dx^2} = 12$$

$$\frac{d^2L}{dy^2} = 20$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية موجبة يكون للدالة نهاية صغرى.

مثال: ينتج مصنع أحمد للرخام نوعين من الرخام هما (2,1)، وكانت دوال الطلب على النوعين على الصورة التالية:

$$P_1 = 10 - Q_1 + 2Q_2$$
$$P_2 = 50 + 2Q_1 - Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية (TC) على الصورة التالية:

$$TC = 8Q_1Q_2 + Q_2^2 - 94Q_1 - 76Q_2 + 2000$$

المطلوب: باستخدام دالة لاجرانج (Lagrange) أوجد قيمة Q_1 , Q_2 الذين يحققان أقصى ربح ممكن للمصنع، علماً بأن المصنع يمكنه إنتاج 30 وحدة فقط من كلا النوعين.

الحل

1- إيجاد دالة الإيراد الكلي (TR)

$$\begin{aligned}
TR &= TR_1 + TR_2 \\
&= P_1Q_1 + P_2Q_2 \\
&= (10 - Q_1 + 2Q_2)Q_1 + (50 + 2Q_1 - Q_2)Q_2 \\
&= 10Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 50Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2
\end{aligned}$$
$$TR = 10Q_1 - Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 50Q_2 - Q_2^2$$

2- دالة التكلفة الكلية (TC)

$$TC = 8Q_1Q_2 + Q_2^2 - 94Q_1 - 76Q_2 + 2000$$

3- دالة الربح (π)

$$\pi = TR - TC$$
$$= 10Q_1 - Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 50Q_2 - Q_2^2$$
$$-(8Q_1Q_2 + Q_2^2 - 94Q_1 - 76Q_2 + 2000)$$
$$= 10Q_1 - Q_1^2 + 4Q_1Q_2 + 50Q_2 - Q_2^2 - 8Q_1Q_2 - Q_2^2 + 94Q_1 + 76Q_2 - 2000$$
$$= 104Q_1 - Q_1^2 - 4Q_1Q_2 + 126Q_2 - 2Q_2^2 - 2000$$

4- دالة القيد:

$$Q_1 + Q_2 = 30$$

مساواة دالة القيد بالصفر

$$Q_1 + Q_2 - 30 = 0$$

5- صياغة دالة لاجرانج كما يلي:

L = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

$$L = 104Q_1 - Q_1^2 - 4Q_1Q_2 + 126Q_2 - 2Q_2^2 - 2000 - \lambda(Q_1 + Q_2 - 30)$$

$$\frac{dL}{dQ_1} = 104 - 2Q_1 - 4Q_2 - \lambda$$

$$\frac{dL}{dQ_2} = -4Q_1 + 126 - 4Q_2 - \lambda$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = -Q_1 - Q_2 + 30$$

6- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر

$$104 - 2Q_1 - 4Q_2 - \lambda = 0$$
$$-4Q_1 + 126 - 4Q_2 - \lambda = 0$$
$$-Q_1 - Q_2 + 30 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات ثم الحل بطريقة الحذف التعويض:

$$2Q_1 + 4Q_2 - \lambda = 104$$
$$4Q_1 + 4Q_2 - \lambda = 126$$
$$Q_1 + Q_2 = 30$$

بحل المعادلات الثلاثة معاً بطريقة الحذف أو التعويض نجد أن:

$$\lambda = 6 \quad , \quad Q_2 = 19 \quad , \quad Q_1 = 11$$

إيجاد المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية

$$\frac{d^2L}{dQ_1^2} = -2$$
$$\frac{d^2L}{dQ_2} = -4$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية سالبة يكون لدالة الربح نهاية عظمى

مثال: ينتج مصنع ميس للأجهزة الكهربائية نوعين من الأجهزة (1 , 2)، فإذا كانت دالة الربح على الصورة التالية:

$$\pi = -2Q_1^2 + 70Q_1 + 2Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 500$$

فإذا علمت إن المصنع يمكنه إنتاج 40 وحدة فقط من كلا الجهازين.

المطلوب: باستخدام دالة لاجرانج (Lagrange) أوجد حجم الإنتاج Q_2 , Q_1 الذين يحققان أقصى ربح ممكن.

الحل

- دالة الهدف (دالة الربح) هي:

$$\pi = -2Q_1^2 + 70Q_1 + 2Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 500$$

- دالة القيد هي: $Q_1 + Q_2 = 40$

وضع دالة القيد على الصورة الصفرية:

$$Q_1 + Q_2 - 40 = 0$$

- صياغة دالة لاجرانج

L = [دالة الهدف] - λ [دالة القيد]

$$L = -2\,Q_1^2 + 70Q_1 + 2Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 500 - \lambda(Q_1 + Q_2 - 40)$$
$$L = -2\,Q_1^2 + 70Q_1 + 2Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2 - 500 - \lambda Q_1 - \lambda Q_2 + 40\lambda$$

لتحقيق النهاية العظمى لدالة الربح باستخدام دالة لاجـرانج نتبـع الخطـوات التالية:

- المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{dL}{dQ_1} = -4\,Q_1 + 70 + 2Q_2 - \lambda$$
$$\frac{dL}{dQ_2} = 2\,Q_1 + 30 - 2Q_2 - \lambda$$
$$\frac{dL}{d\lambda} = -Q_1 - Q_2 + 40$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر

$$-4\,Q_1 + 70 + 2Q_2 - \lambda = 0$$
$$2\,Q_1 + 30 - 2Q_2 - \lambda = 0$$
$$-Q_1 - Q_2 + 40 = 0$$

إعادة ترتيب المعادلات كما يلي:

$$4\,Q_1 - 2Q_2 + \lambda = 70 \qquad \ldots\ldots (1)$$
$$-2\,Q_1 + 2Q_2 + \lambda = 30 \qquad \ldots\ldots (2)$$
$$Q_1 + Q_2 = 40 \qquad \ldots\ldots (3)$$

بحل المعادلتين (1)، (2) معاً لحذف λ

$$4Q_1 - 2Q_2 + \lambda = 70$$
$$\underline{\pm 2Q_1 \mp 2Q_2 \pm \lambda = -30}$$
$$\text{بالطرح} \quad 6Q_1 - 4Q_2 = 40 \qquad \ldots\ldots (4)$$

بحل المعادلتين (3)، (4) معاً وذلك بضرب المعادلة (3) × (4):

$$4Q_1 + 4Q_2 = 160$$
$$\underline{6Q_1 - 4Q_2 = 40}$$
$$\text{بالجمع} \quad 10Q_1 = 200$$
$$Q_1 = \frac{200}{10} = 20$$

بالتعويض في المعادلة رقم (3) نحصل على قيمة Q_2 نجد أن $Q_2 = 20$

ثم بالتعويض في إحدى المعادلتين (1) أو (2) لإيجاد قيمة λ نجد أن $\lambda = 30$

- المشتقات الجزئية الثانية

$$\frac{d^2\pi}{dQ_1^2} = -4$$
$$\frac{d^2\pi}{dQ_2^2} = -2$$

حيث أن المشتقات الجزئية الثانية سالبة يكون لدالة الربح نهاية عظمى عندما

$$20 = Q_1 \quad ، \quad Q_2 = 20$$

مثال: حدد القيمة المثلى لدالة الإنتاج التالية والتي تسمى دالة إنتاج كوب دوجلاس: $Q = 50K^{0.5}L^{0.5}$

علماً بأن سعر رأس المال $P_k = 5$، سعر العمل $P_L = 10$ وقيد الميزانية هو 200 $

الحل

- دالة الهدف: $Q = 50K^{0.5}L^{0.5}$

- دالة القيد: $5K + 10L = 200$

- تحويل دالة القيد إلى دالة صفرية: $5K + 10L - 200 = 0$

- صياغة دالة لاجرانج:

$Q =$ (دالة الهدف) $- \lambda$ (دالة القيد)

$$= 50K^{0.5}\ L^{0.5} - \lambda\,(5K + 10L - 200)$$
$$Q = 50K^{0.5}\ L^{0.5} - 5K\lambda - 10L\lambda + 200\lambda$$

- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج:

$$\frac{dQ}{dK} = 25K^{-0.5}\ L^{0.5} - 5\lambda$$
$$\frac{dQ}{dL} = 25K^{0.5}\ L^{-0.5} - 10\lambda$$
$$\frac{dQ}{d\lambda} = -5K - 10\,L + 200$$

- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر:

$$25K^{-0.5}\ L^{0.5} - 5\lambda = 0 \quad \ldots\ldots(1)$$
$$25K^{0.5}\ L^{-0.5} - 10\lambda = 0 \quad \ldots\ldots(2)$$
$$-5K - 10\,L + 200 = 0 \quad \ldots\ldots(3)$$

بإعادة ترتيب المعادلات كما يلي:

$$25K^{-0.5}\ L^{0.5} = 5\lambda \quad \ldots\ldots(1)$$
$$25K^{0.5}\ L^{-0.5} = 10\lambda \quad \ldots\ldots(2)$$
$$5K - 10\,L = 200 \quad \ldots\ldots(3)$$

بقسمة المعادلة رقم (2) على المعادلة رقم (1)

$$\frac{25K^{0.5}\ L^{-0.5}}{25K^{-0.5}\ L^{0.5}} = \frac{10\lambda}{5\lambda}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{10}{5} = 2$$

$$K = 2L \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

بالتعويض في المعادلة رقم (3) نجد أن:

$$5(2L) + 10L = 200$$

$$10L + 10L = 200$$

$$20L = 200$$

$$L = 10$$

بالتعويض في المعادلة رقم (4) نجد أن: $K = 2(10) = 20$

ثم بالتعويض في المعادلة رقم (1) أو المعادلة رقم (2) نجد أن $\lambda = 3.45$.

وبذلك فإن: $L = 10$, $K = 20$, $\lambda = 3.54$

- المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية

$$\frac{d^2Q}{dK^2} = -12.5K^{-1.5}\ L^{0.5} = \frac{-12.5\ L^{0.5}}{K^{1.5}}$$

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = -12.5K^{0.5}\ L^{-1.5} = \frac{-12.5\ K^{0.5}}{L^{1.5}}$$

بالتعويض في المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية عن كل من $(L = 10)$, $(K = 20)$ نجد أنها سالبة.

$$\frac{d^2Q}{dK^2} = \frac{-12.5(10)^{0.5}}{(20)^{1.5}} = \frac{-12.5 \times 3.16}{89.44} = -0.44$$

$$\frac{d^2Q}{dL^2} = \frac{-12.5(20)^{0.5}}{(10)^{1.5}} = \frac{-12.5 \times 4.47}{31.62} = -1.77$$

حيث أن إشارة المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية سالبة يكـون لدالـة الإنتـاج نهايـة عظمى عندما: $(L=10)$, $(K=20)$.

مثال: أوجد النهاية الصغرى للدالة باستخدام دالة لاجرانج:

$$y = x_1^2 + x_2^2 - 0.75\,x_3^2$$

S.To

$$x_1 + x_2 = 2.5$$

$$x_1 = x_3$$

الحل

1- صياغة دالة الهدف:

$$y = x_1^2 + x_2^2 - 0.75\,x_3^2$$

2- صياغة دوال القيود:

$$x_1 + x_2 = 2.5$$

$$x_1 = x_3$$

3- تحويل دوال القيود إلى دوال صفرية:

$$x_1 + x_2 - 2.5 = 0$$

$$x_1 - x_3 \qquad = 0$$

4- صياغة دالة لاجرانج

$$L = x_1^2 + x_2^2 - 0.75\,x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 - 2.5) - \lambda_2\,(x_1 - x_3)$$

5- إيجاد المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاجرانج بالنسبة لكـل مـن x_1 , x_2 , x_3 وكذلك بالنسبة لمعاملات لاجرانج λ_1 , λ_2

$$\frac{dL}{dx_1} = 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\frac{dL}{dx_2} = 2x_2 - \lambda_1$$

$$\frac{dL}{dx_3} = -1.5x_3 - \lambda_2$$

$$\frac{dL}{d\lambda_1} = -x_1 - x_2 + 2.5$$

$$\frac{dL}{d\lambda_2} = -x_1 + x_3$$

6- مساواة المشتقات الجزئية الأولى بالصفر ثم حل المعادلات معاً

$$\begin{aligned}
2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\
2x_2 - \lambda_1 &= 0 \\
-1.5x_3 + \lambda_2 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2.5 &= 0 \\
-x_1 + x_3 &= 0
\end{aligned}$$

7- بحل المعادلات الخمسة آنياً بالحذف والتعويض نحصل على قيم $\lambda_2, \lambda_1, x_3, x_2, x_1$ والتي تحقق الشرط اللازم للنهاية الصغرى وذلك كما يلي:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0.5 \quad , \quad x_3 = 2$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -3$$

8- حساب المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية بالنسبة لـ x_3, x_2, x_1 كما يلي:

$$\frac{d^2 L}{d x_1^2} = 2$$

$$\frac{d^2 L}{d x_2^2} = 2$$

$$\frac{d^2 L}{d x_3^2} = -1.5$$

9- نجد أن المشتقات الجزئية الثانية الرئيسية موجبة يكون للدالة نهايـة صـغري. عندما:

$$x_3 = 2 \quad , \quad x_2 = 0.5 \quad , \quad x_1 = 2$$

تمارين

(1) مصنع العروبة يقوم بإنتاج نوعين من السجاد هما (y,x)، وكانت دالة التكلفة الكلية للمصنع على الصورة التالية:

$$TC = 2x^2 - 120x + 5y^2 - 200y^2 + 900$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الواجب إنتاجه من كلا النوعين لتحقيق أقل تكلفة كلية ممكنة

(2) تنتج شركة منه الله للسجاد والموكيت نوعين هما (2,1) وكانت دوال الطلب على النوعين كما يلي:

$$P_1 = 210 - 0.5Q_1$$
$$P_2 = 290 - Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية للشركة كما يلي:

$$TC = 0.5Q_1^2 + Q_2^2 + 3Q_1Q_2 + 5400$$

حيث أن:

P_2 , P_1 : يمثلان أسعار المنتجين

Q_2 , Q_1 : يمثلان الكميات المنتجة من النوعين

المطلوب:

1- تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كلا النوعين لكي تحقق الشركة أقصى ربح ممكن.

2- حساب الإيراد الكلي والتكلفة الكلية، والربح عند هذا الحجم من الإنتاج.

3- تنتج شركة آية نوعين من الأجهزة الكهربائية $(2,1)$، فإذا كانت دوال الطلب على الجهازين كما يلي:

$$P_1 = 262 - 4Q_1 \quad , \quad P_2 = 222 - 2Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية على الصورة التالية:

$$TC = Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_1 + 2Q_2 + 3000$$

المطلوب:

أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

(4) ينتج مصنع العروبة نوعين من الأجهزة $(2,1)$ وكانت دوال الطلب على الجهازين على الصورة التالية:

$$P_1 = 45 - 2Q_1 + Q_2$$
$$P_2 = 35 - 3Q_1 + 2Q_2$$

وكانت دالة التكلف الكلية للمصنع على الصورة التالية:

$$TC = 500 - 25Q_1 + 5Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

المطلوب:

باستخدام دالة لاجرانج أوجد حجم الإنتاج Q_1 وQ_2 الذي يحقق للمصنع أكبر ربح ممكن علماً بأن المصنع يمكنه إنتاج 40 وحدة فقط من كلا النوعين:

(5) ينتج مصنع احمد للأجهزة الكهربائية نوعين من الأجهزة وكانت دوال الطلب على الجازين على الصورة التالية:

$$P_1 = 5 - Q_1 + 2Q_2$$
$$P_2 = 45 + 3Q_1 - 2Q_2$$

وكانت دالة التكلفة الكلية على الصورة التالية:

$$TC = 7Q_1Q_2 + Q_2^2 - 120Q_1 - 110Q_2 + 3600$$

المطلوب: استخدام دالة لاجرانج (lagrange) أوجد قيمة Q_1, Q_2 اللذين يحققان أقصى ربح ممكن للمصنع علماً بأن المصنع يمكنه إنتاج 45 وحدة فقط من كلا الجهازين.

الفصل الثامن

التكامل

INTEGRATION

الفصل الثامن

التكامل

Integration

مفهوم التكامل

من خلال دراستنا السابقة للتفاضل (أو الاشتقاق) تبين لنا أنه إذا كان معلوم لدينا الدالة الأصلية على الصورة $Y = f(x)$ فإنه يمكن استخدام التفاضل أو الاشتقاق لإيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة والتي يرمز لها بأحد الرموز التالية: $\frac{dY}{dX}$ أو Y' أو $f'(X)$، وذلك بمسمياتها وأنواعها المختلفة مثل معدل التغير في الدالة، المشتقة الأولى، ميل الدالة، الدوال الحدية (MR, MC, MPC, MPS, MPL).

وعلى العكس إذا كان معلوم لدينا معدل التغير في الدالة (المشتقة الأولى) أو الميل أو الدوال الحدية، وكان المطلوب هو إيجاد الدالة الأصلية، فإنه يتم استخدام التكامل، وبذلك فإن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل، فهو يتم على المشتقة الأولى للدالة للوصول إلى الدالة الأصلية نفسها، ويرمز للتكامل بالرمز $(\int)$، ويضاف إلى التكامل دليل المتغير المستقل، أي إذا كان معلوم لدينا مثلاً $f'(X)$ فإنه يتم إجراء التكامل بالنسبة للمتغير (X) لإيجاد الدالة الأصلية:

$$\int f'(X).dX = f(X)$$

القواعد الأساسية للتكامل:

القاعدة الأولى:

إذا كانت الدالة علي الشكل: $\int X^n .dX$

فإن التكامل: $\int X^n .dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$

حيث أن: C هو ثابت التكامل، $n \neq -1$

وهذا يعني أن القاعدة صحيحة لجميع قيم n ما عدا قيمة واحدة وهي: $n = -1$.

مثال: أوجد تكامل: $\int X^4 .dX$

الحل

$$\int X^4 .dX = \frac{X^{4+1}}{4+1} + C$$
$$= \frac{X^5}{5} + C$$

ملاحظة: يمكن التأكد من صحة التكامل بإجراء الاشتقاق على الدالة الأصلية:

$$Y = \frac{X^5}{5} + C$$

$$Y = \frac{1}{5} X^5 + C$$

المشتقة الأولى: $\therefore Y = \frac{5}{5} X^4 = X^4$

القاعدة الثانية:

إذا كانت الدالة على الصورة: $\int a.dx$

فإن التكامل: $\int a.dX = aX + C$

حيث أن: (a) عدداً حقيقياً ثابتاً.

وها يعني أن تكامل المقدار الثابت (a) بالنسبة لـ (X) يساوي حاصل ضرب المقدار الثابت (a) في المتغير المستقل (X).

مثال: أوجد تكامل: $\int 10.dX$

الحل

$$\int 10.dX = 10X + C$$

مثال: أوجد تكامل: $\int 5.dQ$

الحل

$$\int 5.dQ = 5Q + C$$

القاعدة الثالثة:

إذا كانت الدالة على الصورة: $\int ax^n.dx$

فإن التكامل: $\int aX^n.dX = a \times \frac{X^{n+1}}{n+1} + C$

مثال: أوجد تكامل: $\int 4X^3.dX$

الحل

$$\int 4X^3.dX = 4 \times \frac{X^4}{4} + C$$

$$\therefore \int 4X^3.dX = X^4 + C$$

مثال: أوجد تكامل: $\int 6X^2.dX$

الحل

$$\int 6X^2.dX = 6 \times \frac{X^3}{3} + C$$
$$= 2X^3 + C$$

القاعدة الرابعة:

قاعدة تكامل المجموع الجبري لعدد من الدوال.

$$\int[af(X)\pm bg(X)]=a\int f(X)\,dX\pm b\int g(X)\,dx$$

أو:

$$\int[af(X)\pm bg(X)\pm eh(X)\pm....+mL(X)]$$

$$=\int f(X)\pm b\int g(X)\pm e\int h(X)\pm....+m\int L(X)$$

وهذا يعني أن تكامل المجموع الجبر لعدد محدود من الدوال يساوي المجموع الجبري لتكاملات الدوال.

مثال: أوجد تكامل: $\int(2X^2-4X^6)\,dX$

الحل

$$\int(2X^2-4X^6)\,dX=\frac{2X^3}{3}-\frac{4X^7}{7}$$

$$=\frac{2}{3}X^3-\frac{4}{7}X^7$$

مثال: أوجد تكامل: $\int(5X^2+3X+2)\,dX$

الحل

$$\int(5X^2+3X+2)\,dX=\frac{5X^3}{3}+\frac{3X^2}{2}+2X+C$$

$$=\frac{5}{3}X^3+\frac{3}{2}X^2+2X+C$$

مثال: أوجد تكامل: $\int(10X^4+8X^3+3X^2+4X+10)\,dX$

الحل

$$\int\left(10X^4+8X^3+3X^2+4X+10\right)dX$$
$$=\frac{10X^5}{5}+\frac{8X^4}{4}+\frac{3X^3}{3}+\frac{4X^2}{2}+10X+C$$
$$=2X^5+2X^4+X^3+2X^2+10X+C$$

ويمكن التأكد من صحة الحل عن طريق إيجاد المشتقة الأولى للحل (الدالة الأصلية) نحصل على أصل المسألة كما يلي:

$$Y=2X^5+2X^4+X^3+2X^2+10X+C$$

المشتقة الأولى للدالة:

$$Y'=10X^4+8X^3+3X^2+4X+10$$

مثال: أوجد تكامل: $\int\left(20X^4+16X^3+12X^2+24X-7\right)dX$

الحل

$$\int\left(20X^4+16X^3+12X^2+24X-7\right)dX$$
$$=\frac{20X^5}{5}+\frac{16X^4}{4}+\frac{12X^3}{3}+\frac{24X^2}{2}+7X+C$$
$$=4X^5+4X^4+4X^3+12X^2-7X+C$$

القاعدة الخامسة:

تكامل قوس مرفوع لأس

$$\int(aX+b)^n.\,dX=\frac{(aX+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$$

$$=\frac{1}{a}\times\frac{(aX+b)^{n+1}}{n+1}+C$$

حيث أن: b,a عددان حقيقيان ثابتان، $n\neq-1$

وهذا يعني أن تكامل قوس مرفوع لأس (قوة) يساوي تكامل القوس على مشتقة ما بداخل القوس.

مثال: أوجد تكامل: $\int(5X+7)^{10}\,.dX$

الحل

$$\int(5X+7)^{10}\,.dX$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{(5X+7)^{11}}{11}+C$$

مثال: أوجد تكامل: $\int(2X-10)^{5}\,.dX$

الحل

$$\int(2X-10)^{5}\,.dX$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(2X-10)^{6}}{6}+C$$

$$=\frac{(2X-10)^{6}}{12}+C$$

القاعدة السادسة:

إذا كانت الدالة على الصورة: $\int\frac{1}{X}\,.dX$

فإن التكامل: $\int\frac{1}{X}\,.dX=\mathrm{Ln}\,X+C$

مثال: أوجد تكامل: $\int\frac{10}{10X}\,.dX$

الحل

$$\int \frac{10}{10X}\,.dX = \int \frac{1}{X}\,.dX = \operatorname{Ln} X + C$$

مثال: أوجد تكامل $\int \frac{200}{200X}\,.dX$

الحل

$$\int \frac{200}{200X}\,.dX = \int \frac{1}{X}\,.dX = \operatorname{Ln} X + C$$

نتيجة: تكامل أي كسر اعتيادي بسطة هو مشتقة مقامه فإن التكامل يساوي لوغاريتم دالة المقام (L_n المقام)

مثال: أوجد تكامل: $\int \frac{3X^2 + 4X + 15}{X^3 + 2X^2 + 15X - 8}\,.dX$

الحل

حيث أن البسط يمثل المشتقة الأولى لدالة المقام فإن الناتج هو (Ln المقام).

$$\int \frac{3X^2 + 4X + 15}{X^3 + 2X^2 + 15X - 8}\,.dX$$

$$= \operatorname{Ln}\left(X^3 + 2X^2 + 15X - 8\right) + C$$

مثال: أوجد تكامل: $\int \frac{8X + 12}{X^2 + 3X - 5}\,.dX$

الحل

بأخذ (4) عامل مشترك من البسط.

$$=\int\left(\frac{4(2X+3)}{X^2+3X-5}\right).dX$$

$$=4\int\left(\frac{(2X+3)}{X^2+3X-5}\right).dX = 4\,Ln\left(X^2+3X-5\right)+C$$

القاعدة السابعة:

تكامل الدالة الأسية:

$$\int e^X\,.\,dX = e^X + C$$

$$\int e^{mX}\,.\,dX = \frac{1}{m}\,e^{mX} + C$$

تكامل الدالة الأسية يساوي الدالة الأسية نفسها على مشتقة الأس.

مثال: أوجد تكامل: $\int e^{X+5}.dX$

الحل

$$\int e^{X+5}.dX = e^{X+5} + C$$

مثال: أوجد تكامل: $\int e^{5X+7}.dX$

الحل

$$\int e^{5X+7}.dX = \frac{1}{5}\,e^{5X+7} + C$$

مثال: اوجد تكامل: $\int e^{3X^2-8}.dX$

الحل

$$\int e^{3X^2-8}.dX = \frac{1}{6X}e^{3X^2-8}+C$$

$$= \frac{e^{3X^2-8}}{6X}+C$$

تطبيقات متنوعة على قواعد التكامل

مثال: أوجد تكامل كل من المقادير الآتية:

1. $\int 4X^3.dX$
2. $\int (15X^3+3X^2-6X+8)dX$
3. $\int (4X-3)^7 dX$
4. $\int (2X^2-15)(3X+8)dX$
5. $\int \frac{6}{X^3}\cdot dX$
6. $\int \sqrt{X}\cdot dX$
7. $\int \left(\frac{6X^2+8X+5}{2X^3+4X^2+5X-10}\right)dX$
8. $\int \left(\frac{20X^3+15X^2+10}{X^4+X^3-2X}\right)dX$
9. $\int \left(7e^{-X}+\frac{2}{X}\right)dX$
10. $\int 5\sqrt[4]{X^3}\cdot dX$
11. $\int \left(\frac{5}{\sqrt{X}}\right)dX$

الحل

1. $\int 4X^3 . dX = \frac{4X^4}{4} + C = X^4 + C$

2. $\int (15X^3 + 3X^2 - 6X + 8)\, dX$

$= \frac{15X^4}{4} + \frac{3X^3}{3} - \frac{6X^2}{2} + 8X + C$

$= \frac{15}{4} X^4 + X^3 - 3X^2 + 8X + C$

3. $\int (4X - 3)^7\, dX = \frac{1}{4} \times \frac{(4X - 3)^8}{8} + C$

$= \frac{(4X - 3)^8}{32} + C$

4. $\int (2X^2 - 15)(3X + 8) dX$

ملاحظة:

لا توجد قاعدة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو أكثر ولكن يمكن إيجاد التكامل بعد إيجاد حاصل ضرب عدد من الدوال بأن نوجد تكامل الدالة كثيرة الحدود الناتجة من ضرب هذه الدوال، ولذلك فإن:

$$(2X^2 - 15)(3X + 4) = 6X^3 + 8X^2 - 45X - 60$$

يكون المطلوب:

$\int (6X^3 - 8X^2 - 45X - 60)\, dX$

$= \frac{6X^4}{4} + \frac{8X^3}{3} - \frac{45X^2}{2} - 60X + C$

$= \frac{6}{4} X^4 + \frac{8}{3} X^3 - \frac{45}{2} X^2 - 60X + C$

$= 1.5X^4 + 2.76X^3 - 22.5X^2 - 60X + C$

5. $\int \frac{6}{X^3} \cdot dX = \int 6X^{-3} .dX$

$$= 6 \int X^{-3}\, dX = 6\, \frac{X^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= 6\, \frac{X^{-2}}{-2} = -3X^{-2} + C$$

$$= \frac{-3}{X^2} + C$$

ويمكن التأكد من الحل بإيجاد المشتقة الأولى للدالة الأصلية (الناتج) وكما يلي:

$$Y = \frac{-3}{X^2} + C$$

$$Y = -3X^{-2} + C$$

$$Y' = 6X^{-3}$$

$$Y' = \frac{6}{X^3}$$

6. $\int \sqrt{X} \cdot dX$

$$\int X^{\frac{1}{2}}\, dX = \frac{X^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{X^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} X^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2X^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{X^3} + C$$

7. $\int\left(\frac{6X^2+8X+5}{2X^3+4X^2+5X-10}\right)dX$

حيث أن البسط يمثل مشتقة المقام وبالتالي فإن التكامل يساوي لوغاريتم المقام (Ln)

$$= \text{Ln}(2X^3+4X^2+5X-10)+C$$

8. $\int\left(\frac{20X^3+15X^2+10}{X^4+X^3-2X}\right)dX$

يمكن أخذ عامل مشترك من البسط حتى يمكن جعل البسط يمثل مشتقة المقام:

$$= \int 5\left(\frac{4X^3+3X^2-2}{X^4+X^3-2X}\right)dX$$

$$= 5\int\left(\frac{4X^3+3X^2-2}{X^4+X^3-2X}\right)dX$$

بعد أخذ عامل مشترك من البسط أصبح البسط يمثل مشتقة المقام أي:

$$= 5\ \text{Ln}(X^4+X^3-2X)+C$$

9. $\int\left(7e^{-X}+\frac{2}{X}\right)dX$

$$= \int\left(7e^{-X}+\frac{2}{X}\right)dX$$

$$= \int 7e^{-X}.dX + \int\frac{2}{X}\cdot dX$$

$$= 7\int e^{-X}dX + 2\int\frac{1}{X}\cdot dX$$

$$= 7X\frac{e^{-X}}{-1} + 2\text{Ln}\,X + C$$

$$= -7e^{-X} + 2\,\text{Ln}\,X + C$$

10. $\int 5\sqrt[4]{X^3} \cdot dX = \int 5X^{\frac{3}{4}}\, dX$

$$= \frac{5X^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + C = \frac{5X^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C$$

$$= 5 \times \frac{4}{7} X^{\frac{7}{4}} + C = \frac{20}{7}\sqrt[4]{X^7} + C$$

11. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{X}}\right) dX$

$$\int \frac{5}{X^{\frac{1}{2}}} \cdot dX = \int 5X^{-\frac{1}{2}} \cdot dX$$

$$5\int X^{-\frac{1}{2}} \cdot dX = 5\,\frac{X^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{5X^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$5 \times \frac{2}{1} X^{\frac{1}{2}} + C = 10X^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 10\sqrt{X} + C$$

ويمكن التأكيد بإجراء الاشتقاق على الناتج وكما يلي:

$$Y = 10\sqrt{X} + C = 10X^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 10 \times \frac{1}{2} X^{\frac{1}{2}-1} = \frac{10}{2} X^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 5X^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{X^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{X}}$$

تحديد ثابت التكامل

من المعلوم أن المشتقة الأولى للمقدار الثابت تساوي صفر، فمثلاً:

- إذا كان: $Y = X^4$

فإن المشتقة الأولى: $Y' = 4X^3$

- إذا كان: $Y = X^4 + 10$

فإن المشتقة الأولى: $Y' = 4X^3$

- إذا كان: $Y = X^4 - 20$

فإن المشتقة الأولى: $Y' = 4X^3$

- إذا كان: $Y = X^4 + C$

حيث أن C كمية ثابتة فإن المشتقةالأولى $Y' = 4X^3$

معنى ذلك أن:

$$\int 4X^3 . dX = \frac{4X^4}{4} + C$$
$$= X^4 + C$$

نستنتج مما سبق أن: $\int 4X^3 . dX$

قد يكون مساوياً لـ $X^4 + 1$ أو $X^4 + 5$ أو $X^4 + 10$ أو $X^4 \pm C$

حيث أن C مقدار ثابت.

∴ تكون الصورة العامة:

إذا كان $f'(X)$ هو المشتقة الأولى للدالة (X) فإن:

$$\int f'(X) . dX = f(X) \pm C$$

حيث أن C: مقدار ثابت. ويجب ملاحظة أنه لتقدير قيمة الثابت (C) يلزم معرفة قيمة التكامل (قيمة Y) عند قيمة معينة من قيم المتغير (X).

مثال: أوجد تكامل: $Y' = \int \left(6X^2 - 20X + 600\right) dX$

إذا علمت أن $Y = 20000$ عندما $X = 10$ أوجد قيمة C

الحل

$$Y' = \int \left(6X^2 - 20X + 600\right) dX = \frac{6X^3}{3} - \frac{20X^2}{2} + 600X + C$$

$$y = 2x^3 - 10x^2 + 600x + C$$

بالتعويض عن قيمة $(X = 10)$، قيمة $(Y = 20000)$

$$20000 = 2(10)^3 - 10(10)^2 + 600(10) + C$$
$$20000 = 2000 - 1000 + 6000 + C$$
$$2000 = 7000 + C$$
$$C = 20000 - 7000 = 13000$$

فتصبح المعادلة: $Y = 2X^3 - 10X^2 + 600X + 13000$

تطبيقات اقتصادية على التكامل:

ذكرنا فيما سبق أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل (الاشتقاق)، وبذلك فإن التكامل يتم إجرائه على المشتقة الأولى بمسمياتها المختلفة (معدل التغير في الدالة، ميل الدالة، الدوال الحدية) وذلك بهدف إيجاد الدالة الأصلية وذلك كما يلي:

1. الإيراد الكلي: يعني إيجاد تكامل الإيراد الحدي.

حيث أن الإيراد الحدي يمثل المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي كما يلي:

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

فإن دالة الايراد الكلي تمثل تكامل دالة الايراد الحدي:

$$TR = \int MR.\, dQ$$

2. التكلفة الكلية: تعني إيجاد تكامل التكلفة الحدية.

حيث أن التكلفة الحدية تمثل المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية كما يلي:

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

فإن دالة التكلفة الكلية تمثل تكامل دالة التكلفة الحدية:

$$TC = \int MC\, .dQ$$

3. الربح الكلي: يعني إيجاد تكامل الربح الحدي.

حيث أن الربح الحدي يمثل المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي كما يلي:

$$\pi' = \frac{d\pi}{dQ}$$

فإن دالة الربح الكلي تمثل تكامل دالة الربح الحدي:

$$\pi = \int \pi'\, .dQ$$

4. دالة الاستهلاك: تعني إيجاد تكامل الميل الحدي للاستهلاك.

حيث أن الميل الحدي للاستهلاك يمثل المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك كما يلي:

$$MPC = \frac{dC}{dY}$$

فإن دالة الاستهلاك تمثل تكامل دالة الميل الحدي للاستهلاك

$$C = \int MPC\,.dY$$

5. دالة الادخار: تعني إيجاد تكامل الميل الحدي للادخار.

حيث أن الميل الحدي للادخار يمثل المشتقة الأولى لدالة الادخار كما يلي:

$$MPC = \frac{dS}{dY}$$

فإن دالة الادخار تمثل تكامل دالة الميل الحدي للادخار:

$$S = \int MPC.\,dY$$

6. دالة الإنتاج (دالة الإنتاجية): تعني إيجاد تكامل دالة الإنتاجية الحدية للعامل.

حيث أن الإنتاجية الحدية تمثل المشتقة الأولى لدالة الإنتاج كما يلي:

$$MPL = \frac{dQ}{dL}$$

فإن دالة الانتاج تمثل تكامل دالة الإنتاجية الحدية للعامل:

$$Q = \int MPL\,.\,dL$$

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإحدى المنشآت على الصورة التالية:

$$MC = 0.06Q^2 - 0.2Q + 6$$

المطلوب: أوجد دالة التكلفة الكلية إذا علمت أن التكاليف الكلية تساوي 200 دينار عند إنتاج 15 وحدة.

الحل

دالة التكلفة الكلية = تكامل دالة التكلفة الحدية

$$TC = \int MC\ .dQ$$

$$TC = \int \left(0.06Q^2 - 0.2Q + 6\right) dQ$$

$$TC = \frac{0.06Q^3}{3} - \frac{0.2Q^2}{2} + 6Q + C$$

$$= 0.02Q^3 - 0.1Q^2 + 6Q + C$$

وحيث أن التكاليف الكلية 200 عند إنتاج 10 وحدات بالتعويض لإيجاد قيمة ثابت التكامل.

$$200 = 0.02(10)^3 - 0.1(10)^2 + 6(10) + C$$
$$200 = 0.02\ (1000) - 0.1(100) + 6(10) + C$$
$$200 = 20 - 10 + 60 + C$$
$$200 = 70 + C$$
$$\therefore C = 200 - 70 = 130$$

وبذلك تكون دالة التكلفة الكلية كما يلي:

$$TC = 0.2Q^3 - 0.1Q^2 + 6Q + 130$$

مثال: إذا كانت دالة الإيراد الحدي لإحدى الشركات كما يلي:

$$MR = 0.5Q^4 + 5$$

المطلوب: أوجد دالة الإيراد الكلي ، ثم أوجد قيمتها عندما $Q=3$ ، وثابت التكامل $C=100$

الحل

دالة الإيراد الكلي= تكامل دالة الإيراد الحدي

$$TR = \int MR\ .dQ$$
$$= \int(0.5Q^4 + 5).dQ$$
$$= \frac{0.5Q^5}{5} + 5Q + C$$
$$= 0.1Q_5 + 5Q + C$$

بالتعويض عندما Q=3، C=100 فإن TR:

$$TR = 0.1(3)^5 + 5(3) + 100$$
$$= 0.1(243) + 5\times3 + 100$$
$$= 24.3 + 15 + 100 = 139.3$$

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإحدى الشركات على الصورة التالية:

$$MC = Q^2 + 2Q + 4$$

المطلوب: أوجد دالة التكلفة الكلية إذا علمت أن التكلفة الثابتة = 100

الحل

$$TC = \int MC\ .dQ$$
$$= \int(Q^2 + 2Q + 4).dQ$$
$$= \frac{Q^3}{3} + \frac{2Q^2}{2} + 4Q + C$$
$$= \frac{1}{3}Q^3 + Q^2 + 4Q + C$$

بالتعويض عن C=100

$$TC = \frac{1}{3} Q^3 + Q^2 + 4Q + 100$$

مثال: إذا كان معدل التغير في الربح بالنسبة لوحدة الإنتاج يتحدد طبقاً للعلاقة:

$$\pi' = -100Q + 500$$

المطلوب: تحديد دالة الربح الكلي، إذا كان الربح المتوقع عند إنتاج 10 وحدات هو 150 دينار.

الحل

الربح الكلي: تكامل الربح الحدي (معامل التغير في الربح)

$$\begin{aligned} \pi &= \int \pi' .dQ \\ &= \int (-100Q + 500).dQ \\ &= \frac{-100Q^2}{2} + 500Q + C \\ &= -50\,Q^2 + 500Q + C \end{aligned}$$

بالتعويض:

$$150 = -50(10)^2 + 500(10) + C$$

$$150 = -5000 + 5000 + C$$

$$\therefore C = 150$$

∴ دالة الربح الكلي هي:

$$\pi = 50Q^2 + 500Q + 150$$

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الحدية MC ودالة الإيراد MR لإحدى المنشآت على الصورة التالية:

$$MC = 2.5Q^2 - 20Q + 100$$
$$MR = 100 - 10Q$$

أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم ربح ممكن.

الحل

الربح= دالة الإيراد الكلي- دالة التكلفة الكلية

$$\pi = TR - TC$$

وحيث أن:

دالة الإيراد الكلي= تكامل دالة الإيراد الحدي

دالة التكلفة الكلية= تكامل دالة التكلفة الحدية

$$\begin{aligned} TR &= \int MR \, .dQ \\ &= \int (100 - 10Q) \, . \, dQ \\ &= 100Q - \frac{10Q^2}{2} + C \\ &= 100Q - 5Q^2 + C \end{aligned}$$

$$TC = \int MC \,.\, dQ$$
$$= \int (2.5Q^2 - 20Q + 100) \,.\, dQ$$
$$= \frac{2.5Q^3}{3} - \frac{20Q^2}{2} + 100Q + C$$
$$= \frac{2.5}{3}Q^3 - 10Q^2 + 100Q + C$$
$$= \frac{5}{6}Q^3 - 10Q^2 + 100Q + C$$

وحيث أن:

$$\therefore \pi = TR - TC$$
$$= [100Q - 50Q^2 + C] - \left[\frac{5}{6}Q^3 - 10Q^2 + 100Q + C\right]$$
$$= 100Q - 5Q^2 + C - \frac{5}{6}Q^3 + 10Q^2 - 100Q - C$$
$$\pi = -\frac{5}{6}Q^3 + 5Q^2$$

ولإيجاد النهاية العظمى لدالة الربح يتم استخدام التفاضل كما يلي:

1. إيجاد المشتقة الأولى:

$$\pi' = -\frac{15}{6}Q^2 + 10Q$$

2. مساواتها بالصفر:

$$-2.5Q^2+10Q=0$$

$$Q(-2.5Q+10)=0$$

$$-2.5Q+10=0 \quad \text{أو} \quad Q=0$$

$$-2.5Q=-10$$

$$Q=\frac{-10}{-2.5}=4$$

3. إيجاد المشتقة الثانية:

$$\pi''=-5Q+10$$

4. بالتعويض عن قيم Q في المشتقة الثانية:

عندما $Q=0$ فإن:

$$\pi''=-5(0)+10=+10$$

قيمة موجبة وهذا يعني أنها نهاية صغرى ← مرفوض.

ولذا فانه عندما $Q=4$ فإن:

$$\pi''=-5(4)+10=-10$$

قيمة سالبة وهذا يعني أنها نهاية عظمى. وبذلك فإنه يتحقق أقصى ربح ممكن عندما $Q=4$.

يمكن التأكد من صحة الحل كما يلي:

$$MR = MC$$

$$MR = 100 - 10(4) = 60$$

$$MC = 2.5(4)^2 - 20(4) + 100$$

$$= 2.5(16) - 80 + 100$$

$$= 40 - 80 + 100 = 60$$

حل آخر:

المشتقة الأولى لدالة الربح هي عبارة عن الربح الحدي ولذا فإن:

الربح الحدي= الإيراد الحدي- التكلفة الحدية

$$\pi' = MR - MC$$

$$= [100 - 10Q] - [2.5Q^2 - 20Q + 100]$$

$$= 100 - 10Q - 2.5Q^2 + 20Q - 100$$

$$\pi' = -2.5Q^2 + 10Q$$

الربح الكلي: تكامل الربح الحدي:

$$\pi = \frac{-2.5Q^3}{3} + \frac{10Q^2}{2} + C$$

$$= \frac{-5}{6}Q^3 + 5Q^2 + C$$

حيث أن C : مقدار ثابت.

1. إيجاد المشتقة الأولى

$$\pi' = \frac{-15}{6}Q^2 + 10Q$$

2. مساواتها بالصفر

$$-2.5Q^2 + 10Q = 0$$

$$Q(-2.5Q + 10) = 0$$

فإن $Q = 0$

إما

$$-2.5Q + 10 = 0$$

$$-2.5Q = -10$$

$$Q = \frac{-10}{-2.5} = 4$$

3. إيجاد المشتقة الثانية:

$$\pi'' = -5Q + 10$$

4. بالتعويض عن قيم Q في المشتقة الثانية:

عندما $Q = 0$ فإن:

$$\pi'' = -5(0) + 10 = +10$$

قيمة موجبة وهذا يعني أنها نهاية صفري ← مرفوض.

ولذا فانه عندما $Q = 4$ فإن:

$$\pi'' = -5(4) + 10 = -10$$

قيمة سالبة وهذا يعني أنها نهاية عظمى. وبذلك فإنه يتحقق أقصى ربح ممكن عندما $Q = 4$.

مثال: إذا كانت دالة التكلفة الحدية MC ودالة الإيراد الحدي MR لإحدى المنشآت على الصورة التالية:

$$MR = 120 - 6Q$$

$$MC = 3.6Q^2 - 18Q + 90$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يعظم الربح.

الحل

دالة الربح الكلي= دالة الإيراد الكلي- دالة التكلفة الكلية

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = \int MR \, .dQ$$

$$= \int (120-6Q). \, dQ$$

$$= 120Q - \frac{6Q^2}{2} + C$$

$$= 120\,Q - 3Q^2 + C$$

$$TC = \int MC \, .dQ$$

$$= \int (3.6Q^2 - 18Q + 90). \, dQ$$

$$= \frac{3.6Q^3}{3} - \frac{18Q^2}{2} + 90Q + C$$

$$= 1.2\,Q^3 + 9Q^2 - 90Q - C$$

$$\pi = TR - TC$$

$$= [120Q - 3Q^2 + C] - [1.2Q^3 - 9Q^2 + 90Q + C]$$

$$= 120Q - 3Q^2 + C - 1.2Q^3 + 9Q^2 - 90Q - C$$

$$\pi = -1.2\,Q^3 + 6Q^2 + 30Q + C$$

1. إيجاد المشتقة الأولى:

$$\pi' = -3.6\,Q^2 + 12Q + 30$$

2. مساواتها بالصفر وإيجاد قيمة المتغير:

$$-3.6\,Q^2 + 12Q + 30 = 0$$

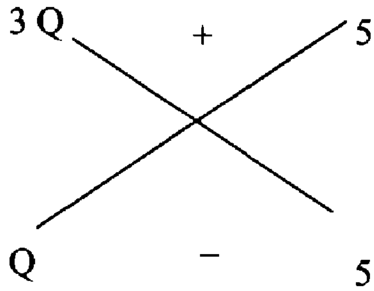
بالضرب $\times -10$

$$36\,Q^2 - 120Q - 300 = 0$$

بالقسمة على 12

$$3\,Q^2 - 10Q - 25 = 0$$

بإجراء التحليل:



$$(Q-5)(3Q+5) = 0$$

فإن:

$$Q - 5 = 0$$
$$Q = 5$$

إما $\quad 3Q - 5 = 0$

مرفوض $\quad Q = \frac{-5}{3}$

ويمكن حل المعادلة السابقة باستخدام الجذر المميزكما يلي:

$$3Q^2 - 10Q - 25 = 0$$

حيث أن:

$a = 3 \qquad b = -10 \qquad c = -25$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 2aC}}{2a}$$

بالتعويض

$$Q = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(10)^2 - 4(3)(-25)}}{2(3)}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100+300}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{400}}{6}$$

$$= \frac{10 \pm 20}{6}$$

$$Q$$

$$\frac{10-20}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

$$\frac{10+20}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

3. إيجاد المشتقة الثانية:

$$\pi'' = -7.2Q + 12$$

$$= -7.2(5) + 12$$

$$= -36 + 12 = -24$$

قيمة سالبة وبذلك يتحقق أقصى ربح عندما $Q = 5$.

يمكن التأكيد من صحة الحل كما يلي:

حيث أنه عند حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح فإن:

$$MR = MC$$
$$MR = 120 - 6(5) = 90$$
$$MC = 3.6(5)^2 - 18(5) + 9 = 90$$

حل آخر: الربح الحدي= الإيراد الحدي - التكلفة الحدية:

$$\pi' = MR - MC$$
$$= [120 - 6Q] - [3.6Q^2 - 18Q + 90]$$
$$= 120 - 6Q - 3.6Q^2 + 18Q - 90$$
$$\pi' = -3.6Q^2 + 12Q + 30$$

الربح الكلي= تكامل الربح الحدي:

$$\pi = \int(\pi') \,.\, dQ$$
$$= (-3.6Q^2 + 12Q + 30) .\, dQ$$
$$= \frac{3.6Q^3}{3} + \frac{12Q^2}{2} + 30Q + C$$
$$\pi = -1.2Q^3 + 6Q^2 + 30Q + C$$

- إيجاد المشتقة الأولى لدالة الربح:

$$\pi' = -3.6Q^2 + 12Q + 30$$

- مساواة المشتقة الأولى لدالة الربح بالصفر:

$$-3.6Q + 12Q + 30 = 0$$

ثم الحل كما سبق باستخدام التحليل أو باستخدام الجذر المميز نجد ان:

$Q = 5$ أو $Q = -5\backslash 3$ (مرفوض)

- إيجاد المشتقة الثانية:

$$\pi'' = -7.2Q + 12$$
$$= -7.2(5) + 12$$
$$= -36 + 12 = -24$$

حيث أن المشتقة الثانية سالبة يكون لدالة الربح نهاية عظمى عندما $Q = 5$.

وللتأكيد قيم التعويض في MC , MR عن قيمة $Q = 5$.

$$MR = 120 - 6(Q)$$
$$= 120 - 6(5) = 90$$
$$MC = 3.6Q^2 - 18(5) + 90$$
$$= 3.6(5)^2 - 18(5) + 90$$
$$= 90 - 9 + 90 = 0$$

حيث أنه عند حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح يكون $MR = MC$

مثال: إذا كان الميل الحدي للاستهلاك (معدل التغير في الاستهلاك بالنسبة للدخل) على الصورة:

$$MPC = 4Y + 8$$

المطلوب: حدد دالة الاستهلاك إذا كان الاستهلاك المتوقع عند دخل شهري 100 دينار هو 80 دينار.

الحل

دالة الاستهلاك = تكامل الميل الحدي للاستهلاك

$$C = \int MPC \, . \, dY$$
$$C = \int (4Y + 8) \, . \, dY$$
$$C = \frac{4Y^2}{2} + 8Y + E$$
$$= 2Y^2 + 8Y + E$$

حيث أن: E ثابت التكامل.

بالتعويض عن $C = 80$, $Y = 100$، وذلك لايجاد قيمة الثابت E

$$80 = 2(100)^2 + 8(100) + E$$
$$80 = 20000 + 800 + E$$
$$80 = 20800 + E$$
$$E = 80 - 20800 = -20720$$

مثال: إذا كانت دالة الميل الحدي للاستهلاك على الصورة:

$$\mathrm{MPC} = 0.5 + \frac{0.1}{\sqrt{\mathrm{Y}}}$$

المطلوب: أوجد دالة لاستهلاك إذا علمت أن الاستهلاك يساوي 85 دينار عندما يكون الدخل مساوياً 100.

الحل

$$C = \int MPC \,.\, dy$$

$$= \int \left(0.5 + \frac{0.1}{\sqrt{y}} \right) . \, dy$$

$$= \int 0.5 \,.\, dy + \int \frac{0.1}{\sqrt{y}} \,.\, dy$$

$$= \int 0.5 \,.\, dy + \int \frac{0.1}{y^{\frac{1}{2}}} \,.\, dy$$

$$= \int 0.5 \,.\, dy + \int 0.1 y^{-\frac{1}{2}} \,.\, dy$$

$$= 0.5y + \frac{0.1y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + E$$

$$= 0.5y + \frac{0.1y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + E$$

$$= 0.5y + \frac{0.1\sqrt{y}}{\frac{1}{2}} + E$$

بالتعويض:

$$C = 0.5Y + 0.2\sqrt{Y} + E$$

$$85 = 0.5(100) + 0.2\sqrt{100} + E$$
$$85 = 50 + 0.2 \times 10 + E$$
$$85 = 50 + 2 + E$$
$$85 + 52 + E$$
$$\therefore E = 85 - 52 = 33$$

وبذلك فإن دالة الاستهلاك:

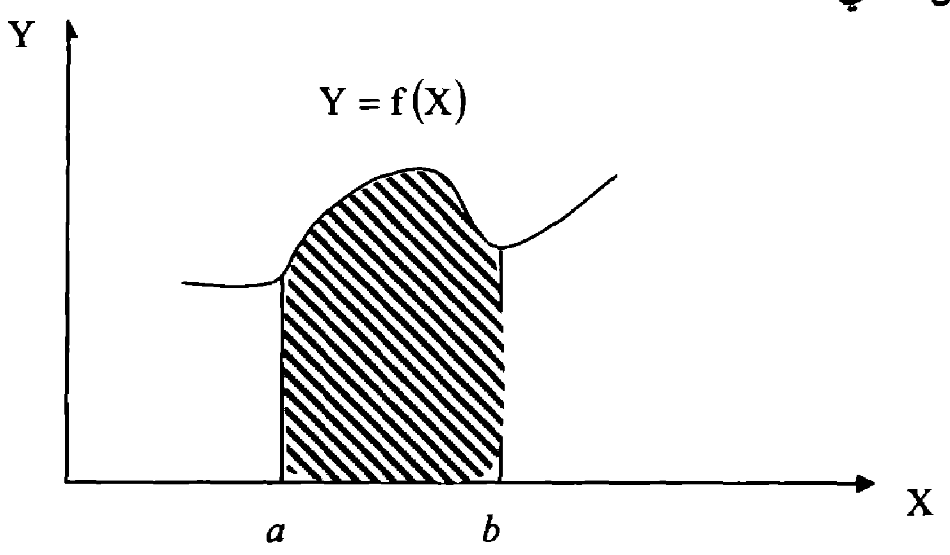
$$C = 0.5Y + 0.2\sqrt{Y} + 33$$

التكامل المحدود:

تناولنا فيما سبق مفهوم وقواعد التكامل الغير محدود وهو الأكثر استخداماً في الدراسات التطبيقية الاقتصادية كما لاحظنا ذلك، واستكمالاً للموضوع سيتم مناقشة مفهوم وقواعد التكامل المحدود مع بعض التطبيقات الاقتصادية له.

مفهوم التكامل المحدود:

إذا كان لدينا الدالة $Y = f(X)$، وأن النقطتين a , b على المحور الأفقي في الشكل التالي:



شكل يوضح مفهوم التكامل

فإذا أردنا تقدير المساحة أسفل المنحنى الممثل للدالة والمحصورة بين المنحنى والمحور الأفقي بين النقطتين، فإنه يتم إجراء التكامل للدالة $f(X)$ بين النقطيتين a, b وهو ما يعبر عنه بالتكامل المحدود ويرمز له بالرمز:

$$\int_a^b f(X)\,.\,dX$$

إذا أردنا حساب قيمة التكامل بين قيمتين $\int_a^b f(X)\,.\,dX$ حيث أن:

a: هي الحد الأدنى للقيمة التي يأخذها المتغير X.

b: هي الحد الأعلى للقيمة التي يأخذها المتغير X.

فإن قيمة التكامل المحدود (المساحة أسفل المنحنى بين النقطتين a,b) هي:

$$\int_a^b f(X)\,.\,dX = f(b) - f(a)$$

أي أنه يساوي تكامل الدالة عند النهاية العليا (b) مطروحاً منها تكامل الدالة عند النهاية الصغرى (a)، حيث أن:

$$f(b) = \int f(X).dX$$

- مع التعويض عن قيمة b = X

$$f(a) = \int f(X).dX$$

- مع التعويض عن قيمة a = X

يلاحظ أن ثابت التكامل (C) يختفي بسبب عملية الطرح.

مثال: أوجد تكامل: $\int_{3}^{4} (4X^3) . dX$

الحل

$$\int_{3}^{4} (4X^3) . dX = \left[\frac{4X^4}{4}\right]_3^4 = \left[X^4\right]_3^4$$

$$= (4)^4 - (3)^4$$

$$= 256 - 81 = 175$$

مثال: أوجد تكامل: $\int_{-1}^{4} (6X + 4) . dX$

الحل

$$\int_{-1}^{4} (6X + 4) . dX = \left[\frac{6X^2}{2} + 4X\right]_{-1}^{4}$$

$$= \left[3X^2 + 4X\right]_{-1}^{4}$$

$$= \left[3(4)^2 + 4(4)\right] - \left[3(-1)^2 + 4(-1)\right]$$

$$= [48 + 16] - [3 - 4]$$

$$= 64 - (-1) = 65$$

مثال: أوجد تكامل: $\int_{1}^{4}\left(X^2-X+1\right).\,dX$

الحل

$$\int_{1}^{4}\left(X^2-X+1\right).\,dX=\left[\frac{X^3}{3}-\frac{X^2}{2}+X\right]_1^4$$

$$=\left[\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+\ X\right]_1^4$$

$$=\left[\ \frac{1}{3}(4)^3\ -\frac{1}{2}(4)^2+\ 4\right]-\left[\frac{1}{3}(1)^3-\frac{1}{2}(1)^2+\ 1\right]$$

$$=\left[\ \frac{1}{3}(64)-\frac{1}{2}(8)+\ 4\right]-\left[\frac{1}{3}-0.50+\ 1\right]$$

$$=21.33-0.83=20.5$$

مثال: أوجد تكامل: $\int_{0}^{2}\left(X+1\right).\,dX$

الحل

$$\int_{0}^{2}\left(X+1\right).\,dX=\left[\frac{X^2}{2}+X\right]_0^2=\left[\frac{1}{2}X^2+X\right]_0^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}(2)^2+2\right)-\left[\frac{1}{2}(2)^2+0\right]$$

$$=4-0=4$$

تطبيقات اقتصادية على التكامل المحدود:

توجد عدة تطبيقات اقتصادية وإدارية من أهمها ما يلي:

1. فائض المستهلك.
2. فائض المنتج.

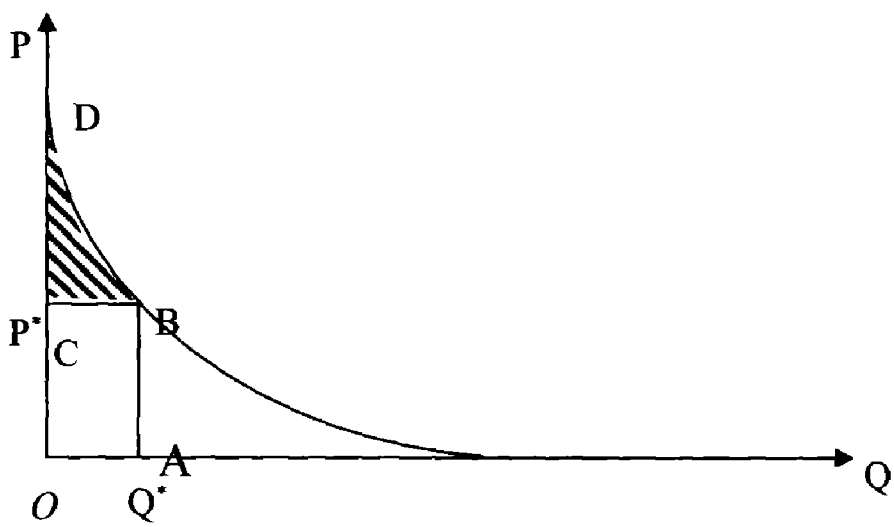
1. فائض المستهلك: Consumer's Surplus:

إذا كانت دالة الطلب على الصورة التالية:

$$P = f(Q)$$

فإن الشكل التالي يوضح اختلاف الأسعار التي يرغب المستهلك في دفعها في الكميات المختلفة من السلعة.

حيث انه عندما $Q = Q^*$ فإن السعر $P = P^*$ فإن إجمال ما يدفعه المستهلك من أموال للحصول على الكمية Q^* من السلعة هو $P^* Q^*$ وهذا ما توضحه المساحة $OABC$ والآن، السعر P^* هو السعر الذي يكون المستهلك على استعداد لدفعه لشراء الوحدة الأخيرة عندما تكون الكمية Q^* من السلعة. الكميات حتى Q^* يكون فعلياً على استعداد لدفع سعر أعلى وهذا ما يوضحه منحنى الطلب.



شكل يوضح مفهوم فائض المستهلك

الجزء المظل BCD يمثل المزايا (المنافع) التي يحصل عليها المستهلك عند دفعه السعر الثابت P^*، وهذا ما يسمى فائض المستهلك Consumer's Surplus (CS) وقيمة (CS) يمكن إيجادها من خلال.

مساحة (BCD) = مساحة $(OBCD)$ - مساحة $(OABC)$

المساحة $OABD$ التي تكون أسفل منحنى الطلب $P = f(Q)$ بين $Q = 0$، $Q = Q^*$ وهي تساوي:

$$\int_0^{Q^*} f(Q).dQ$$

بينما المساحة $P^* Q^* = OABC$

ولذلك فإن فائض المستهلك:

$$CS = \int_0^{Q^*} f(Q).dQ - P^* Q^*$$

فائض المستهلك = ما كان يجب أن يدفعه المستهلك- ما دفعه المستهلك فعلاً

= تكامل دالة الطلب من صفر إلى Q^* - حاصل ضرب السعر التوازني في الكمية التوازنية.

مثال: إذا كان منحنى الطلب على إحدى السلع هو: $P = 250 - 2Q$

حيث أن: P : سعر السلعة.

Q : الكمية المطلوبة من السلعة.

بفرض أن سعر التوازن في السوق لهذه السلعة يساوي 150

المطلوب: أوجد فائض المستهلك.

الحل

حيث أن السعر في حالة التوازن يساوي 150 بالتعويض في معادلة منحنى الطلب لحصل على الكمية التوازنية كما يلي:

$$P = 250 - 2Q$$
$$150 = 250 - 2Q$$
$$-100 = -2Q$$
$$Q = \frac{-100}{-2} = 50$$

∴ ما يدفعه المستهلك = السعر × الكمية

$$P \times Q = 150 \times 50 = 7500$$

ما كان يجب ما يدفعه =

$$= \int_0^{50} (250-2Q).dQ$$

فائض المستهلك = ما كان يجب أن يدفعه - ما دفعه فعلاً

فائض المستهلك = تكامل دالة الطلب من صفر إلى Q - حاصل ضرب السعر التوازني في الكمية التوازنية

$$CS = \int_0^{50} (250-2Q).dQ - (P \times Q)$$
$$= \left[250Q - \frac{2Q^2}{2}\right]_0^{50} - (150 \times 50)$$
$$= \left[250Q - Q^2\right]_0^{50} - 7500$$
$$= \left[250(50) - (50)^2 - (0)\right] - 7500$$
$$= \left[12500 - 2500 - 0\right] - 7500$$
$$= 10000 - 7500 = 2500$$

مثال: إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع على الصورة التالية:

$$P = 30 - 4Q$$

بفرض أن سعر التوازن في السوق هو 10

المطلوب: أوجد فائض المستهلك.

الحل

حيث أن السعر في حالة التوازن يساوي 10 فإن الكمية في حالة التوازن:

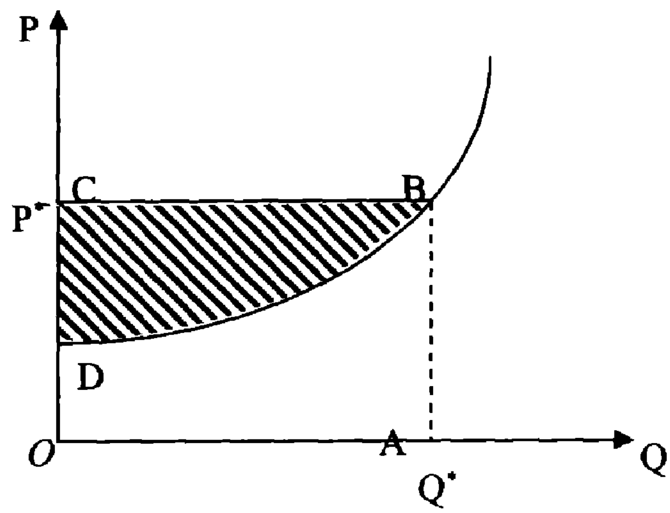
$$10 = 30 - 4Q$$
$$-20 = -4Q$$
$$Q = \frac{-20}{-4} = 5$$

فائض المستهلك = ما كان يجب أن يدفعه المستهلك- ما دفعه فعلاً المستهلك

$$CS = \int_0^5 (30-4Q).dQ - P^* Q^*$$
$$= \left[30Q - \frac{4Q^2}{2}\right]_0^5 - 10 \times 5$$
$$= \left[30Q - 2Q^2\right]_0^5 - 50$$
$$= \left[30(5) - 2(5)^2 - (0)\right] - 50$$
$$= \left[150 - 50 - 0\right] - 50$$
$$= 100 - 50 = 50$$

2. فائض المنتج: Producer's Surplus

إذا كانت دالة العرض لإحدى السلع على الصورة التالية $P = g(Q)$، فإن الشكل التالي يوضح اختلاف الأسعار التي يرغب المنتجون في عرض الكميات المختلفة من السلع.



شكل يوضح مفهوم فائض المستهلك

عندما $Q = Q^*$، فإن السعر $P = P^*$ وبفرض أن كل السلع المنتجة تباع، فإن إجمالي ما يتسلمه البائع يساوي P^*Q^* وهذا ما تمثله المساحة $OABC$.

والآن وعند السعر P^* وهو السعر الذي يرغب المنتج في عرض الوحدة الأخيرة، وذلك عندما تكون الكمية Q^* من السلعة ، والكميات من Q^* تكون فعلياً على استعداد لقبول أقل سعر يعرض بواسطة منحنى العرض، ولذلك فإن الشكل المظل BCD يمثل المزايا (المنافع) التي يحصل عليها البائع عند بيع السلعة بالسعر المحدد P^* وهذا ما يسم بفائض المنتج Producer's Surplus (PS)، وقيمة (PS) يمكن إيجادها من خلال:

المساحة BCD = المساحة $OABC$ - المساحة $OABD$

والمساحة $OABD = P^*Q^*$، بينما المساحة $OABD$ فهي المساحة أسفل منحنى العرض $P = g(Q)$ وتقع بين $Q^* = 0$، $Q = Q^*$ ولذا فهي تساوي:

$$\int_0^{Q^*} g(Q)dQ$$

ولذا فإن فائض المنتج (PS)=

$$PS = P^* Q^* - \int_0^{Q^*} g(Q)dQ$$

فائض المنتج = ما حصل عليه المنتج فعلاً- ما كان يرغب في الحصول عليه

= حاصل ضرب السعر التوازني في الكمية التوازنية- تكامل دالة العرض من صفر إلى Q^*.

مثال: إذا كان منحنى العرض لسلعة ما يتحدد بالعلاقة: $P = 3Q^2 + 150$

بفرض أن السعر في حالة التوازن هو 297

المطلوب: أوجد فائض المنتج.

الحل

بالتعويض عن السعر لإيجاد الكمية:

$$297 = 3Q^2 + 150$$
$$297 - 150 = 3Q^2$$
$$147 = 3Q^2$$
$$\therefore Q = \sqrt{49} = 7$$

أي أن الكمية التوازنية = 7 ، السعر التوازني = 297.

فائض المنتج= ما حصل عليه المنتج فعلاً- ما كان يرغب في الحصول عليه

$$PS = P^* Q^* - \int_0^{Q^*} \left(3Q^2 + 150\right) dQ$$

$$= 297 \times 7 - \int_0^{7} \left(3Q^2 + 150\right) dQ$$

$$= 297 \times 7 - \left[\frac{3Q^2}{3} + 150\,Q\right]_0^7$$

$$= 2079 - \left[Q^3 + 150\,Q\right]_0^7$$

$$= 2079 - \left[343 + 150(7) - (0)\right]$$

$$= 2079 - \left[343 + 1050\right]$$

$$= 2079 - 1393 = 686$$

مثال: إذا كان دالتي العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P = -Q_d + 15$$

$$P = Q_S + 5$$

المطلوب: تحديد كل من فائض المنتج وفائض المستهلك عند توازن السوق.

الحل

∴ عند التوازن:

$$Q_d = Q_S = Q$$

$$-Q + 15 = Q + 5$$

$$-2Q = -10$$

$$Q = \frac{-10}{-2} = 5$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين عن قيمة Q=5 نجد أن P=10

فائض المستهلك = ما كان يجب أن يدفعه- ما دفعه فعلاً

$$CS=\int_{0}^{5}(-Q+15).dQ-(P\times Q)$$

$$=\left[\frac{-Q^2}{2}+15Q\right]_0^5-10\times 5$$

$$=\left[\frac{-(5)^2}{2}+15(5)-(0)\right]-50$$

$$=[-12.5+75-0]-50$$

$$=62.5-50=12.5$$

فائض المنتج = ما حصل عليه فعلاً- ما كان يرغب في الحصول عليه

$$PS=P^{*}Q^{*}-\int_{0}^{Q}(Q+5)\ dQ$$

$$=10\times 5-\int_{0}^{5}(Q+5)\ dQ$$

$$=50-\left[\frac{(5)^2}{2}+5(5)-(0)\right]$$

$$=50-\left[\frac{25}{2}+25-(0)\right]$$

$$=50-[12.5+25]$$

$$=50-37.5=12.5$$

يتضح من المثال أن فائض المنتج = فائض المستهلك

مثال: إذا كان دالتي العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P=-Q^2{}_d+35$$

$$P=Q_s^2+3$$

المطلوب: أوجد فائض المنتج وفائض المستهلك عند توازن السوق.

الحل

عند التوازن:

$$Q_d = Q_s = Q$$

$$-Q^2 + 35 = Q^2 + 3$$

$$-Q^2 - Q^2 = 3 - 35$$

$$-2Q^2 = -32$$

$$Q^2 = \frac{-32}{-2} = 16$$

$$Q = \sqrt{16} = 4$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين عن الكمية Q=4 لايجاد السعر

$$P = -(4)^2 + 25 = 19$$

فائض المستهلك= ما كان يجب أن يدفعه- ما دفعه فعلاً

$$CS = \int_0^4 \left(-Q^2 + 35\right).dQ - (P \times Q)$$

$$= \left[\frac{-Q^3}{3} + 35Q\right]_0^4 - 4 \times 19$$

$$= \left[\frac{-64}{3} + 140\right] - 76$$

$$= [-21.3 + 140] - 76$$

$$= 118.7 - 76 = 42.7$$

فائض المنتج= ما حصل عليه فعلاً- ما كان يرغب في الحصول عليه

$$PS = P \times Q - \int_{0}^{4} \left(Q^2 + 3\right).dQ$$

$$= 19 \times 4 - \left[\frac{Q^3}{3} + 3Q\right]_0^4$$

$$= 76 - \left[\frac{(4)^4}{3} + 3Q\right]_0^4$$

$$= 76 - \left[\frac{(4)^4}{3} + 3(4) - (0)\right]_0^4$$

$$= 76 - [21.3 + 12 - (0)]$$

$$= 76 - 33.3$$

$$= 42.7$$

يتضح من المثال أن فائض المنتج= فائض المستهلك

تمارين

1. إذا كانت دالة التكلفة الحدية (MC) على الصورة:

$$MC = 0.9Q^2 - 10Q + 25$$

المطلوب: أوجد دالة التكلفة الكلية ، إذا علمت أن التكلفة الكلية تبلغ 150 دولار عندما يبلغ حجم الإنتاج 15 وحدة.

2. إذا كان معدل التغير في الربح بالنسبة لوحدة الإنتاج يتحدد طبقاً للعلاقة الآتية:

$$\pi' = 0.02Q + 10$$

المطلوب: أوجد دالة الربح الكلي إذا كان الربح المتوقع عند إنتاج 100 وحدة هو 1000 دولار.

3. إذا كانت دالة التكلفة الحدية (MC) وكانت دالة الإيراد الحدي للإنتاج MR على الصورة التالية:

$$MC = 60$$

$$MR = -Q + 80$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم ربح ممكن.

4. إذا كانت دالة التكاليف الحدية في أحد المصانع تتحدد وفقاً للعلاقة التالية:

$$MC = 100 - Q$$

المطلوب: أوجد معادلة التكاليف الكلية إذا كانت التكاليف الثابتة تمثل نصف التكاليف الكلية عند إنتاج 12 وحدة.

5. إذا كانت دالة الإيراد الحدي في أحد المصانع على الصورة التالية:

$$MR = 100 - 10Q$$

وكانت دالة التكلفة الحدية على الصورة: $MC = 2.5Q^2 - 20Q + 100$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن، أوجد معادلة الإيراد المتوسط، ومعادلة التكلفة المتوسطة.

6. إذا كان منحنى الطلب على إحدى السلع على الصورة التالية:

$$P = 200 - 2Q$$

المطلوب: أوجد مقدار فائض المستهلك بفرض أن سعر التوازن في السوق لهذه السلعة يساوي 110

7. إذا كان منحنى العرض لإحدى السلع على الصورة التالية:

$$P = 0.2Q^2 + 10$$

المطلوب: أوجد فائض المنتج بفرض أن السعر في حالة التوازن يساوي 15

8. إذا كان دالتي الإيراد الحدي (MR) والتكلفة الحدية (MC) على الصورة التالية:

$$MR = 110 - 6Q$$
$$MC = 3Q^2 - 18Q + 47$$

المطلوب: أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أقصى ربح ممكن، وعند هذا الحجم من الإنتاج أوجد كل من الإيراد الكلي، التكلفة الكلية، الربح.

9. إذا كان دالتي الإيراد الحدي (MR)، والتكلفة الحدية (MC) على الصورة التالية:

$$MR = 116 - 4Q$$
$$MC = 3Q^2 - 16Q + 20$$

المطلوب: استنتج دالة الإيراد الكلي TR، والتكلفة الكلية TC، والربح π، بالنسبة لحجم الإنتاج، وأوجد قيمة Q التي تحقق أعظم ربح ممكن.

10. إذا كان دالتي العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P=-Q_d+34$$
$$P=0.03Q_S^2+2$$

المطلوب: تحديد كل من فائض المنتج وفائض المستهلك عند توازن السوق.

11. إذا كان دالتي العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P=-Q_d^2-4Q_d+68$$
$$P=Q_S^2+2Q_S+12$$

بفرض التوازن

المطلوب: أوجد كل من: فائض المستهلك، فائض المنتج.

12. ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. تكامل الدالة $\int \frac{(2)}{X^2}\cdot dX$:

أ) $2X$ ب) $\frac{2}{\sqrt{X}}$ ج) $\frac{-2}{X}$ د) خلاف ذلك وهو ...

2. تكامل الدالة $\int \sqrt{X}\,.\,dX$:

أ) $\frac{2\sqrt[3]{X^2}}{3}$ ب) $\frac{3X^2}{2}$ ج) $\frac{2}{3X^2}$ د) خلاف ذلك وهو ...

3. تكامل الدالة $\int \frac{(5)}{X}\cdot dX$:

أ) $\frac{-5}{\sqrt{X}}$ ب) $L_n 5X$ ج) $5L_n X$ د) خلاف ذلك وهو ...

4. تكامل الدالة $\int (e^{-3X^2})\,.\,dX$:

أ) e^{-3X^2} ب) $-3e^{-3X^2}$ ج) $\left(\frac{-1e^{-X}}{3}\right)$ د) خلاف ذلك وهو ...

13. إذا كانت دالتي الإيراد الحدي (MR) والتكلفة الحدية (MC) على الصورة التالية:

$$MR = 110 - 6Q$$

$$MC = 3Q^2 - 18Q + 47$$

المطلوب: ضع دائرة حول الإجابة الصحيحة:

1. دالة الإيراد الكلي TR بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $110-6Q^2$ ب) $110Q-3Q^2$

ج) $110+6Q^2$ د) خلاف ذلك وهو ...

2. دالة التكلفة الكلية TC بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $6Q-18$ ب) $110Q-3Q^2$

ج) $3Q^2-24Q+157$ د) خلاف ذلك وهو ...

3. دالة الربح (π) بالنسبة لحجم الإنتاج تأخذ الصورة:

أ) $-3Q^2+6Q-21$ ب) $-3Q^2+12Q+63Q$

ج) $-3Q^2+12Q+157$ د) خلاف ذلك وهو ...

4. المشتقة الأولى لدالة الربح (π) على الصورة:

أ) $-Q^2+4Q+21$ ب) $3Q^2+12Q+63$

ج) $-6Q+48$ د) خلاف ذلك وهو ...

5. المشتقة الثانية لدالة الربح (π) على الصورة:

أ) $-2Q+4$ ب) $6Q$ ج) -6 د) خــلاف ذلــك وهو ...

6. حجم الإنتاج الأمثل الذي يعظم الربح هو:

أ) 3 ب) 4 ج) 5 د) خلاف ذلك وهو ...

7. عند حجم الإنتاج الأمثل فإن قيمة الإيراد الكلي هي: ....

8. عند حجم الإنتاج الأمثل فإن قيمة التكلفة الكلية هي: ....

9. عند حجم الإنتاج الأمثل فإن قيمة الربح هي: ....

14. أوجد تكامل الدوال التالية:

1. $\int(3X^2 - 2X + 5).\, dX$
2. $\int\left(\frac{1}{X} - 1\right)$
3. $\int\left[\frac{4X-5}{2X^2-5X+3}\right]\cdot dX$

15. إذا كانت دالة الإيراد الحدي MR لإحدى المنشآت على الصورة التالية:

$MR = 20 + 8Q - Q^2$

استنتج دالة الإيراد الكلي ثم أوجد حجم الإنتاج الذي يجعل الإيراد الكلي أكبر ما يمكن.

16. أوجد تكامل الدوال التالية:

$$1)\ \int\left(\frac{2}{X}-5X\right)$$

$$2)\ \int\left[\frac{4X-8}{X^2-4X+3}\right]\cdot dX$$

17. إذا كانت دالتي الإيراد الحدي (MR) والتكلفة الحدية (MC) على الصورة التالية:

$$MR = 118 - 6Q$$
$$MC = 3Q^2 - 12Q + 46$$

المطلوب: استنتج دالة الإيراد الكلي TR والتكلفة الكلية TC والربح π بالنسبة لحجم الإنتاج (Q) التي تحقق اعظم ربح ممكن.

18. إذا كان دالتي العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P=-3Q_d + 20$$
$$P=Q_S + 4$$

المطلوب: تحديد كل من فائض المنتج وفائض المستهلك عند توازن السوق.

19. إذا كان دالتي العرض والطلب لسلعة ما على الصورة التالية:

$$P=-0.2Q_d+18$$
$$P=0.03Q_s^2-38$$

المطلوب: أوجد فائض المنتج وفائض المستهلك عند توازن السوق.

الفصل التاسع

المحددات والمصفوفات

DETERMINANTS & MATRICES

الفصل التاسع

المحددات والمصفوفات

Determinants & Matices

أولاً: المحددات:

مفهوم المحددات:

المحدد هو عبارة عن شكل أو منظومة رياضية تشمل مجموعة من العناصر (الأرقام أو الرموز) مرتبة في شكل صفوف وأعمدة، ويكون دائماً عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة - بمعنى أن المحدد يأخذ شكل مصفوفة مربعة دائماً، ويستخدم في حل بعض المشاكل الاقتصادية والإدارية التي يمكن صياغتها في صورة معادلات خطية مثل مشاكل الإنتاج ومشاكل التكلفة، توازن السوق وتوازن الدخل القومي.

وبذلك فإن المحدد هو عبارة عن وسيلة رياضية يمكن عن طريقها عرض البيانات والعلاقات الرياضية بشكل منظم ومرتب يُمكن من حل الكثير من المشكلات الاقتصادية والإدارية بطريقة سهلة وسريعة.

شكل المحدد ورتبته:

مما سبق يمكن القول أن المحدد عبارة عن مجموعة من القيم مرتبة في عدة صفوف وعدة أعمدة، بحيث يكن عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة (أي يأخذ شكل المربع)، يحد قيم المحدد خطين رأسيين متوازيين.

وتتحدد رتبة المحدد وفقاً لعدد صفوفه أو عدد أعمدته، فالمحدد من الرتبة الثانية يتكون من صفين وعمودين، والمحدد من الرتبة الثالثة يتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة، وهكذا...،

- محدد من الدرجة الثانية كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

وتعرف الكميات aij بعناصر المحدد، حيث يشير الرمز (i) إلى الصف الذي يقع فيه العنصر، بينما يشير الرمز (j) إلى العمود الذي يقع فيه العنصر.

محدد من الدرجة الثالثة كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة الرابعة كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة (n) كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

إيجاد قيمة المحدد:

1- إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثانية:

إذا كان لدينا المحدد من الدرجة الثانية على الصورة

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فإن قيمة المحدد $|\Delta|$ هي:

$$|\Delta| = (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

أي أن: قيمة المحدد من الدرجة الثانية تساوي الفرق بين حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي وحاصل ضرب عناصر القطر الثانوي (أو الفرعي).

مثال: أوجد قيمة المحدد.

$$\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل

قيمة المحدد = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي- حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي (الثانوي)

$$|\Delta| = (12 \times 4) - (11 \times 3)$$
$$= 48 - 33 = 15$$

مثال: أوجد قيمة المحدد.

$$\begin{vmatrix} 2 & -13 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}$$

الحل

قيمة المحدد = $|A|$

$$|\Delta| = (2 \times 14) - (1 \times -13)$$
$$= 28 - (-13) = 28 + 13 = 41$$

مثال: أوجد قيمة المحدد.

$$\begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 10 & -4 \end{vmatrix}$$

الحل

قيمة المحدد = $|A|$

$$|\Delta| = (20 \times -4) - (3 \times 10)$$
$$= -80 - 30 = -110$$

مثال: أوجد قيمة المحدد.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل

$$|\Delta| = (2\times 6) - (-1\times -3)$$
$$= \ 12 \ - \ 3 \ = 9$$

مثال: أوجد قيمة × إذا كان:

$$\begin{vmatrix} X & 2 \\ 3X & X \end{vmatrix} = -5$$

الحل

قيمة المحدد= حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي- حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي

$$x^2 - 6x = -5$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$(x-5)(x-1) = 0$$
$$X - 5 = 0 \quad | \quad x - 1 = 0$$
$$x = 5 \qquad x = 1$$

2- إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة:

إذا كان لدينا المحدد من الدرجة الثالثة على الصورة:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فإنه يتم إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة بإحدى الطريقتين:

أ- طريقة الضرب القطري:

حيث يمكن إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام طريقة الضرب القطري والتي تتلخص هذه الطريقة في إعادة كتابة العمودين الأول والثاني على يمين المحدد الأصلي ثم ضرب الأقطار الرئيسية وجمع حاصل الضرب جبرياً ثم ضرب الأقطار الفرعية أو الثانوية وجمع حاصل الضرب جبرياً ويقصد بالقطر الرئيسي هو القطر الذي ينحدر من اليسار إلى اليمين بينما القطر الفرعي هو القطر الذي ينحدر من اليمين إلى اليسار ولذا فإن قيمة المحدد هي:

قيمة المحدد $|\Delta|$ = جمع حاصل ضرب الأقطار الرئيسية- جمع حاصل ضرب الأقطار الفرعية أو الثانوية.

فمثلاً إذا كان لدينا المدد:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

باستخدام طريقة الضرب القطري يتم إيجاد المحدد كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33}) + (a_{12} \times a_{23} \times a_{31}) + (a_{13} \times a_{21} \times a_{32}) \\ - \left[(a_{13} \times a_{22} \times a_{31}) + (a_{11} \times a_{23} \times a_{32}) + (a_{12} \times a_{21} \times a_{33}) \right]$$

ملحوظة: يمكن إعادة كتابة الصفيين الاول والثانى اسفل الصفوف وحل المحدد

مثال: أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل

باستخدام طريقة الضرب القطري يمكن إيجاد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\Delta| &= (2 \text{ X } 1 \text{ X } 0) + (3 \text{ X } 4 \text{ X } 0) + (1 \text{ X } -1 \text{ X } 2) - [(1 \text{ X } 1 \text{ X } 0) + \\ &\quad (2 \text{ X } 4 \text{ X } 2) + (3 \text{ X } -1 \text{ X } 0)] \\ &= (0 + 0 - 2) - (0 + 16 + 0) \\ &= -2 - 16 = -18 \end{aligned}$$

ب- طريقة المحددات الصغرى (المحيددات)

حيث يكون لكل عنصر من عناصر المحدد، محدد أصغر يتكون من المحدد الأصلي بعد حذف الصف والعمود الذي يقع فيه هذا العنصر.

فمثلاً إذا كان لدينا المحدد:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يتم إيجاد قيمة المحدد باستخدام المحددات الصغرى مع ملاحظة قاعدة الإشارات لكل عنصر.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ويتم استخدام صف أو عمود (أي صف أو أي عمود) لإيجاد قيمة المحدد مع ملاحظة قيمة المحدد باستخدام الصف الأول.

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix}$$

ثم بعد ذلك إيجاد قيمة المحددات من الدرجة الثانية كما يلي:

$$\begin{aligned} |A| = a_{11} & \left[(a_{22} \times a_{33}) - (a_{23} \times a_{32})\right] \\ -a_{12} & \left[(a_{21} \times a_{33}) - (a_{31} \times a_{23})\right] \\ +a_{13} & \left[(a_{21} \times a_{23}) - (a_{31} \times a_{22})\right] \end{aligned}$$

كذلك يمكن إيجاد قيمة المحدد باستخدام العمود الأول كما يلي:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

ثم بعد ذلك إيجاد قيمة المحددات من الدرجة الثانية كما سبق:

مثال: أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل

قيمة المحدد باستخدام المحددات الصغرى

1- باستخدام عناصر الصف الأول:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$|A| = 2\ [(1\ X\ 0) - (2\ X\ 4)] - 3\ [(1\ X\ 0) - (4\ X\ 0)] + 1\ [-1\ X\ 2) - (1\ X\ 0)]$

$=2\ [(\ 0 - 8)] - 3\ [(\ 0 - 0)] + 1\ [(-2 - 0)]$

$= (\ 2\ X\ -8) - (3\ X\ 0) + (1\ X\ -2)$

$= -16 - 0\ -2 = -18$

2- يمكن إيجاد قيمة المحدد باستخدام عناصر العمود الأول:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\,(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$|A| = 2\ [(1\ X\ 0) - (2\ X\ 4)] + 1\ [(3\ X\ 0) - (2\ X\ 1)] + 0\ [(3\ X\ 4) - (1\ X\ 1)]$

$= 2\ [(\ 0 - 8)] +1\ [(0 - 2)] +0\ [(12 - 1)]$

$= (\ 2\ X\ -8) + (1\ X\ -2) + (0\ X\ 11)$

$= -16\ -2 + 0 = -18$

مثال: أوجد قيمة المحدد باستخدام طريقة الضرب القطري وباستخدام المحددات الصغرى:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل

أولاً: قيمة المحدد بطريقة الضرب القطري:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right|$$

قيمة المحدد = مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية – مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الفرعية

$= [(2 \text{ X } 2 \text{ X } 0) + (1 \text{ X } 1 \text{ X } 1) + (5 \text{ X } 3 \text{ X } -2)$

$- [(0 \text{ X } 2 \text{ X } 1) + (2 \text{ X } 1 \text{ X } -2) + (1 \text{ X } 3 \text{ X } 0)]$

$= [0 + 1 + 0] - [0 - 4 + 0)$

$= 1 + 4 = 5$

ثانياً: قيمة المحدد بطريقة المحددات الصغرى

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$= 2 (0 + 2) - 1 (0 - 1) + 0 (6 - 2)$

$= 4 + 1 + 0 = 5$

استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية (طريقة كريمر):

إذا كان لدينا المعادلات الخطية الآتية، يتم استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية كما يلي:

أ) حل معادلتين ذات متغيرين:

$a_{11}x + a_{12}y = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y = b_2$

يتم إتباع الخطوات الآتية:

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2- إيجاد قيمة محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} b_{1} & a_{12} \\ b_{2} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3- إيجاد قيمة محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{1} \\ a_{21} & b_{2} \end{vmatrix}$$

4- يتم إيجاد قيم المتغيرات كما يلي:

$$X = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|}$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|}$$

مثال: حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات (طريقة كريمر):

$2x + 4y = 20$

$5x - 10y = 10$

الحل

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}$$

= (2 X -10) – (5 X 4)

= -20 – 20 = -40

2- إيجاد قيمة محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 10 & -10 \end{vmatrix}$$

= (20 X -10) – (10 X 4)

= -200 – 40 = -240

2- إيجاد قيمة محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$

= (20 X 10) – (5 X 20)

= -20 – 100 = -80

4- يتم إيجاد قيمة y,x كما يلي:

$$X = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{-240}{-40} = 6$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-80}{-40} = 2$$

ويمكن التحقيق أو التأكيد من خلال التعـويض عـن قـيم y, x في المعـادلات نجد أن الطرفين متساويين:

مثال: حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات:

$$3x + 2y = 1$$
$$-2x + y = 2$$

الحل

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3 + 4 = 7$$

2- إيجاد قيمة محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 - 4 = -3$$

2- إيجاد قيمة محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 6 + 2 = 8$$

4- يتم إيجاد قيمة y, x كما يلي:

$$X = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{-3}{7}$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{8}{7}$$

مثال: حل المعادلات الآتية:

$$3x + 2y = 7$$
$$-4x + 5y = 6$$

الحل

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (3 \text{ X } 5) - (-4 \text{ X } 2)$$
$$= 15 - (-8)$$
$$= 15 + 8 = 23$$

2- إيجاد قيمة محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 35 - 12 = 23$$

2- إيجاد قيمة محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 18 + 28 = 46$$

4- يتم إيجاد قيمة y , x كما يلي:

$$X = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{23}{23} = 1$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{46}{23} = 2$$

ب- حل ثلاث معادلات ذات ثلاث متغيرات

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

يتم الحل كما يلي:

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2- إيجاد قيمة محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} b_{1} & a_{12} & a_{13} \\ b_{2} & a_{22} & a_{23} \\ b_{3} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3- إيجاد قيمة محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{1} & a_{13} \\ a_{21} & b_{2} & a_{23} \\ a_{31} & b_{3} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3- إيجاد قيمة محدد z هو $|\Delta z|$ كما يلي:

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

4- يتم إيجاد قيم المتغيرات كما يلي:

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} \qquad y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} \qquad X = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|}$$

مثال: حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات (طريقة كريمر):

$x + 3y - z = 4$

$2x + y + 2z = 10$

$2x - y + z = 4$

الحل

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

يتم إيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام طريقة الضرب القطـري أو طريقة المحددات الصغرى.

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1\ (1 + 2) - 3\ (2 - 6) - 1\ (-2 - 3)$

$= (1 \text{ X } 3) - (3 \text{ X } - 4) - (1 \text{ X } -5)$

$= 3 + 12 + 5 = 20$

2- قيمة محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 10 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta x| = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 4(1 + 2) - 3\ (10 - 8)\ -1\ (-10 - 4)$

$= 12 - 6 + 14 = 20$

3- إيجاد قيمة محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta y| = 1\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 1(10\text{-}8) - 4\ 2 - 6)\ -1\ (8 - 30)$

$= (1 \text{ X } 2) - (4 \text{ X } -4) - (1 \text{ X } -22)$

$= 2 + 16 + 22 = 40$

3- إيجاد قيمة محدد z هو $|\Delta z|$ كما يلي:

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta z| = 1\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1(4 + 10) - 3\ (8 - 30) + 4\ (-2 - 3)$

$= (1 \text{ X } 14) - (3 \text{ X } -22) + (4 \text{ X } -5)$

$= 14 + 66 - 20 = 60$

4- يتم إيجاد قيمة $z\ , y, x$ كما يلي:

- قيمة x كما يلي: $X = \frac{|\Delta X|}{|\Delta|} = \frac{20}{20} = 1$

- قيمة y كما يلي: $y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{40}{20} = 2$

- قيمة z كما يلي: $z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{60}{20} = 3$

تطبيقات اقتصادية على استخدام المحددات في حل المعادلات الخطية:

مثال: إحدى محلات بيع المكسرات تبيع الفستق بـ 5$ للكيلو، والبندق بـ1.5$ للكيلو، وقد قرر المدير أن يخلط 30 وحدة من البندق مع بعض الفستق لكي يبيع الخليط بـ3$ للكيلو. فما هو عدد الوحدات من الفستق الواجب خلطها مع البندق حتى يمكن تحقيق نفس الإيراد.

الحل

يمكن صياغة المشكلة في الجدول التالي:

الخليط	البندق	الفستق	بيان
3	1.5	5	السعر
Y	30	X	الكمية (عدد الوحدات)

يمكن صياغة المشكلة كما يلي:

$X + 30 = y$

$X - y = -30$..................(1)

$5x + 30(1.5) = 3y$

$5X - 3y = -45$...............(2)

وبذلك يتم حل المعادلتين باستخدام المحددات

$X - y = -30$

$5x - 3y = -45$

1) محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 5 = 2$$

2) محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} -30 & -1 \\ -45 & -3 \end{vmatrix} = 90 - 45 = 45$$

3) محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & -30 \\ 5 & -45 \end{vmatrix} = -45 + 150 = -105$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{45}{2} = 22.5$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{105}{2} = 52.5$$

مثال: شركة أحمد لإنتاج الأجهزة الكهربائية تقوم بالتخطيط لإنتاج الغسالات والثلاجات، فإذا كان إنتاج الغسالة الواحدة يحتاج إلى ساعة عمل في قسم التجميع، وثلاث ساعات عمل في قسم التشغيل، وإنتاج الثلاجة الواحدة يحتاج إلى ساعتان عمل في قسم التجميع وساعة عمل في قسم التشغيل، فإذا علمت أن طاقة قسم التجميع 40 ساعة عمل أسبوعياً، وطاقة قسم التشغيل 60 ساعة عمل أسبوعياً، فما هي الكمية الواجب إنتاجها أسبوعياً لاستغلال الطاقة المتاحة للشركة بالكامل.

الحل

يمكن وضع المعطيات في الجدول التالي:

المنتجات / الأقسام	الغسالة (x)	الثلاجة (y)	الطاقة المتاحة
قسم التجميع	1	2	40
قسم التشغيل	3	1	60

يتم تكوين المعادلات الخطية لكل قسم كما يلي:

$$X + 2y = 40$$

$$3X + y = 60$$

بحل هذه المعادلات باستخدام المحددات وباتباع الخطوات الآتية:

1- محدد المعاملات هو $|\Delta|$ كما يلي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = (1\times 1) - (2\times 3) = 1 - 6 = -5$$

2- محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 40 & 2 \\ 60 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta x| = (40\times 1) - 60\times 2) = 40 - 120 = -80$$

3- محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 60 \end{vmatrix}$$

$$|\Delta y| = (1\times 60) - (3\times 40) = 60 - 120 = -60$$

4- إيجاد قيم المتغيرات

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{-80}{-5} = 16$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-60}{-5} = 12$$

أي أنه لاستغلال الطاقة المتاحة أسبوعياً للمصنع فإنه لا بد من إنتاج 16 غسالة، 12 ثلاجة أسبوعياً.

مثال: شركة منة الله لإنتاج السيارات تقوم بالتخطيط لإنتاج ثلاثة أنواع من السيارات هي (مرسيدس ، BMW ، تويوتا) فإذا كان إنتاج السيارة المرسيدس يحتاج إلى ساعة عمل في مركز الإنتاج الأول، و3ساعات عمل في مركز الإنتاج الثاني، و4 ساعات عمل في مركز الإنتاج الثالث، وإنتاج السيارة BMW يحتاج إلى 3 ساعات عمل في مركز الإنتاج الأول، وساعتان عمل في مركز الإنتاج الثاني، وساعتان عمل في مركز الإنتاج الثالث، وإنتاج السيارة التويوتا يحتاج إلى 4 ساعات عمل في مركز الإنتاج الأول، 3 ساعات عمل في مركز الإنتاج الثاني، وساعة عمل في مركز الإنتاج الثالث. فإذا علمت أن طاقة مركز الإنتاج الأول 21 ساعة عمل أسبوعياً، وطاقة مركز الإنتاج الثاني 24 ساعة عمل أسبوعياً، وطاقة مركز الإنتاج الثالث 24 ساعة عمل أسبوعياً.

المطلوب:حدد الكمية الواجب إنتاجها أسبوعياً من الأنواع الثلاثة بحيث يتم استغلال الطاقة المتاحة بالكامل.

الحل

يمكن استخراج المعطيات في الجدول التالي:

المنتجات / الأقسام	المرسيدس (x)	BMW (y)	تويوتا (z)	الطاقة المتاحة
المركز الأول	1	3	4	21
المركز الثاني	3	2	3	24
المركز الثالث	4	2	1	24

وبالتالي يمكن وضع المطلوب في صورة معادلات ثلاثة ذات ثلاثة مجاهيل (متغيرات) كما يلي: (بحيث تكون معادلة لكل مركز).

$$x + 3y + 4z = 21$$
$$3x + 2y + 3z = 24$$

$4x + 2y + z = 24$

حيث أن (x) تمثل عدد السيارات الواجب إنتاجها من المرسيدس.

(y) تمثل عدد السيارات الواجب إنتاجها من BMW.

(z) تمثل عدد السيارات الواجب إنتاجها من تويوتا.

وبحل المعادلات باستخدام المحدد كما يلي:

1- إيجاد قيمة محدد المعاملات هو $|\Delta|$:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,[2 - 6] - 3[3 - 12] + 4\,[6 - 8]$$

$$= (1 \text{ X } -4) - (3 \text{ X } -9) + (4 \text{ X } -2)$$

$$= -4 + 27 - 8 = 15$$

2- قيمة محدد x هو $|\Delta x|$ كما يلي:

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 21 & 3 & 4 \\ 24 & 2 & 3 \\ 24 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

باستخدام الطريقة السابقة نجد أن:

$$|\Delta x| = 60$$

3- إيجاد قيمة محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 21 & 4 \\ 3 & 24 & 3 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

وباستخدام الطريقة السابقة نجد أن:

$$|\Delta y| = 45$$

4- إيجاد قيمة محدد z هو $|\Delta z|$ كما يلي:

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 21 \\ 3 & 2 & 24 \\ 4 & 2 & 24 \end{vmatrix}$$

وباستخدام الطريقة السابقة نجد أن:

$$|\Delta z| = 30$$

5- يتم إيجاد قيمة z, y, x كما يلي:

$$X = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{60}{15} = 4$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{45}{15} = 3$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{30}{15} = 2$$

مثال: حدد الدخل التوازني ومعدل الفائدة التوازني في ضوء المعلومات الآتية:

- المعلومات الخاصة بسوق السلع والخدمات

$$C = 0{,}7y + 85$$

$$I = -50r + 1200$$

- المعلومات الخاصة بسوق النقد.

$$M_s = 500$$

$$M_d = 0{,}2y - 40r + 230$$

الحل

1- توازن سوق السلع والخدمات (IS)

$$Y = C + I$$

$$y = 0{,}7y + 85 - 50r + 1200$$

المعادلة رقم (1): $0{,}3y + 50r = 1285$

2- توازن سوق النقد (LM):

$$M_d = M_s$$

$$0{,}2y - 40r + 230 = 500$$

المعادلة رقم (2): $0{,}2y - 40r = 270$

بحل المعادلتين (1)، (2) باستخدام المحددات تحصل على السعر التوازني والفائدة التوازنية:

$$0,3y + 50r = 1285$$
$$0,2y - 40r = 270$$

1- إيجاد محدد المعاملات هو $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 0,3 & 50 \\ 0,2 & -40 \end{vmatrix}$$
$$= -12 - 10 = -22$$

2- محدد y هو $|\Delta y|$ كما يلي:

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1285 & 50 \\ 270 & -40 \end{vmatrix}$$
$$= -51400 - 13500 = -64900$$

3- محدد r هو $|\Delta r|$ كما يلي:

$$|\Delta r| = \begin{vmatrix} 0,3 & 1285 \\ 0,2 & 270 \end{vmatrix}$$
$$= 81 - 257 = -176$$

4- فإن قيم r, y كما يلي:

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-64900}{-22} = 2950$$

$$r = \frac{|\Delta r|}{|\Delta|} = \frac{-176}{-22} = 8\%$$

وبذلك فإن الدخل التوازني هو 2950 ومعدل الفائدة التوازني هو 8٪.

مثال: شخص لديه 5000$ يريد استثمارها في ثلاثة بدائل استثمارية متاحة أمامه، تعطي عائد سنوي قدره 6٪ ، 7٪ ، 8٪ على التوالي، فإذا كان إجمالي الدخل

المتحقق هو 358$، وإذا علمت أن الدخل المحقق من البديلين الاستثماريين الأول والثاني يزيد مقدار 70$ عن الدخل المحقق من البديل الاستثماري الثالث.

المطلوب: تحديد المبلغ الواجب استثماره في كل بديل من البدائل الثلاثة لتحقيق الدخل السنوي المحقق.

الحل

- بفرض أن المبلغ المتاح للاستثمار في البديل الأول هو (x) والذي يحقق عائد سنوي قدره 6٪.
- بفرض أن المبلغ المتاح للاستثمار في البديل الثاني هو (y) والذي يحقق عائد سنوي قدره 7٪.
- بفرض أن المبلغ المتاح للاستثمار في البديل الثالث هو (z) والذي يحقق عائد سنوي قدره 8٪.

وبذلك فإن:

إجمالي المبلغ المتاح للاستثمار (5000)

البديل الأول	البديل الثاني	البديل الثالث
المبلغ: (x)	المبلغ: (y)	المبلغ: (z)
العائد: 0.06	العائد: 0.07	العائد: 0.08

- إجمالي العائد السنوي المحقق من البدائل الثلاثة = 358
- الدخل المحقق من البديلين الأول والثاني= 70 + الدخل المحقق من البديل الثالث.

وبذلك يمكن صياغة المشكلة كما يلي:

$$x + y + z = 5000$$

$$0.06x + 0.07y + 0.08z = 358$$

$$0.06x + 0.07y = 70 + 0.08z$$

يمكن ترتيب المعادلات وضرب المعادلتين الثانية والثالثة * 100 نحصل على:

$$x + y + z = 5000$$

$$6x + 7y + 8z = 35800$$

$$6x + 7y - 8z = 7000$$

بحل المعادلات الثلاثة باستخدام المحددات كما يلي:

1- محدد المعاملات هو $|\Delta|$ يساوي:

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = -16$$

2- محدد x هو $|\Delta x|$ يساوي:

$$|\Delta x|=\begin{vmatrix}5000 & 1 & 1\\ 35800 & 7 & 8\\ 7000 & 7 & -8\end{vmatrix}=-16000$$

3- محدد y هو $|\Delta y|$ يساوي:

$$|\Delta y|=\begin{vmatrix}1 & 5000 & 1\\ 6 & 35800 & 8\\ 6 & 7000 & -8\end{vmatrix}=-35200$$

4- محدد z هو $|\Delta z|$ يساوي:

$$|\Delta z|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 5000\\ 6 & 7 & 35800\\ 6 & 7 & 7000\end{vmatrix}=-28800$$

- قيمة x

$$x=\frac{|\Delta x|}{|\Delta|}=\frac{-16000}{-16}=1000$$

- قيمة y

$$y=\frac{|\Delta y|}{|\Delta|}=\frac{-35200}{-16}=2200$$

- قيمة z

$$z=\frac{|\Delta z|}{|\Delta|}=\frac{-28800}{-16}=1800$$

ثانياً: المصفوفات:

تعريف المصفوفة:

المصفوفة عبارة عن منظومة من العناصر مرتبة في شكل صفوف وأعمدة داخل قوسين كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

كما أنه ليس من الضروري أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، فإذا رمزنا لعدد الصفوف بالرمز (m) ولعدد الأعمدة بالرمز (n) فإن المصفوفة ($m \neq n$ أو $m = n$) ويرمز للمصفوفة بالرمز [Amn] حيث أن m عدد الصفوف، وn عدد الأعمدة.

وبذلك تعرف المصفوفة على أنها شكل أو منظومة رياضية تشمل مجموعة من العناصر (الأرقام أو الرموز) مرتبة في شكل صفوف وأعمدة وليس شرطاً أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة- بمعنى أنها تأخذ شكل مستطيل أو مربع- ولا يمكن حل أو فك المصفوفة وحساب قيمة لها، وتستخدم المصفوفات في حل بعض المشاكل الاقتصادية والإدارية الهامة والتي يمكن التعبير عنها في صورة معادلات خطية.

الشكل العام للمصفوفة:

يرمز للمصفوفة بالحروف الكبيرة Capital letters مثل (A, B, C) ويرمز للعناصر أو الأرقام التي تتكون منها المصفوفة بالحروف الصغيرة Small letters، مثل (a, b, c) فمثلا [A] تحتوي على العناصر (a_{ij}) ويكون لها عدد (i) من الصفوف وعدد (j) من الأعمدة، وتأخذ المصفوفة الشكل التالي:

$$A(mn) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2j} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتعرف المصفوفة أعلاه بأنها تتكون من عدد (m) من الصفوف (rows) وعدد (n) من الأعمدة (columns) وتكتب [Amn].

وتقرأ المصفوفة Amn أو المصفوفة من الدرجة mn ويمثل العنصر a_{ij} العنصر الذي يقع في الصف (i) وفي العمود (j)، فمثلا (a_{23}) تمثل العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثالث. وهو العنصر الذي أحيط بدائرة في المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & (6) \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

أنواع أو أشكال المصفوفات:

تأخذ المصفوفة أشكالاً مختلفة، وبالتالي يمكن تقسيم أنواع المصفوفات وفقاً

للعلاقة بين عدد الصفوف وعدد الأعمدة، وكذلك وفقاً لطبيعة العناصر الداخلة في تكوين المصفوفة وعلاقتها ببعضها.

تتعدد أنواع وأشكال المصفوفات وفقاً لعدد الصفوف وعدد الأعمدة كما يلي:

1- المتجه الأفقي:

وهو مصفوفة مكونة من صف واحد وأي عدد من الأعمدة كما يلي:

فمثلاً: $A=[3\quad 5]$ هو $[A_{12}]$ متجه أفقي من صف واحد وعمودين.

فمثلاً: $A=[1\quad 2\quad 3]$ هو $[A_{13}]$ متجه أفقي من صف واحد وثلاثة أعمدة.

2- المتجه الرأسي:

وهي مصفوفة مكونة من عمود واحد وأي عدد من الصفوف كما يلي:

فمثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ متجه رأسي مكون من عمود واحد وصفان $[A_{21}]$.

فمثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ متجه رأسي مكون من عمود واحد وثلاثة صفوف $[A_{31}]$.

فمثلاً: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ متجه رأسي مكون من عمود واحد وأربعة صفوف $[A_{41}]$.

3- المصفوفة الصفرية:

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار، بمعنى أنه يطلق على المصفوفة اسم المصفوفة الصفرية (Zero matrix or null matrix) إذا كان كل عنصر من عناصر المصفوفة يساوي صفراً.

$$[A_{mn}]=[O_{mn}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{mn}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{mn}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة المربعة

هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها مساوياً لعدد أعمدتها، بمعنى أن المصفوفة تسمى مصفوفة مربعة إذا كان عدد الصفوف بها يساوي عدد الأعمدة $(m = n)$ ويرمز للمصفوفة المربعة التي تحتوي على عدد (m) من الصفوف وعدد (n) من الأعمدة بأنها مصفوفة من الدرجة (n) ويطلق على مجموعة العناصر القطرية $(a_{11} \quad a_{22} \quad a_{32} \dots A_{nn})$ عناصر القطر الرئيسي (Principal Digital).

فمثلاً:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة مكونة من صفين وعمودين.

فمثلاً:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة مكونة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة مربعة مكونة من عدد (n) من الصفوف وعدد (n) من الأعمدة.

ويعرف القطر الرئيسي بأنه القطر أو المحور الذي يتكون من صف العناصر الذي يمتد من الركن العلوي الشمالي الغربي إلى الركن السفلي الجنوبي الشرقي.

5- المصفوفة القطرية:

تعرف المصفوفة القطرية بأنها مصفوفة مربعة قطرية إذا كان كل عنصر فيها لا يقع على القطر الرئيسي يساوي صفراً. مثل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6- مصفوفة الوحدة

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها = صفراً ما عدا عناصر القطر الرئيسي فتساوي الواحد الصحيح. مثل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

7- المصفوفة المثلثية:

المصفوفة المثلثية هي عبارة عن مصفوفة مربعة تأخذ الشكل التالي:

مثل: المصفوفة المثلثية العليا

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 15 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

مثل: المصفوفة المثلثية السفلى

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

يلاحظ أن المصفوفة المثلثية هي المصفوفة التي يكون كل عنصر على يمين (أو على يسار) القطر الرئيسي يساوي صفراً، كما يمكن أن تكون بعض عناصر القطر الرئيسي تساوي أصفاراً.

8- المصفوفة المتناظرة أو المتماثلة:

يقال عن المصفوفة المربعة بأنها متماثلة أو متناظرة إذا كان $a_{ji} = a_{ij}$ لكل قيم i, j. وعلى ذلك فإنه يقال أن المصفوفة متماثلة إذا كانت العناصر على يمين القطر الرئيسي مماثلة للعناصر على يسار هذا القطر.

$$[A]=\begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 15 & 14 \\ 0 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$

وبذلك فهي المصفوفة التي إذا بدلنا صفوفها بأعمدتها وأعمدتها بصفوفها لا تتغيرعناصرها، وبالطبع هي مصفوفة مربعة، عدد الصفوف = عدد الأعمدة.

9- المصفوفة القياسية:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوي الصفر باستثناء العناصر الواقعة على القطر الرئيسي فتساوي قيمة ثابتة بخلاف الواحد، وليكن k مثلاً وبالتالي فإنها تساوي مصفوفة الوحدة مضروبة في مقدار ثابت k، حيث أن k ≠ صفر، k ≠ واحد. وبالتالي فإنها تمثل أيضاً حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

$$A_{mn}=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$