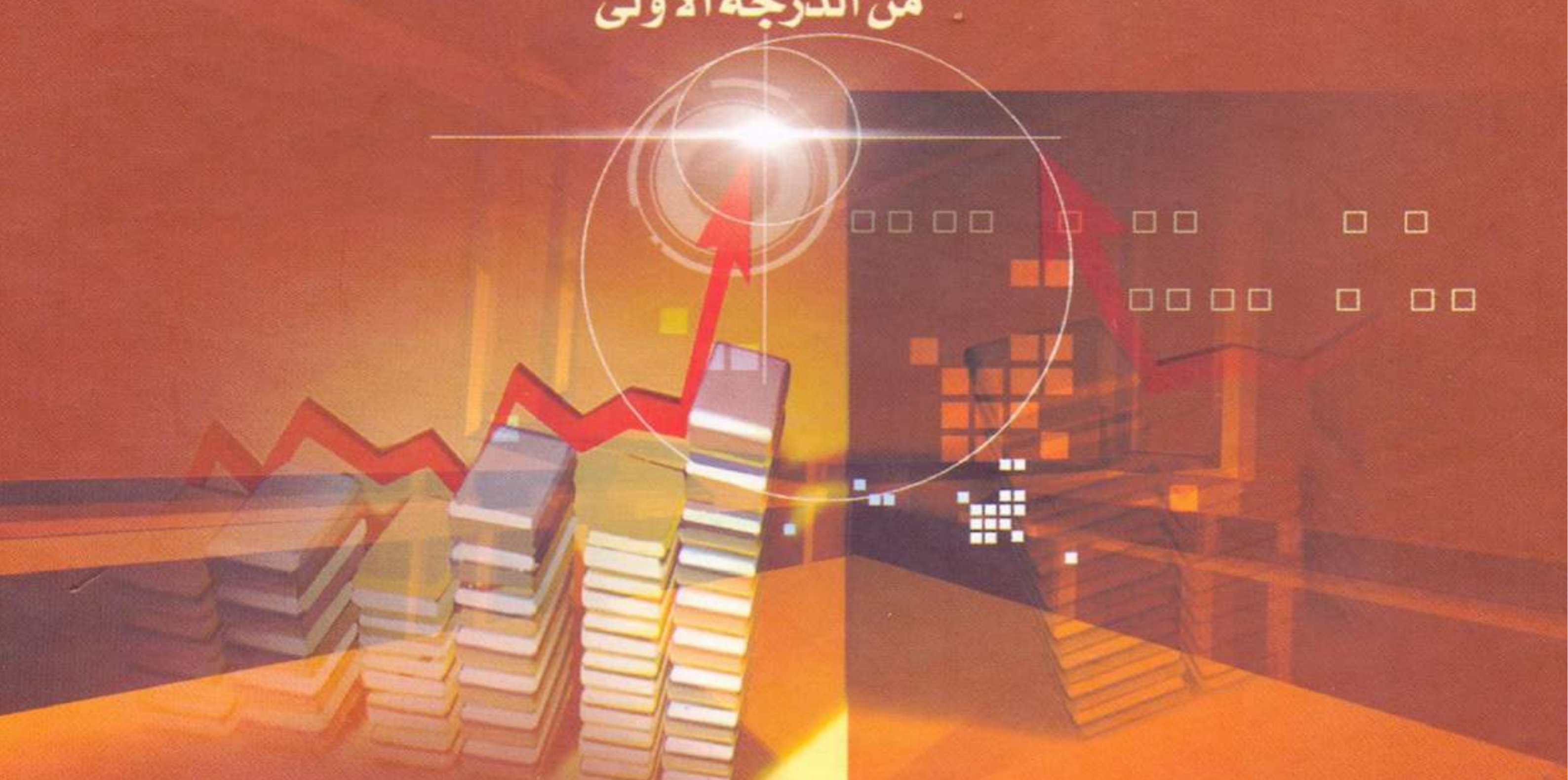
أساسيات

الإقتصاد القياسي التحليلي

FUNDAMENTALS OF ANALYTICAL ECONOMETRICS

نظرية الإقتصاد القياسي والإختبارات القياسية من الدرجة الأولى



أ.د. وليد إسماعيل السيفو

جامعة ويلز - سوانزي - بريطانيا

جامعة الزيتونة - عمان - الأردن

أ.د. فيصل مفتاح شلوف

جامعة ولاية أوريكون - الولايات المتحدة

جامعة عمر المختار - البيضاء - ليبيا

د.صائب جواد إبراهيم جواد

جامعة صوفيا - صوفيا - بلغاريا

جامعة صلاح الدين - أربيل - العراق

الأهلية

للنشر والتوزيع

الأهلية
للنشر والتوزيع

المملكة الأردنية - عمان
وسط البلد - خلف مطعم القدس
هاتف ٤٦٣٨٦٨٨ - فاكس ٤٦٥٧٤٤٥
ص.ب ٧٧٧٢ عمّان ١١١١٨ الأردن
المكتبة - جانب البنك المركزي

مكتب بيروت
بيروت - بئر حسن - شارع السفارات
هاتف: ٠١/٨٢٤٢٠٢ مقسم ١٩

أساسيات الاقتصاد القياسي التحليلي

نظرية الإقتصاد القياسي والإختبارات القياسية من الدرجة الاولى

أ.د. وليد إسماعيل السيفو
أ.د. فيصل مفتاح شلوف
د.صائب جواد إبراهيم جواد

الطبعة العربية الأولى ٢٠٠٦

◆ تصميم الغلاف: دار الفن للتصميم/ الأردن

الصف الضوئي : إيمان زكريا
عمان - هاتف ٠٧٩/٥٣٤٩١٥٦

منشورات 2006

E-mail: alahlia@nets.jo

تنفيذ وطباعة بيروت - لبنان - تلفاكس: ٠٠٩٦١١٢٧٢٢٢٥ خليوي: ٣١٢١٢٤-٣٣٤٦٤٨ / ٠٠٩٦١٣

أساسيات

الإقتصاد القياسي التحليلي

FUNDAMENTALS OF ANALYTICAL ECONOMETRICS

نظرية الإقتصاد القياسي والإختبارات القياسية

من الدرجة الأولى

أ.د. وليد إسماعيل السيفو

جامعة ويلز - سوانزي - بريطانيا

جامعة الزيتونة - عمان - الأردن

أ.د. فيصل مفتاح شلوف

جامعة ولاية أوريكون - الولايات المتحدة

جامعة عمر المختار - البيضاء - ليبيا

د.صائب جواد إبراهيم جواد

جامعة صوفيا - صوفيا - بلغاريا

جامعة صلاح الدين - أربيل - العراق

الأهلية

للنشر والتوزيع

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وَإِن تَعُدُّوا۟ نِعۡمَةَ ٱللَّهِ لَا تُحۡصُوهَآ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَغَفُورٌ رَّحِيمٌ﴾

[النحل: 18]

الإهداء

لكل من يساهم في كتابة كلمة طيبة في العلم والمعرفة

تخدم التطور والرقي لأوطاننا

المحتويات

الفصل الرابع:

الفصل الخامس:

الفصل التاسع:

الفصل العاشر

الفصل الرابع عشر:

بسم الله الرحمن الرحيم

مُقدِّمة

يعتبر هذا الكتاب بمثابة الجزء الأول من كتاب أساسيات الاقتصاد القياسي – النظرية القياسية والاختبارات القياسية من الدرجة الأولى. لقد تناول هذا الجزء الإطار النظري لأساليب الاقتصاد القياسي التحليلي من حيث مفهومه، ومكوناته، وطرقه التقديرية المختلفة لمعلمات النماذج القياسية. كما أعطى اهتمام خاص بطرق الاختبار المستخدمة في معرفة دقة ومعنوية المقدرات لتوضح حدود استخدامها في رسم السياسات واتخاذ القرارات الاقتصادية والإدارية والتنبؤ بسلوكياتها في المستقبل.

يمثل هذا الكتاب الإطار النظري الصرف لأساسيات علم الاقتصاد القياسي التحليلي. حيث يتضمن الكتاب أربعة عشر فصلاً:

تطرق الفصل الأول منها إلى المفهوم العام للاقتصاد القياسي وارتباطه بالعلوم ذات العلاقة به. كما تناول منهجية البحث العلمي المستخدمة من قِبَل القياس التحليلي. في حين جاء الفصل الثاني مهتماً بمكونات النموذج القياسي وصياغته ومراحل بنائه.

أما الفصل الثالث فجاء مهتماً بالمتغير العشوائي الذي يميز النموذج الاقتصادي القياسي عن بقية النماذج المستخدمة في التقدير. وكما هو معلوم فإن النماذج التقديرية تكون على نوعين، خطية وغير خطية بسيطة ومتعددة المتغيرات، والمتغيرات قد تكون كمية أو نوعية. وبناء نموذج قياسي لأي نوع منها يحتاج إلى بعض الفروض التي تستند عليها. ولهذا جاءت الفصول العشرة المتبقية مهتمة بتغطية

بناء تلك النماذج. فقد ركّز الفصل الرابع على مفهوم ومكونات النموذج الخط البسيط واشتقاق طريقة المربعات الصغرى إحصائياً ورياضياً.

أما الفصل الخامس فقد اهتم بالفروض التصادفية والفروض الأخرى لنموذ الانحدار الخطي البسيط. حيث إن توفر هذه الفروض هو الذي يعطي معلماد النموذج القياسي خصائص أفضل المقدرات الخطية الغير متحيزة. أما الفصل السادس والسابع فقد اهتما نظرياً وعملياً كلاً منهما باختبار دقة المعلمات المقدر وباستخدام اختباري الانحراف المعياري وجودة التوفيق المعتمدة على استخدا معاملي التحديد والارتباط. وأما اختبارات معنوية مقدرات النموذج القياسي فقد اهتم بهما الفصل السابع وذلك بإعطاء المفهوم النظري والعملي لاختباري (t) و (z) أيضاً تم شرح الاختبار للنموذج التقديري الكلي باستخدام اختبار (F).

أما النموذج القياسي المتعدد المتغيرات فقد اهتم في مفهومه ومكوناته كل من الفصل الثامن والتاسع حيث أعطى الفصل الثامن شرحاً لذلك مستعيناً بالطريقة الجبرية وبطريقة المصفوفات. أما الفصل التاسع فقد ركز اهتمامه على النموذج المتعدد المتغيرات المتكون من ثلاثة متغيرات مستقلة وكيفية معالجة معلماته واختبارها وذلك بالتطبيق العملي على دالة الطلب ودالة شركة المدافئ الكهربائية من حيث تقدير المعلمات والعلاقات وكيفية استخدامها في رسم السياسات واتخاذ القرارات والتنبؤ بسلوكياتهما مستقبلاً.

لقد انفرد الفصل العاشر بتحليل أهمية وتقدير أثر المتغيرات الوهمية وكيفية استخدامها في التقدير والتحليل القياسي. وقد اهتم الفصلين الحادي والثاني عشر بإعطاء تطبيقات اقتصادية وإدارية عن دور المتغيرات الوهمية وطرق تقدير معلماتها واختباراتها وكيفية استخدامها في رسم السياسات الاقتصادية والإدارية لمؤسسات أو القطاعات الاقتصادية والإدارية المختلفة.

أما الفصلين الأخيرين (الثالث والرابع عشر) فقد اهتما بالنماذج القياسية اللاخطية البسيطة والمتعددة المتغيرات. حيث أن الكثير من الدراسات القياسية الاقتصادية والإدارية قد أُهملت دراستها ولم تعطيها مكانتها العلمية المهمة من حيث البحث ومجال الاستخدام. ولهذا فقد اهتم الفصل الثالث عشر بمفهوم وطبيعة ومجال وأنواع النماذج اللاخطية البسيطة وتحديد أهم ما يمكن استخدامه منها في الدراسات الاقتصادية والإدارية.

وأخيراً جاء الفصل الرابع عشر مهتماً بأهم النماذج القياسية اللاخطية متعددة المتغيرات مع إعطاء تطبيقات إدارية واقتصادية عنها.

إضافةً إلى التوضيح النظري للنماذج القياسية والطرق الرياضية المستخدمة في حساب معلماتها التقديرية واختبارها، فإن الكتاب جاء متضمناً لتطبيقات عملية إدارية واقتصادية تسهل على المستخدم لهذا الأسلوب معرفة مراحل التقدير والاختبار وكيفية رسم السياسات واتخاذ القرارات المتعلقة بالمشاكل التي تعاني منها مختلف المؤسسات والشركات والقطاعات الاقتصادية.

أيضاً جاء هذا الكتاب خالياً من الملاحق الإحصائية والمصطلحات القياسية والمراجع العلمية لأنها مذكورة في الكتاب الثاني من أساسيات الاقتصاد القياسي التحليلي (الجزء الثاني) والموسوم بـ «أساسيات الاقتصاد القياسي التحليلي - مشاكل الاقتصاد القياسي والاختبارات القياسية من الدرجة الثانية» ولنفس المؤلفين.

والله ولي التوفيق

المؤلفون
2006 / 2005

مفهوم الاقتصاد القياسي وأهدافه

1

Definition & Scope of Econometrics

1.1 : الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى.

1.2 : أهداف الاقتصاد القياسي.

1.3 : فروع ومجالات الاقتصاد القياسي.

1.4 : منهجية البحث في الاقتصاد القياسي.

1.5 : تطبيقات وتمارين.

مفهوم الاقتصاد القياسي وأهدافه

Definition & Scope of Econometrics

1.1 : الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى :

1.1.1 : نبذة تاريخية :

في عام 1933 نشر محرر مجلة Econometrica وهي مجلة جمعية الاقتصاديين البريطانيين (راكنر فريش Ranger Frisch) مقالاً حدد فيه الإطار والطرائق التي تستخدم في الاقتصاد القياسي. وقد أكد فيها على أن النظرية الاقتصادية والطرائق الإحصائية والعلوم الرياضية هي الأركان الرئيسية في الاقتصاد القياسي.

وقد جرت عدة محاولات قبل ذلك مثل الاقتصادي (باريتو V. Pareto) (1848–1923) لاستخدام الرياضيات في دراسة توزيع الدخول في ضوء البيانات الدولية، كذلك فعل (أنجل Ernest Engel) لإيجاد العلاقة الرياضية والإحصائية بين الدخل والاستهلاك في ضوء تحليل ميزانية الأسرة وذلك عام 1821.

وفي بداية القرن التاسع عشر حاول الاقتصادي مورا (H.L. Moora) تحديد قيم عددية لبعض المتغيرات الاقتصادية وذلك من خلال دراسة عرض وطلب القطن وعلاقته بالأسعار على ضوء المعطيات الإحصائية عام 1917 ومنه أثر السعر على تحديد كمية الإنتاج والاستهلاك في مؤلفه: « Forecasting the Yeild & Price of Cotton»، والذي طوره تلميذه (هنري شولتز Henry Schulz) في كتابة الموسوم

عام 1929: Statistical Laws of Demand and Supply with Special Application to Sugar and Measurement of Demand.

كما طور (كوب ودوغلاس دالتهما المشهورة بدالة: Cobb-Douglas) في عام 1928، وفي الثلاثينات قام فيشر (Irving Firsher) (1947 - 1967) بتحديد أثر المتغيرات الاقتصادية على سعر الفائدة وكمية النقود. وأخيراً فقد تحددت ملامحه بشكل واضح عبر كتاب (جونستن) وبعده كتاب (النظرية القياسية) للبروفيسور (كوتستيانيس). وتوالت بعدها الأبحاث في هذا المجال حتى وقتنا الحاضر.

1.1.2 : مفهوم الاقتصاد القياسي Concept of Econometrics :

اشتق مصطلح الاقتصاد القياسي من أصل يوناني ومن الكلمتين Economic أي اقتصادي وMetrics وتعني قياس، أي (القياس الاقتصادي)؛ ومهمته قياس العلاقات الاقتصادية. ويجده البروفيسور (لانكه Osker Lang) أنه مشتق من مصطلح (Biometrics) وهو علم قياس العلاقات البيولوجية، وهو قياس ظهر في القرن التاسع عشر، ولا تزال هناك مجلة تحت نفس الاسم. وترى كوتسيانيس بأن علم الاقتصاد القياسي هو جمع علمي متناسق لطرائق ومفاهيم وتقنيات الرياضيات والإحصاء والاقتصاد وعلاقاتها. ويجده (H. Kelejian و Oates) بأنه (التحليل الكمي للسلوك الاقتصادي).

أما (جونستن J. Johnston) فقد حدده بـ: علم يهتم بتقييم واختبار المعلمات a,b وغيرها للنموذج الاقتصادي[1]. ويحدده (ساموليسون Samuelson) بأنه فرع من علم الاقتصاد يبحث في التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الحقيقية مستعيناً

(1) A. Koutsyiannis, The Theory of Econometrics, Second Edition, 1977, The Macmillan Press Ltd.: London, P. 3

بتطور النظرية الاقتصادية والطرائق الإحصائية[1]. ويجده (ثايل H.Theil) بأنه علم يتعامل مع التحديد العددي للقوانين الاقتصادية[2]. أما البروفيسور (لانج Lange) عرفه بأنه العلم الذي يبحث في تحديد قوانين كمية ثابتة بالطرق الإحصائية لمتغيرات الحياة الاقتصادية[3].

كما قام بعض الكُتّاب العرب بمحاولات لتعريفه مثل (عصام عزيز شريف) حيث يعرفه بأنه فرع من فروع علم الاقتصاد يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الواقعية المبني على أساس التماسك بين النظرية والمشاهدة متخذاً لذلك أساليب استقراء ملائمة[4]. وهذا التعريف مؤلف من تعريفات لثلاثة مؤلفين في هذا المجال وهم (ساموليسون، كوبمان وستون).

مما سبق يُفهم منه بأن التعريفات متشابهة وكلها تدور حول المشاكل الاقتصادية التي يتناولها الاقتصاد القياسي وأهمها:

تقديرات كميات وقيم المقادير الاقتصادية الرئيسية كالمرونات والميول الحدية ومعدلات التغير والنمو والمضاعف وهذه المفاهيم التي لها ارتباط واضح بالانحدار والاستدلال الإحصائي، وغيرها من طرائق التقدير والاختبار والتنبؤ.

---

(1) P. A. Samualson. T.C. Koopmans, "Report of Evaluative Committee for Econometrica, Econometric", vol. 2, No. 2, April 1954, PP. 141-146

(2) H.Theil, Principals of Econometrics, John Wiley & Sons inc. New York, 1971, P. 1.

(3) Osker Lang: Introduction to Econometrics. Pergamon Press Oxford 4th Ed. 1978 Chap. 1, P. 13

(4) د. عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981، صفحة 7.

1.1.3 : علاقة الاقتصاد القياسي بالنظرية الاقتصادية والإحصاء والرياضيات :

1 - الاقتصاد القياسي والنظرية الاقتصادية: الاقتصاد القياسي بحد ذاته هو انعكاس كمي للنظرية الاقتصادية اللفظية. فهو لا يختلف عن النظرية الاقتصادية إلا في تقنية تعبيره عن العلاقات الاقتصادية بين الظواهر وتحويلها إلى علاقات كمية (عددية) يمكن قياسها بالتقنيات الرياضية والإحصائية. فالتعابير اللفظية لا يمكن التعبير عنها عددياً إلا عبر تحويلها الكمي.

وبفضل هذه الأساليب والتقنيات بدأ علم الاقتصاد يتحول إلى علم دقيق ويقترب تدريجياً من العلوم الكمية الدقيقة الأخرى. لكن الفرق الجوهري بينهما هو أن الاقتصاد القياسي يفترض وجود عنصر عشوائي لا يمكن لأساليب الإحصاء والتبويب والتحليل تحديده، بينما النظرية الاقتصادية تفترض دقة كاملة في العلاقات.

2 - الاقتصاد القياسي والإحصاء الاقتصادي: الاقتصاد القياسي أو القياس الاقتصادي هو تطوير للإحصاء الاقتصادي، حيث يتناول الإحصاء الاقتصادي الجانب الوصفي في الإحصاء في المجال الاقتصادي الذي يتعلق بجمع البيانات وجدولتها ومحاولة وصف التطورات الحاصلة فيها خلال فترة زمنية معينة. واشتقاق بعض العلاقات بين متغيرات الظاهرة المدروسة بدون اللجوء إلى تقييم المتغيرات الاقتصادية[1].

فالإحصاء الاقتصادي علم يهتم بعملية جمع البيانات الاقتصادية باستخدام المشاهدة الإحصائية وجدولتها وعرضها ثم محاولة وصف اتجاه أو نمط تطور هذه المشاهدات خلال فترة زمنية، ويحاول أيضاً التعرف على العلاقات التي تكون موجودة بين المتغيرات الاقتصادية المختلفة. بهذا فهو جانب وصفي في علم الإحصاء

---

(1) D. Gujarati "Basic Econometrics", Beinard Baruch College City, University of New York, 1978, P.2.

بمعنى أنه لا يفسر التغيرات في المتغيرات الاقتصادية، كما أنه لا يقيس معلمات العلاقات الاقتصادية. أما الإحصاء الرياضي أو الإحصاء الاستدلالي فهو يتناول طرق القياس التي تستند إلى تجارب مختبرية خاضعة للرقابة بعد تثبيت العوامل المؤثرة[1]. وبعد تكييف الطرق الإحصائية (Statistical Methods) إلى المشاكل والعلاقات الاقتصادية حيث قد تداخلت نظريات الإحصاء والاقتصاد والطرق الإحصائي وتحولت إلى طرق قياسية (Econometric Methods) تهتم بالمتغيرات الاقتصادية العشوائية المحددة باستخدام العينات العشوائية.

3 - **الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي:** يمثل الاقتصاد الرياضي الجانب الكمي أو الانعكاس الكمي للعلاقات الاقتصادية التي تتناولها النظرية الاقتصادية، ولهذا فهما متطابقان فكل منهما يعكس ويقيس العلاقات الاقتصادية بصورة كمية (الاقتصاد الرياضي) وبصورة لفظية (النظرية الاقتصادية) وكلاهما علم دقيق ليس للعنصر العشوائي مكاناً بينهما.

لكن الاقتصاد الرياضي لا يهتم بقياس معلمات العلاقات الاقتصادية بل يتناولها على أنها معطاة أو مستخرجة بطرق إحصائية أو قياسية. كما يوجد في هذا الأخير العنصر العشوائي. لأنه في الرياضيات لا يوجد عنصر عشوائي إن كان ذلك في منحنى أو دالة، حيث لا مجال لانحراف المشاهدات الظاهرة عن القيم المعتمدة، (فالفرق بينهما إن وُجد فيمثل العنصر العشوائي).

1.2 : أهداف الاقتصاد القياسي Goals of Econometrics :

لكل علم أهداف معرفية (نظرية وتطبيقية)، وللاقتصاد القياسي الأهداف التالية:

---

(1) أ. كوستيانيس، نظرية الاقتصاد القياسي، ترجمة محمد عبدالعال النعيمي وآخرون، جامعة المستنصرية، 1991، بغداد، ص15.

1.2.1 : تحليل واختبار النظرية الاقتصادية Analysis, & Testing Economic Theory :

استخدم الاقتصاديون الأسلوب الاستخلاصي Deductive Method في وصف وتحليل الظواهر الاقتصادية ووضع الأسس النظرية الديناميكية للنظام الاقتصادي باستخدام الأسلوب اللفظي (Verbal Exposition). كما تم صياغة قوانين عامة وخاصة للعمليات التي تجري داخل النظام، وتأثير العوامل المكونة للظاهرة، كما أوضحتها فروض ودوافع السلوك الاقتصادي للوحدات الاقتصادية الكلية. لكن كل ذلك لم يكن بالإمكان التحقق من صحته إلا باستخدام العلاقات والصيغ الكمية، التي يقوم بها الاقتصاد الرياضي والقياسي، حيث تم التأكد من صحة النظريات من خلال التوصل إلى نتائج وأدلة عملية لاختبار القوة التفسيرية للنظريات الاقتصادية. بهذا فقد أصبح في الوقت الحاضر أمراً صعباً قبول نظرية أن لم تُثبت علمياً.

أما الاختبار فهو اختبار الفرض الاقتصادي الذي تضعه النظريات الاقتصادية كاختبار فرضية وجود علاقة بين السعر والطلب، حيث يمكن إيجاد مثل هذه العلاقة كمياً وإثبات صحة الفرض النظري.

1.2.2 : اتخاذ القرار ورسم السياسات Policy & Decision Making :

الاقتصاد القياسي يعطينا فرشة واسعة من العلاقات الكمية والقيم والمقادير التي لها مدلولات اقتصادية مهمة ودقيقة قابلة للاستخدام العملي لوضع الأرضية المناسبة لاتخاذ القرار الاقتصادي السليم، ومن ثم رسم السياسات الاقتصادية الضرورية لأداء وتوجيه حركة الاقتصاد القومي ووحداته المنفصلة، إن كان ذلك للمنظم أو المدير أو الدولة. واتخاذ القرار عملية اقتصادية - إدارية لها آثار اقتصادية كبيرة، لهذا فهي تتطلب دقة في المعلومات ودقة في العملية الإدارية ودقة في القرار بخلافه سيتحمل الاقتصاد القومي آثار اقتصادية واجتماعية خطيرة أحياناً.

ولأجل اتخاذ القرار معتمدين على الإحصاء والرياضيات والاقتصاد القياسي يتطلب ذلك الحصول على:

1- تقييم عددي لمعلمات النموذج الاقتصادية واختبار معنوياتها الإحصائية.

2- تقييم إحصائي واقتصادي لصحة العلاقات لدالة الانحدار أو أية دالة أخرى واختبار معنوياتها الإحصائية والاقتصادية.

3- اختبار قدرة النموذج على التنبؤ الاقتصادي الذي هو أساس اتخاذ القرار.

4- اختبار الوزن الاقتصادي للمتغير العشوائي الذي إن زاد عن حد ما قد يجعل من الوحدة الاقتصادية والاقتصاد القومي نظاماً غير قابل للتوجيه والتخطيط وذو سلوك متقلب غير قابل للسيطرة.

فمعلمات المرونة والمعلمات الفنية للإنتاج والكلف الحدية والمقادير الحدية الأخرى كالميل الحدي للاستهلاك والادخار والاستثمار والاستيراد وغيرها من المعلمات وتقييمها ودقة هذه القيم، وآثارها الاقتصادية الكبيرة على التنبؤ واتخاذ القرار.

فرسم السياسة الاقتصادية عملية اقتصادية تعتمد على المعلومات الواقعية والمعالجة اقتصادياً وقياسياً، وعلى ضوئها ترسم سياسيات وتوضع بدائلها لمعالجة أوضاع معينة ورسم مسار وسلوك موجهين. فعندما يكون هناك عجز في ميزان المدفوعات، فقد يكون لتخفيض قيمة العملة أثر في تخفيضه. وهذا الأثر المفروض أن يدرس ويقيم، وإلا سيكون أثره سلبياً بدلاً من الأثر الإيجابي المتوقع كما هو الحال في النظم الاقتصادية النامية حيث أن تخفيض قيمة العملة لم يؤدي في النتيجة إلى تشجيع الصادرات، لأن العلاج ليس بالعملة بل بالإنتاج وكلفته وجودته وحداثته ونوعيته وغيرها. كذلك سياسات فرض الضرائب على الدخل والضرائب على الإنتاج وعلاقتها بالمرونات.. الخ.

1.2.3 : التنبؤ بالقيم الاقتصادية (السلوك الاقتصادي المستقبلي) : Forecasting (Predicting) Future Behaviors

إن القدرة التنبؤية في الاقتصاد لا تقوم على الحدس وسرعة البديهة والخبرة فقط بل على أسس كمية دقيقة لاحتمالات سلوك النظام المعني مستقبلاً وفي ضوء تحليل سلوكه الحالي والماضي عبر الدراسات القياسية المختلفة، والتنبؤ يتطلب إجراءات وسياسات، فمثلاً دراسة علاقات البطالة والتضخم، تتطلب دقة في توقع البطالة على ضوء ما تسمح به الدولة من نمو تضخمي مستقبلي وكذلك الحالة مع الاستخدام والادخار والاستثمار.. الخ.

1.3 : فروع ومجالات الاقتصاد القياسي :

1.3.1 : فروع الاقتصاد القياسي :

للاقتصاد القياسي فرعان هما:

الأول: الاقتصاد القياسي النظري (Theoretical Econometrics): وهو يهتم بتطوير طرق الإحصاء والقياس (Measurment & Statistical Methods) لقياس العلاقات الاقتصادية، وهي علاقات لمعادلة مقدرة أو معادلات آنية.

الثاني: الاقتصاد القياسي التطبيقي (Applied Econometrics): وهو تطبيق للطرق القياسية على فروع معينة من الاقتصاد النظري كالعرض، الطلب، الاستهلاك والاستثمار... الخ.

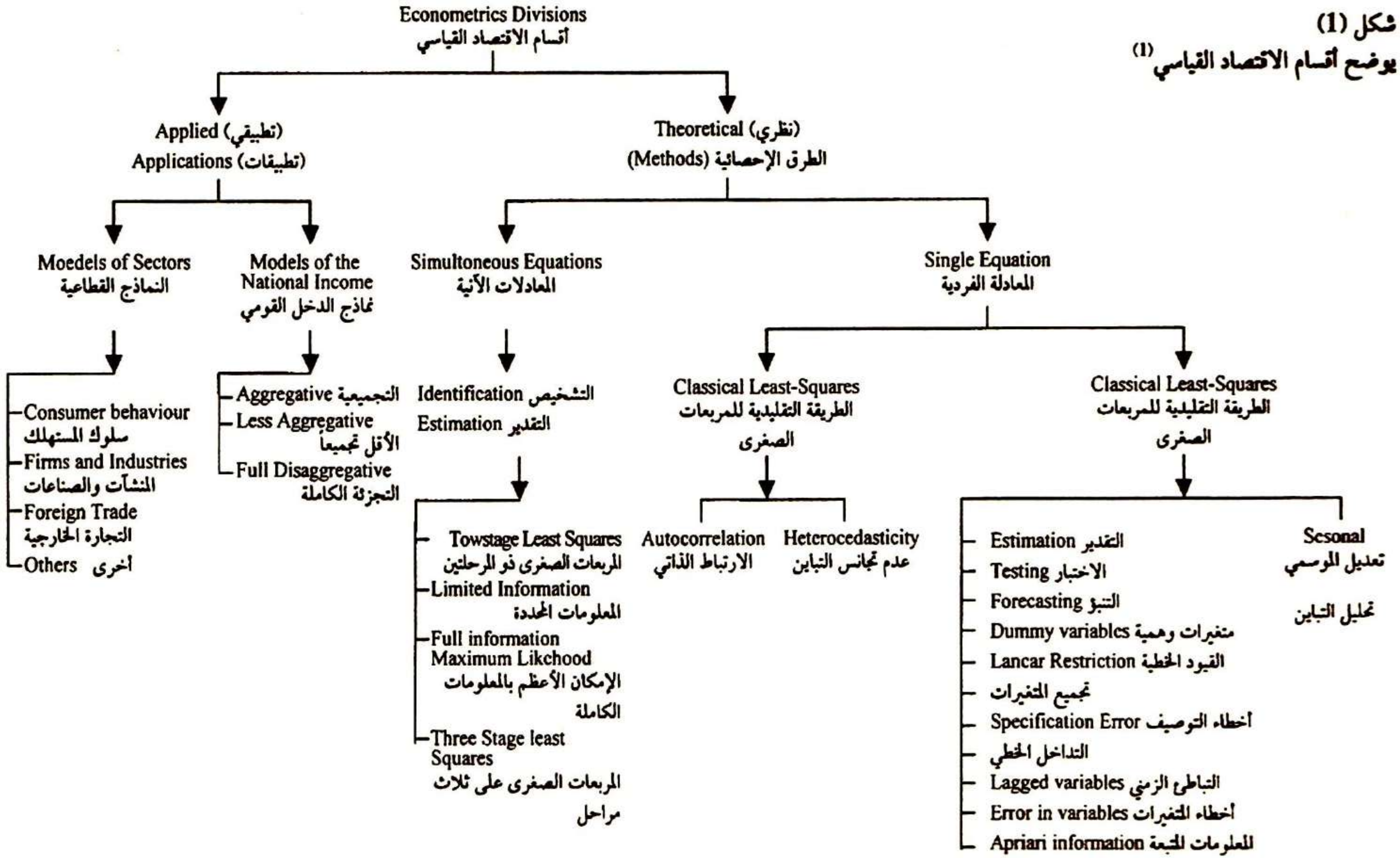
ويتطرق الاقتصاد القياسي التطبيقي إلى استخدام أدوات القياس النظري لتحليل الظواهر الاقتصادية واختبارها والتنبؤ للسلوك الاقتصادي، وعليه فإن المخطط أدناه يوضح هذين الفرعين الأساسيين مع أجزائهما[1]، انظر إلى الشكل (1) أدناه.

---

(1) وليد السيفو، المدخل إلى الاقتصاد القياسي، منشورات جامعة الموصل، 1988، ص 28-30.
انظر أيضاً: وليد السيفو وآخرون، الاقتصاد القياسي التحليل - النظرية والتطبيق، منشورات دار المجدلاوي - عمان / الأردن، 2004.

شكل (1)

يوضح أقسام الاقتصاد القياسي[1]



---

(1) وليد السيفو، د. أحمد مشعل: الاقتصاد القياسي التحليلي – بين النظرية والتطبيق، دار الجدلاوي للنشر، 2004، عمان – الأردن.

1.3.2 : مجال الاقتصاد القياسي :

للاقتصاد القياسي مجال واسع كعلم منفصل بذاته وكعلم مساعد للنظرية والممارسة الاقتصادية، ويتسع مجاله إلى الآتي:

1- اختبار الفروض التي تتصل بالعلاقات السببية بين المتغيرات الاقتصادية من خلال قياس العلاقة الاقتصادية (العلاقة القياسية) ومن ثم اختبار هذه العلاقة، وأسباب الاختلاف بين المقدر والحقيقي، وتقدير حجم الاختلاف، وتحديد القيم التي هي أقرب إلى الحقيقة المعبر عنها بأسباب التغير في الظاهرة عبر المشاهدات الإحصائية الاقتصادية.

2- تقدير قيم المعلمات (Parameters) بين المتغيرات الاقتصادية بصورة كمية، كالعلاقة بين الاستهلاك والدخل، ومن ثم تقدير قيم المتغير التابع بصورة صحيحة لتكون أقرب إلى الواقع المشاهدة، أو تصحيحه.

3- استخدام القيم المتعددة بطريقة صحيحة في التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات التالية والمستقبلية على حد سواء مع تقدير هامش الخطأ فيها.

4- البحث عن أنسب الدوال الرياضية التي تعبر عن العلاقات الاقتصادية تعبيراً دقيقاً وتحديد عدد متغيراتها وشكلها.

5- البحث عن تأثير عدم دقة البيانات ومدى تأثيرها على عملية التقدير والنتائج المستخلصة، وتقدير الخطأ نتيجة ذلك وقياسه.

6- تحديد الطرق الخاصة بالقياس الاقتصادي وتقنياته.

7- دراسة التأثيرات المتبادلة بين المتغيرات التابعة والمستقلة.

1.3.4 : وظائف الاقتصاد القياسي :

للاقتصاد القياسي وظيفتين رئيسيتين وهما :

1- توفير الأساليب التي يمكن على أساسها قبول أو رفض النظريات الاقتصادية.

2- توفير تقدير كمي للقيم التي تقيس العلاقات الاقتصادية وقوانينها، والتنبؤ بسلوكياتها المستقبلية (كمياً).

1.4: منهجية البحث في الاقتصاد القياسي Methodology of Econometric Research :

لا يختلف الاقتصاد القياسي عن غيره من العلوم الاقتصادية والرياضية في منهجية بحثه. إلا أنه يركز في بحثه على إيجاد ثلاثة قيم رئيسية وهي:

1- قيم المعلمات الاقتصادية القياسية (Econometrics Parameters)، وهي القيم التي تمثل حلقة الوصل والقياس بين المتغيرات المستقلة والتابع. ولهذا يتركز جل اهتمامها البحث عن أفضل الطرق التي يمكن أن نجد بواسطتها هذه المعلمات بأدق مستوى ممكن لتعبر أصدق تعبير عن طبيعة وقوة العلاقات الحقيقية الموجودة بين المتغيرات، إن كان ذلك للمجتمع أو العينة بحيث تصل إلى تطابق قيمها مع تلك القيم الخاصة بالمجتمع. كما أنها تكون ممثلة لحقيقة الوضع الاقتصادي للظاهرة قيد الدراسة وسلوكها في الحاضر والماضي.

2- قيم المتغير العشوائي (e_i) أو (u_i)، والذي يمثل حلقة الوصل بين القيم الحقيقية والقيم المقدرة، والذي يقارب فيما بينهما وصولاً إلى الصفر بقصد الوصول إلى أقرب دقة للقيم المقدرة (Exactness).

3- قيم المتغير التابع المقدرة أو المستقبلية وكذلك قيم المتغيرات المستقلة من خلال الإسقاط والاستطالة (Interpolation & Extrapolation). ولفرض الوصول إلى هذه القيم يتطلب الأمر حسب المنهج القياسي اتباع الخطوات أو المراحل الآتية.

1.4.1 : المرحلة الأولى ويمكن تسميتها بالمرحلة المعلوماتية (Infromatical Stage) :

وهي مرحلة بالغة الأهمية في القياس والوصف والتحليل فرغم أنها تتعلق بالإحصاء وطبيعته، إلا أنها القاعدة الوحيد والمنطلق الحاسم للقياس، وتضم هذه المرحلة الإجراءات الآتية:

1 - التحقق من البيانات المتوفرة والمجموعة عن تطور الظاهرة وسلوكها في الماضي وتدقيقها عبر دراسة المجتمع الإحصائي وأسلوب اختيار العينة وملاءمتها للمجتمع، ودقة المعالجة المعلوماتية وتقنيته ودقة جدولة المعلومات ووضعه في رسوم بيانية مناسبة، وعزل المعلومات المشوشة وتحديد التشويش ومصدره.. الخ.

فإذا أردنا دراسة (الميل الحدي للادخار) في ليبيا، فإننا على يقين بأن المعلومات المتوفرة في المصارف لا تكفي لتسجيل حقائق دقيقة عن الادخارات السنوية، لأن النظام المصرفي الليبي لا يعتمد على تطوير الإيداعات (لعدم وجود الحسابات الادخارية في أغلب المصارف) وكذلك عن عدد المدخرين... الخ. ولا تخلو بحوث ميزانية الأسرة من أخطاء ليست بالهيّنة بسبب نقص الوعي الإحصائي عند المواطن والباحث، مما يعطينا صورة مغلوطة عن هذا المؤشر الحيوي بسبب عدم دقة المعلومات ومصادرها وأسلوب جمعها وتبويبها ومعالجتها... الخ. لهذا يجب أن يلجأ الباحث إلى مصادر أخرى للمعلومات للمقارنة والقياس والمطابقة ليتسنى له اعتماد البيانات.

2 - المعالجة الإحصائية للبيانات كإيجاد المتوسطات المتحركة والثابتة وإزالة المعلومات الشاذة وتصنيفها لأغراض القياس. ويقوم بهذه المهمة الإحصاء الاقتصادي وهو يُعد بمثابة العجلات التي يسير بها الاقتصاد القياسي.

1.4.2 : المرحلة الثانية – مرحلة الفروض الاقتصادية القياسية وتشخيص النموذج

: Maintained Econometric Hypothesis & Specification of Model

تعتبر الفروض الاقتصادية القياسية المعتمدة على النظرية الاقتصادية، فروض مؤكدة، لأن ذلك يعني افتراض وجود علاقة بين المتغيرات التابعة والمستقلة، ويتم تحديد ذلك كما يلي:

أولاً: هو إسقاط أزواج المتغيرات على إحداثيات معينة ورسم الشكل الانتشاري الذي يمكن أن يؤكد لنا وجود علاقة أو عدم وجود علاقة بين المتغيرات، والقوة التقديرية لهذه العلاقة وبناء النموذج الاقتصادي Economic Model على ضوئها.

ثانياً: هو صياغة هذه العلاقة باستخدام الرموز الرياضية كتصوير العلاقة بين السعر والطلب على شكل معادلة رياضية معينة كالآتي:

$$D = a - bP$$

حيث أن: D : تمثل الكمية المطلوبة.

P : تمثل السعر.

b,a : تمثل قيم (المعلمات).

ثالثاً: وهي صياغة النموذج الرياضي (Formulation of Mathematical Model) وهو نموذج افتراضي لخطية أو لا خطية العلاقة بين المتغيرات وذلك اعتماداً على الشكل الانتشاري وكذلك تحديد المعلمات التي تحل العلاقة بين المتغيرات.

رابعاً: بعد استكمال تحديد النموذج الرياضي يتم إدخال المتغير العشوائي (u) لتقدير الأخطاء المعيارية للمعادلة ولصياغة النموذج القياسي (Econometrics Model).

1.4.3 : المرحلة الثالثة: مرحلة التقدير للمعلمات (Estimation of Parameters :

وفي هذه المرحلة يتم معالجة المعلومات المتوفرة عن المجتمع والعينة رياضياً وإحصائياً لاستخراج قيم المعلمات والمتغير العشوائي والتي تتفق منطقياً مع الفروض الاقتصادية ومنها نحصل على الصياغة الرقمية للنموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى أو أية تقنية أخرى مناسبة للنموذج.

1.4.4 : المرحلة الرابع: تقييم المقدرات (Evaluation of Estimates) :

هي مطابقة مجموع القيم المقدرة مع القيم الحقيقية وفي حالة عدم التطابق يعاد الحل لحين الوصول إلى هذه النتيجة التي تعتبر عملياً أول اختبار لصحة التقدير وهي اختبارات الدرجة الأولى $\left(\sum Y_i = \sum \hat{Y}_i\right)$. وكذلك معلمات الارتباط والانحدار والتحديد والخطأ المعياري للتقدير، بحيث يكون الأخير في الحد الأدنى قياساً لأي نموذج آخر.

1.4.5 : المرحلة الخامسة: اختبار جودة الاستدلال Test of Goodness of Inference :

يتم اختبار جودة الاستدلال للمعلمات والمعادلة الكلية للانحدار عبر اختبارات المعنوية الكلية للمعادلة والمعلمات المقدرة باستخدام الاختبارات المناسبة.

1.4.6: المرحلة السادسة: تقييم القوة التنبؤية للنموذج Evaluation of the Forecasting Power of the Estimated Model :

وذلك باختبار قدرة النموذج على التنبؤ وإجراء التنبؤ الفعلي بعد قبول النظرية إذا تطابقت البيانات.

1.5 : تطبيقات وتمارين :

لا يتضمن هذا الفصل تطبيقات عملية. راجع الفصول اللاحقة.

التمارين:

1- حدد الفوارق العلمية بين النظرية الاقتصادية، والاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي.

2- اشرح العلاقة بين الاقتصاد القياسي والعلوم الاقتصادية والكمية الأخرى.

3- ما هي الأهداف الرئيسية للاقتصاد القياسي.

4- للاقتصاد القياسي فرعان، اشرحهما.

5- ما هو مجال الاقتصاد القياسي؟ وما هي أهم وظائفه؟

6- ما هي القيم الاقتصادية الثلاثة التي يسعى الاقتصاد القياسي إلى تحديدها.

7- اشرح المراحل الرئيسية في التطبيق والبحث القياسي.

2 النموذج الاقتصادي القياسي

Econometrics Model

2.1 : العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

2.2 : قياس العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

2.3 : مفهوم النموذج وأسلوب صياغته.

2.4 : النموذج الاقتصادي القياسي وصياغته.

2.5 : تطبيقات وتمارين.

النموذج الاقتصادي القياسي
Econometrics Model

2.1 : العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية :

2.1.1 : طبيعة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية :

المتغير الاقتصادي (Economic Variable) مصطلح رياضي اقتصادي يُقصد به «القيم المختلفة التي تأخذها الأشياء والظواهر والعوامل والعلاقات الاقتصادية في زمن معين». والقيم التي تأخذها الظواهر الاقتصادية هي قيم كمية ونوعية لفظية أو جبرية أو عددية، وعندما نربطها فيما بينها سنحصل على هيكل أو نموذج يعبر عن «العمليات التي تجري بين المتغيرات الاقتصادية بصورة شكلية». فالمتغيرات الاقتصادية هي تعبير عن القيم التي تأخذها الظواهر الاقتصادية المختلفة مثل العرض والطلب والسعر والكمية والاستهلاك والادخار والفائدة وغيرها من الظواهر.

وعندما نعبر عن طبيعة العلاقة الرقمية بين ظاهرة وأخرى فإننا نتكلم عن «القانون الاقتصادي» الذي يربط بين هذه الظاهرة أو تلك. فقانون الطلب مثلاً هو ذلك القانون الذي يعبر عن علاقة الكميات المطلوبة من سلعة معينة بالظواهر الأخرى، مثل السعر والدخل وأسعار السلع الأخرى والذوق.. الخ. وعند بقاء الأشياء الأخرى، على حالها، فإن قانون الطلب سيعني كمية السلع المطلوبة بسعر معين وفي وقت معين. بهذا نستطيع أن نعبر عن العلاقة بين هاتين الظاهرتين بعلاقة بين متغيرين اقتصاديين وهما الكمية المطلوبة (Q) أو (D) والسعر (P). بهذا فإن قانون الطلب يمكن أن نعبر عنه بالدالة الآتية:

$$D = F(P_t)$$

حيث أن: D = كمية السعر المطلوبة.

F = رمز رياضي للدالة.

Pt = السعر في الزمن (t) أو أي زمن آخر متأخر (t-n) أو متقدم (t+n)

وقد تأخذ هذه العلاقة صيغاً جبرية ورياضية مختلفة، لكننا وصفنا العلاقة وحددنا السبب في تغيير الكميات المطلوبة ألا وهو السعر والسبب هو العامل المؤثر، والنتيجة هي تغير قيم الطلب بالموجب أو السالب.

إذن فإن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية هي (علاقة حقيقية) وليست علاقة افتراضية أو تخيلية أو تأملية، بل علاقة بين ظواهر ومتغيرات حقيقية بغض النظر عن أسلوب نمذجتها (Modeling) والرموز المختلفة المستخدمة للتعبير عنها. وتتسم العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية على أنها علاقة سببية (Causal Relationship)، أي أنها تقوم على أساس (ظاهرة سبب، وظاهرة نتيجة).

فكل ظاهرة وتحت ظروف معينة تكون سبباً في نشوء ظاهرة أخرى، بهذا فكل قيمة في ظروف معينة سبب في نشوء أو تغير قيمة أخرى إن عبرنا عن ذلك رياضياً وهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية هي علاقة موضوعية يقيمها الإنسان ويعللها ويدركها لكنه لا يخلقها، لأنها نتيجة لوجود الإنسان ونشاطه وحركته، وترتبط معه لكنها ليست من خلقه.

فالحاجة الإنسانية هي سبب الإنتاج بسبب عدم كفاية الموارد الطبيعية لإشباع هذه الحاجات أو لأنها غير ملائمة وتتطلب تكيفاً لها. فالإنتاج هو دالة لعوامل الإنتاج وإنتاجيتها، والإنتاجية تتأثر بالأجور وظروف العلم، والإنتاج مرتبط بالعرض، والعرض مرتبط بالكلفة، والكلفة مرتبطة بعوامل الإنتاج وإنتاجيتها وهكذا. إذن العلاقة بين الظواهر الاقتصادية معبر عنها بالعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية هي علاقة حقيقية وموضوعية ومتبادلة وليست مفترضة أو مفتعلة، بل علاقة ارتباطية متبادلة التأثير.

2.1.2 : اشكال التعبير عن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية :

العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية (Relationship between Economic Variables) والقيم التي تتخذها هذه المتغيرات هي نتائج عمليات تفاعلية متبادلة بين هذه المتغيرات بمعنى أن نعبر عنها بصيغ مختلفة وذلك كالآتي:

1- الصيغة اللفظية.

2- الصيغة الجبرية الرياضية.

3- الصيغة الاتجاهية – باتجاه واحد أو اتجاهين، بالزيادة أو الانخفاض طردية أو عكسية.. وهكذا.

وعادةً ما تستخدم كل الصيغ في آن واحد للتعبير عن طبيعة العلاقة بين هذه المتغيرات بسبب التقدم الذي حدث في الميادين الاقتصادية النظرية والتطبيقية والعلوم الرياضية والإحصائية التي تساعد في تحليل وفهم هذه العلاقات وصياغتها بصور تعطي تقريباً موضوعياً لطبيعة هذه العلاقات والقيم التي تأخذها. ويمكن للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية لأغراض التحليل الاقتصادي أن تأخذ أشكالاً مختلفة وفقاً للخصائص التي تتمتع بها المتغيرات أو العمليات التي تجري عليها أو بينها وكالآتي:

1 - **عدد واتجاه التأثير:** حيث يمكن للمتغير الاقتصادي أن يؤثر باتجاه واحد او أكثر على متغير آخر أو أكثر من متغير. فالزمن كتعبير عن متغير اقتصادي معين يؤثر باتجاه واحد وهو اتجاه المستقبل. بهذا فإننا من الناحية الموضوعية لا نستطيع أن ندرس الزمن إلا باتجاه واحد. لكننا قد نعود لدراسة الزمن وتأثيره في الماضي من أجل فهم تأثيره في المستقبل على ظاهرة معينة. ويمكن للمتغير أن يؤثر باتجاهين أو أكثر، فهو تارة يكون سبباً وتارة أخرى نتيجة، فالسعر والكمية، هما متغيران باتجاهين مثلاً فالسعر يحدد الكمية والكمية تحدد السعر وهكذا.

2 - **حسب قوة الارتباط بين الظواهر:** يمكن للعلاقة بين الظواهر أن نعبر عنها بقوة العلاقة بينها فقد تكون قوية ومتوسطة وضعيفة. فالارتباط بين الظاهر والعوامل الاقتصادية ارتباط حقيقي وله قوة رابطة يمكن أن نعبر عنها رقمياً بـ (قوة الارتباط) شريطة أن يكون هذا الارتباط مثبت نظرياً وموضوعياً.

3 - **حقيقة أو موضوعية الارتباط بين الظواهر:** يمكننا أن نفترض وجود رابط بين علاقة وأخرى، ويمكن أن نعبر عنها جبرياً ورياضياً ولكنها قد لا تتفق مع المنطق الاقتصادي. فيمكننا مثلاً أن نجد رابطة قوية بين زيادة عدد الجرائم وبين زيادة المصحات التأهيلية التي تبنى سنوياً في بلد معين. كما يمكننا أن نجد رابطة بين عدد المواليد سنوياً وكمية المشروبات الروحية المستهلكة. فقد يكون هناك منطق رياضي وحسابي بينها ولكن لا توجد علاقة منطقية واقتصادية وحقيقية بينهما.

4 - **استقلالية العوامل:** العوامل والظواهر الاقتصادية يمكن أن تكون نوعين حسب استقلاليتها وهي:

أولاً: متغيرات مستقلة: وهي المتغيرات التي تعتبر سلوكياً مستقلة عن العامل الآخر، أو أنها تعتبر السبب أو العامل المفسّر للعامل الآخر. بهذا فإن سلوكا افتراضياً يعتبر مستقلاً عن غيره (مع بقاء الأشياء الأخرى على حالها).

ثانياً: متغيرات تابعة: وهي المتغيرات التي يتحكم بسلوكها وتغير قيمتها العامل المستقل، فهي تتغير تبعاً لتغير العامل المستقل. فالاستهلاك متغير تابع لمتغير مستقل هو الدخل.

5 - **قوة تأثير عامل على عامل:** فهناك علاقة اقتصادية يكون تأثير عامل على آخر ضعيفة أو قوية أي النسبة المئوية التي يحتلها العامل المستقل في نسبة التغير في العامل التابع وحركته وديناميكيته. فقد يكون للسعر تأثير ضعيف في حالات وتأثير أقوى في حالات أخرى، فهو على استهلاك الخبز مثلاً لا يؤثر كثيراً

على كمية الطلب قدر ما يؤثر نوع الخبز وذوقه على استهلاك الخبز، وعكس ذلك فهو في الطلب على السلع المعمرة يمارس دوراً أقوى بكثير.

6 - **تبادلية العلاقة:** فهناك علاقة تبادلية وعلاقة غير تبادلية بين العوامل والمتغيرات المستقلة مثل الأجور والإنتاجية فهي علاقة تبادلية كذلك الأجور والرقم القياسي لنفقات المعيشة، بينما يكون ذلك باتجاه واحد بين متغير مستقل معين مثل كمية المياه (الأمطار) وإنتاجية الأرض في محصول زراعي معين وهكذا.

7 - **مدى دقة العامل:** فقد يكون تأثير العامل المستقل قوياً فعلياً لكن لا يكون تأثيره كاملاً لأسباب مختلفة منها عدم دقة اختيار العامل أو عدم دقة المعلومات أو وجود تأثير عشوائي معين.

8 - **سببية العلاقة:** أولاً: فالعلاقة بين المتغيرات يمكن أن تكون سببية أي أن المتغير المستقل يكون سبباً والتابع يكون نتيجة وذلك في حالات وجود علاقة تامة دون دخول المتغير العشوائي، أي لا وجود لتأثير عوامل أخرى بهذا تكون العلاقة دالة كاملة.

ثانياً: كما يمكن أن تكون العلاقة بين المتغيرات إحصائية، بمعنى وجود تلازم بين المتغيرات لكنها لا تؤلف سبباً ونتيجة، ويمكن قياس هذا التلازم ولكن بوجود عامل عشوائي معين.

9 - **خطية العلاقة:** فالعلاقة بين المتغيرات المستقلة والتابعة قد تكون خطية وذلك عندما يكون تأثيرها على المتغيرات المستقلة من الدرجة الأولى بغض النظر عن الصيغة التي تأخذها هذه العلاقة مثل:

$$Y = bx$$

$$Y = a + bx$$

$$Y = a + bx + cz$$

كما يمكن أن تكون غير خطية أي أنها من درجة أعلى بغض النظر عن عدد المتغيرات المستقلة المؤثرة.

10 - وحدانية أو تعددية العلاقة: حيث تكون العلاقة بين متغيرين أحدهما مستقل والآخر تابع أو أكثر من متغير مستقل وآخر تابع.

11 - طبيعة العلاقة (إشارة المعلمات): فقد تكون العلاقة بين المتغيرات كالآتي:

أولاً: طردية: إذا كانت إشارة المعلمة الانحدارية (b) موجبة بمعنى أن يزيد أو ينخفض المتغير التابع عند زيادة أو انخفاض المتغير المستقل.

ثانياً: عكسية: إذا كانت إشارة المعلمة الانحدارية (b) سالبة بمعنى أن يزيد أو ينخفض المتغير التابع عند انخفاض أو زيادة المتغير المستقل.

ثالثاً: صفرية: عندما لا توجد علاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع عندما تكون المعلمة الانحدارية صفراً، بمعنى لا تأثير للمتغير المستقل على المتغير التابع، ويكون ذلك في حالات خاصة.

2.2 : قياس العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية :

2.2.1 : مفهوم قياس العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية :

بتطور العلوم الكمية وعلى الأخص الرياضيات والإحصاء أصبح بالإمكان تمثيل وقياس العلاقة بين المتغيرات رياضياً وإحصائياً، باستخدام أدق الصيغ المناسبة لتمثيل هذه العلاقة مثل العلاقات النسبية باستخدام متوسط العلاقة بين المتغير المستقل (X) والمتغير التابع (Y) بالصيغة البسيطة الآتية: $b = \frac{\sum Y}{\sum X}$ ، أو باستخدام صيغ أدق من ذلك مثل الصيغ الجبرية والرياضية المستوحاة من الجبر والهندسة والإحصاء.

وقياس العلاقة بين المتغيرات يعني إيجاد أو صياغة العلاقة بين المتغيرات بأقرب دقة لقياس قيمة تأثير العامل المستقل على العامل التابع وبالعكس يعني تحديد الآتي:

1- قوة تأثير العامل أو العوامل المستقلة على العامل أو المتغير التابع.

2- قوة ارتباط المتغيرات مع بعضها وتحديد مقدار هذه القوة.

3- تحديد مقدار العامل العشوائي المؤثر.

4- تحديد جودة القياس واختبارها.

وهذا يعني بدوره تحديد الآتي:

1- قياس قيمة الثابت المطلق والذي يعني الحد الأعلى أو الحد الأدنى لقيمة المتغير التابع عندما تكون قيمة المتغير المستقل أو المعلمة الانحدارية صفراً.
2- قياس قيمة المعلمة الانحدارية والتي تعني نسبة أو ميل انحدار المتغير التابع على المتغير المستقل، أو النسبة المئوية التي يتغير بها التابع قياساً إلى النسبة المئوية التي يتغير بها المتغير المستقل، وتحديد اتجاه التأثير.
3- قياس المتغير الذي يشوش العلاقة الدالية أو الدقيقة بين المتغيرين.
4- تحديد معاملي الانحدار والارتباط بين الظواهر من خلال قياس التباين والتباين المشترك مع تحديد إشارته.

ويتم باستخدام ما نسميه بالنموذج الاقتصادي القياسي باستخدام (النمذجة القياسية) Econometrics Modeling .

2.2.2 : مفهوم النموذج :

النموذج بمعناه المجرد للكلمة هو محاكاة علمية لطبيعة الأشياء أو صياغة مفاهيمه. وهذه الصياغة هي صياغة تشكيلية. وذلك باستخدام التحليل النظامي (System Analysis). والنموذج بمعناه الدارج للكلمة هو عينة أو مصغر أو قالب ممثل أو شيء مقارب، أو تحويل الظاهرة أو العملية إلى رموز وعلاقات ومعادلات.

2.3 : النموذج الاقتصادي Economic Model :

2.3.1 : مفهوم النموذج الاقتصادي وأسلوب صياغته :

«مجموعة من العلاقات الاقتصادية التي تكون سوياً تركيباً اقتصادياً يتضمن العناصر الأساسية المرتبطة بمسألة اقتصادية معينة، ومحاولة تقريب دراستها من الواقع»[1].

ويعبر النموذج الاقتصادي عن مجموعة التفاعلات بين المتغيرات الاقتصادية. كما يعرف النموذج الاقتصادي بأن مجموعة من العلاقات الاقتصادية التي توضع عادةً بصيغ رياضية تسمى معادلة أو (مجموعة معادلات الهيكلية) والتي تعكس أو تشرح سلوك أو آلية العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية التي تبين عمل منشاة أو قطاع أو اقتصاد بلد معين. والنموذج الاقتصادي يدرس كل العناصر والعلاقات الاقتصادية بل يأخذ في الحسبان أهمها وأشدها تأثيراً.

فالنموذج الاقتصادي لا يصف كل دقائق العلاقات الاقتصادية بكاملها، بل إنه تجسيد شكلي لطبيعة أهم العلاقات والعناصر، أو حالة مبسطة تمثل سلوك اقتصادي معين على شكل رموز وقيم عددية. ويتكون النموذج من المعادلات الهيكلية وقد تكون في النموذج معادلة هيكلية واحدة أو مجموعة من المعادلات. فعندما يكون النموذج مشخصاً يمكن أن تكون واحدة، أو أكثر من معادلة عندما تتميز العلاقات بالتعقيد والتداخل بين عناصر المنظومات.

بعبارة أخرى فإن النموذج هو الهيكل النظري للمشكلة الاقتصادية موضوع البحث، وتصوير للعلاقات المتبادلة بين المتغيرات المختلفة وفقاً لفرضيات أو نتائج مثبتة نظرياً.

---

(1) د. عبدالعزيز فهمي هيكل، موسوعة المصطلحات الاقتصادية والإحصائية، دار النهضة العربية، 1980، ص557.

2.3.1 : خصائص النموذج الاقتصادي :

لأجل أن يكون النموذج الاقتصادي نموذجاً متطابقاً وطبيعة العلاقة الاقتصادية، يجب أن يتميز بالآتي:

1- ان تعبر متغيراته تعبيراً صادقاً عن طبيعة العناصر الحقيقية للظاهرة قيد الدرس.
2- ان تتطابق هذه المتغيرات مع ما جاءت به النظرية الاقتصادية.
3- ان تتطابق تقديرات معلمات النموذج وقيمها الواقعية.
4- ان تتبع وتتطابق تقديرات النموذج مع المنطق الاقتصادي (Economic Logic) بمعنى أن تكون هناك منطقية اقتصادية معينة في وصف وتحليل السلوك.
5- ان تكون القيم والمفاهيم قابلة للاستخدام في التنبؤ بسلوك الظاهرة الاقتصادية المستقبلي، إذ لا جدوى من نموذج تحليلي لا يفيد في استشراق المستقبل.
6- أن يضم النموذج ذلك العدد من المعادلات التي تساوي عدد المعلمات والمجاهيل المطلوب تقديرها ليتسنى الحصول على قيمة واحدة لكل معلمة.
7- أن تكون التقديرات والتفسيرات الاقتصادية مطابقة للنظرية والمنطق الاقتصادي، بخلافه يصعب استخدام النموذج ونتائجه.

2.3.2 : أنواع النماذج الاقتصادية :

النماذج الاقتصادية عدة أنواع أهمها:

1 - النماذج أو المعادلات التعريفية (Definitional Models): وهي معادلات لا تصف ولا تحلل سلوك اقتصادي معين بل تعرض علاقة معينة بين متغيرات اقتصادية مثل:

$$Y = C + I$$

حيث أن: Y = الدخل القومي.

C = الاستهلاك الكلي.

I = الاستثمار الكلي.

وهي تحدد ما يتضمنه الدخل القومي في متغيرات وعناصر فقط دون وصف وتحليل سلوكها.

2 - النماذج الاقتصادية السلوكية (Behavioral Models): وهي نماذج أو معادلات هدفها تفسير ووصف وتحليل علاقات وسلوكيات الظواهر (مستهلك أو منشأة أو أي متغير اقتصادي) وفقاً للنظرية الاقتصادية في الماضي والحاضر والمستقبل وتحدد استجابة منطوقة لسلوك منطوقة مرتبطة بها مثلها:

$$C = a = b\ Y_d$$

حيث أن: C = الاستهلاك الكلي.

a = الاستهلاك ضمن حد الكفاف (الاستهلاك المستقل عن الدخل).

b = الميل الحدي للاستهلاك.

Yd = الدخل المتاح.

وهو نموذج مُعرف ودقيق ويعبر عن علاقة محددة بين المتغيرات دون أن ويشبها أي اضطراب أو إزعاج ويعبر عن نمط التغيير في الاستهلاك عندما يتغير الدخل. (علاقة محددة Eact).

3 - معادلات مؤسساتية (Institutional Models): وهي عبارة عن نماذج أو معادلات تعكس علاقات لا تفسرها دائماً المفاهيم الاقتصادية كالعادات والذوق أو علاقات تحدد وفقاً لقوانين تفرضها المؤسسات القانونية (التشريعية) الموجودة في المجتمع والتي لها صفة الذاتية مثل:

مقدار الضريبة الجمركية = قيمة السلعة × نسبة الضريبة على القيمة

4 - نماذج توازنية (Equilibrium Models): وهي نماذج أو معادلات توضع على أساس تحقق شروط معينة لتوازن ظاهرة أو أكثر، وهي ليست متطابقات لأنها تحقق بتوفر شروط معينة مثل الاستثمار يساوي الادخار، أو العرض يساوي الطلب:

$$I = S$$

$$D = S$$

5 - النماذج والمعادلات الفنية (Technical Models): وهي تشرح طبيعة العلاقات بين مستوى الإنتاج والمستخدمات من عوامل الإنتاج المادية وغير المادية وفقاً لمستوى تكنولوجيا الإنتاج السائد مثل نموذج ليونتيف للمستخدم - المنتج (input-output Model) والمعاملات الفنية له، ودالة كوب - دوغلاس للإنتاج.

6 - المعادلات التطابقية (النماذج التطابقية) (Identical Models): وهي نماذج تشير إلى تطابق الجانبين مثل تطابق الكميات المعروضة مع الكميات المطلوبة، وعرض النقد مع طلبه بتحقق شروط معينة ($S \equiv D$). وتسمى هذه المجموعة من المعادلات أو النماذج الهيكلية (Structural Models) لأنها تربط المتغيرات الاقتصادية ضمن هيكلية معينة.

2.4 : النموذج الاقتصادي القياسي وصياغته :

2.4.1 : مفهوم النموذج القياسي[1] وعناصره :

النموذج القياسي عبارة عن نموذج اقتصادي يعبر رمزياً عن طبيعة العلاقات الاقتصادية للظاهرة المدروسة وبصورة أقرب إلى الدقة مستخدماً في ذلك العامل (العوامل) المحددة أو المؤثرة على سلوك الظاهرة المدروسة جزئياً أو كلياً بضمنه العامل غير المحدد والمتمثل بالمتغير أو الحد العشوائي.

ويتألف النموذج من العناصر الآتية:

1 - العنصر أو المتغير المُفسر التابع (Dependent Variable) والمتغير بالمفهوم الرياضي هو ظاهرة يمكن أن تتخذ عدة قيم في الموضوع قيد البحث. وبالمفهوم الرياضي يمكن أن يكون مفهوماً عاماً ليس له مقابل في الحياة العملية، أو يرمز

(1) نستخدم العبارة المختصرة (النموذج القياسي) بدلاً من (النموذج الاقتصادي - القياسي).

لآية ظاهرة تتحدد قيمها بسلوك قيم أخرى مثل (X) أو (Y) أو (Z). وفي المفهوم الاقتصادي له مضمون حقيقي وواقعي مثل الاستهلاك والدخل القومي... الخ. وهو يرمز إلى الظاهرة والذي يستجيب إلى سلوك المتغيرات المستقلة، بهذا فهو مخرج النموذج (Output) مثل الاستهلاك الكلي الذي يتغير بمقدار محدد عندما يتغير الدخل القومي أو أحد العناصر المحددة للاستهلاك. ويسمى تابعاً أو معتمداً لأنه مخرج (Output) لمدخلات معينة (Inputs) ويتبعها بالسلوك طردياً أو عكسياً.

2 - العنصر أو المتغير المستقل أو المفسر (Independent Variable) وهو العنصر المتحكم (افتراضاً أو حقيقة) بسلوك الظاهرة المعينة. وهو متغير أو مدخل (input) المؤثرة والمحددة لحركة العنصر التابع والذي يعد وفقاً للنظرية القياسية العنصر المفسر لسلوك المتغير التابع.

وقد يكون استقلاله مطلقاً مثل الاستثمارات التلقائية والصادرات والإنفاق الحكومي أو المناخ أو كمية الأمطار. ويطلق عليه أيضاً بالمتغير الخارجي (Exdogenous Variable) وتتحدد قيمته من خارج النموذج، أي بفعل مؤثرات خارجية عن النموذج، وبهذا لا يكون النموذج مسئولاً عن تفسيره. وقد يكون متغيراً داخلياً (Endogenous Variable) ويتحدد داخل النموذج وبفعل علاقاته، مثل الاستهلاك الذي يؤثر في الدخل القومي ويتأثر به في الوقت ذاته، وكذلك بالاستثمار المحفز.

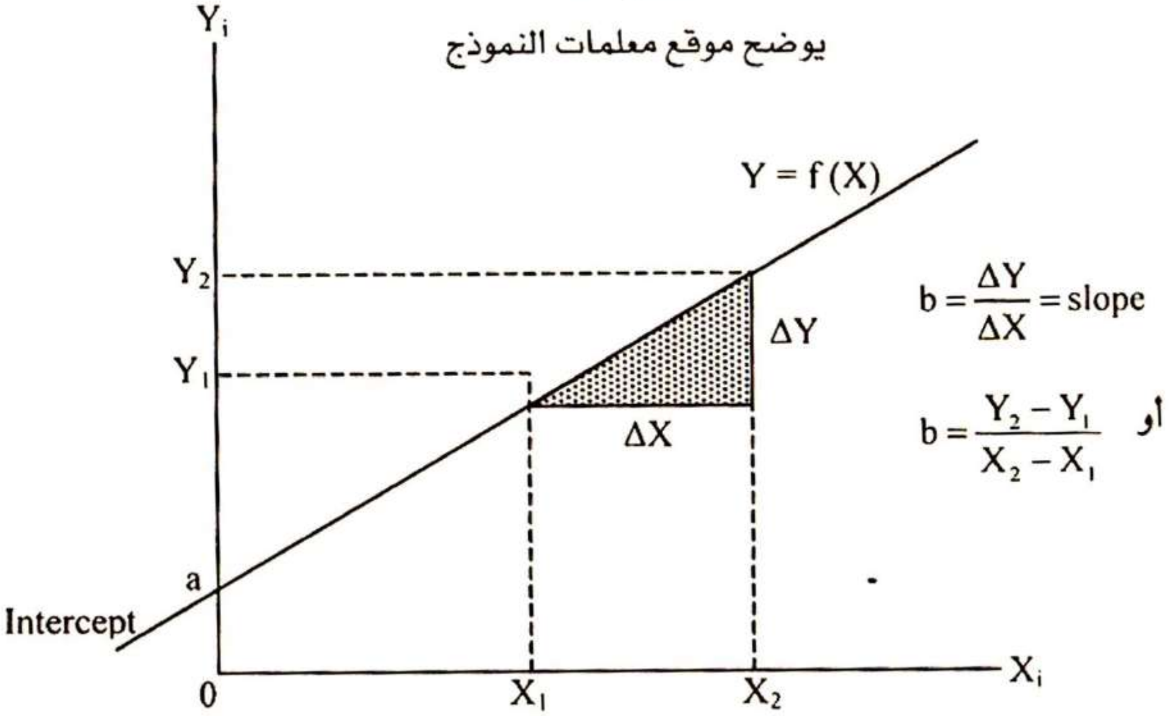
3 - العناصر الثابتة (Constants). وهي العناصر التي تمثل المعالج (Operator) في النموذج القياسي وتمثل معلمات النموذج (Parameters) وهي على نوعين:

الأول: هو العنصر الثابت المطلق (Intercept): وهو يمثل الحد الأدنى أو الحد الأعلى لقيمة المتغير التابع. ويتمثل بيانياً بذلك الجزء الذي يتقاطع عنده منحنى النموذج (الدالة) في الإحداثي العمودي (انظر الشكل 2) ويمثل نقطة الشروع في المعالجة، وهو إما قيمة متوسطة أو حد أدنى أو أعلى، وذلك عندما تكون قيمة المتغير المستقل صفراً، أو معامله صفراً. وهي معلمة تؤدي إلى فقدان النموذج أو

الدالة لتجانسها (Homogenecy) لأن التغير في المتغير المستقل بنسبة معينة لا تؤدي إلى أن يتغير المتغير التابع لنفس النسبة والدرجة، وعادةً ما تجعله يتغير بنسبة أقل من نسبة التغير في المتغير المستقل.

شكل (2)

يوضح موقع معلمات النموذج



تطبيق (1):

بفرض أن الاستهلاك الكلي يتمثل بالمعادلة الآتية:

$$C = a + b\,Y_d$$

حيث أن: Y_d = الدخل المتاح ويساوي (1000) دينار.

b = المعلمة الانحدار (الميل الحدي للاستهلاك) ويساوي 0.8 .

a = المعلمة التقاطعية (الثابت المطلق) وتساوي (50).

C = قيمة الاستهلاك.

فالاستهلاك سيتحدد كالآتي:

$$C_1 = 50 + 0.8\,(1000)$$

$$= 850$$

وبفرض أن الدخل القومي قد زاد بنسبة 10٪ فكم سيزداد الاستهلاك؟

الحل:

مقدار الزيادة: $\because 1000 \cdot \frac{10}{100} = 100$

مقدار الدخل بعد الزيادة: $1000 + 100 = 1100$

$$C_2 - 50 + 0.8\,(1100)$$
$$= 930$$

∴ نسبة زيادة الاستهلاك ستكون:

$$\% \, C = \left(\frac{930 - 850}{850}\right) \times 100 = \left(\frac{80}{850}\right) \times 100 = 9.4\%$$

بهذا فقد ازداد الاستهلاك بنسبة أقل من نسبة زيادة الدخل القومي.

تطبيق (2):

بفرض أن نموذج الطلب على سلعة ما يأخذ الشكل الآتي:

$$\varphi_d = a - bP$$

حيث أن: φ_d = الطلب على سلعة معينة.

a = الطلب على السلعة عندما يكن السعر صفراً ويساوي (500).

P = السعر ويساوي مثلاً (100) دينار.

b = 2 وهو ميل منحنى الطلب ويساوي معامل السعر.

ما هو مقدار الكمية المطلوبة:

الحل:

$$D = 500 - 2(100)$$
$$= 300$$

فإذا ما انخفض السعر إلى (90) أي بنسبة 10٪ فكم سيزداد الطلب؟

$$D = 500 - 2(90)$$
$$= 320$$

نسبة زيادة الطلب ستكون:

$$\% D = \left(\frac{320 - 300}{300}\right) \times 100 = 6.67\,\%$$

أي بنسبة أقل أيضاً.

الثاني: العنصر السلوكي الثابت (Constant Behavioral Element): وهو العنصر الملازم للمتغير المستقل، ويمثل ميل Slope خط انحدار الدالة أو معامل الانحدار للمتغير التابع (Coefficient) على المتغير المستقل أي $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$. وهو يمثل تلك القيمة التي يزداد أو ينخفض بموجبها المتغير التابع عندما يتغير المتغير المستقل بوحدة واحدة. وهو الجزء الثاني في المعالج والذي يمثل الأهمية الكبرى في معنوية العلاقة في النموذج وهو معامل سلوكي، لأنه يحدد سلوك الظاهرة.

4 - المتغير العشوائي (عنصر الاضطراب أو حد الخطأ أو البواقي أو حد المصادفة) (Disturbance Term or Random Variable or Error Term or Residuals): وهو عنصر مستقل آخر يضاف إلى النموذج الاقتصادي ليعبر عن عدم إمكانية التعبير المحدد (Exact Relation) بين المتغيرات المستقلة. وهو يضم تأثير كل العوامل (المعروفة وغير المدرجة) وغير المعروفة على المتغير التابع، وبها يحول العلاقة الاقتصادية الدقيقة إلى علاقة اقتصادية غير دقيقة أو احتمالية. ويرمز لهذا العنصر في الأدبيات الاقتصادية بـ (E_i) أو (U_i) وهو الذي يحول (النموذج الاقتصادي) إلى (نموذج قياسي). أي أن يحول النموذج إلى نموذج عشوائي أو احتمالي (Stochastic or Probabilistic Model). وهو يمثل عنصر الاضطراب لأنه يؤدي إلى اضطراب العلاقة الاقتصادية ليحوله من علاقة دقيقة إلى احتمالية.

2.4.2 : أنواع النماذج القياسية :

النماذج القياسية كثيرة ومتعددة، وتزداد نوعاً وكماً مع كل تقدم في النظرية والممارسة الاقتصادية والرياضية والإحصائية. ويمكن تقسيمها وفقاً لخصائص معينة إلى مجموعات وكالآتي:

1 - حسب علاقتها بالزمن فهي:

أولاً: نماذج ساكنة (ستاتيكية) Static Models وهي نماذج لا تأخذ الزمن وحركة المتغير التابع والمستقل عبر الزمن بنظر الاعتبار بهذا فهي لا تتضمن أثر التخلف الزمني باعتباره أحد العوامل المؤثرة في تحديد المتغيرات اللاحقة في العلاقات الاقتصادية. بهذا فإن النموذج لا يحتوي على عناصر التخلف الزمني (Lagged Variables) مثل:

$$Y = C + I_0 + G$$

وباستخدام الصيغة المختزلة (Reduced Form Equation) وهي التي توضح العلاقة بين زيادة الدخل وزيادة أحد المتغيرات الأخرى المحددة له مثل صيغة المضاعف وكالآتي:

$$\frac{dY}{dI} = \left(\frac{1}{1-b}\right)\Delta I$$

وهي تحدد وتحسب في نقطة زمنية معينة. (انظر التطبيقات).

ثانياً: نماذج حركية (ديناميكية) Dynamic Models وهي نماذج تأخذ بنظر الاعتبار الزمن أو التخلف الزمني عند وضع النموذج، وهي أقرب للواقع من الأولى مثل:

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = C_0 + bY^d$$

(انظر التطبيقات في الفصول اللاحقة).

2 - حسب خطيتها أو لا خطيتها تقسم إلى:

أولاً: نماذج خطية (Linear Models) وهي نماذج تأخذ العلاقة بين متغيراتها شكل خط مستقيم أي أن معادلتها الهيكلية تعكس علاقة مستقيمة بين المتغير المستقل والمتغير التابع (أي أن قوة المتغيرات المستقلة مساوية للواحد) مثال العلاقة بين العرض والسعر:

$$Y = a + bP + U$$

حيث أن: Y = حجم كمية العرض.

a = الثابت المطلق.

b = معلمة الانحدار (ميل خط الانحدار).

P = السعر.

U = المتغير العشوائي.

ثانياً: نماذج غير خطية (Non Linear Models) وهي نماذج تأخذ متغيراتها شكلاً غير خطي، كدالة من الدرجة الثانية أو أكثر. بهذا فإن متغيراتها المستقلة تأخذ أساً معيناً أو تكون هي أساً بحد ذاتها مثل:

$$Y = a + bX + cX_2 + U_i$$

$$Y = ab^X$$

$$Y = aX^b$$

3 - حسب بساطتها أو تعقيدها وتقسم إلى:

أولاً: نماذج بسيطة (Simple Models) وهي نماذج بين متغير واحد مستقل وآخر تابع.

ثانياً: نماذج متعددة (Multiple Models) وهي نماذج تضم أكثر من متغير مستقل وواحد تابع مثل:

$$Y = a + bX + cZ + U$$

ويمكن أن تكون هذه النماذج خطية أو غير خطية في آن واحد.

4 - حسب شموليتها فهي:

أولاً: نماذج جزئية (Micro-Models) وهي تتناول علاقات اقتصادية جزئية مثل سلوك المستهلك والمنشأة أو دالة عرض سلعة معينة.

ثانياً: نماذج كلية (Macro-Models) وهي تشمل العلاقات الكلية (التجمعية Aggregae) بالوصف والتحليل والتنبؤ مثل الدخل القومي دالة في الاستهلاك الكلي والتجارة الخارجية..

$$Y = C + I + G + X - M$$

5 - حسب درجة انفتاحها فهي:

أولاً: نماذج مفتوحة (Open Models) وتعبر عن طبيعة العلاقات الاقتصادية المفتوحة والتي تدخل فيها العناصر الخارجية المستوردات والصادرات مثل:

$$Y = C + I + G + X - M$$

حيث أن: X = الصادرات.

M = الاستيرادات.

ثانياً: (نماذج مغلقة Closed Models) وهي نماذج لا تتضمن عناصر الاقتصاد الدولي وتؤدي إلى إغلاق دورة الاقتصاد الوطني داخلياً دون العلاقات الخارجية مثل:

$$Y = C + I + G$$

6 - حسب تعدد المعادلات:

فهي نماذج بمعادلة واحدة أو أكثر من معادلة كالمعادلات الآنية ونماذج السلاسل الزمنية. (انظر الفصل 10 الجزء الثاني).

2.4.3 : مراحل صياغة النموذج الاقتصادي القياسي Specification or Formulation of the Econometrics Model :

يعتبر وضع وصياغة النموذج الاقتصادي القياسي من أبرز مهمات الباحث القياسي، وذلك لتحويل العلاقات الاقتصادية إلى صيغة قياسية تتناسب والواقع الاقتصادي. ولأجل أن يوضع النموذج الاقتصادي بصيغته القياسية يتطلب الأمر أن يمر بعدة مراحل وهي:

المرحلة الأولى: وضع الفروض الاقتصادية (Economic Assumptions): وهذه تستند إلى منطوق النظرية الاقتصادية والتي يمكن إثبات صحتها أو دحضها عند اختبارها وفقاً لمستويات معينة من المعنوية. مثال: أن الاستهلاك يعتمد على السعر والدخل وسعر الفائدة. أو أن الطلب يعتمد على السعر والدخل وأسعار الأخرى والذوق. بهذا فإننا وانطلاقاً من منطوق النظرية الاقتصادية افترضنا وجود علاقة بين متغير تابع واحد وعدة متغيرات مستقلة، وعليه يمكن دراسة الطلب مع أحد هذه العوامل أو كلها.

المرحلة الثانية: وضع العلاقة الاقتصادية بصورة قياسية (Mathematical Model) ويعني تجسيد فرضياتنا على هيئة علاقة رياضية إحصائية تربط كميات المتغيرات المفسرة مع المتغير التابع (الظاهرة المدروسة). ويتم ذلك من خلال الخطوتين التاليتين وهما:

الخطوة الأولى: رسم الشكل الانتشاري والذي يمثل مسار الظاهرة من خلال إسقاط ازدواج المتغيرات المستقلة والتابعة (في النموذج الخطي البسيط) ومنها يمكن إعطاء تقدير تقريب لمسار العلاقة بين المتغيرات، ومنها يمكن إعطاء الصيغة الرياضية أو القياسية التقريبية التي تحدد الشكل الانتشاري وذلك بمد خط يفصل النقاط الانتشارية إلى جزءين متساويين. (انظر الفصل الثالث).

ثانياً: وتمثل العلاقة التي تطابق الشكل الانتشاري جبرياً، وذلك بترميز المتغيرات ومعلماتها وعلاقاته ودرجتها مستمدين الخبرة الرياضية للدوال في هذا الموضوع.

المرحلة الثالثة: اختبار النموذج (Test of the Model) وهي تحليل النموذج رياضيات بيانياً ومن ثم تجربته على واقع المشاهدات المقصود دراستها ومطابقة النتائج مع الواقع وإجراء اختبارات الفروض التي يمكن أن تعطينا يقيناً معيناً لصحة الفروض ومن أهم الاختبارات هي اختبار القدرة التنبؤية للنموذج Predication Power of the Model Test (Evaluation). ويستخدم الاقتصاد القياسي عدة طرق للتقدير. (انظر الفصل الرابع).

2.4.4: طرق التقديرات القياسية (Econometrics Methods (Techniques :

يستخدم الاقتصاد القياسي عدة طرق نعددها كالآتي:

1 - مجموعة الطرق الخاصة بالمعادلات الفردية (Single-Equation Technique) وهي:

أولاً: طريقة المربعات الصغرى العادية (Ordinary Least Squares Method).

ثانياً: طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (Indirect Least Squares). (انظر الفصل 10 الجزء الثاني).

أو طريقة الصيغة المختزلة (Reduced Method). (انظر الفصل الخامس والسادس).

ثالثاً: طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (Two-Stage Least Squares). (انظر الفصل 10 الجزء الثاني).

رابعاً: طريقة الإمكان الأعظم بمعلومات محددة Limited Information Maximum Likelihood. (انظر الفصل 12 الجزء الثاني).

2 - مجموعة الطرق التي تتناول المعادلات الآنية (Simultaneous Equation Technique) وهي كما يلي:

أولاً: طريقة المربعات الصغرى ذات الثلاثة مراحل Three-Stage Least Squares).

ثانياً: طريقة الإمكان الأعظم بالمعلومات الكاملة (Full Information Maximum Likelihood Method).

2.5 : تطبيقات وتمارين:

لا يتضمن هذا الفصل تطبيقات وتمارين. راجع الفصل الثالث لهذا الغرض.

المتغير العشوائي

طبيعته وأسباب ظهوره في النموذج الاقتصادي القياسي

3

Stochastic Variable

3.1 : مفهوم المتغير العشوائي.

3.2 : أسباب وجود المتغير العشوائي.

3.3 : قوة العلاقة بين المتغيرات وقياسها (الارتباط ومعامل التحديد).

3.4 : التباين (التشتت).

3.5 : التباين المشترك (التغايير).

3.6 : قياس التباين المشترك.

3.7 : معامل الارتباط وقياسه.

3.8 : معامل التحديد.

3.9 : معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان و (r_s).

3.10 : المعنى العام لمعامل الارتباط.

3.11 : دلالة معامل الارتباط (r).

3.12 : تطبيقات وتمارين.

المتغير العشوائي

طبيعته وأسباب ظهوره في النموذج الاقتصادي القياسي

Stochastic Variable

3.1 مفهوم المتغير العشوائي (Stochastic Variable)

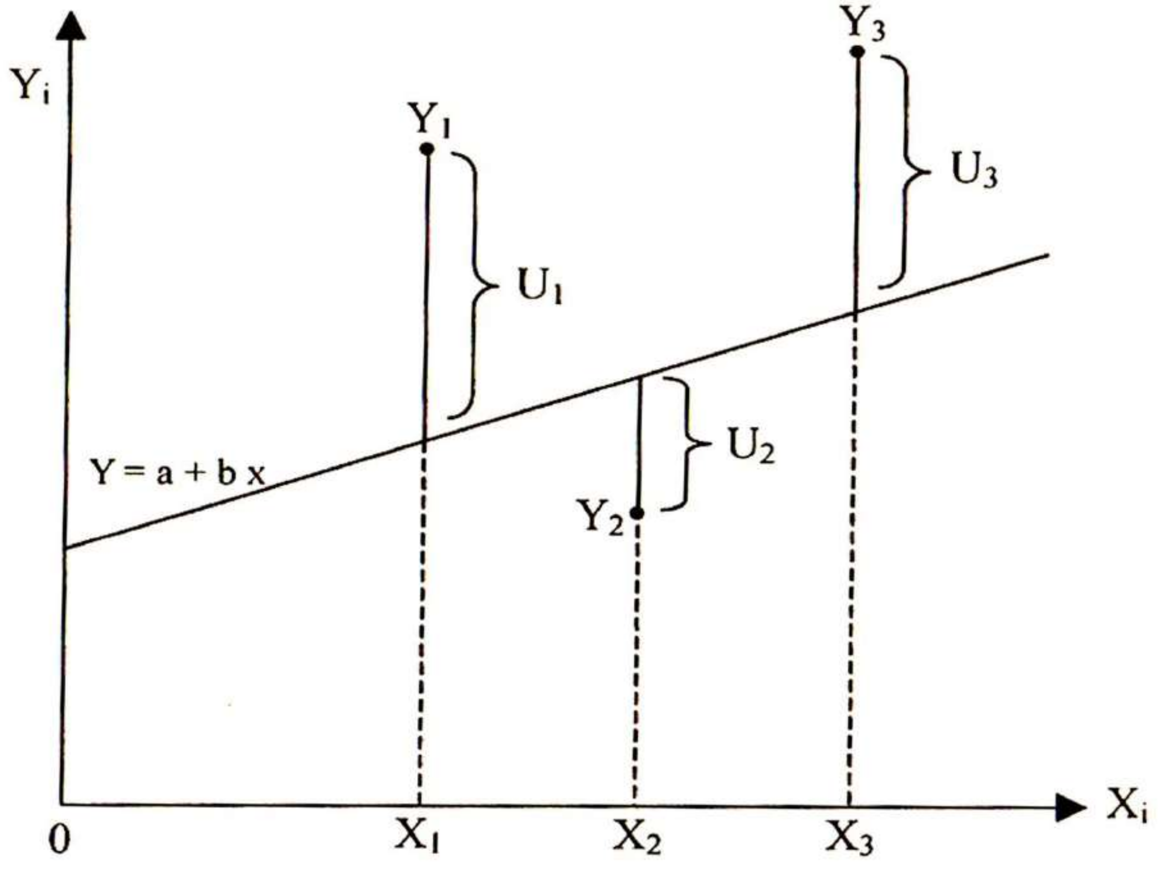
العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية هي علاقة سلوكية يعبر عنها باستجابة متغير سميناه بالمتغير التابع (Y) لحركة وتغير متغير آخر مرتبط به وسميناه بالمتغير المستقل (X). ونجد الرابطة بين هذين العنصرين من خلال المعلمات (b,a) والتي تحدد مدى وقوة استجابة التغيير في (Y). وقد وضعنا هذه العلاقة بصيغة رياضية وهي كالآتي:

$$Y_i = a + b X_i$$

وتعبر هذه المعادلة عن علاقة خطية بين (X) و (Y) وذلك لأنها تعكس في جانبها الأيسر (Y) تغيراً خطياً قياسياً للتغير في (X). بيد أن هذه العلاقة هي علاقة نموذجية (Ideal) وليست علاقة حقيقية، لأنها تعتبر عن علاقة دقيقة (Exact Relation) أو علاقة سببية (Causal Relation)، بينما الواقع يضم انحرافات للقيم ($\hat{Y}$) عن القيم (Y_i) الحقيقية، أي هناك فارق معين كبُر هذا الفارق أم صغر فإنه يعبر عن علاقة غير دقيقة لوجود هذه الفوارق التي نطلق عليها بحد الإزعاج أو متغير البواقي (Residual Variable) أو حدود الخطأ (Error Term) أو حد الاضطراب (Disturbance Terms).

وعندما نفترض وجود العلاقة الدقيقة بين المتغيرين فنحكم بهذا بأن كل النقاط الحقيقية لـ (Y_i) تقع على خط الانحدار وتعني علاقة محددة Deterministic. ومثل هذه العلاقة غير موجود أصلاً (كما هو مبين في الشكل 1). ولهذا فإن الممارسة الإحصائية قبلت بإدخال العنصر العشوائي (U_i) ليعبر عن هذه الفوارق وانحرافات عن العلاقة الدقيقة بين المتغيرات. والمتغير العشوائي أو حد الاضطراب (Stochastic Variable) مأخوذ من أصل الكلمة اليونانية (Stokhos) وتعني الهدف، وأما العلاقة التصادفية فتعني الحالة التي لا يمكن فيها إصابة الهدف دائماً[1]. وتعود التصادفية العشوائية في سلوك المتغير إلى عدة أسباب نشرحها فيما يأتي.

شكل (1): يوضح القيم الدقيقة والعشوائية لخط الانحدار



(1) أ. د. وليد إسماعيل السيفو، المدخل إلى الاقتصاد القياسي، جامعة الموصل، 1988، ص66.
أيضاً: أ. د. وليد إسماعيل السيفو و د. أحمد مشعل: «الاقتصاد القياسي التحليل – بين النظرية والتطبيق». دار المجدلاوي للنشر، عمان 2004.

3.2 : اسباب وجود المتغير العشوائي (U_i) :

تعود أسباب وجود المتغير العشوائي أو التصادفي إلى الآتي:

1 - حذف أو إهمال بعض المتغيرات الاقتصادية من الدالة الانحدارية: ففي حالات كثيرة يقوم الباحث بحصر كل العوامل التي تؤثر على المتغير التابع لكنه لا يستطيع إدخالها في النموذج القياسي لوجود صعوبات كثيرة أهمها:

أولاً: عدم إمكان تحويل المتغير المهمل أو المحذوف إلى متغير كمي وحتى وهمي (Dummy) مثل الذوق بالنسبة للطلب، أو المركز الاجتماعي والديانة... الخ.

ثانياً: كثرة العوامل المحددة والتي يجد الباحث صعوبة في إدخالها كلها ضمن النموذج.

ثالثاً: هناك بعض العوامل التي قد لا تكون معروفة للباحث وذلك بسبب وجود نواقص في النظرية الاقتصادية.

رابعاً: وجود متغيرات غير قابلة للتوقع وتظهر في أوقات لا يمكن توقعها مثل الكوارث والهزات الأرضية والفيضان والحروب... إلى آخره.

خامساً: أن يكون لبعض المتغيرات تأثير ضئيل جداً مما ينتج عنه معلمة لا أهمية لها في تقرير سلوك الظاهرة أو تحذف بسبب التقريب، ولكنها عندما تجمع بالمتغير العشوائي يظهر تأثيرها بشكل أفضل وقابل للقياس وذو قيمة اقتصادية ملموسة.

سادساً: في حالات يكون للباحث علم بالعامل المعني إلا أنه لا يُريد إدخاله بسبب عدم توفر بيانات دقيقة أو أن البيانات المتوفرة غير دقيقة وخاصة في فترة زمنية قصيرة يكون تأثيرها قليل جداً لا تستحق معه تعقيد النموذج بها.

لهذا يعتمد الباحث في عمله على ثلاثة أو أربع متغيرات مستقلة ذات وزن نسبي حاسم على التغير في المتغير المستقل.

2 - السلوك العشوائي للبشر: يعتبر سلوك البشر العام والاقتصادي متغير لا يمكن حسابه أو التكهن به مستقبلاً، لوجود دوافع مختلفة في سلوكه، مما يجعله صعب التوقع والذي ينجم عنه الكثير من الانحرافات عن المسار العام للظاهرة. ففي الأسرة الواحدة لا يمكن التنبؤ بسلوك كل أفرادها في الاستهلاك والتصرف بدخله المتاح. فقد يفترض الاقتصادي رد فعل معين من قبل المستهلكين على إجراء ما، يقابله تصرف يختلف عن المتوقع.

3 - عدم دقة صياغة الشكل الرياضي للنموذج: ففي أحيان كثيرة يفضل الباحث استخدام الصيغ الرياضية البسيطة لحل المشكلة الاقتصادية، فقد يفضل استخدام النموذج الخطي البسيط بينما تكون العلاقة غير خطية، أو يمثل العلاقة بين متغيرين فقط ويصار إلى حذف المتغيرات الأخرى، علماً بأن الظواهر الاقتصادية هي من التعقيد بمكان بحيث لا يمكن تقريبها بمعادلة واحدة بغض النظر عن عدد المتغيرات التفسيرية التي تضمها. فالسعر مثلاً يحدد الكميات المعروضة من السلع، لكنه يتأثر أيضاً بهذه الكميات. فعندما نحاول تصوير العلاقة بمعادلة واحدة فإننا نكون قد ارتكبنا خطأً نظرياً وتطبيقياً. بهذا تكون صياغة النموذج غير شاملة في الوجهة الاقتصادية النظرية والرياضية.

4 - أخطاء التجميع: ففي البحوث الاقتصادية والإحصاءات عادةً ما نلجأ إلى تجميع البيانات من مصادر مختلفة للبيانات فالدخل القومي أو الاستهلاك الكلي هو تجميع الدخول واستهلاك أفراد أسر مختلفة، وخلال عملية التجميع تهمل بعض الخصائص الفردية وتنعكس بصورة سلبية عند التجميع.

5 - أخطاء القياس: فعند جمع البيانات وقياسها تحصل أخطاء في ذلك، حيث تظهر أخطاء في قياس المتغيرات. وتعتبر الأخطاء (1) و (2) و (3) و (4) من أخطاء الحذف أو أخطاء المعادلات والخطأ (5) هو خطأ القياس. ولهذه الأسباب يدخل عامل الإزعاج أو الاضطراب (u) لأن يزعج العلاقة الدقيقة أو المحددة ليحول النموذج إلى:

$$Y_i = a + bX_i + U_i$$

من هنا فإن دالة الانحدار تقسم إلى جزئين هما:

الجزء الأول (a + bX): وهو الجزء الدقيق الواقع على خط الانحدار ويمثل مجموعة القيم أو النقاط التي تقع مباشرة على خط الانحدار، أما الجزء الثاني (U) فهو العنصر العشوائي الذي يمثل مجموعة قيم الانحرافات عن خط الانحدار المتمثل في الشكل رقم (2).

فالعلاقة $Y = a + bX$ تمثل خط الانحدار الممهد والذي يجب أن تقع عليه كل نقاط (Y)، أما U_1، U_2، U_3، U_4 فهي تمثل العنصر العشوائي أو حد الاضطراب.

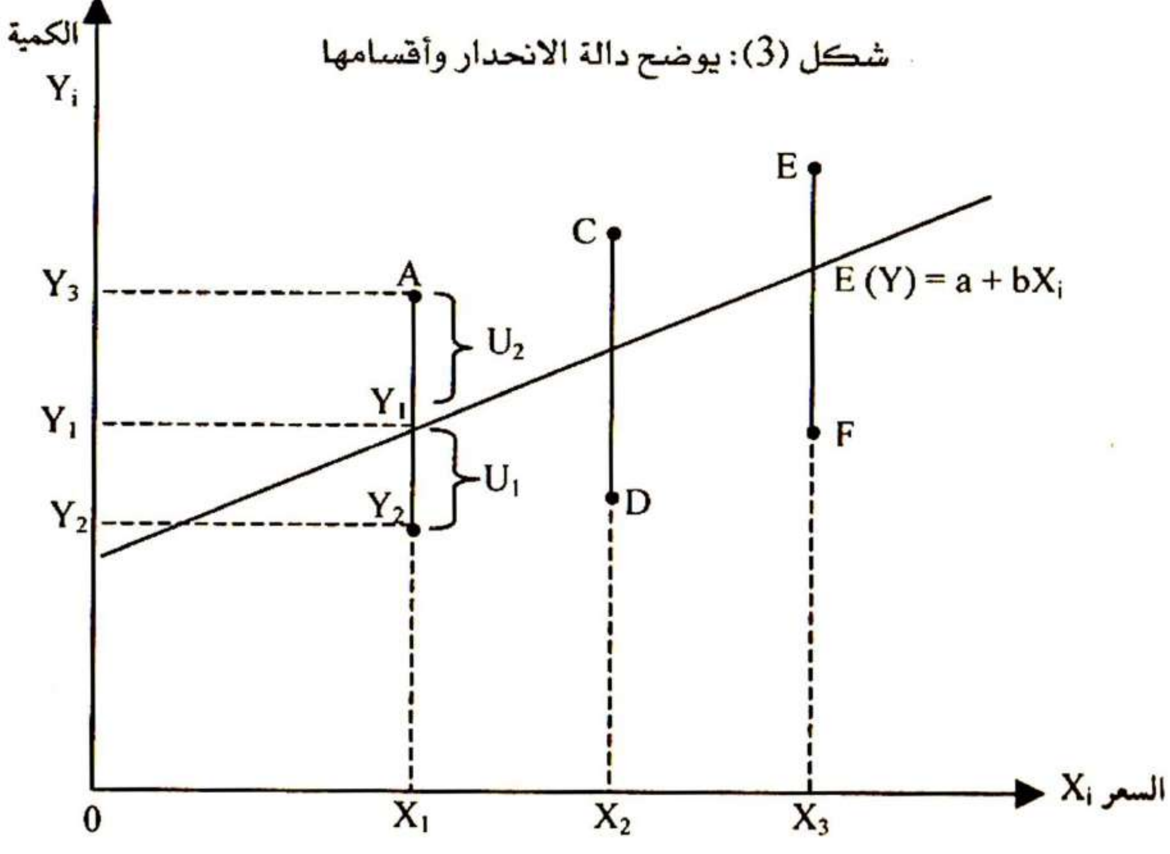
ويمكن تحليل الدالة الإجمالية للانحدار كالآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X + U_i$$

$$\text{Variation in } Y = \begin{bmatrix} \text{Systematic Variation} \\ \text{or Explained Variation} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Random Variation or} \\ \text{Unexplained variation} \end{bmatrix}$$

التغير في Y — التغير المنتظم أو التغير المفسر — التغير العشوائي أو التغير غير المفسر

شكل (3): يوضح دالة الانحدار وأقسامها



بهذا يمكن القول بأن التغير في (Y_i) يعود إلى تأثيرين:

الأول: هو التغير في (Y_i) الناجم عن تأثير التغير في (X_i) وهو التغير المنتظم.

الثاني: هو التغير في (Y_i) الناجم عن تأثير التغير في (U_i) وهو العنصر العشوائي أو متغير الإزعاج.

وعليه فإن التغير في (X_i) يفسر جزء من التغير في (Y_i) والجزء الآخر لا يمكن تفسيره لأنه عائد للعنصر العشوائي. ومن هنا فإن الباحث الاقتصادي يربط (U_i) أو التغير غير المفسر في (Y_i) إلى عوامل غير محددة، أو يفترض بقاء العوامل الأخرى على حالها (Ceteris Paribus). لهذا فإن لكل قيمة من (Y_i) قيمتين أو أن قيمته تجزء إلى جزءين، الأول هي القيمة المفسر بتغيير (X_i) والثانية بـ (U_i). ولكل قيمة من (X_i) هناك قيمة لـ (U_i) أيضاً.

ولو مثلنا الخط المستقيم في الشكل (2) على أنه دالة للعرض، وأن (X) تمثل الأسعار و(Y) تمثل الكميات المعروضة (المنتجة) فإن لكل قيمة في قيم (X) ستكون هناك ردود فعل في الكميات (Y). ففي السعر (X_1) فإن ما متوقع له أن يكون الإنتاج (Y_1) وهو قيم تقع على الخط المستقيم، لكن إن حدث تأخير في وصول المواد الأولية المستوردة وأصبح الإنتاج (Y_2) وهو كمية أقل من (Y_1) وهذا يظهر (U_1) الذي هو انحراف عن المخطط له.

وقد يحدث أحياناً أن تصل كميات أكبر مما خطط لها من المواد المستوردة عند ذاك سينتج المشروع كميات أكبر تصل إلى (Y_3) لتصريف المخزون من المواد الأولية، بهذا فإن الانحراف سيكون (U_2) بدلاً من (U_1). ولأجل أن نقيس (U_1 و U_2) تحتاج إلى أن نحصر مشاهدات X و Y و U، لكننا لا نستطيع أن نحصر مشاهدات (U) كما هو الحال مع (X و Y) لهذا فلجأ إلى التخمين القياسي والتي تعني وضع فروض معينة لتوزيع قيم (U) والخاصة بالقيم المتوسطة له وتباينه وهي

فروض لتخمينات قيم (U_1) بالاستناد إلى قيم (X و Y)، لأن قيم (U_1) لا يمكن مشاهدتها فعلياً.

3.3 : قوة العلاقة بين المتغيرات وقياسها (الارتباط والتحديد) :

3.3.1 : مفهوم قوة العلاقة بين المتغيرات (Intensity of Relationship) :

إن دراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية يجب أن تجيب على عدة تساؤلات عن طبيعة هذه العلاقة وأهمها التساؤلات الآتية:

1- هل هناك علاقة بين المتغيرات؟ وتجيب على هذا السؤال النظرية والمنطق الاقتصادي.
2- هل العلاقة متبادلة؟ وتشترك في الإجابة على هذا السؤال النظرية الاقتصادية والاقتصاد القياسي من خلال قياس العلاقة باتجاه واحد وباتجاهين.
3- مقدار تأثير العوامل على بعضها؟ ويتم احتساب ذلك باستخدام الإحصاء والاقتصاد القياسي من خلال معلمات الانحدار المقدرة.
4- معولية العلاقة واتجاهاتها؟ وتجيب عليها الاختبارات المختلفة عن العلاقة ومعوليتها.
5- قوة هذه العلاقة. وهذا التساؤل لا يجيب عليه غير الاقتصاد القياسي والإحصاء وذلك من خلال إيجاد تلك المقاييس الخاصة بقوة العلاقة بين المتغيرات، ومن ابرزها معاملي (التحديد) و(الارتباط)، فكيف تقيس هذه المقاييس قوة العلاقة بين المتغيرات وما هي تعليلات ذلك؟

فقوة العلاقة بين المتغيرات تعني كثافة تركز أزواج نقاط المتغيرين المستقل والتابع حول خط الانحدار، والتي يمكن أن نجدها عند استعراض الأشكال الانتشارية وإيجاد مقياس كمي بإمكانه أن يعبر عن قوة العلاقة والذي بإمكانه ان يقيس بوحدات حيادية قوة هذه العلاقة.

3.3.2 : الشكل الانتشاري وقوة العلاقة بين المتغيرات (Scatter Diagram) :

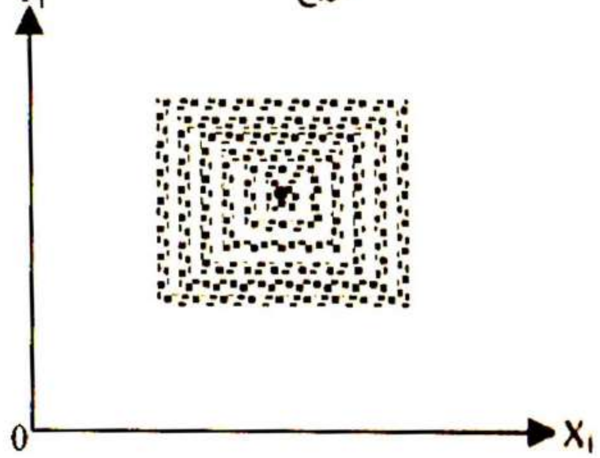
الشكل الانتشاري هو إحداثيات لمتغيرين أو أكثر يعبران عن سلوك الظواهر الاقتصادية المدروسة والتي يعتقد وجود علاقة قياسية بينها، وتسقط عليها أزواج أو أكثر في القيم المتابعة زمنياً أو سحبات عينات متتابعة.ومتلازمة لمتغيرين أو أكثر على هيئة نقاط ويتحدد بواسطة هذه التقاط شكل معين يعبر عن اتجاه وشكل انحدار في جهة، وكثافة معينة أو انتشار معين حول نقطة أو خط أو منحنى بشكل تقاربي أو تباعدي عنه. وعادةً ما يأخذ الشكل الانتشاري احتمالات ثلاثة أساسية وهي:

1- الشكل الانتشاري المركزي (Centraly Intensed Diagram) وهو ذلك الشكل الذي تنتشر نقاطه الخاصة بأزواج المتغيرين حول نقطة مركزية، إن كانت على شكل مربع أو دائرة أو أقواس مختلفة والتي تدل على تشتت قيم المتغيرات عن اتجاه معين ومحدد يمكن قياسه كما هو الحال في الأشكال (3)، (4)، (5).

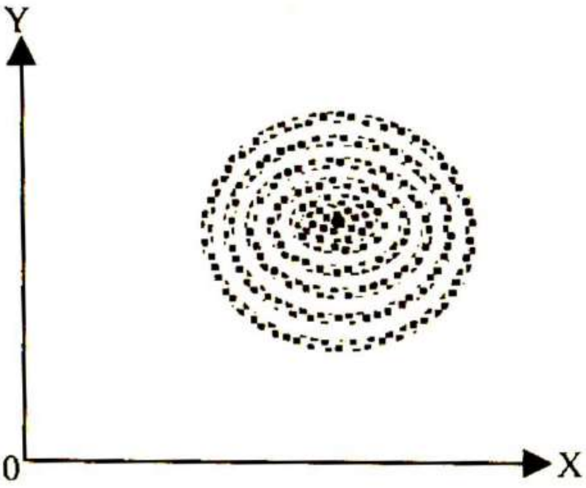
2- شكل انتشاري ضعيف التركز حول اتجاه معين (محور). (Low Intensed Axed Tended Diagram) وهو عبارة عن توزيع لأزواج نقاط المتغيرات حول محور (خط مستقيم أو منحنى) معين تكون نقاطه متباعدة فيما بينها وضعيفة التركّز حول هذا المحور. ويشير ذلك إلى وجود تشتت عال بين قيم المتغيرات كما هو الحال في الشكل (6).

3- شكل انتشاري شديد التركز حول اتجاه معين (محور) (Highly Intensed Axed Tended Diagram). ويمثله الشكلان رقم (7) و (8) حيث تتجمع النقاط إما الواحدة بعد الأخرى مباشرة بشكل منتظم يمثل محوراً معيناً بحد ذاته وباتجاه معين، أو أن تكون قريبة في جزئها الأعظم من المحور ذاته والتي تعبر عن انخفاض التشتت بين القيم وتتركز فيها حول المحور ويكون الاتجاه أو المحور عكسياً أو طردياً وذلك حسب طبيعة العلاقة بين المتغيرات (الظواهر) الاقتصادية).

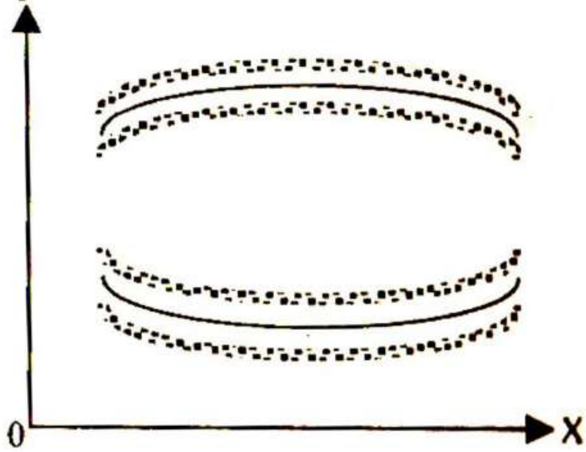
شكل (3): يبين شكل انتشاري مركزي مربع



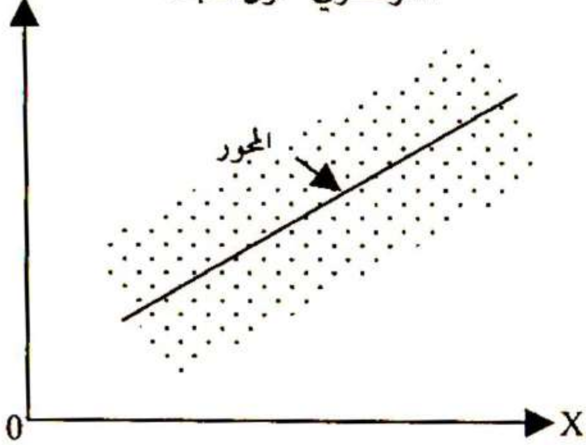
شكل (4): يبين شكل انتشاري مركزي دائري



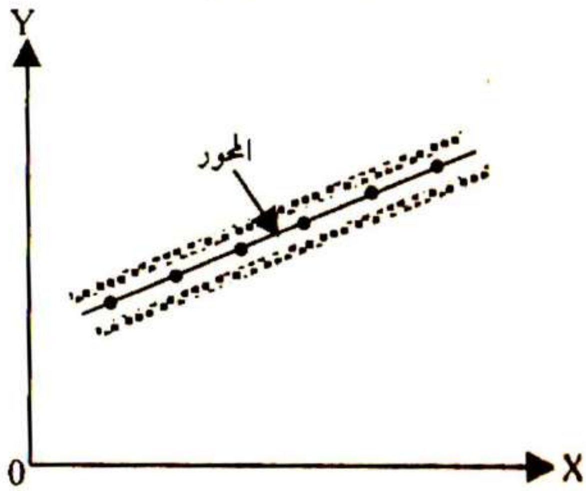
شكل (5): يبني شكل انتشاري مقوس



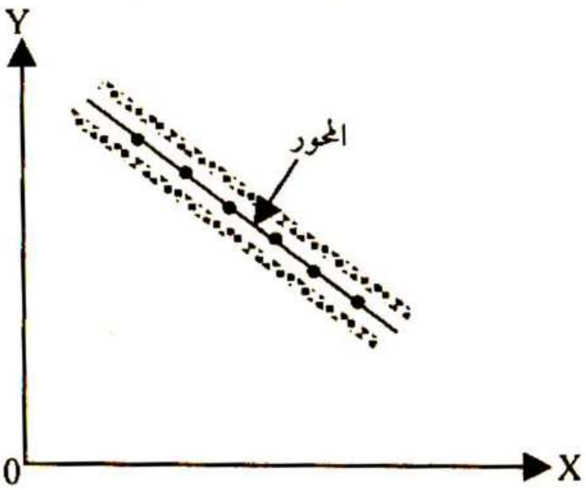
شكل (6): يبني شكل انتشاري ضعيف التركزي حول اتجاه



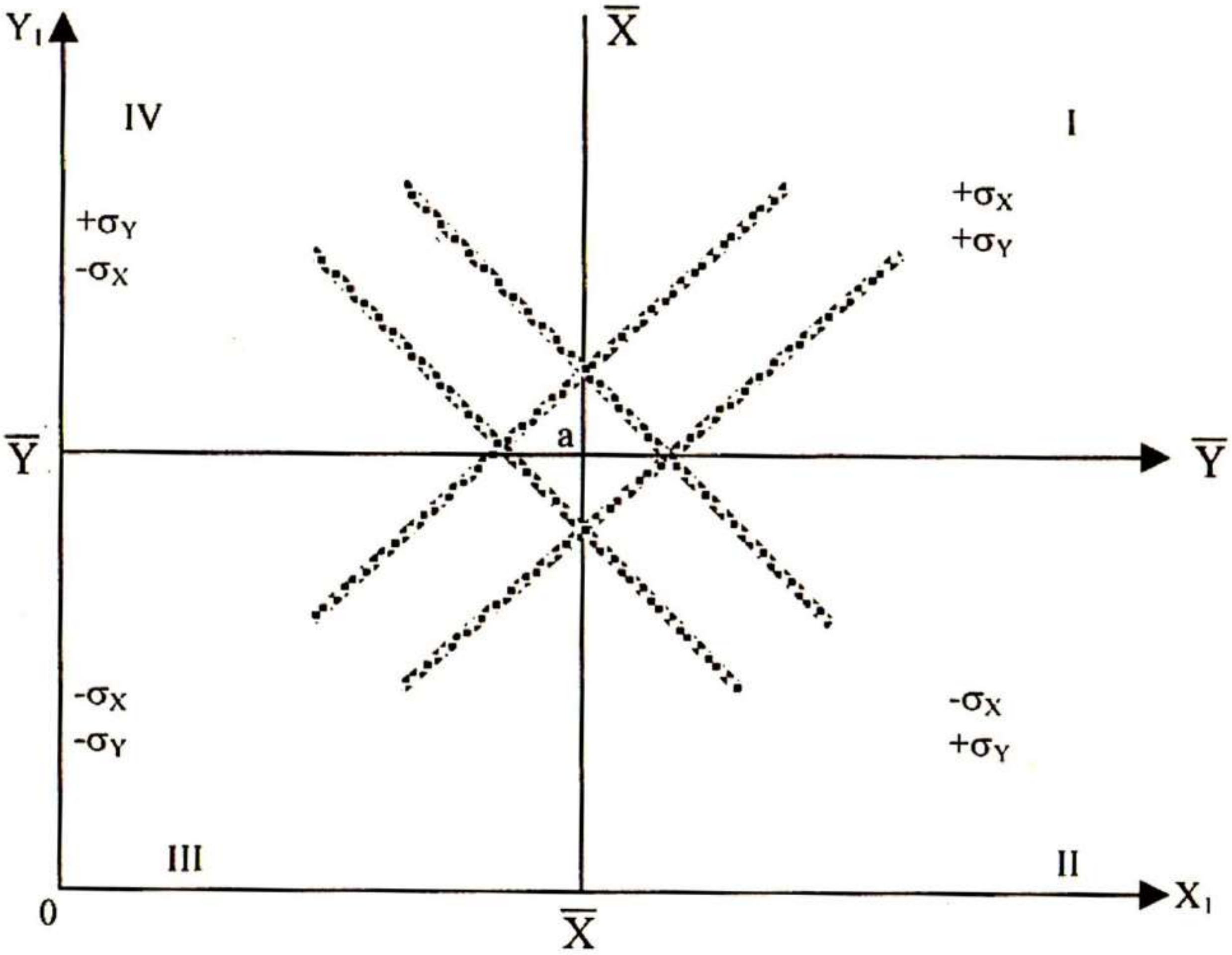
شكل (7): يبن شكل انتشاري شديد التركز حول اتجاه طردي



شكل (8): يبني شكل انتشاري شديد التركز حول اتجاه عكسي



شكل (9): يبين العلاقة بين المتغيرات (X_i) و (Y) وتباينهما (تشتتهما)



فمن أين وكيف تتشكل هذه النقاط وكيف هي طبيعة العلاقة؟ للإجابة على هذه التساؤلات يتطلب منا الأمر إيضاح الآتي:

أولاً: التلازم بين المتغيرات وأشكالها وقياسها.

ثانياً: مفهوم التلازم بين المتغيرات.

يعكس التلازم بين المتغيرات المسافة التي يتحرك ضمنها المتغيرات أو الأبعاد التي تأخذها أزواج النقاط بحيث تقع جميعها أو معظمها على محور معين محدد الاتجاه فإن تلازم حركة المتغيرين منتظمة جداً أو ذات انتظام تام. وعندما تأخذ بالابتعاد عن المحور تكون ذات تلازم أقل انتظاماً ضمن المحور المعين.

فإذا ما زادت أقيام (Y) أو انخفضت قياساً لأقيام (X) بنسبة أو معدل متقاربة جداً فإن تركز النقاط حول المحور تكون كثيفة جداً وذات تلازم قوي. وإذا ما زادت أو انخفضت بنفس الوتيرة كان التلازم تاماً وتقع كلها على المحور الذي إن أوصلنا نقاطه هذه تعطينا منحنى ذو معنى بياني معرّف ودقيق.

وإذا ما زادت أو انخفضت أقيام المتغيرين بوتائر متباعدة عند ذاك سيكون تشتتها حول المحور الوهمي كبيراً وتلازمها ضعيفاً. وإذا ما زادت أو انخفضت بوتائر متباعدة جداً لا مجال لربطها عند ذاك سيكون تشتتها تاماً حول المحور الوهمي وتلازمها صفراً أو معدوماً.

وتعكس فكرة التلازم هذه فكرة العلاقة المتبادلة بين المتغيرات أو ما نسميه في علم الإحصاء بالارتباط (Correlation) والتي تنبع من فكرة التشتت أو التباين بين أقيام المتغيرات حول محور معين أو أقيام مركزية متتابعة وكذلك إلى فكرة التباين المشترك بينهما (Variance & Covariance) فما هو التباين والتباين المشترك؟ .

3.4 : التباين (Variance) :

كلمة تباين أو (Variance) نابعة من كلمة (اختلافات) أو (فوارق) بين قيمة وأخرى ومصدرها (Variation) أو تذبذب القيم حول قيمة معينة إن كانت هذه القيم (قيم محورية) أو (قيم مركزية) أو تذبذب القيم حول أية قيمة أخرى كالوسط الحسابي.

فإذا ما فرضنا أن لدينا قيمة مركزية وتقارن بها قيم أخرى اشتقت منها القيمة المركزية هذه، فإن مجموع انحرافات أو اختلافات هذه القيم عن هذه القيمة المركزية يسمى تشتتاً أو تبايناً.

فإذا ما فرضنا أن لدينا الأعداد الآتية نرمز لها بـ (X_i) وتأخذ القيم الآتية:

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
5	9	6	2	6	9

فإن متوسط هذه القيم الحسابي سيساوي:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{5+9+6+2+6+9}{6} = 6$$

أما التباين فسيكون الآتي:

$X_1 - \overline{X}$	$X_2 - \overline{X}$	$X_3 - \overline{X}$	$X_4 - \overline{X}$	$X_5 - \overline{X}$	$X_6 - \overline{X}$
5-6	6-6	9-6	2-6	6-6	8-9
-1	0	+3	-4	0	+2

وعند جمع هذه الاختلافات أو الفوارق نجد أنها تساوي صفراً. وعليه فإننا لا نكون على خطأ عندما نربع هذه الانحرافات لنتخلص من الإشارات السالبة ونقسم على عدد قيم (X) أو تكرارها عندئذ سنحصل على ما نسميه بالتباين أو:

$$\begin{aligned}\sum D &= -1^2 + 0^2 + 3^2 - 4^2 + 0^2 + 2^2 \\ &= 1+0+9+16+0+4 \\ &= 30\end{aligned}$$

سيكون التباين ورمزه القياسي $\left(\sigma_u^2\right)$ الآتي:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum D}{n} = 5$$

حيث تشير D الفوارق أو الاختلافات (Differences).

بهذا فإن متوسط مربع انحرافات القيم عن قيمة مركزية يسمى بالتباين. وهو يقيس متوسط انحرافات القيم الأصلية عن قيم مركزية معينة. وينطبق الشيء ذاته على (Y) أو أي متغير آخر كما يمكن لنا أن ندرس هذه العلاقة على متغيرين أو أكثر من المتغيرات أو الظواهر الاقتصادية التي يعتقد بوجود تلازم فيما بينها في

الواقع الاقتصادي ضمن النظرية الاقتصادية. فإذا ما أخذت علاقة متغيرين فيما بينهما وذات تأثير معين كل واحدة على الأخرى، سنحصل على ما نسميه بالتباين المشترك أو (Covariance) وهو المصطلح الثاني الواجب شرحه وكالآتي:

3.5 : التباين المشترك (التغاير) (Covariance) :

التباين المشترك هو العلاقة بين متغيرين أو أكثر ونرمز لهما (X) و (Y) يفترض وجود علاقة بينهما وباتجاه معين وعن نقطتين مركزيتين أو محور معين. فإذا ما قمنا بنفس ما قمنا به من إيجاد متوسط تباين قيم (X_i) ومتوسط تباين المتغير (Y_i) وضربنا بعضهما بالآخر سنحصل على التباين المشترك عند نقطة معينة مشتركة بينهما أو فيما بينهما وبالصيغة الرياضية الآتية:

$$\text{Covariance}(X, Y) = \text{Cov}(X, Y) = \hat{\sigma}_{xy} \quad \text{أو} \quad \hat{\sigma}_{yx}$$

$$\hat{\sigma}_{yx} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(X_i - \overline{X}\right)\right] \qquad \ldots \qquad (1)$$

فإذا ما كانت هذه القيم التي تتباين حولها النقاط المختلفة عند ذاك سنكتبها كالآتي[1]:

$$\sigma_{yx} = E\left[\left(Y_i - \mu_y\right)\left(X_i - \mu_x\right)\right]$$

حيث أن: μ_y = القيمة المتوقعة لـ (Y) أو E (Y)

μ_X = القيمة المتوقعة لـ (X) أو E (X)

---

(1) د. محمد لطفي فرحان، مبادئ الاقتصاد القياسي، الدار الجماهيرية للنشر والتوزيع والإعلان، 1995، ص24 -25، طرابلس – ليبيا. انظر أيضاً: أ. د. وليد إسماعيل وآخرون، الاقتصاد القياسي التحليلي – بين النظرية والتطبيق، دار المجدلاوي للنشر، عمان – الأردن، 2004، الفصل الرابع.

فإذا ما فرضنا أن هذه القيم المركزية هي متوسط (X_i) أو $(\overline{X})$ ومتوسط (Y_i) أو $(\overline{Y})$ فإننا ومن خلال الشكل (9) سنجد الآتي:

1- إذا ما أسقطنا قيم $(\overline{X})$ و $(\overline{Y})$ على إحداثيين يمثلانهما فإنهما سيؤلفان خطان متقاطعان في نقطة معينة مثل (a) وبذلك تقسم الإحداثيات إلى أربعة مربعات صغيرة I و II و III و IV .

2- إن في كل مربع مجموعة من النقاط الخاصة بالمشاهدات المختلفة للمتغيرين (X) أو (Y) إما أن تكون أكبر في المتوسط $(\overline{X})$ أو $(\overline{Y})$ أو أصغر منهما ، أو بقيم متعاكسة أو على المحوري الجديدين $(\overline{X})$ و $(\overline{Y})$.

3- تكون القيم كما يأتي:

أولاً: في المربع (I) فإن قيم (X_i) و (Y_i) تكون أكبر في متوسطاتها $(\overline{X})$ و $(\overline{Y})$ ولهذا فستكون إشاراتها موجبة.

ثانياً: في المربع (III) تكون كل قيم (X_i) و (Y_i) أصغر في متوسطاتها $(\overline{X})$ و $(\overline{Y})$ ولهذا ستكون كل إشاراتها سالبة.

ثالثاً: في المربع (V) تكون قيم (Yi) أكبر في متوسطها $(\overline{Y})$ وجميع قيم (X_i) أصغر في متوسطها $(\overline{X})$ لهذا فإن انحرافات القيم (Y_i) عن متوسطها ستكون موجبة وانحرافات (X_i) عن متوسطها $(\overline{X})$ ستكون سالبة.

رابعاً: في المربع (II) ستكون قيم (X_i) أكبر في متوسطها $(\overline{X})$ وجميع قيم (Y_i) اصغر من متوسطها $(\overline{Y})$ لهذا ستكون انحرافات القيم (X_i) موجبة وانحرافات (Y_i) عن متوسطها $(\overline{Y})$ سالبة.

خامساً: بما أن الفروق لقيم (X_i) و (Y_i) في المربع (I) كلها موجبة فإن التباين المشترك بينهما سيكون موجباً أيضاً.

سادساً: بما أن تباين (X_i) و (Y_i) في المربع (III) كلها سالبة فإن التباين المشترك بينهما في هذا المربع سيكون موجباً أيضاً.

سابعاً: بما أن الفروق لقيم (X_i) في المربع (II) أكبر في متوسطها والفروق لقيم (Y_i) أقل في متوسطها، لهذا فإن التباين المشترك في هذا المربع سيكون سالباً.

ثامناً: بما أن الفروق لقيم (X_i) في المربع (IV) أصغر من متوسطها (سالبة) والفروق لقيم (Y_i) أكبر في متوسطها (موجبة) لهذا سيكون التباين المشترك في هذا المربع سالباً أيضاً.

ويعني هذا الآتي:

أولاً: إن التباين المشترك للقيم (X_i) و (Y_i) عن متوسطاتها في المربعين I و III سيكون موجباً. وهذا يدل على وجود علاقة طردية، أي أن القيم العليا لـ (X_i) تقابلها قيم عليا للمتغير (Y_i) والقيم الدنيا للمتغير (X_i) تقابلها قيم دنيا للمتغير (Y).

ثانياً: إن التباين المشترك لقيم (X) و (Y) عن متوسطاتها في المربعين II و IV سيكون سالباً. وهذا يدل على وجود علاقة عكسية بينهما. أي أن القيم العليا لـ(X_i) تصاحبها قيم دنيا لـ (Y_i) والقيم الدنيا لـ (X_i) تصاحبها قيم عليا للمتغير (Y_i).

ثالثاً: عندما تكون قيمة (σ_{yx}) أكبر من الصفر ستكون العلاقة طردية أو عندما تكون أصغر من الصفر ستكون العلاقة عكسية، وعندما تكون (صفراً) تكون العلاقة غير محددة وهذا يعني حالتين:

1- الا تكون هناك علاقة بين المتغيرين إطلاقاً، أي أن المتغير (Y_i) مستقلاً عن (X_i).

2- أن العلاقة غير خطية.

3.6 : قياس التباين المشترك :

يقاس التباين المشترك للمجتمع بالصيغة الآتية:

$$\sigma_{yx} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

وهو يؤلف متغير عشوائي آخر لأن قيمته مختلفة من عينة لأخرى. وهو يعتمد بحد ذاته على حجم العينة (n). فكلما زاد حجم العينة كلما اقتربت قيمته من القيمة الحقيقية للتباين المشترك للمجتمع، فكلما مالت (n) إلى ما لا نهاية كلما اقتربت (σ_{yx}) المحسوبة من قيمتها للمجتمع. بهذا يكون تقديرنا متوافق .(Consistent)

تطبيق (1):

نفترض أن العلاقة بين X و Y تعبر عنها البيانات الموجودة بالجدول (1). استخدام هذا الجدول لقياس قيمة التباين المشترك.

جدول (1)

يوضح طريقة حساب التباين المشترك (التغاير)

Y_i	X_i	$Y_i - \overline{Y}$	$X_i - \overline{X}$	$\left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(X_i - \overline{X}\right)$
10	10	0	-1	0
9	12	-1	1	-1
12	8	2	-3	-6
11	10	1	-1	-1
8	14	-2	3	-6
7	18	-3	7	-21
13	7	3	-4	-12
11	9	1	-2	-2
10	10	0	-1	0
9	12	-1	1	-1
100	110	0	0	-50

الحل:

لإيجاد القيمة المقدرة المطلوبة وهي $(\hat{\sigma}_{XY})$ نتبع الخطوات التالية:

1- نوجد متوسط قيم (Y). ومن الجدول (1) نلاحظ أن مجموع قيم (Y) يساوي 100، إذاً قيمة $\overline{Y}$ تساوي (10) أي:

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{100}{10} = 10$$

2- نوجد متوسط قيم (X)، ومن الجدول نفسه نلاحظ أيضاً أن مجموع قيم (X) يساوي 110، إذن قيمة ($\overline{X}$) تساوي 11، أي:

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{110}{10} = 11$$

3- نوجد الفرق بين قيم (Y) ومتوسطها وكذلك الفرق بين قيم (X) ومتوسطها، فنحصل على انحراف هذه القيم عن متوسطها.

4- نضرب انحراف قيم (X) عن متوسطها في انحراف قيم (Y) عن متوسطها ثم نجمع النواتج فنحصل على المجموع (50 -) كما هو موضح بالجدول (1).

5- بما أن القيمة المقدرة للتباين المشترك يمكن الحصول عليها من المعادلة التالية:

$$\sigma_{XY} = \left(\frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(Y-\overline{Y}\right)\left(X-\overline{X}\right)$$

$$= \frac{1}{9}(-50) = -5.55 \cong -6$$

ونلاحظ هنا أن قيمة التباين المشترك عبارة عن قيمة سالبة، ومن هنا نستنتج ان العلاقة بين (X) و (Y) هي علاقة عكسية.

3.7 : معامل الارتباط وقياسه (Coefficient of Correlation) :

معامل الارتباط هو تعبير حقيقي عن علاقة متبادلة والتي سميت بـ (Covariance) اي التباين المشترك وهو يعبر عن علاقة متبادلة بين المتغيرين (X) و (Y)، أي علاقة (X) بـ (Y) وعلاقة (Y) و (X). فالتباين المشترك يعطي إشارة واتجاه العلاقة بين

المتغيرين وبوحدات قياس المتغيرين ذاتها، ولكنه لا يثبت قوة هذه العلاقة. ولأجل أن نحصل على مقياس محايد لقوة العلاقة بين المتغيرين فإننا يجب أن نقيسه بوحدات محايدة أيضاً. ويمكن الحصول على هذا المقياس المحايد بقسمة التباين المشترك لـ (X) و (Y) على حاصل ضرب انحرافاتها المعيارية وكالآتي:

حيث أن:

$$\rho_{YX} = \frac{\sigma_{YX}}{\sigma_Y \sigma_X} \qquad \dots \qquad (2)$$

ρ = ويلفظ (رو) وهو معامل ارتباط المجتمع.

σ_{YX} = التباين المشترك للمتغيرين (X) و (Y).

σ_Y = الانحراف المعياري لـ (Y_i).

σ_X = الانحراف المعياري لـ (X_i).

ونرمز له بـ (r) عندما يحسب من عينة.

وتكون قيمته بين (0) وواحد عدد صحيح، ويأخذ إشارة سالبة أو موجبة وفقاً لإشارة التباين المشترك. وكلما اقترب من (1) عدد صحيح كلما قويت العلاقة، وكلما اقترب من (0) ضعفت العلاقة. أما (σ_Y) و (σ_X) تحسب كالآتي:

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \overline{Y}_i\right)^2}{n-1}} \qquad \dots \qquad (3)$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \overline{X}_i\right)^2}{n-1}} \qquad \dots \qquad (4)$$

وللعينة يستخدم الخطأ المعياري لتقدير (X) أو (S_X) والخطأ المعياري لتقدير (Y) أو (S_Y).

لهذا فإن معامل الارتباط هو مقياس لدرجة (Degree) وشدة وقوة العلاقة بين المتغيرين. ويسمى هذا المعامل بمعامل بيرسون للارتباط ويحسب للعينة كالآتي:

$$r_{XY} = \frac{\sum x_i y_i}{nS_X S_Y} \quad \ldots \quad (5)$$

أو

$$= \frac{\sum x_i y_i}{n\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}\sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}} \quad \ldots$$

وذلك بعد حذف (n) من الأطراف الخاصة بالمقام بالمعادلة (5) نحصل على:

$$r_{XY} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}}$$

وكما يمكن أن تستخدم المعادلة المباشرة الآتية وهي تحويل رياضي للمعادلة (5)، وكما يلي:

$$r = \frac{n\sum(X_i Y_i) - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{\sqrt{n\sum X_i - \left(\sum X_i\right)^2}\sqrt{n\sum Y_i^2 - \left(\sum Y_i\right)^2}} \quad \ldots \quad (6)$$

3.8 : معامل التحديد (Coefficient of Determination) :

معامل التحديد (R^2) هو تربيع لمعامل الارتباط (r)، وهو معامل ذو دلالة إحصائية وقياسية مهمة جداً. حيث يدل على النسبة التي يفسرها المتغير المستقل من التغير في المتغير التابع. وتكون قيمته أصغر من قيمة معامل الارتباط عدا في حالة ($r = 1$)، بسبب أن جذر كل كسر هو أكبر من الرقم الأصلي، وأن تربيع الكسر هو أصغر من الكسر الأصلي. ويستخدم معاملي الانحدار والتحديد في اختبار جودة توفيق النماذج القياسية والاستدلال الإحصائي وسنقوم بشرح هذه الوظيفة عند التطرق إلى موضوع اختبارات الفروض. كما أن له علاقة وثيقة مع الانحدار ومعامل الانحدار (b) وسيتم شرح ذلك في موضوع الاختبارات أيضاً. إضافة لما تقدم فهو أنواع (كلي وجزئي) ورتبي والتي سنشرحها تباعاً ووفقاً لتسلسل المواضيع الخاصة بها وكالآتي:

3.9 : معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان (Coefficient of Rank Correlation).

وهو معامل لا يعتمد على قيم (X) و (Y) مباشرة بل على ترتيبها على هيئة رتب لكل صفة. ويمكن حسابه بالصيغة الآتية:

$$r_s = 1 - \left[\frac{6\sum d^2}{n\left(n^2 - 1\right)} \right]$$

حيث أن: n = عدد أزواج البيانات لـ (X) و (Y).

D = الفرق بين رتب (X) ورتب (Y).

ويحسب مباشرة وخاصة في العينات الصغيرة (25 -30) عن طريق ترتيب قيمة (X) و (Y) ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً.

تطبيق (2):

أدناه قيم الأجور والإنتاجية. احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

جدول (2)

يبين قيم الأجور والإنتاجية

d^2	الفرق بين الرتبي d	الرتبة (Y)	الإنتاجية (Y)	الرتبة (X)	الأجور (X)
1	1-	7	69	6	75
-	0	4	85	4	82
1	1-	9	55	8	65
1	1	1	90	2	90
-	0	5	80	5	77
1	1-	10	50	9	60
4	2	8	57	10	55
-	0	3	88	3	87
1	1-	2	89	1	91
1	1	6	71	7	73
$\sum d^2 = 10$					n = 10

$$\therefore r_s = 1 - \frac{6 \times 10}{10 \times 99} = 0.94$$

وهو يشير إلى أن العلاقة بين الأجور والإنتاجية عالية وموجبة.

3.10 : المعنى العام لمعامل الارتباط :

أولاً: وجود ارتباط بين المتغيرين، لكنه لا يعني أن أحد المتغيرين هو سبب لوجود الآخر وتغيره.

ثانياً: إذا وقعت جميع نقاط الانتشار على خط مستقيم فإن $r = \pm 1$.

ثالثاً: إذا لم توجد علاقة خطية بين المتغيرين فإن $r = 0$ وكذلك عندما تكون العلاقة غير خطية لكنها تحسب بمعادلة انحدار خطية.

3.11 : دلالة معامل الارتباط (r) Significance of Correlation Coefficient :

لمعامل الارتباط دلالة إحصائية واقتصادية يمكن تلخيصها بالآتي:

أولاً: إذا كان قيمة (r) قريبة من (± 1) كانت هناك علاقة خطية بين المتغيرات. وإذا ما كانت ($r = 0$) لا توجد مثل هذه العلاقة بين المتغيرات. أو إنها غير خطية واحتسبت بطريقة خطية.

ثانياً: إذا ما كانت قيمة وسيطة بين (0، 1) يجب اختبار معنوية أو (دلالة) معامل الارتباط لها.

ولإجراء هذا الاختبار نعتبر المجتمع ذو البعدين (X و Y) الذي أخذت منه المجموعة المكونة من (n) من الأزواج المرتبة، ونفترض أن معامل الارتباط لهذا المجتمع (ρ)، فعندما يكون (r) تقديراً أصلياً للمعامل (ρ). ولو أخذنا جميع العينات الممكنة ذات الحجم (n) المكونة من أزواج المشاهدات وافترضنا أن المجتمع الأصلي يخضع للتوزيع الطبيعي ثم حسبنا توزيع المعاينة لمعامل الارتباط (r) فلا نحصل على

توزيع من التوزيعات المألوفة لدينا. ولكن إذا ما افترضنا أن $\rho = 0$ فإننا سنحصل على اقتران (r) يخضع لتوزيع معلوم كما يأتي:

نظرية (1):

إذا أخذت جميع العينات الممكنة ذات الحجم (n) من المجتمع ذي بعدين خاضع للتوزيع الطبيعي ومعامل ارتباطه $\rho = 0$، وإذا ما كان (r) يعبر عن معاملات ارتباطات تلك العينات فإن:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

يخضع لتوزيع (t) على (n-2) درجات حرية (Degree of Freedom).

وباستخدام هذه النظرية يمكننا تحديد فيما إذا ما كان معامل الارتباط (r) لعينة حجمها (n) دالاً على وجود علاقة خطية بين المتغيرين. ويكون هذا التحديد باختبار الفرضية:

فرض العدم $H_0 : \rho = 0$ أو الفرض البديل $H_1 : \rho \neq 0$ على مستوى دلالة معينة.

تطبيق (3):

هل تدل قيمة (r) على وجود ارتباط ذي دلالة معينة بين معدل درجات الطالب في الصف الثالث ثانوي ومعدله في شهادة الدراسة الثانوية العامة على أساس مستوى دلالة 5٪ ، علماً بأن معامل التحديد يساوي (0.9332) وحجم العينة $n = 10$.

نختبر الفرضية $H_0 : \rho = 0$

$H_1 : \rho \neq 0$

ونحسب (t) كالآتي:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{r^2}{\frac{1-r^2}{n-2}} = \frac{0.966}{\sqrt{\frac{1-0.9332}{8}}}$$

$$t = 9.887$$

ونجد أن جدول (t) أن:

$$t = (0.075:7) = 2.365$$

$$t = (0.975:7) = -2.365$$

وبما أن (t) المحسوبة أكبر من (t) الجدولية: $t\left(1-\frac{\alpha}{2}:n-2\right)$

∴ نرفض (H_0) ونعتبر وجود ارتباط ذي دلالة بين المتغيرين.

وبما أن نظرية (1) تتحقق فقط إذا كان $(\rho = 0)$ فإنه لا يمكن استعمالها لإيجاد فترات ثقة لـ (ρ). ولتحقيق هذا الهدف عرف (فيشر) الإحصاء (Z) الذي يحقق ذلك وفق النظرية الآتية:

نظرية (2):

إذا أخذت جميع العينات ذات الحجم (n) من مجتمع ذي بعدين وذي معامل ارتباط (ρ) وإذا عرفنا إحصاء (Z) كالآتي:

$$Z = \frac{1}{2} \mathrm{Ln}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

فإن (Z) يقترب من التوزيع الطبيعي ذي المعدل:

$$M_2 = \frac{1}{2} \mathrm{LN}\left[\frac{1+p}{1-p}\right]$$

وانحرافه المعياري:

$$\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

وتستعمل نظرية (2) لإيجاد فترة ثقة 100٪ (1-α) لمعامل الارتباط (ρ) وذلك بإيجاد فترة الثقة لـ (μ_z) ثم تحويلها إلى فترة ثقة لـ (ρ) وكالآتي:

$$P\left(-Z_{1-\alpha} \le Z_{1-\alpha}\right)=1-\alpha$$

ومنه نستنتج أن α :

$$\left(Z-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_Z, Z+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma_Z\right)$$

هي فترة ثقة 100٪ (α -1) لـ μ_z وبقراءة ما يقابل هذه الفترة في جدول تحويل (r إلى z) نجد الفترة المطلوبة لـ (ρ).

تطبيق (4):

في التطبيق السابق اختبر الفرضية $\rho = 0.8$ على مستوى دلالة 0.05 ثم احسب فترة الثقة لمعامل الارتباط (ρ).

الحل:

بما أنه لم يفترض $\rho = 0$ فلا نستطيع استعمال نظرية (1). أي نقوم بالفروض الآتية:

1- $H_0 : \rho = 0.8$
2- $H_1 : \rho \neq 0.8$
3- $\alpha = 0.5$
4- نستعمل نظرية (2) ونحسب الإحصاء (Z) عند $r = 0.966$ فيكون:

$$Z=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.966}{1-0.066}\right)=2.029$$

ونلاحظ بأنه بالإمكان حساب (Z) أو استخراجها من جدول تحويل (r إلى z) في الملحق.

$$\mu_Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.8}{1-0.8}\right) = 1.099$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{9-3}} = \frac{1}{2.449} = 0.408$$

وبحساب القيمة المعيارية لـ (Z) نجد أن:

$$Z = \frac{2.029 - 1.099}{0.408} = 2.28$$

ومن جداول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$$

وبما أن القيمة المعيارية لـ (Z) أكبر من قيمة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}+$ أي:

$$2.28 > 1.96$$

إذن نرفض (H_0) ونعتبر أن $\rho \neq 0.8$ ولإيجاد فترة الثقة لـ (ρ) ولإيجاد فترة الثقة لـ (ρ) نجد ما يأتي:

$Z = 2.029$	$r = 0.966$
$\sigma_Z = 0.408$	$Z_{0.925} = 1.96$

وبتعويض هذه القيمة في فترة الثقة نجد:

$$2.029 = 1.96 \times 0.408 \; ; \; 2.029 + 1.96 \times 0.404$$

أي أن فترة الثقة في (2.829 ؛ 1.229) هي فترة ثقة 95٪ لـ (μ_Z) ويقابلها في جدول تحويل (r إلى z) القيمة (0.996 ، 0.84) وهي فترة ثقة 95٪ لـ (ρ).

3.12 : تمارين الفصل الثاني والثالث :

1 - اشرح مفهوم النموذج وحدد طبيعة وعناصر النموذج الاقتصادي.

2- النموذج القياسي هو نموذج اقتصادي كمي، فما هي عناصره وبماذا يختلف عن النموذج الاقتصادي الرياضي.

3- عنصر الاضطراب أو الحد العشوائي (المتغير العشوائي) أحد أقسام النموذج القياسي ويجعله يتميز عن النموذج الاقتصادي الرياضي، صف هذا المتغير.

4- النموذج القياسي نموذج احتمالي أو عشوائي – ما هي أنواع المتغيرات الاقتصادية فيه.

5- النماذج الاقتصادية القياسية عدة أنواع، حددها وميّزها.

6- النموذج الاقتصادي يمكن أن يصف العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية بمعادلة واحدة أو أكثر من معادلة، أعطي أمثلة واقعية عن ذلك.

7- النموذجين أدناه، أحدهما مفتوح والآخر مغلق حددها وحدد الفوارق بينهما:

$$Y = I + C = G + X - M$$

$$Y = C + I + G$$

8- السلاسل الزمنية نماذج اقتصادية – قياسية فما هي متغيراتها الاقتصادية، وكيف يؤثر الزمن كمتغير اقتصادي؟

9- النموذج الاقتصادي – القياسي يصور العلاقة الكمية بين المتغيرات الاقتصادية، ويتم وضعه بمراحل متتالية منطقياً، حدد واشرح هذه المراحل.

10- العلاقة بين الطلب والسعر علاقة اقتصادية بمعادلة واحدة، فإذا ما فرضنا بأن الطلب هو (D) والسعر (P) فلماذا لا نلجأ إلى اختصار الأمر في إيجاد علاقة متوسطة بسيطة مثل:

$$\frac{D}{P} = a$$

ونحلل بواسطتها هذه العلاقة (مع بقاء الأشياء الأخرى على حالها)، ولماذا نلجأ إلى وصفها في نموذج مثل:

$$D = a + bP + u$$

11- لماذا يحتوي النموذج القياس على متغير غير موجود في النظرية الاقتصادية وهو المتغير العشوائي (E) أو (U)؟ اشرح مفهوم هذا المتغير وضرورته في النموذج القياسي.

12- ما هي الأسباب الحقيقية لوجود المتغير العشوائي في النموذج الاقتصادي؟

13- اشرح مفهوم قوة العلاقة بين المتغيرات مستعيناً بالأشكال الانتشارية.

14- اشرح العلاقة بين التباين المشترك وقوة العلاقة واتجاهها بين المتغيرات ومدى قوة هذه العلاقة القياسية.

15- عدد واشرح طرائق قياس العلاقة بين المتغيرات.

16- قارن بين معامل ارتباط القيم لبيرسون وسبيرمان باستخدام القيم الآتية:

X:	15	22	26	25	30	39	60
Y:	35	32	29	28	27	26	25

4

نموذج الانحدار الخطي البسيط

Simple Linear Regression Model

4.1 : مفهوم نموذج الانحدار الخطي البسيط.

4.2 : توليف نموذج الانحدار الخطي البسيط باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

4.3 : الاشتقاق الرياضي لمعادلات المربعات الصغرى الطبيعية واستنتاج تقديرات المعلمات.

4.4 : النموذج القياسي العكسي للانحدار الخطي البسيط.

4.5 : تطبيقات وتمارين

نموذج الانحدار الخطي البسيط
Simple Linear Regression Model

4.1 : مفهوم نموذج الانحدار الخطي البسيط :

يعتبر هذا النموذج من اكثر النماذج شيوعاً في الممارسة القياسية وذلك لسهولة استخدامه وحساب معلماته وتطبيقاته، إلى جانب ذلك فإن هناك العديد من العلاقات الاقتصادية تأخذ هذا الشكل من النماذج. ونموذج الانحدار الخطي البسيط هو نموذج قياسي يعبر عن وجود علاقة خطية بين متغيرين أحدهما المتغير التابع (Y_i) والثاني المتغير المستقل (X_i) ويأخذ الشكل الجبري الآتي:

$$Y_i = a + bX_i + u_i$$

حيث أن: (i): رقم المشاهدة ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Y_i : قيمة المشاهدة (i) الخاصة بالمتغير التابع.

X_i : قيمة المشاهدة (i) الخاصة بالمتغير المستقل.

U_i : قيمة الخطأ (i) الخاصة بالمتغير العشوائي.

وتعتبر المشاهدات الخاصة بالمتغير العشوائي مشاهدات مقدرة وغير حقيقية.

b , a معلمات النموذج والتي تحدد طبيعة العلاقة بين المتغيرات ويسمى النموذج بالانحدار البسيط لوجود العلاقات الآتية:

1- أن المتغير (Y_i) ينحدر على المتغير (X_i) باعتبار الأول تابعاً والثاني مستقلاً.

2- أنه بسيط لأنه يمثل العلاقة بين متغيرين فقط تابع ومستقل.

3- أنه خطي لأن العلاقة بين متغيراته ومعلماته تأخذ شكل خط مستقيم، تؤلف (a) المقطع على الإحداثي الرأسي، و (b) يمثل ميل خط الانحدار (Y_I) على (X_i).

4- ويمكن تقدير خطية الدالة من خلال رسم الشكل الانتشاري، حيث يكون الجزء الأعظم من أزواج النقاط (X_i , Y_i)، تأخذ شكل خط مستقيم، وذلك عبر رسم خط ما بين أزواج النقاط بحيث تقسمها إلى جزئين متساويين فإذا كان الخط الممدود خطاً مستقيماً كان النموذج خطاً مستقيم بخلافه يكون غير مستقيم، أو أن النموذج يكون لا خطياً.

5- أما طبيعة العلاقة بين المتغيرين فهي تتحدر من خلال المعلمة (b) فإذا ما كانت سالبة فستكون العلاقة عكسية والشكل الجبري للنموذج العكسي هو $Y = a - bX$ ، وعندما تكون موجبة فستكون العلاقة طردية والشكل الجبري للنموذج الطردي هو $Y = a + bX$ ، انظر الأشكال البيانية في الفصل الثالث.

ويجري معرفة ذلك من خلال شكل انحدار الخط، فإذا كان منحدراً من الشمال الغربي إلى الجنوب الشرقي كانت عكسية، وإذا كانت متجهة في الجنوب الغربي إلى الشمال الشرقي كانت طردية وتتحدد قيمتها من خلال حل النموذج. وعندما يكون الخط الانتشاري أفقياً أو عمودياً عند ذلك تظهر لدينا الحالات الآتية:

الأولى: تكون قيمة (b) صفراً وهي حالة تسود في علاقات متغيرين لا يؤثر أحدهما على الآخر، لأن تأثيره في هذه الحالة صفر بهذا يكون أفقياً، أي:

$$Y = a = 0\,X$$

$$\therefore \quad Y = a$$

ومنه فإن قيمة (Y) تكون ثابتة وتساوي (a) وهي قيمة المقطع. راجع الفصل الثالث.

الثانية: عندما تكون فيه (a) صفراً و (b) قيمة موجبة عند ذاك ستكون قيمة Y مساوية لـ (bX). راجع الأشكال البيانية في الفصل الثالث.

وللحصول على خط مستقيم مقدر كالذي موضح في الشكل البياني (3) الفصل الثاني، فإننا نحتاج إلى اشتقاق صيغة تقدير $\hat{a}$ و $\hat{b}$ وباستخدام طريقة المربعات الصغرى والتي تقوم أساساً على استخدام البواقي (Residuals) (e_i) أساساً للتقدير حيث أن (OLS) هي التي تقلل البواقي (Minimizes Residuals). حيث تمثل (e_i) الفرق بين (Y_i) الحقيقية وقيم $(\hat{Y}_i)$ التقديرية وتتمثل بيانياً المسافة cd على الخط المقدر، وسنقوم بشرح طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية بالتفصيل في المبحث اللاحق.

4.2 : توليف نموذج الانحدار الخطي البسيط باستخدام طريقة المربعات الصغرى Classical least Squares (C.L.S) أو Ordinary least squares method (O.L.S) :

4.2.1 : مفهوم وأسلوب طريقة المربعات الصغرى :

توجد في الممارسة العملية عدة طرق لقياس وتقدير العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية في المشاهدات الإحصائي، إلا أن أبرزها وأكثرها شيوعاً هي (طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية) أو Ordinary least squares method (O.L.S). وقد شاع استخدام هذه الطريقة في التحليل والبحوث الإحصائية والقياسية انطلاقاً من المعالجة الرياضية لدالة الهدف لنموذج الانحدار الخطي البسيط ألا وهي (تصغير مجموع مربع انحرافات قيم المشاهدة عن وسطها الحسابي، وذلك باعتبار أن دالة الهدف عند تقدير الدالة الانحدارية هي الحصول على أدنى تباين ممكن أو أدنى مجموع مربع انحرافات أو أدنى انحراف معياري للقيم المشاهدة عند متوسطاتها. والمقصود هنا هو استخدام هذه الطريقة لتوليف النموذج الانحداري الخطي البسيط الذي يحقق الآتي:

1 - أن يكون مجموع انحرافات القيم المقدرة عن القيم المشاهدة في حده الأدنى والهدف هو جعله في المحصلة النهائية صفراً فإذا ما رمزنا للانحرافات هذه بـ (U) فإن الهدف هو أن يكون معامل الإزعاج صفراً :

$$\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \sum U_i = 0$$

ومنها يكون مجموع مربعات الخطأ صفراً أيضاً:

$$\sum\left(Y_i = \hat{Y}_i\right) = \sum e_i = 0$$

2 - أن مجموع القيم المقدرة يساوي مجموع القيم المشاهدة أي:

$$\sum \hat{Y}_i = \sum Y_i$$

حيث أن: $\sum Y_i = \sum \hat{Y}_i + \sum U_i$

وبما أن: $\sum U_i = 0$

لهذا فإن: $\sum \hat{Y}_i = \sum Y_i$

3 - إن مجموع انحرافات القيم المقدرة أو المشاهدة عند متوسط القيم المشاهدة يكون صفراً أي:

$$\sum\left(\hat{Y}_i - Y_i\right) = \sum \hat{y}_i = 0$$
$$\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}_i\right) = \sum \hat{y}_i = 0$$

4 - إن مجموع مربع انحرافات القيم المشاهدة عن القيم المقدرة وتباينها والانحراف المعياري (الخطأ المعياري للتقدير) يكون في حده الأدنى أي:

$$\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \rightarrow \left[\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2\right]/n = \sigma^2 \rightarrow \min$$

5 - إن مجموع مربع انحرافات القيم المشاهدة عن متوسطها، وتباينها وانحرافها المعياري يكون في الحد الأدنى قياساً لأية طريقة أو نموذج آخر يتم اختياره أو:

$$\sum\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2 \rightarrow \left[\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2\right]/n = \sigma^2 \rightarrow \min$$

انظر الجدول (1) المبينة فيه كل هذه الافتراضات تطبيقياً.

جدول (1)

يوضح العلاقة بين إنتاجية العمال واجورهم في قطر معين

الأجور Y_i	الإنتاجية X_i	Y_i^2	X_i^2	Y_iX_i	y_i	y_i^2	x_i	x_i^2	y_ix_i	x_iY_i	y_iX_i	$\hat{Y}$	$\hat{X}$	$Y_i-\hat{Y}$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$X_i-\hat{X}$	$(X_i-\hat{X})^2$	نتائج الصيغ الأخرى لطريقة OLS							
18	25	324	625	450	1	1	0	0	0	0	25	17	27.23	1.0	1.0	-2.23	4.9729	0	0	25	2.23	4.9729	0	60.72	-4
15	22	225	484	330	-2	4	-3	9	6	-45	-44	15.875	20.54	-0.875	0.766	1.46	6.4576	-1.125	1.2656	-19.25	-4.46	19.8916	0.98844	29.99	2
20	28	400	784	655	3	9	3	9	9	60	84	18.125	31.69	1.875	3.516	-3.69	13.6161	1.125	1.2656	52.50	6.69	44.7561	1.3360	116.9	-1
17	26	289	676	442	0	0	1	1	0	17	0	17.375	25	-0.375	0.141	1	1	0.375	0.1406	-9.75	0	0	-0.1406	25	
22	35	489	1225	770	5	25	10	100	50	220	175	20.750	36.16	1.250	1.563	-1.16	1.3456	3.750	14.0625	43.75	11.1	124.545	4.6875	41.95	2
14	20	196	400	280	-3	9	-5	25	15	-70	-60	15.125	18.3	-1.125	1.266	1.7	2.89	-1.875	3.5756	-22.5	-6.7	44.89	2.1094	31.11	2
15	22	225	484	330	-2	4	-3	9	6	-45	-44	15.875	20.54	-0.875	0.766	1.46	2.1316	-1.125	1.2656	-19.25	-4.7	22.09	0.9844	29.99	2
21	40	441	1600	840	4	16	15	225	60	315	160	22.625	33.93	-1.625	0.264	6.07	36.8449	5.625	31.6406	-65	8.93	79.7449	-9.1406	205.9	11
15	20	225	400	300	-2	4	-5	25	10	-75	-40	15.125	20.54	-0.125	0.0156	-0.54	0.2916	-1.875	3.5156	-2.5	-4.46	19.8916	0.2344	11.09	
14	18	196	324	252	-3	9	-7	49	21	-98	-54	14.375	18.3	-0.375	0.141	-0.3	0.09	-2.625	6.8906	-6.75	-6.7	44.89	0.9844	-5.49	
16	19	256	361	304	-1	1	-6	36	6	-96	-19	14.750	22.77	1.250	0.563	-3.77	14.2129	-2.250	5.0625	23.75	-2.23	4.9729	-2.8125	-85.8	61
17	25	289	625	425	0	0	0	0	0	0	0	17.000	25	0.000	0.000	0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	
204	300	3550	7988	7988	0	82	0	488	183	183	183	204	300	0	13.375	0	83.85	0	68.625	0	0	410.65	0	0	
											-444									-145	29.01		-11.323	-322	
											261=									+145			+11.320	+322	
											183												=0		

$\because \sum Y_i = 204$

$\sum X_i = 300$

$n = 12$

$\therefore \overline{Y} = 17$

$\therefore \overline{X} = 25$

4.2.2 : أسباب استخدام طريقة المربعات الصغرى لتوليف النماذج القياسية.

يعود سبب شيوع استخدام هذه الطريقة إلى خصائصها الأساسية والتي يمكن تلخيصها بالآتي:

1- إن المعلمات المقدرة بواسطتها تتميز بكونها ذات خصائص إحصائية مرغوبة مثل (عدم التحييز) و(صغر قيمة التباين) وغيرها من الخصائص التي ستُبحث لاحقاً.

2- بساطة العمليات الحسابية المنجزة لتقدير المعلمات قياساً للطرق الأخرى.

3- إن حاجتها إلى البيانات الإحصائية يكون أقل من غيرها من الطرق.

4- تم اختبارها في مجالات اقتصادية مختلف وأعطت نتائج جيدة.

5- سهولة فهم آليتها وكيفية استنتاجها رياضياً.

6- تحولت إلى لبنة أساسية لطرق أخرى قامت عليها.

ولأجل إيضاح آلية العمل بهذه الطريقة وأسلوب عرضها للعلاقة بين متغيرين أحدهما مستقل والآخر تابع، فإننا سننطلق من العلاقة التقليدية والبسيطة وهي العلاقة بين متغيرين ضمن علاقة خطية بسيطة وكالآتي:

تطبيق (1):

نفترض وجود علاقة سببية (Causal Relationship) بين الطلب على سلعة معينة (Y) وسعر السلعة (P) أو (X) (بافتراض بقاء الأشياء الأخرى على حالها) أي أننا نجرد العلاقة هذه من تأثير العوامل المحددة الأخرى وهي (أسعار السلع الأخرى الدخل والذوق) وتكتسب العلاقة هذه الصيغة الرياضية الآتية:

$$Y = f(X)$$

أو

$$Y = f(P)$$

حيث أن: Y : كمية السلع المطلوبة.

X : المتغير المستقل.

P : المتغير المستقل المعبر عن السعر.

وبافتراضنا هذا قلنا جدلاً بأن العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر غير محددة في النظرية الاقتصادية بمعادلة واحدة أو أكثر، خطية كانت أو لا خطية لهذا فإننا ومن المشاهدات الفعلية سنقرر صيغة الدالة ومعادلاتها. وإذا ما افترضنا أيضاً بأنها خطية بهذا فإننا سنأخذ إحدى الصيغتين الآتيتين:

1- $Y_i = bP_i$ أو $Y_i = bX$

2- $Y_i = a + bP_i$ أو $Y_i = a + bX$

حيث تفيد المعادلة (1) أن الطلب سيكون صفراً عندما يكون السعر صفراً وفي المعادلة (2) يكون الطلب كمية ثابتة عندما يكون السعر صفراً، وتمثل (a) الطلب الأقصى المحتمل عندما يكون السعر في أعلى نقطة له، ويزداد الطلب مع كل انخفاض في السعر، بهذا فإن (b) تأخذ إشارة سالبة. عليه فإن للدالة (2) معنى اقتصادي معين خلافاً للدالة (1) حيث لا يكون لها معنى معين، ويعود أسباب ذلك إلى:

1- أن الطلب صفراً عندما يكون السعر صفراً أو (b) صفراً. و(b) لا يكون صفراً إلا في حالة أن يكون الطلب عبارة عن خط عمودي وذلك عندما تكون الكميات ثابتة والتغير فيها صفراً مع وجود تغير مستمر في السعر.

2- أن الطلب هنا لا يمثل الحاجة، حيث لا ترتبط الحاجة بالسعر إنما الطلب لوحده مرتبط بالحاجة، فالحاجة للطعام بكميات معينة لا ترتبط بالسعر، أما طلب الطعام فإنه مرتبط بالسعر.

3- أن العلاقة هذه تعني وجود مرونة متكافئة فقط في الطلب قياساً للسعر. وهذه فرضية غير مقبولة في كل السلع، بل في سلع معينة فقط، واعتماد هذه الصيغة ستؤدي إلى أخطاء اقتصادية وقياسية كبيرة.

4.3 : الاشتقاق الرياضي لمعادلات المربعات الصغرى الطبيعية واستنتاج تقديرات المعلمات .

إن أسلوب الحل في طريقة المربعات الصغرى يعتمد في استخدام منظومة من المعادلات الآنية حسب كل حالة، وذلك انطلاقاً من دالة الهدف الرئيسية وهي «تصغير أو تدنيه مجموع مربعات الخطأ الناجم عن معادلة الانحدار المستخدمة في إيجاد المعلمات» أي: (To Minimize Square Sum of Errors).

$$\sum\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2 \to \min$$

حيث أن: Y_i : قيم المتغير التابع المشاهدة أو الفعلية (Real Values).

$\hat{Y}_i$: قيم المتغير التابع المقدرة (Estimated Values).

وبما أن:

$$\sum\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=\sum e_i^2$$

وعليه فإن دالة الهدف تصبح تدنية البواقي أو العنصر العشوائي لتعظيم القدرة التفسيرية للمتغير التابع. وإذا كان لدينا الآتي:

$$\hat{Y}_i=\hat{a}+\hat{b}X_i$$

فالوصول إلى تدنية مجموع مربع الانحرافات يأخذ الصيغة الآتية:

$$\sum\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=\sum\left(Y_i-\hat{a}-\hat{b}X_i\right)^2$$

وهذا يعني أن نحصل على معادلات تكون فيها (b, a) الأقرب إلى B, A للمجتمع الحقيقية والتي تحقق أصغر تباين أو $\left(\sum e_i^2\right)$ وبما أننا نبحث عن تدنية دالة (Minimization of Target Function) فإننا نبحث بهذا عن نهاية صغرى لهذه الدالة يكون الشرط الرئيسي هنا للتدنية هو أخذ المشتقة الأولى للدالة ومعادلتها بالصفر أي يأخذ المشتقة الجزئية لـ $\left(\sum e_i^2\right)$ بالنسبة لـ $\left(\hat{b},\hat{a}\right)$ أي المعلمتان الضروريتان لتدنية $\left(\sum e_i^2\right)$ بهذا فإن دالة الهدف ستكون:

$$\sum\left(\hat{Y}_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right)^2 = \left(\sum e_i^2\right) \qquad \ldots \qquad (1)$$

وبما أن X ، Y هما متغيرين ذات قيم معلومة وثابتة، وعليه فلإيجاد النهاية الصغرى للدالة هذه فإننا نساوي مشتقتها الأولى بالنسبة لـ (a) بالصفر ومشتقتها الأولى بالنسبة لـ (b) أيضاً بالصفر وكالآتي:

$$\frac{\partial e_i^2}{\partial \hat{a}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right)}{\partial \hat{a}} \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$= -2\sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right) \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$\frac{\partial e_i^2}{\partial \hat{b}} = -2\sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right)X_i \qquad \ldots \qquad (4)$$

وبقسمة طرفي المعادلتين (4)، (5) على (2 -) ومعادلتهما بالصفر وبعد فتح الأقواس نحصل على:

$$\sum Y_i - \sum \hat{a} - \sum \hat{b}X_i = 0 \qquad \ldots \qquad (5)$$

$$\sum Y_i X_i - \hat{a}\sum X_i - \hat{b}\sum X^2 = 0 \qquad \ldots \qquad (6)$$

وبإعادة ترتيبها نحصل على:

$$\sum Y_i = \sum \hat{a} + \sum \hat{b}X_i \qquad \ldots \qquad (7)$$

$$\sum Y_i X_i = aX_i + \sum bX_i^2 + \sum \hat{b}X_i^2 \qquad \ldots \qquad (8)$$

حيث أن: $\sum \hat{a} = n\hat{a}$ أو $\hat{a}n$

وهاتين المعادلتين هما معادلتان آنيتان لإيجاد معلمتي ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$).

ونتحقق من حصولنا على الحد الأدنى بأخذ المشتقة الثانية للمعادلتين ومعادلتها بالصفر، ونكون قد وصلنا إلى الهدف عندما تكون المشتقة الثانية أكبر من صفر.

ومنها نحصل أيضاً على قيم ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$) وكالآتي:

$$\sum Y_i = \hat{a}n + \hat{b}\sum X_i$$

$$\sum Y_i - \hat{b}\sum X_i = \hat{a}n$$

$$\left(\sum Y_i - \hat{b}\sum X_i\right)/n = \hat{a} \quad \ldots \quad (9)$$

ونستخرج (b) كالآتي:

$$\sum X_i Y_i = \hat{a}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2$$

$$\left(\sum X_i Y_i - \hat{a}\sum X_i\right)/\sum X_i^2 = \hat{b} \quad \ldots \quad (10)$$

وباستخدام هاتين المعادلتين وبالتعويض نحصل على ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$) أو باستخدا المصفوفات أو أية طريقة أخرى.

$$\sum Y_i = \hat{a} + \hat{b}\sum X_i$$

$$\sum Y_i X_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i^2$$

وبما أن كل من ($\hat{a}$) أو ($\hat{b}$) غير محدد سلفاً، لهذا لا يمكن استخدا الصيغة (10) أو (11) إلا بتحوير المعادلتين (8) و (9) وكالآتي:

أولاً: نحور المعادلة (8) ونحصل على:

$$n\overline{Y} = na + nb\overline{X} \quad \ldots \quad (11)$$

حيث أن:

$$\frac{\sum Y_i}{n} = \overline{Y}$$

$$\sum a = na$$

$$\frac{\sum X_i}{n} = \overline{X}$$

ومنها:

$$n\overline{Y}_i = \sum Y_i$$

$$nb\,\overline{X} = b\sum X_i$$

$$bn\,\overline{X} = b\sum X_i$$

ومنها فإن:

$$nY = na + nbX \qquad \ldots \qquad (11)$$

وعند قسمتها على n نحصل على:

$$\overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X} \qquad \ldots \qquad (12)$$

$$\therefore \hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \qquad \ldots \qquad (13)$$

ونستخرج ($\hat{b}$) نعوض عن قيمة ($\hat{a}$) الواردة في المعادلة (9) بقيمتها في المعادلة (13) ونحصل على:

$$\sum Y_iX_i = \left(\overline{Y} - \hat{b}\overline{X}\right)\sum X_i + b\sum X_i^2 \qquad \ldots \qquad (14)$$

$$\sum Y_iX_i = \overline{Y}\sum X_i - \hat{b}\overline{X}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2 \qquad \ldots \qquad (15)$$

$$\sum Y_iX_i - \overline{Y}\sum X_i = -\hat{b}\overline{X}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2 \qquad \ldots \qquad (16)$$

$$\sum Y_iX_i - \overline{Y}\sum X_i = \hat{b}\left(\sum X_i^2 - \overline{X}\sum X_i\right) \qquad \ldots \qquad (17)$$

ومنها نحصل على ($\hat{b}$) كالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\sum Y_iX_i - \overline{Y}\sum X_i}{\sum X_i^2 - \overline{X}\sum X_i} \qquad \ldots \qquad (18)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum Y_iX_i - \overline{Y}\,\overline{X}\,n}{\sum X_i^2 - \overline{X}^2 n}$$

وحيث أن: $nX = \sum X_i$ ، إذن يمكننا الحصول على المعادلة رقم (20).

$$\hat{b} = \frac{\sum Y_i X_i - \left[\left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right)\right]/n}{\sum X_i^2 - \frac{\left(\sum X_i\right)^2}{n}} \quad \ldots \quad (19)$$

وعندما نضرب الجانب الأيمن من المعادلة (19) بـ (n) سنحصل على:

$$\hat{b} = \frac{n\sum Y_i X_i - \left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \quad \ldots \quad (20)$$

وتسمى هذه الطريقة لاستخراج المعلمتين ($\hat{b}$) و ($\hat{a}$) بطريقة التعويض. وهذه المعادلة يمكن أن تكتب بالطريقة الآتية:

$$\hat{b} = \frac{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} \quad \ldots \quad (21)$$

وتسمى الصيغة (21) (بطريقة الانحرافات) لأنها تستخرج عن طريق قسمة التباين المشترك لـ (X) و (Y) على مجموع مربعات انحرافات (X) ويمكن أن نستخرجها مباشرة عن الطريق الآتي:

بفرض لدينا المعادلتين الآتيتين:

$$Y_i = \hat{a} + \hat{b}X_i \quad \ldots \quad (22)$$

$$\overline{Y} = \hat{a} + \hat{b}\overline{X} \quad \ldots \quad (23)$$

وعند طرح المعادلة (23) من المعادلة (22) نحصل على الآتي:

$$Y_i - \overline{Y} = \hat{a} - \left(\hat{a} + \hat{b}X_i - \hat{b}\overline{X}\right) \quad \ldots \quad (24)$$

$$Y_i - \overline{Y} = \hat{b}X_i - \hat{b}\overline{X}$$

$$Y_i - \overline{Y} = \hat{b}\left(X_i - \overline{X}\right)$$

$$y_i = \hat{b}\left(x_i\right)$$

وبما أن (x_i) و (y_i) وحسب الفرضية الأساسية تساوي صفراً عندها نضربه في (x_i) ونجمعها لكل المشاهدات ونحصل على:

$$\hat{b} = \frac{y_i}{x_i} \times \frac{x_i}{x_i}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} \qquad \ldots \qquad (25)$$

ويمكن الحصول على نفس النتائج أو الصيغة (21) باستخدام المصفوفات والمحددات وكما تسمى بطريقة أو قاعد كريمير والتي يمكن استنتاجها باستخدام المعادلتين (8، 9) وكالآتي:

$$\sum Y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i \qquad \ldots \qquad (7)$$

$$\sum Y_i X_i = \hat{a}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2 \qquad \ldots \qquad (8)$$

حيث يمكن كتابتها على هيئة مصفوفات وكالآتي:

$$\begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$$

ولحل هاتين المعادلتين نستخرج قيمة المحدد لهذه المصفوفة كالآتي:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2$$

وبقسمة محددي (A) و (B) بعد قلب المصفوفة على المحدد (D) نحصل على قيمة (a) و (b) حسب قاعدة كريمر وكالآتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum Y_i X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \sum Y_i \sum X_i^2 - \sum Y_i X_i \sum X_i$$

$$\hat{a} = \frac{|A|}{|D|} = \frac{\sum Y_i \sum X_i^2 - \left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum Y_i X_i \end{vmatrix} = n\sum Y_i X_i - \sum X_i \sum Y_i$$

$$\hat{b} = \frac{|B|}{|D|} = \frac{n\sum Y_i X_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

وهي كما وردت في المعادلة (20).

كما يمكن استخراج قيمة (b) باستخدام الصيغ الآتية علماً بأن قيمة (a) تستخرج دائماً كما هو وارد في المعادلة (13)، ويمكن للمعادلة (20) أن تتحول إلى المعادلة (20) وكالآتي:

$$\hat{b} = \frac{n\sum Y_i X_i - \left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} \quad \ldots \quad (20)$$

ومن مناقشتنا للانحرافات وجدنا الآتي:

$$y_i = Y_i - \overline{Y}$$
$$x_i = X_i - \overline{X}$$
$$X_i = x_i + \overline{X}$$
$$Y_i = y_i + \overline{Y}$$

ومنها نحول المعادلة (20) إلى الصيغة الآتية:

$$\hat{b} = \frac{n\sum\left(y_i + \overline{Y}\right)\left(x_i + \overline{X}\right) - \left(\sum y_i + \overline{Y}\right)\left(\sum x_i + \overline{X}\right)}{n\sum\left(x_i + \overline{X}\right)^2 - \left[\sum\left(x_i + \overline{X}\right)\right]^2} \quad \ldots \quad (26)$$

$$= \frac{n\sum\left(Y_i X_i + XY_i\right)\left(\overline{Y}X_i + YX\right) - \left(\sum Y_i + n\overline{Y}\right)\left(\sum X_i + n\overline{X}\right)}{n\sum\left(X_i^2 + \overline{X}^2 + 2\overline{X}X_i\right) - \left[\sum\left(X_i + \overline{X}\right)\right]^2} \quad \ldots \quad (27)$$

ويمكن تحويل المعادلة (22) إلى صيغة أبسط وكالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} \quad \dots \quad (28)$$

وبما أن $y_i = Y_i - \overline{Y}$

وبالتعويض يمكن أن نكتب المعادلة (28) كالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum x_i^2} \quad \dots \quad (29)$$

$$= \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - \frac{\sum x_i \overline{Y}}{\sum x_i^2} \quad \dots \quad (30)$$

وحيث أن ($\overline{Y}$) أو الوسط الحسابي للمتغير (Y_i) هو ثابت عندها يمكن وضعه مثل $\left(\sum x_i\right)$ وتصبح المعادلة (30) كالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - \frac{Y \sum x_i}{\sum x_i^2} \quad \dots \quad (31)$$

وبما أن $\sum \left(X_i - \overline{X}\right) = \sum x_i = 0$

بهذا فإن $\sum X_i = 0$ ومنها فإن $\frac{Y \sum x_i}{\sum x_i^2} = 0$

عندئذ ستكون المعادلة (32) كالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum \left(X_i - \overline{X}\right) Y_i}{\sum \left(X_i - \overline{X}\right)^2} \quad \dots \quad (32)$$

ويمكن التحقق من إثبات كل هذه المعادلات والفروض من الجدول (1).

تطبيق (2):

في الجدول (1) مشاهدات عن إنتاجية الفرد في حقل معين ومقدار الأجور المطلوب هو صياغة نموذج الانحدار الخطي وحدد مؤشراتها كافة وفسّر معانيها؟

الحل:

1- نقوم برسم الشكل الانتشاري ونجد أنه وبعد مد خط وهمي بينه أنه يمثل خط مستقيم.

2- نستخدم نموذج الخط المستقيم ممثلاً بالصيغة العامة له كالآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i + u_i$$

3- نجد المعلمات a و b بالطرائق الآتية:

أولاً: طريقة الحذف: وهي عن طريق استخدام المعادلات الآتية:

$$\sum \hat{Y}_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{a}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2$$

ونقوم بتعويض القيم كالآتي:

$$204 = 12\,\hat{a} + 300\,b \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$5283 = 300\,\hat{a} + 7988\,b \qquad \ldots \qquad (2)$$

نضرب المعادلة (2) بـ 25 ونطرحها من المعادلة (3) ونحصل على:

$$5283 = 300\,\hat{a} + 7988\,b$$

$$5100 = 300\,\hat{a} + 7500\,\ b$$

$$183 \quad = \qquad 488\,b$$

$$\hat{b} \ = 0.375$$

نعوض في إحدى المعادلات للحصول على قيمة $\hat{a}$ وكالآتي:

$$204 = 12\,\hat{a} + (0.375)300$$

$$\hat{a} = 7.625$$

ومنها نحصل على المعادلة العامة التالية:

$$\hat{Y}_i = 7.625 + 9.375\,X_i$$

ثانياً: طريقة كريمر باستخدام المصفوفات والمحددات نحصل على:

$$\hat{a} = \frac{\sum Y_i \sum X_i^2 - \left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{n\sum Y_i X_i - \left(\sum Y_i\right)\left(\sum X_i\right)}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

ونعوض:

$$\hat{a} = \frac{(7988)(204) - 300\,(5283)}{12\,(7988) - (300)^2} = 7.625$$

$$\hat{b} = \frac{12\,(5283) - 300\,(204)}{5856} = 0.375$$

الطريقة الثالثة: بطريقة الانحرافات وكالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$= \frac{183}{488} \qquad = 0.375$$

$$\hat{a} = \overline{Y} = b\overline{X}$$

$$= 17 - 0.375\,(25)$$

$$\hat{a} = 7.625$$

الطريقة الرابعة: طريقة معامل التحديد وكالآتي:

$$\hat{b} = r\frac{S_y}{S_x} = r\left(\frac{\sqrt{S_y^2}}{\sqrt{S_x^2}}\right) = r\left(\frac{\sqrt{\sum y_i^2}}{\sqrt{\sum x_i^2}}\right)$$

$$\hat{b} = r\left[\frac{\left(\sum y_i^2\right)^{0.5}/n}{\left(\sum x_i^2\right)^{0.5}/n}\right]$$

حيث أن: r = معامل الارتباط = 0.9148 .

S_y = الانحراف العياري لـ (Y) = $\left[\left(\sum y_i^2/12\right)\right]^{0.5}$

S_x = الانحراف المعياري لـ (X) = $\left[\left(x_i^2\right)/12\right]^{0.5}$

وسيكون ذلك بعد إيجاد معامل الارتباط الذي هو:

$$\hat{b} = r\left[\frac{\sqrt{\sum y_i^2}}{\sqrt{x_i^2}}\right] = 0.9148\frac{9.055385138}{22.09072203} = 0.375$$

$$\hat{b} = r\left[\frac{\left[\left(\sum y_i^2\right)/12\right]^{0.5}}{\left[\left(\sum x_i^2\right)/12\right]^{0.5}}\right] = r\left(\frac{S_y}{S_x}\right) = 0.9418\frac{2.6141}{6.3770} = 0.375$$

ونحدد ($\hat{a}$) بطريقة المتوسطات أيضاً.

وتعني ($\hat{a}$) أن الأجور تساوي (7.625) عندما تكون الإنتاجية مساوية الصفر وأن ($\hat{b}$) تساوي الزيادة في الأجور بنسبة 0.375 دينار لكل زيادة في الإنتاجية بمقدار دينار واحد، وهي تساوي الأجور الحدية والتي يقابلها في الاقتصاد المكافأة الحدية لعنصر العمل.

4 - نجد القيم المقدرة (Y) وهي مساوية في مجموعها للقيم المشاهدة (انظر الجدول 1).

5 - الاستنتاجات الأولى:

أولاً: أن $\sum Y_i = \sum \hat{Y}_i$

$204 = 204$

ثانياً: أن مجموع انحراف القيم عن متوسطها الحسابي، انحراف القيم المقدرة عن الحقيقة يساوي صفر، أي: $\sum Y_i = 0$ و $\sum X_i = 0$ ومنها أن العصر العشوائي يساوي صفراً.

$$\sum U_i = \sum e_i = 0$$

ثالثاً: أن الخطأ المعياري للتقدير S_y = 2.6141 وهو قيمة صغيرة نسبياً.

رابعاً: أن معامل الاختلاف قليل جداً ويساوي

$$C.V = \frac{2.6141}{17} = 15.3\%$$

خامساً: الانحراف المعياري لـ (X) = 6.37 = S_x

سادساً: أن التباين المشترك لـ (X) و (Y) = 1.056 = S_{yx}

سابعاً: معامل الارتباط ومعامل التحديد يساوي

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_{xy}^2}{S_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{(1.056)^2}{(2.6141)^2}} = 9.148$$

$$r = \frac{\sum y_i x_i}{\left(\sum y_i\right)^{0.5} \left(\sum x_i\right)^{0.5}} = \frac{183}{9.055 \times 27.091} = 9.148$$

$$R^2 = \frac{\sum y_i^2}{\left(\sum y_i\right)^2} = \frac{68.6148}{82} = 0.8368$$

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{08368} = 0.9148$$

$$R^2 = \sqrt{1 - \frac{e_i^2}{y_i^2}} = \sqrt{1 - \frac{13.375}{82}} = 0.8368$$

$$r = \sqrt{b \frac{\sum y_i x_i}{\sum y^2}} = \sqrt{0.375 - \frac{183}{82}} = \sqrt{0.8368} = 0.9148$$

أي أن:

$$\sum Y_i = \sum \hat{Y}_i + \sum u_i$$
$$204 \;=\; 204 \;+\; 0$$

ثامناً: إن مجموع انحرافات القيم المقدرة أو المشاهدة عن متوسط القيم المشاهدة يكون صفراً.

$$\sum\left(\hat{Y}-\overline{Y}\right)=\sum\hat{y}_i=0$$
$$\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)=\sum y_i=0$$

تاسعاً: إن مجموع مربع انحرافات القيم المشاهدة عن متوسطها وتباينها وانحرافها المعياري يكون في الحد الأدنى قياساً لأية طريقة أو نموذج آخر يتم اختياره: (يقوم الدارسون بتجربة الحل بالنموذج الآتي):

$$Y=a+bX=cX^2$$

ويجرون المقارنة للقيم الواردة في تاسعاً.

4.4 : النموذج القياسي العكسي (المعكوس) للانحدار الخطي البسيط: Inverse Simple Linear Model :

4.3.1 : مفهوم النموذج العكسي :

المتغيرات الاقتصادية متغيرات متبادلة التأثير عادة، ولهذا فهي لا تتشابه دائماً مع متغيرات أخرى غير اقتصادية، لأن الظواهر الاقتصادية بطبيعتها تأخذ أشكالاً متعاكسة أو تتبادل مواقعها. فهي تتحول من سبب إلى نتيجة ومن نتيجة إلى سبب لهذا تتحول المتغيرات المستقلة إلى تابعة أو أن تتحول المتغيرات المفسرة إلى متغيرات تابعة (مفسرة) والمتغيرات التابعة تتحول إلى متغيرات مستقلة، أي أن المتغيرات المفسرة تتحول إلى متغيرات مفسرة.

بهذا ستتخذ العلاقة الأصلية المعبر عنها بـ:

$$Y_i=a+bX_i=U_i \qquad \ldots \qquad (1)$$

إلى الصيغة الآتية:

$$X_i = A + BY_i + V_i \qquad \ldots \qquad (2)$$

ومنها سنحصل على انحدار (X) على (Y) بدلاً من انحدار (Y) على (X).

حيث أن: X_i : قيم المشاهدات (X).

Y_i : قيم المشاهدات (Y).

B,A : قيم المعلمات للنموذج العكسي.

V_i : المتغير العشوائي للنموذج العكسي.

والنموذج بهذا الأسلوب يسمى بـ (النموذج العكسي للانحدار الخطي البسيط).

4.4.2 : استخدام طريقة المربعات الصغرى في تقدير النموذج :

تستخدم في تقدير النموذج ومعلمات طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وتستخرج معلماتها بنفس الأسلوب وذلك انطلاقاً من المعادلتين الآتيتين:

$$\sum X_i = An + B\sum Y_i \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$\sum Y_i X_i = A\sum Y_i + b\sum Y_i^2 \qquad \ldots \qquad (4)$$

حيث أن: $\sum A = An$

وهي مشتقتان بنفس أسلوب اشتقاق المعادلتين الآنيتين للنموذج الاعتيادي للانحدار.

ويمكن بهذا استخدام المعادلتين (3، 4) للحصول على المعلمتين (A) و (B) وبالطرق الآتية:

1 - طريقة الحذف: وذلك باستخدام المعادلتين الآنيتين (3، 4) مباشرة والتعويض بمقاديرهما وبالحذف نستطيع أن نحصل على قيمة المعلمتين.

2 - طريقة كريمر: وذلك باستخدام المصفوفات وكالآتي:

$$\begin{pmatrix} \sum X_i \\ \sum Y_i X_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum Y_i & \sum Y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

ونجد أولاً محدد المصفوفة التربيعية الخاصة بالمعاملات وكالآتي:

$$\Delta = N\sum Y_i^2 - \left(\sum Y_i\right)^2$$

بعدها نقسم محددي (ΔA)، (ΔB) على (Δ) لنحصل على (A) و (B) وكالآتي:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} \sum X_i & \sum Y_i \\ \sum Y_i X_i & \sum Y_i \end{vmatrix} = \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i^2\right) - \sum Y_i X_i \left(\sum X_i\right)$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum Y_i X_i & \sum Y_i \end{vmatrix} = n\sum Y_i X_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)$$

ومنها نحصل على A و B كالآتي:

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{\left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i^2\right) - \sum Y_i X_i \left(\sum Y_i\right)}{n\left(\sum Y_i^2\right) - \left(\sum Y_i\right)^2}$$

$$B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{n\sum Y_i X_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{n\left(\sum Y_i^2\right) - \left(\sum Y_i\right)^2}$$

3 - طريقة الانحرافات: وتستخرج هنا (B) كالآتي:

$$B = \frac{\sum y_i x_i}{\sum y_i^2} = \frac{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right) X_i}{\sum \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

$$A = \overline{X} = B\overline{Y}$$

4 - طريقة معامل التحديد وكالآتي:

$$B = d\left(\frac{S_x}{S_y}\right) = d\left(\frac{\sqrt{S_x^2}}{\sqrt{S_y^2}}\right) = d\left(\frac{\sqrt{\sum x_i^2}}{\sum y_i^2}\right) = d\left(\frac{\sqrt{\left(\sum x_i^2\right)/n}}{\left(\sum y_i^2\right)/n}\right)$$

حيث أن: d = r = معامل ارتباط (X) مع (Y) ومن الملاحظ هنا هو أن:

أولاً: أن التباين المشترك للنموذج المعكوس والنموذج الاعتيادي هو واحد ويساوي:

$$S_{YX} = S_{XY}$$

$$\sum x_i y_i = \sum y_i x_i$$

ثانياً: أن التباين المشترك بينهما واحد وبالصيغة الآتية وهي:

$$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)X_i = \sum\left(X_i - \overline{X}\right)Y_i$$

بهذا فإن قيمة (b) و (B) تكون الواحدة عكس الأخرى أو مقلوب الأخرى حيث أن:

$$\hat{b} = \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)Y_i}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \qquad = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i}$$

$$\hat{B} = \frac{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)X_i}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} \qquad = \frac{\sum y_i X_i}{\sum y^2}$$

وبما أن البسط في المعادلتين أعلاه متساويين فالمقام هو المختلف. (انظر الجدول 1).

ثالثاً: أن قيمة $\hat{B}\times\hat{b}$ ستساوي:

$$\hat{b}\cdot\hat{B} = \frac{\left[\sum\left(X_i - \overline{X}\right)Y_i\right]\left[\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)X_i\right]}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = \frac{\left[\sum\left(Y_i - Y\right)x_i\right]^2}{\sum x_i^2\sum y_i}$$

وبما أن:

$$\hat{b} = \frac{\left[\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)_{Xi}\right]}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

فإن:

$$\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)X_i=b\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

أو:

$$\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)X_i=\sum b\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

وأن:

$$\hat{b}^2\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\sum\left(\hat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2$$

ومنها نحصل على:

$$\hat{b}.\hat{B}=\frac{\left[\sum\hat{b}^2\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]^2}{\sum\left(X_i-X\right)^2\sum\left(Y_i-Y\right)^2}$$

$$\hat{b}.\hat{B}=\frac{\left[\sum\left(\hat{Y}-\overline{Y}\right)\right]^2}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}=R^2$$

ومنها فإن:

$$\hat{B}=R^2/\hat{b}$$

فإذا ما كان (R^2) مساوياً للواحد عدد صحيح يمكن تقدير قيمة $(\hat{b})$ و$(\hat{B})$ كالآتي:

$$\hat{b}=R^2/\hat{B}=1/\hat{B}$$
$$\hat{B}=1/\hat{b}$$

وهذا يعني أن الخطين متطابقين وعندما تختلف R^2 عند الواحد فإن الخطين لا يتطابقان وعند انطباقها تكون:

$$\hat{a} = \hat{A}$$

$$\hat{b} = \hat{B}$$

وعندما لا توجد علاقة بين (X) و (Y) فإن الخطان سيتقاطعان في زاوية مقدارها 90 درجة.

أما إحداثيات نقطة التقاطع ستكون عند القيمتين $\overline{X}$ و $\overline{Y}$ سيكون المتوسط الهندسي لميلي المنحنيين أي:

$$r = \sqrt{\hat{b} + \hat{B}}$$

تطبيق (3):

يمكن أن نجد النموذج المعكوس ونقدر معلماته من الجدول (1) الخاص بعلاقة الأجر والإنتاجية، حيث يمكن أن تتحدد الإنتاجية بالأجر أيضاً بهذا يمكن حل النموذج كالآتي:

$$\sum X_i = NA + B\sum Y_i$$
$$\sum Y_i X_i = A\sum Y_i + B\sum Y_i^2$$

نحلها كالآتي:

أولاً بالحذف:

$$300 \;\; = 12\text{ A} + 204\text{ B} \qquad \ldots \qquad (1)$$
$$5283 = 204\text{ A} + 3550\text{ B} \qquad \ldots \qquad (2)$$

نضرب المعادلة (1) في (17) ونطرحها من المعادلة (2):

$$5283 = 204\text{ A} + 3550\text{ B}$$

$$4100 = 204\text{ A} + 3550\text{ B}$$

ونحصل على $\hat{B} = 2.23171$ $\qquad 183 = 82\text{ B}$

ونحصل على (A) بالتعويض في المعادلة (1) وكالآتي:

$$300 = 12\ A + 455.3$$

$$-155.3 = 12\ A \qquad \hat{A} = -12/94$$

بهذا ستكون المعادلة كالآتي:

$$\hat{X}_i = -12.94 + 2.23171\ Y_i$$

ونحصل على قيم ($\hat{X}_i$) كما هو وارد في الجدول (1).

$$r = \hat{b} \times \hat{B}$$
$$= 0.375 \times 2.23171$$
$$= 0.9148$$

وهو نفس معامل الارتباط المحسوب بالنموذج الاعتيادي ويمكن أن نحصل على ($\hat{B}$) كالآتي:

$$\hat{B} = r^2 / b = 0.83686 \div 0.375 = 2.23171$$

ومنها نحصل على ($\hat{A}$) كالآتي:

$$\hat{A} = \overline{X} - B\overline{Y} = 25 - 2.23171\,(17) = -12.94$$

ومنها يُفهم أن $\hat{A} \neq \hat{a}$ و $\hat{B} \neq \hat{b}$ بهذا فهما ليسا متطابقين.

4.4.3 : استخدامات نموذج الانحدار البسيط الخطي :

للنموذج القياسي الخطي البسيط استخدامات متعددة في الممارسة العملية والتحليل الاقتصادي، لكن أبرزها الآتي:

1- تحليل العرض.
2- تحليل الطلب والتوازن السوقي.
3- تحليل الأسعار.
4- تحليل الفائدة.

5- تحليل الاستهلاك.

6- السلاسل الزمنية.

7- تحليل الادخار والاستثمار.

4.5 : تطبيقات وتمارين:

ملاحظة: التمارين تقع ضمن تمارين الفصل الخامس. أما التطبيقات فقد ذكرت في متن الفصل.

الفروض التصادفية لنموذج الانحدار الخطي

5

Assumptions of The Linear Stochastic

5.1 : الفروض التصادفية.

5.2 : الفروض الأخرى لطريقة المربعات الصغرى.

5.3 : خصائص تقديرات المربعات الصغرى.

5.4 : طريقة النسبة البسيطة مقابل المربعات الصغرى (دراسة مقارنة).

5.5 : تطبيقات وتمارين.

الفروض التصادفية لنموذج الانحدار الخطي

(الفروض اللازمة للتقدير)[1]

Assumptions of the Linear Stochastic Regression Model

لتقدير العلاقة بين المتغيرات بالدقة المرغوبة من خلال نموذج الانحدار الخطي، فإن الأمر يتطلب فروضاً علمية واجبة التحقق لنحصل على تلك الدقة. وتتعلق بعض تلك الفروض بتوزيع قيم المتغير العشوائي والبعض الآخر بالعلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات التفسيرية، والجزء الثالث يتعلق بالعلاقة بين المتغيرات المستقلة (المفسرة) ذاتها. ويمكن تقسيم هذه الفروض إلى مجموعتين وهما:

1- فروض تصادفية (Stochastic Assumptions).

2- فروض أخرى (Other Assumptions).

5.1 : الفروض التصادفية :

وهذه الفروض هي فروض متعلقة بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (Ordinary Least Squares) والخاصة بتوزيع القيم الضرورية لإيجاد تقديرات دقيقة لمعلمات خط الانحدار. وهذه الفروض تعدل من طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وتنقلها من طريقة إحصائية إلى طريقة قياسية تتلاءم مع الطبيعة العشوائية للمتغيرات الانتقالية وظواهرها. وفيما يلي عرض لهذه الفروض:

---

(1) د. محمد عبدالعالي النعيمي وآخرون، نظرية الاقتصاد القياسي، جامعة المستنصرية، العراق، بغداد، 1991، ص76.

1 - أن (U_i) متغير عشوائي حقيقي $(U_i$ is a random real variable$)$: حيث تأخذ (U_i) قيم حقيقية سالبة أو موجبة أو صفرية في فترة زمنية معينة والتي تعتمد مستوياتها على المصادفة التامة.

2 - أن المتوسط الحسابي لـ (U_i) أو $(\overline{U}_i)$ في أية فترة كانت مساوية للصفر (The mean of u in any particular period is zero).

حيث أن مجموع U_i هو صفر.

$$\sum U_i = 0$$
$$\sum U = \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = 0$$

ومنه فإن المتوسط الحسابي سيكون صفراً أي:

$$\overline{u}_i = \frac{\sum u_i}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

حيث أن (u_i) تأخذ قيماً مختلفة موجبة أو سالبة أو صفرية لكل قيمة من قيم (X)، ولكنها كمحصلة نهائية تكون القيم السالبة مساوية للقيم الموجبة لتكون المحصلة النهائية صفراً.

بهذا فإن العلاقة $Y_i = a + bX$

تعكس العلاقة بين (X) و (Y) في المتوسط لأن قيمة u_i تكون صفراً، لهذا فإن كل قيم $(\hat{Y}_i)$ في المتوسط تقع على الخط رغم أن قيم $(\hat{Y}_i)$ المشاهدة تنحرف بالموجب أو بالسالب أو تقع على الخط أيضاً، أي أن تكون $(\hat{Y})$ أكبر أو أصغر أو مساوية للقيمة المشاهدة، لكن هذه الانحرافات في المتوسط تختفي كمحصلة نهائية عند الجمع.

أما عندما تكون القيمة المتوقعة لمعامل الانحراف (u_i) مختلفة عن الصفر أي:

$$\sum U_i \neq E(U_i) \neq 0$$

وعندما تكون مختلف عن الصفر أو مساوية لأية قيمة مثل (K) عندئذ ستكون العلاقة بين المتغيرين كالآتي:

$$E(Y) = a + bX_i + K$$

وهذا يعني أن قيمة (Y_i) المتوقعة ستكون (متحيزة) بمقدار (K)، وهذا ينفي الدقة والموضوعية للتقدير.

3 - أن التباين الخاص بـ (u_i) يكون ثابتاً في كل فترة (the variable u_i is constant in each period) أي:

$$\text{Var}(u_i) = E[u_i - E(u_i)]^2 = E(u_i)^2 = \sigma_u^2$$

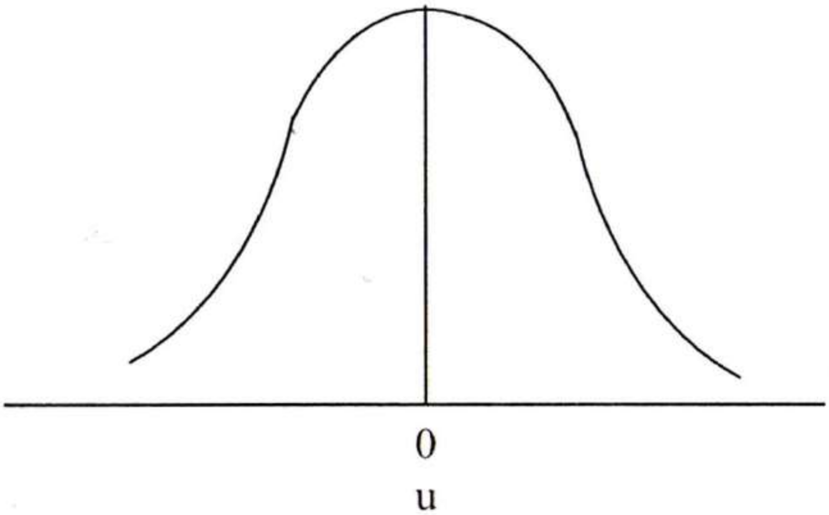
أي ألا تختلف (σ_u^2) باختلاف (i) ومعنى ذلك أن تباين قيم (u_i) حول وسطها الحسابي يكون ثابتاً بالنسبة لجميع قيم X. بعبارة أخرى أن قيم (u_i) ستظهر نفس التشتت حول متوسطها ($\bar{u}$). ويمثل هذه الفرضية الشكل (3) (الفصل الثالث)، حيث أنه وفي القيمة (X_1) فإن (u_1) يمكن أن يأخذ قيمة بين (B,A) وعند (X_2) فإن قيمته تقع بين D,C وعند X_3 يكون بين F,E وهو المدى التام لـ (u_i). ولكننا نلاحظ هنا بأن: AB = CD = EF

بهذا يثبت لنا بأن البيانات التي جمعت لتقدير العلاقة Y = a + bX يمكن الاعتماد عليها بنفس الدرجة، فكل مشاهدة تؤثر بنفس القوة في العلاقة المطلوب تقديرها.

4 - توزيع المتغير العشوائي توزيعاً طبيعياً (u_i has a Normal Distribution): إذا ما فحصنا توزيع (u_i) حول وسطها الحسابي المساوي للصفر، فإن قيم (u_i) ستأخذ شكلاً طبيعياً للتوزيع شأنها في ذلك شأن المتغيرات الأخرى، وتأخذ شكل جرس متماثل عند كل قيمة من قيم X وكما هو مبين في الشكل (1) أدناه:

شكل (1)

يبين التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي



والفروض الأربعة السابقة يمكن اختصارها بالتعبير الإحصائي التالي:

$$u \approx N\left(0, \sigma^2\right)$$

5 - استقلالية العناصر العشوائية المختلفة (u_j , u_i): حيث يفترض أن تكون العناصر العشوائية مستقلة عن بعضها وذلك يعني أن التباين المشترك لأي من u_j , u_i تكون مساوية للصفر، بمعنى أن كل قيمة من قيم العنصر العشوائي في أية فترة كانت لا تعتمد على قيمتها في فترة أخرى.

6 - أن قيم (u_i) مستقلة عن المتغيرات المفسرة التوضيحية (u is independent of the explanatory variables): وهو يتعلق باستقلالية معامل الإزعاج عن المتغير المستقل (X)، وذلك يعني أن تباينهما المشترك cov (x_i u_i) يكون صفراً حيث أن:

$$\operatorname{cov}\left(x_i u_i\right) = E\left(x_i u_i\right) = 0$$

بمعنى أن المتغير العشوائي (u_i) غير مرتبط ارتباطاً مشتركاً مع (x_i) لهذا تكون قيمة التباين المشترك بينهما صفراً فإذا ما كانت ترتبط ارتباطاً إيجابياً بقيم معامل الإزعاج (u_i) فإن ذلك يعني أن القيم التي هي أكبر من المتوسط لقيم (u_i)

ترتبط بقيم أكبر من المتوسط بالنسبة لقيم (X_i)، ونفسها لفرضية القيم التي هي أصغر من المتوسط لقيم (u_i) حيث سترتبط بقيم اكبر من المتوسط لقيم (X_i).

بهذا فإن متوسط العلاقة الفعلية سوف يكون أكبر من المتوسط العلاقة ($a + bX$) أو أصغر منها وكذلك الحال مع الارتباط العكسي، لهذا يجب أن يكون (u_i) مستقلاً عن (X_i) لكل مشاهدة.

7 - المتغيرات المفسرة (التوضيحية) مقاسة دون أخطاء (The explanatory variables are measured without error): يستوعب المتغير العشوائي (u_i) أثر المتغيرات المستقلة المحذوفة في معادلة الانحدار. ورغم ذلك فإن أخطاء القياس للمتغير المستقل ستؤثر على قيم المتغير التابع (Y_i). لهذا يفترض بأن المتغيرات المفسرة خالية من أخطاء القياس (Error-Free) ولكن قيم المتغير التابع قد تحتوي على هذه الأخطاء أو دونها.

5.2 : الفروض الأخرى لطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) :

1 - البيانات المجمعة تظهر تأثيرها على المتغير التابع: وهذا الفرض يرتبط بالمغير المستقل، حيث يفترض أن البيانات التي جمعت عن هذا المتغير قادرة على أن تظهر تأثيرها على قيم المتغير التابع بحيث تكون قيمة واحدة على الأقل من قيم المتغير المستقل مختلفة عن بقية القيم وكالآتي:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \neq 0$$

2 - ألا تكون المتغيرات المفسرة ذات ارتباط خطي تام (The explanatory variable are not perfectly linearly correlated)

وهو فرض أساسي في حالة وجود أكثر من متغير تفسيري واحد ويتطلب الأمر في هذه المتغيرات ألا يكون بينها ارتباط قوي بحيث يظهر معامل ارتباط قدره (1) عدد

صحيح فيما بينها، وذلك من أجل تسهيل التعرف وقياس أثر كل منها على المتغير التابع لكل واحد على حدة بخلافة سيظهر تأثير كل منهما مشابه للآخر.

3 - أن تكون العلاقة بين (X) و (Y) مشخصة (أي تم تحديدها) (The relation being estimated is identified).

أي أن الشكل الرياضي للعلاقة بين المتغيرات يجب ألا تحتوي على نفس متغيرات دالة أو علاقة أخرى في نفس المجال لزيادة الثقة بأننا سنحصل على معاملات فعلية للعلاقة المدروسة.

4 - أن تكون العلاقة صحيحة علمياً من ناحية الصياغة وخالية من الأخطاء القياسية والاقتصادية المندرجة في الدالة، وتحدد خطية الدالة أو لا خطيتها، مع شمولها لجميع العلاقات الجوهرية وفي صورة رياضية صحيحة (The relationship is correctly specified).

5.3 : خصائص تقديرات المربعات الصغرى Properties of Estimators :

(الخصائص المرغوبة)

إن تقدير معلمات النموذج القياسي (a , b , c) وغيرها من المعلمات، هي تقديرات كمية قياسية، يقوم أسسها على المعالجات الرياضية للعلاقة بين المتغيرين وتزداد دقة كلما تطورت التقنيات الإلكترونية للمعالجة القياسية للعلاقات والبيانات بيد أن دقة الحسابات لا تعكس دائماً دقة وحقيقة العلاقات الاقتصادية الفعلية.

ولأجل أن تكون هذه المقدرات مثلى ذات معولية عالية (Reliability) تتيح استخدامها في التنبؤ، يجب أن تتصف هذه القيم بخصائص معلومة تقترب نتائجها من القيم الفعلية (The Values) وأن تكون ذات جودة عالية في الاستدلال الإحصائي على علاقات المجتمع ذاتها سيما وأننا نتعامل مع عينات في العادة.

وعندما تختلف المقدرات الحقيقية عن المعلمات الحقيقية للمجتمع فلا يسمح لهذا الاختلاف أن يتجاوز مدى صغير معلوم. وهذا المدى عادة ما ندعوه بمستوى المعنوية، أو مستوى دلالة لا يزيد في الممارسة العملية عن (5٪). بهذا ستكون ذات جودة (Goodness) في الاستدلال الإحصائي.

ويقاس اقتراب أو ابتعاد القيم الحقيقية عن المقدرة بالوسط الحسابي والتباين لتوزيع العينة. واقتراب المقدرات المستخلصة من العينات فيتطلب منها أن تستند على معايير معينة تمتلكها طريقة المربعات الصغرى ألا وهي (أفضل تقدير خطي غير متحيز (Best Linear Unbiased Estimator-BLUE) وقد تعارف على اختصارها إلى (BLUE) وهي الحروف الأولى من العبارة أعلاه.

ويعتبر امتلاك طريقة المربعات الصغرى لمثل هذه الخصائص المرغوبة المشار إليها في (BLUE) هي:

5.3.1 : خطية المقدرات Linearity of Estimators :

المقصود بخطية المقدرات (b , a) هو أن يكون وسطها الحسابي مساوٍ للوسط الحسابي الحقيقي لهذه المقدرات وأنها دالة خطية للمتغير التابع (Y_i) لأنها ترتبط به خطياً، بسبب ثبات القيم (X) للعينات المتكررة المتزايدة أي:

$$E(\hat{a}) = a \qquad a = F(Y)$$

$$E(\hat{b}) = b \qquad b = F(Y)$$

كذلك أن يكون تباين هذه المقدرات مساوياً لـ:

$$\mathrm{Var}(\hat{a}) = \frac{\sigma^2 u}{n} = \frac{1}{n}\sigma^2 u$$

$$\mathrm{Var}(\hat{b}) = \frac{\sigma^2 u}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum x_i^2} \cdot \sigma^2 u$$

الإثبات:

علمنا في دراستنا للنموذج الخطي البسيط بأن:

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i x_i}{\sum x_i^2} \qquad \ldots \qquad (1)$$

ومنها عرفنا بأن:

$$y_i = Y_i - \overline{Y}$$

ومنها ستكون:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i - \overline{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2} \qquad \ldots \qquad (2)$$

ومنها يمكن أن تجزأ المعادلة (2) إلى جزئين وهما:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} Y_i - \frac{\overline{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2}$$

وبما أن $\sum x_i = 0$ ، وأن ($\overline{Y}$) ثابت، فيمكن وضع ($\overline{Y}$) قبل ($\sum x_i$). وعليه ستكون المعادلة كالآتي:

$$\hat{b} = \sum \left[\frac{x_i}{\sum x_i^2} - Y_i \right] \qquad \ldots \qquad (3)$$

ولما كانت قيم (X_i) ثابتة فرضياً، بهذا فإن القيمة $\frac{x_i}{\sum x_i^2}$ هي مقادير ثابتة أيضاً ويمكن أن نرمز لها برمز ثابت مثل (k) وكالآتي:

$$\frac{x_i}{\sum x_i^2} = k$$

بهذا فإن:

$$\hat{b} = \sum k_i Y_i \qquad \ldots \qquad (١)$$

$$= k_1 Y_1 + k_2 Y_2 + \ldots + k_n Y_n$$

من هنا فإن كل مشاهدة لـ $\frac{x_i}{\sum x_i^2}$ أو (k) هي مرتبطة خطياً مع كل مشاهدة لـ (Y_i) أي:

$$\hat{b} = f(Y)$$

وبما أن:

$$\hat{b} = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

وعليه فإن (kY_i) هي دالة خطية لقيم (Y_i).

وكذلك الحال مع ($\hat{a}$) حيث هي دالة في ($\overline{Y}$) أيضاً أي أن: $\hat{a} = f(\overline{Y})$

الإثبات:

حيث أن:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X}$$

وبما أن:

$$\hat{b} = k_i Y_i$$

و :

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

∴ :

$$\hat{a} = \frac{\sum Y_i}{n} - \overline{X}\sum kY_i$$

$$\hat{a} = \frac{\sum Y_i}{n} - \overline{X}\sum kY_i$$

$$\hat{a} = \sum \left[\frac{1}{n} - \overline{X}k \right] Y_i$$

حيث أن ($\overline{X}$) و (k_i) مقادير ثابتة وبهذا فإن ($\hat{a}$) ستعتمد على قيم (Y_i) فقط، أي أنها دالة خطية في قيم العينة (Y_i).

5.3.2 : خاصية عدم التحيز (Unbiased Estimator) :

وتعني أن القيم المتوقعة لـ ($\hat{b}, \hat{a}$) مساوية للقيم الحقيقية (b,a) لها في المجتمع أي:

$$E(\hat{a}) = a \qquad\qquad E(\hat{b}) = b$$

والمعنى الإحصائي لعدم التحيز هو أن (الفرق بين القيمة المتوقعة لهذا المقدار والقيمة الحقيقية للمعامل في المجتمع تساوي صفراً) ويُرمز لها كالآتي:

$$\text{Bias}\,\hat{a} = E(\hat{a}) - a$$

$$\text{Bias}\,\hat{b} = E(\hat{b}) - b$$

ويكون المقدار غير متحيزاً إذا كان التحيز مساوياً للصفر أي:

$$\text{Bias}\,\hat{a} = E(\hat{a}) - a = 0$$

$$\text{Bias}\,\hat{b} = E(\hat{b}) - b = 0$$

الإثبات:

1 - للمقدر (b):

بما أن :

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} \cdot Y_i \qquad \ldots \qquad (1)$$

أو:

$$\hat{b} = \sum k_i Y_i \qquad \ldots \qquad (2)$$

وعليه يمكن كتابة المعادلة (2) كالآتي:

$$\hat{b} = \sum k_i \left(\hat{a} + \hat{b}x_i + u_i\right) \quad \ldots \quad (3)$$

بالضرب فإن:

$$\hat{b} = \hat{a}\sum k_i + \hat{b}\sum k_i X_i + \sum k_i u_i \quad \ldots \quad (4)$$

ومنها:

$$\hat{b} = \hat{a}\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} + b\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)\cdot x_i}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} + \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)\cdot u_i}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \quad (5)$$

وبما أن:

$$\sum\left(X_i - \overline{X}\right) = 0$$

وأن:

$$\sum\left(X_i - \overline{X}\right)x_i = \sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

لهذا فإن:

$$\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)x_i}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} = 1$$

بهذا فإن:

$$\hat{b} = b\cdot 1 + \frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)u_i}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \quad \ldots \quad (6)$$

ولما كان:

$$E\,(u_i) = u_i = 0$$

وعليه فإن:

$$E\left(\hat{b}\right) = b + \frac{\sum\left(X - \overline{X}\right)^0}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \quad \ldots \quad (7)$$

$$E\left(\hat{b}\right) = b$$

أي أن قيمة ($\hat{b}$) المتوقعة تساوي قيمة (b) الحقيقية، بهذا فإنها غير متحيزة لأن:

$$E\left(\hat{b}\right) - b = 0$$

2 - للمقدر (a):

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \quad \ldots \quad (1)$$

وبما أن ($\overline{Y}$) تساوي $\overline{Y} = a + \hat{b}\overline{X} + \overline{u}$

(2) وبما أن $\overline{u} = 0$ أي أن متوسط المتغير العشوائي صفراً، وعندما نعوض عن ($\overline{Y}$) بما يقابله في أعلاه نحصل على:

$$\hat{a} = \left(a + b\overline{X} - \overline{u}\right) - \hat{b}\overline{X} \quad \ldots \quad (3)$$

$$\hat{a} = a + \left(b - \hat{b}\right)\overline{X} - \overline{u} \quad \ldots \quad (4)$$

ولهذا ستكون قيمتها:

$$E\left(\hat{a}\right) = a + \overline{X}\, E\left(b - \hat{b}\right) + E\left(\overline{u}\right) \quad \ldots \quad (5)$$

وبما أن $E\left(\overline{u}\right) = 0$ و $E\left(b - \hat{b}\right) = 0$ كما ورد في (1) عندها ستكون:

$$E\left(\hat{a}\right) = a$$

بهذا ستكون ($\hat{a}$) غير متحيزة.

5.3.3 : خاصية كونها أفضل مقدرات (Best Estimators) لأنها تمتلك أقل تباين (Minimum Variance) :

حيث أن أية تقديرات تعتبر تقديرات جيدة وأفضل من غيرها (Best Estimators) فقط في حالة أن تكون تبايناتها أصغر تباين قياساً للتقديرات الأخرى المستخرجة بواسطة أية طريقة أخرى.

1 - إثبات تباين ($\hat{b}$): يرمز لتباين ($\hat{b}$) بالآتي:

$$\operatorname{Var}\left(\hat{b}\right)=E\left(\hat{b}-b\right)^2$$

وإذا ما عدنا للمعادلة (7) من الخاصية (2) أي خاصية عدم التحيز فإننا ..... عتب:

$$\hat{b}=b+\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)u_i}{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2} \qquad \ldots \qquad (7)$$

ومنها:

$$\hat{b}-b=\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)u_i}{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

ومنها بعد تربيع الجانبين نحصل على:

$$\left(\hat{b}-b\right)^2=\left[\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)u_i}{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\right]^2$$

وبما أن: $E\left(X_iu_i\right)=0$ وأن $E\left(u_i^2\right)=\sigma_u^2$ و $E\left(u_iu_s\right)=0\ ,t\neq s$ فإن:

$$\operatorname{Var}\left(\hat{b}\right)=\left[\frac{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)u_i}{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{\sigma^2u}{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

بهذا سيكون تباين ($\hat{b}$) كالآتي:

$$\operatorname{Var}\left(\hat{b}\right)=\sigma^2u\frac{1}{\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}=\sigma^2u\frac{1}{\sum\left(x_i^2\right)} \qquad \ldots \qquad (8)$$

2 - إثبات تباين (a): سبق وأن علمنا من المعادلة (4) من خاصية عدم التحيز ($\hat{a}$) بأن:

$$\hat{a} = a + \left(b - \hat{b}\right)\overline{X} + \overline{u} \qquad \ldots \qquad (1)$$

وحيث أن $\overline{u} = \left(1/n\right)\sum u_i$ وأن $\text{Var}\left(\overline{u}\right) = E\left[\left(1/n\right)\sum u_i\right]^2 = \sigma_u^2 / n$

وذلك باستخدام الفروض التالية: $E\left(u_i\right) = \sigma_u^2$

$E\left(u_i\right) = \sigma_u^2$ ، وأن $E\left(u_i u_s\right) = 0$

وبعد تحوير المعادلة (1) سنحصل على:

$$\hat{a} - a = \overline{u} - \left(\hat{b} - b\right)\overline{X}$$

ومنها بعد التربيع سنحصل على:

$$\left(\hat{a} - a\right)^2 = \overline{u}^2 + \left(\hat{b} - b\right)^2 \overline{X}^2 - 2\overline{u}\left(\hat{b} - b\right)\overline{X}$$

وستكون:

$$E\left(\hat{a} - a\right)^2 = \text{Var}\left(\hat{a}\right)$$

$$= E\left(\overline{u}^2\right) + \overline{X}\, E\left(\hat{b} - b\right)^2$$

وبما أن: $\text{Var}\left(\hat{b}\right) = E\left(\hat{b} - b\right)^2$

$$= \frac{\sigma u^2}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

$$\text{Var}\left(\overline{u}\right) = E\left(\overline{u}\right) = \sigma_u^2 / n$$

بهذا فإن:

$$= \frac{\sigma u^2}{n}\left[1 + \frac{n\overline{X}^2}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{\sigma u^2}{n}\left[\frac{\sum\left(X_i - \overline{X}\right) - n\overline{X}^2}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right]$$

وبما أن:

$$\sum(X_i - \overline{X})^2 = \sum X_i^2 - n\overline{X}^2$$

وعليه فإن:

$$Var(\hat{a}) = \frac{\sigma u^2 \sum X_i^2}{n\sum(X_i - \overline{X})^2}$$

لهذا فإن تباين ($\hat{a}$) كما هو واضح وفي أدناه:

$$Var(\hat{a}) = \frac{\sigma u^2}{n} \cdot \frac{\sum X_i^2}{\sum x_i^2}$$

والخطأ المعياري لهما:

$$S_a = \sqrt{\frac{\sigma u^2 \sum X_i^2}{n\sum x_i^2}}$$

$$S_b = \sqrt{\frac{\sigma u}{\sum x_i^2}}$$

5.3.4 : أما تغاير (تباين المشترك) المعلمات ($\hat{a}, \hat{b}$) (Covariance) :

فسيكون $Cov(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\overline{X}}{\sum X_i^2} \sigma u^2$

5.3.5 : أن يكون للمقدر أصغر مربع متوسط خطأ :

وهو مستنتج في أصغر تباين ويُحسب كالآتي:

$$\sigma u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

5.3.6 : أن يكون المقدر كفوءاً :

أي تمتعه بخاصتي عدم التحيز وأصغر تباين في الوقت ذاته بالمقارنة مع المقدرات الأخرى.

5.3.7 : أن يكون المقدار كافياً (Sufficient) :

وهو كاف عندما يستخدم كل المعلومات التي تحتويها العينة في المعلمات الحقيقية، بحيث لا تضيف أية طريقة أخرى أية معلومات جديدة عن المعلمات الحقيقية للمجتمع المدروس.

5.4 : طريقة النسبة البسيطة مقابل طريقة المربعات الصغرى (دراسة مقارنة) :

لقد أكدنا في دراستنا لطريقة المربعات الصغرى بأنها تضمن أقل تباين وانحراف معياري (خطأ معياري للتقدير)، وهذا ما لم يثبت حسابياً لحد الآن، ونقوم الآن باستخدام طريقة أخرى مقابل طريقة المربعات الصغرى وذلك باستخدام النسبة البسيطة وكالآتي:

تطبيق (**1**):

نستخدم العلاقة بين الأجور والإنتاجية الواردة في الجدول (2) ونحسبها بالطريقة المبسطة وكالآتي:

$$g = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} \qquad \ldots \qquad (1)$$

وتساوي (g) هنا متوسط (مجموع المتغير التابع مقسوماً على مجموع المتغير المستقل) ونسميه بمعامل النسبة. وبواسطته يمكن تقدير قيمة (Y) المقدرة أو ($\hat{Y}$) وكالآتي:

$$\hat{Y}_i = gX_i \qquad \ldots \qquad (2)$$

ومنها :

$$\sum \hat{Y}_i = \sum g\, X_i$$

وفي الجدول (2) وجدنا الآتي:

$$\sum Y_i = 204$$

$$\sum X_i = 300$$

ومنها فإن معامل النسبة سيساوي:

$$g = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{204}{300} = 0.68$$

جدول (2)

يبين حسابات تقديرات معامل النسبة المقابلة لطريقة المربعات الصغرى

Y_i	X_i	$\hat{Y}$	$u_i = e_i^2 = (Y_i - \hat{Y})$	$u_i^2 = e_i^2 = (Y_i - \overline{Y})$	$X_i u_i$	$\hat{Y}_i^2 = \hat{Y} - \overline{Y}$	$\hat{Y}_i^2 = (\hat{Y} - \overline{X})^2$
18	25	17	1	1	25	0	0
15	22	14.26	+ 0.04	0.0016	+ 0.88	- 2.04	4.1616
20	28	19.04	+ 0.06	0.0036	+ 1.68	+ 2.04	4.1616
17	26	17.68	- 0.68	0.46281	- 17.68	+ 0.68	0.4624
22	35	23.8	- 1.8	3.24	- 63.0	6.8	46.24
14	20	13.6	+ 0.4	0.16	+ 8.0	- 3.4	11.56
15	22	14.96	+ 0.04	0.0016	+ 0.88	- 2.04	4.1616
21	40	27.2	- 6.2	38.44	- 248.0	+ 10.2	104.04
15	20	13.6	+ 1.4	1.96	+ 28	- 3.4	11.56
14	18	12.24	+ 1.76	3.0976	+ 31.68	- 4.76	22.6576
16	19	12.92	+ 3.08	9.4864	+ 58.52	- 4.08	16.6464
17	25	17.00	0	0	0	0	0
$\sum Y_i =$ 204	$\sum X_i =$ 300	$\sum \hat{Y} =$ 204	$\sum (Y_i - \hat{Y})$ $\sum e_i = 0.96$	$\sum (Y_i - \hat{Y})^2 =$ $u_i^2 = e_i^2 =$ 46.4068	$\sum X_i u_i =$ 201.6		$\sum \hat{Y}^2 =$ 179.411
			7.72		- 328.68		
			- 8.68		+127.08		

وهي تعني أن لكل نسبة 1٪ تغير في (X) تقابله نسبة 0.68٪ تغير في (Y).

وباستخدام هذه النسبة نحسب كل قيم ($\hat{Y}_i$) وكما ورد في الجدول (4).

ومن الجدول أعلاه يتضح لنا الآتي:

1- أن قيمة (g) أو (b) المساوية لمعامل الانحدار هي عالية جداً وتساوي (0.68) بينما كانت في OLS بمقدار (0.375) ولهذا يكون قيمتاهما أكثر انحداراً.

2- أن القيم المقدرة ($\hat{Y}_i$) تختلف كثيراً عن القيم المقدرة في الطريقة السابقة حيث أنها منحازة إلى القيم العليا.

3- أن مجموع (u_i) لا يساوي صفراً بل (0.96).

4- أن تباينها ليس أقل تباين بمعيار مجموع مربعات الخطأ، فهي (13.375) في OLS فيما هي (46.4068) في الطريقة هذه.

5- أن قيمة $\sum(X_i u_i)$ لا يساوي صفراً كما كانت في OLS.

6- أن خط الانحدار لا يأخذ شكل معين، لهذا فهو منقلب الروابط.

7- أن معامل التحديد يساوي

$$R^2 = \frac{\sum \hat{Y}_i^2}{\sum Y_i^2} = \frac{179.4112}{82} = 2.1879$$

وهو معامل ارتباط غير معقول لأنه أكبر من (1) عدد صحيح ويمكن للقارئ أن يجري مقارنات أخرى كما وردت في الجدول (2) السابق. ومنها نجد أن طريقة المربعات الصغرى هي أفضل الطرق للتقدير.

5.5 : تطبيقات وتمارين :

1- ما المقصود بالنموذج القياسي الخطي البسيط وكيف تكتب صيغته الجبرية وما معنى معلمات (b,a)؟

2- ارسم الأشكال النموذجية الانتشارية للنموذج الخطية البسيطة الطردية العكسية وفسّر معنى العلاقات الطردية والعكسية.

3- كيف يتم وضع النموذج الخطي البسيط بطريقة المربعات الصغرى؟

4- ما المقصود بطريقة المربعات الصغرى وكيف تشتقها رياضياً.

5- يمكن الحصول على قيمة المعلمتين (a) و (b) بعدة طرائق حددها واعط تفسيراً رياضياً لكيفية اشتقاقها.

6- لماذا لا نستطيع استخدام طريقة النسبة البسيطة رغم أنها تعطي علاقة خطية أيضاً بين (X) و (Y).

7- أدناه مجموعة من المشاهدات عن كمية الطلب على التفاح وأسعارها وفق النموذج الخطي البسيط بينهما وحدد معلماتها ومعامل الارتباط والتحديد وفسّر معانيها.

Y (كمية التفاح):	25	36	29	37	40	48	60
X (السعر بالدينار):	6	5.5	5.5	4.8	4.5	3	2

حلل واثبت فرضيات وخصائص المربعات الصغرى من قيم السؤال رقم (7) أعلاه.

أوجد النموذج المعكوس في السؤال (7) أعلاه وحدد علاقته بالنموذج الأصلي.

اختبار الفرضيات من الدرجة الأولى

6

First Order Test of Hypothesis

6.1 : مفهوم وأهمية اختبارات الفرضيات وأنواعها.

6.2 : اختبارات الانحراف المعياري (الخطأ المعياري).

6.3 : اختبار جودة التوفيق باستخدام معاملي التحديد والارتباط.

6.4 : تقدير العلاقة عندما يكون (X) هو المتغير التابع وباستعمال معامل التحديد.

6.5 : تطبيقات وتمارين.

اختبار الفرضيات من الدرجة الأولى

First Order Test of Hypothesis

6.1 : مفهوم وأهمية اختبارات الفرضيات وأنواعها :

إن اشتقاق معلمات الدوال الانحدارية المختلفة هو وسيلة لتحديد وتقدير وقياس الروابط وقوتها ما بين المتغيرات المستقلة والتابعة، مع ذلك فإننا ولحد هذه اللحظة غير متأكدين من صحة تقديراتنا والتي تعني لنا التأكد من أن تمثل هذه المعلمات والعلاقات تمثيلاً حقيقياً للمتغيرات الحقيقية وعلاقاتها. عليه يصبح من الواجب أن نلجأ إلى اختبار صحة تقديراتنا كخطوة لاحقة للتقدير، والتي تفحص فيها جودة التقديرات هذه في ضوء معايير محددة.

وتستخدم في الاقتصاد القياسي نوعين من المعايير الاختبارية وهي المعايير الإحصائية والمعايير القياسية Statistical Criteria & Econometric Criteria. وتدعى الاختبارات الإحصائية اختبارات (الدرجة الأولى) والقياسية باختبارات (الدرجة الثانية).

وتستخدم في الاختبارات الإحصائية المعايير الآتية:

1- اختبار أو معيار الانحراف المعياري للمجتمع أو الخطأ المعياري عند التعامل مع عينة من المجتمع وذلك لقياس درجة الثقة بالمعلمات.
2- اختبار أو معيار جودة الاستدلال باستخدام معامل التحديد أو جودة التوفيق.
3- اختبارات أخرى (F, t, Z) وغيرها من الاختبارات.

ولهذه الاختبارات أهمية كبيرة، حيث أنها تقرر صلاحية المعلمات المقدرة وصلاحية الدالة ككل لتحليل الواقع الاقتصادي للظاهرة من جهة وصلاحيتها للاستخدام كوسيلة للتنبؤ بسلوك الظاهرة مستقبلاً. فقد يستخدم الباحث دالة الانحدار لتقدير مؤشرات اقتصادية معينة ويظهر خطأ جسيم في المستقبل، والسبب هو عدم اختبار صلاحية الدالة إحصائياً واقتصادياً لإجراء التنبؤ.

فالكثير من نتائج التحليلات الإحصائية والقياسية تستخدم لاتخاذ القرارات الاقتصادية، وعند وجود أي خلل فيها لم يكتشف من خلال الاختبارات قد تؤدي إلى عواقب اقتصادية واجتماعية خطيرة. فإذا اعتمدنا دالة الاستهلاك الآتية: $C = a + bY$.

ولو كانت (b) هي الميل الحدي للاستهلاك ولتكن قيمته (0.90) بدلاً من (0.8) في الفترة السابقة فإن سياسة الدولة ستتجه نحو زيادة إنتاج السلع الاستهلاكية وخفض إنتاج السلع الاستثمارية، ولكنه في نهاية المدة يتضح العكس حيث يزداد الطلب على السلع الاستثمارية ويظهر فائض في السلع الاستهلاكية، مما يزيد من المخزون ومشاكله وهدر الأموال العامة بسبب تلف أو تقادم السلع الاستهلاكية. ومن هنا تبرز أهمية الاختبارات لتحقيق معولية (Reliability) عالية للمقدرات المختلفة وللدالة الكلية للانحدار، ليساعد استخدامها في التنبؤ العلمي. وتعد الاختبارات الأولية للنتائج من أهم الاختبارات الضرورية لإجراء الاختبارات الأخرى وهي اختبارات الخطأ المعياري واختبارات جودة الاستدلال أو جودة التوفيق وهي خاصة بمعامل التحديد والتي سيتم شرحها لاحقاً.

6.2 : اختبارات الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) :

6.2.1 : مفهوم الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) للدالة والمعلمات :

وهو ذلك النوع من الاختبارات التي تستخدم الخطأ المعياري للدالة الكلية وانحرافات قيم المقدرات عن وسطها الحسابي. والحديث هنا يدور حول ما نسميه

بتشتت القيم (Dispersion of variables) أي انحراف القيم الفعلية عن قيم معينة كانت يجب أن تتحقق بينما الذي تحقق هو القيم (Y_i). بهذا فإن الانحراف يمكن أن يكون تشتت القيم عن وسطها الحسابي أو أي وسط آخر، أو قيم مخططة أو متوقعة أو أية قيم أخرى كان متوقع أو مخطط لها أن تتحقق، لكن المتحقق يختلف عنها، فيحدث بهذا ما نسميه بانحراف القيم الفعلية عن المتوقعة أو المخططة أو النظرية.

واختبار الانحراف المعياري هو ذلك الاختبار الذي يحقق دالة الهدف في طريقة المربعات الصغرى ألا وهو تدنية مجموع مربعات انحرافات القيم الحقيقية عن المقدرة والتي رمزنا لها بالمتغير العشوائي (U_i^2)، أي ما سميناه بالخطأ المعياري للتقدير والذي يساوي:

$$U_i^2 = \sigma_u^2 = \left(Y_i - \hat{Y}\right) = S_u^2 \to \min$$

وكذلك مجموع مربعات انحرافات المعلمات المقدرة ($\hat{a}$) عن وسطها الحسابي و ($\hat{b}$) عن وسطها الحسابي.

لهذا فإن:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{n-2} = \frac{\sum U_i^2}{n-2} = \frac{\sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right)^2}{n-2}$$

وتباين ($\hat{b}$) كالآتي:

$$\operatorname{Var}(\hat{b}) = \frac{\sigma_u^2}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \sigma_u^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

وتباين ($\hat{a}$) كالآتي:

$$\operatorname{Var}(\hat{a}) = \frac{\sigma_u^2 \sum X_i}{n\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \sigma_u^2 \cdot \frac{\sum X_i}{n\sum x_i^2}$$

ولما كنا نتعامل مع بيانات عينة بهذا فإننا نستخدم (الخطأ المعياري للتقدير) بدلاً من (الانحراف المعياري). وبهذا فإن الانحراف المعياري لـ ($\hat{b}$) سيكون:

$$SD_b = \sqrt{\text{var}(\hat{b})} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}$$

$$SD_a = \sqrt{\text{var}(\hat{a})} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2 X_i}{n\sum x^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2 X_i}{n\sum (X_i - \overline{X})^2}}$$

بعد ذلك نقارن الانحراف المعياري لمعلمتي b,a مع تقديراتها كخطوة أولى، فإذا ما كان الانحراف المعياري لـ (a) أو (b) أقل من $\left(\frac{1}{2}\right)$ قيمة ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$) فإن ذلك يدل على وجود معنوية إحصائية للمعلمتين، وذلك قبل أن نلجأ إلى اختبارات (t) أو (F) أو (Z). لهذا فإننا نفرض فرضية العدم القائلة بأن $b = 0$ ونقبل الفرضية البديلة القائلة بأن $b \neq 0$. وعندما يكون الانحراف المعياري لـ (a) و (b) أكبر من $\left(\frac{1}{2}\right)$ قيمة المقدرات ($\hat{b},\hat{a}$) فإن ذلك يدل على عدم معنوية المقدرات ويعني هذا بدوره أن المتغير المستقل (X_i) ليس له تأثير على المتغير التابع (Y_i)، أو أن تأثيره ضئيل جداً. وهذا يجرنا للتأكد من ذلك بإجراء اختبارات (t, z, F) لمعرفة درجة معنوية هذا التأثير.

6.2.2 : اختبار الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) أو اختبارات المعنوية للتقديرات :

لقد علمنا من دراستنا بأن ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$) هي تقديرات إحصائية للمعلمات الحقيقية (b,a) الخاصة بالمجتمع، وأننا حصلنا على هذه التقديرات باستخدام عينات من المجتمع المعني كمجموعة مشاهدات عن المتغيرين (X_i)، (Y_i). وباستخدام المعاينة فإن احتمال حصول أخطاء معينة خاصة بالمعاينة أمر وارد. لهذا فإننا نستخدم اختبارات المعنوية بهدف قياس حجم الخطأ، مع تحديد درجة الثقة

في صلاحية هذه التقديرات، كتقريب لقيم معاملات المجتمع الإحصائي[1]. وهذه الاختبارات كثيرة أهمها حالياً تلك المتعلقة باختبار (الخطأ المعياري للتقدير) الشائع الاستخدام في الاقتصاد القياسي التطبيقي. إن اختبار الخطأ المعياري لتقديرات المربعات الصغرى أسلوب علمي يساعد في تحديد اختلاف المعلمات المقدرة ($\hat{b},\hat{a}$) عن الصفر اختلافاً معنوياً، بهذا فإن تقديراتها ستكون مقاربة للمعلمات الحقيقية للمجتمع، أي أن تكون العينة التي استخدمت في هذه التقديرات قد أخذت من مجتمع إحصائي نفترض فيه أن تكون معلماته الحقيقية مساوية للصفر أو غير مساوية له. بتعبير آخر فإننا نحاول أن نختبر فرضيتين:

الأولى هي فرضية العدم، أو أن $\hat{a} = 0$ ، $\hat{b} = 0$ (Null hypothesis) في مقابل الثانية وهي الفرضية البديلة (Alternative hypothesis) التي تقول بأن ($\hat{a} \neq 0$) و ($\hat{b} \neq 0$) ويعبر عنها بصورة قياسية كالآتي:

فرضية العدم $H_0 : \hat{a} = 0 \;\;,\;\; \hat{b} = 0$

مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \hat{a} \neq 0 \;\;,\;\; \hat{b} \neq 0$

وتقوم هذه الاختبارات للخطأ المعياري للتقدير على الأسس الآتية:

1 - أن نجد تباين المعلمتين $\hat{b},\hat{a}$ والمعبر عنهما بالآتي:

$$S_{\hat{b}} = \sqrt{\mathrm{var}(\hat{b})} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2}{\sum x^2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2\sum x^2}}$$

حيث يحل الخطأ المعياري للتقدير $\frac{\sum e_i^2}{n-2}$ الخاص بالعينة بدلاً من σ_u^2 الخاص بالمجتمع.

(1) كوتسيانيس، مرجع سابق، صفحة 111.

و

$$S_{\hat{a}} = \sqrt{\text{var}(\hat{a})} = \sqrt{\frac{\sigma_u^2 \sum X^2}{n \sum x^2}} = \sqrt{\frac{\left(\sum e^2\right) \sum X^2}{(n-2) n \sum x^2}}$$

2 - نقارن الانحراف (الخطأ) المعياري للتقدير المستخلص بهاتين المعادلتين مع القيم العددية للتقديرات $\hat{b}, \hat{a}$ أي أن:

$$S_{\hat{a}} < \hat{a}/2 \qquad \text{أو} \qquad S_{\hat{a}} > \hat{a}/2$$

$$\text{Or} \qquad S_{\hat{a}} \leq 1/2\,\hat{a} \qquad \text{أو} \qquad S_{\hat{a}} \geq 1/2\,\hat{a}$$

و

$$S_{\hat{b}} < \hat{b}/2 \qquad \text{أو} \qquad S_{\hat{b}} > \hat{b}/2$$

$$\text{Or} \qquad S_{\hat{b}} \leq 1/2\,\hat{b} \qquad \text{أو} \qquad S_{\hat{b}} \geq 1/2\,\hat{b}$$

فإذا ما تحققت المتباينات في الجهة اليسرى فإن تقديرات (a) ، (b) معنوية إحصائياً بدرجة ثقة معينة، أو بمستوى معنوي معين (Statistically Significant) وإذا ما تحققت المتباينات في الجهة اليمنى فإن تقديرات (b,a) غير معنوية إحصائياً أي أن نقبل فرضية العدم أو الفرضية البديلة. فإذا ما كان الخطأ المعياري لـ ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$) مساوٍ أو أقل من $\frac{1}{2}$ قيمة المعلمات ذاتها، تكون المعلمات ذات معنوية إحصائية، أي أن نرفض فرضية العد القائلة بأن معلمات المجتمع الإحصائي مساوية للصفر ونقبل الفرض البديل القائل بأن معلمات المجتمع الإحصائي لا تساوي الصفر.

وإذا كان الخطأ المعياري لـ $\hat{a}$ و $\hat{b}$ أكبر من نصف قيمة المعلمات هذه، نقبل فرض العدم القائل بأن المعلمات الخاصة بالمجتمع الإحصائي مساوية للصفر ونرفض الفرض البديل. وهذا يعني أن تقديرات المعلمات غير معنوية إحصائياً لأن معلمات المجتمع في هذه الحالة مساوية للصفر أيضاً. وينعكس هذا على تقديرات المتغير

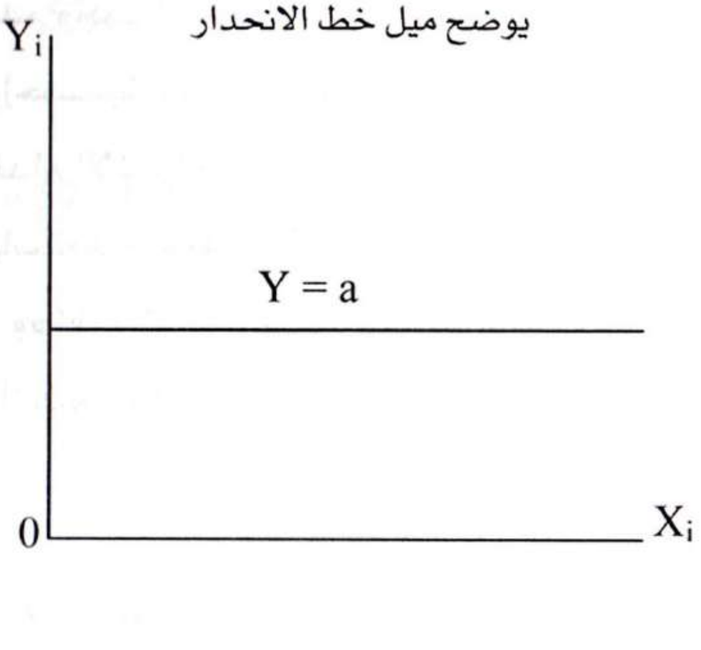
التابع، فإذا ما كانت المعلمات ذات معنوية إحصائية فإننا نتمكن من إجراء تقديرات القيم التابعة وإذا ما كانت صفراً أو غير معنوية إحصائياً فإننا لا نستطيع ن نقدر القيم التابعة ($\hat{Y}_i$). وإذا ما قدرت بشكل أو آخر فإننا سنصل إلى نتائج غير مقبولة اقتصادياً.

وهذا يعني أننا قادرون أو غير قادرون على اعتماد المعلمات لإجراء التقديرات والتقريب إلى معلمات المجتمع، لأن ذلك يعني بدوره أن المتغير المستقبل (X) لا يؤثر تأثيراً جوهرياً في تحديد قيم (Y) أو تغييره. فإذا ما كان معامل (b) غير معنوي إحصائياً وميل خط الانحدار صفراً ستأخذ الدالة القيم الشكل (1) الآتي:

$$Y = \hat{a} + \hat{b}X$$
$$Y = \hat{a} + 0X$$
$$Y = \hat{a}$$

الشكل (1)

يوضح ميل خط الانحدار

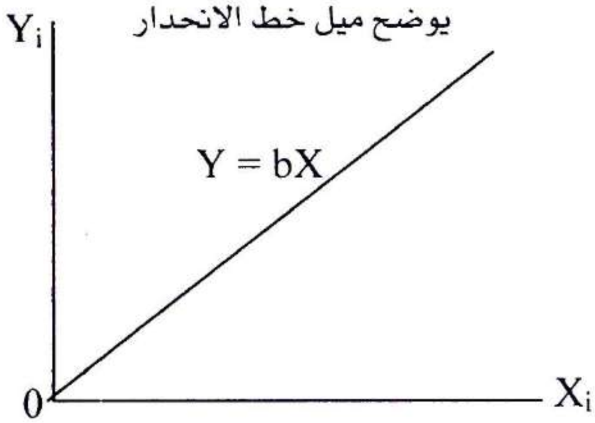


وهذا يعني انعدام العلاقة بين (X) و (Y). وإذا ما كان (a) غير معنوي إحصائياً أو مساوياً للصفر ستأخذ الدالة الشكل (2) الآتي:

$$Y = 0 + bX$$

الشكل (2)

يوضح ميل خط الانحدار



وهذا يعني أن الدالة هي خط مستقيم من نقطة الأصل بسبب اختفاء المقطع (a) الذي له معنى اقتصادي جوهري في الكثير من الدوال، مما يؤثر على قيم الدالة الحقيقية وتقديراتها المستقبلية، وعندما تكون $a = 0$ و $b = 0$ فمعنى ذلك أن تأخذ الدالة الصيغة الآتية:

$$Y = 0 + 0X \Rightarrow Y = 0$$

ويعني هذا عدم وجود أية قيم للمتغير التابع والمتغير المستقل، وهذا منطق غير مقبول اقتصادياً وإحصائياً ويتعارض مع البيانات الشاهدة عن حقيقة هذه القيم. كما يمكن استخدام الانحراف المعياري للمتغير التابع لتقدير معنوية الدالة الكلية بصورته المطلقة وباستخدام معامل الاختلاف الذي يقيس نسبة الانحراف المعياري إلى متوسط القيم. وكلما زادت النسبة انخفضت معنوية الدالة الكلية الإحصائية وكلما انخفضت النسبة ازدادت المعنوية الإحصائية لها.

تطبيق (**1**):

في الجدول (1) أدرجت عينات مأخوذة من مشغل معين لإنتاجية الفرد ومتوسط الأجر الذي يتقاضاه في اليوم والمطلوب تحديد دالة انحدار الإنتاجية على الأجور وقياس انحراف المعلمات المعياري ومعنوياتها الإحصائية والخطأ المعياري للتقدير ومعامل الاختلاف مع تقدير معنوية الدالة الكلية عن طريقه.

الحل:

بعد رسم الشكل الانتشاري (شكل 3) نحدد الشكل كشكل مستقيم ويتم حل المسألة باستخدام الانحدار الخطي البسيط كالآتي:

ا - إذا استخدمنا المعادلتين الآنيتين التقليديتين.

$$\sum Y_i = na + b\sum X_i$$
$$\sum Y_i X_i = a\sum X_i + b\sum X_i^2$$

عندها سنحصل على تقدير المعاملات كالآتي:

$$\hat{b} = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2}$$

أو

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{956}{576} = 1.66$$

ونحصل على قيمة ($\hat{a}$) كالآتي:

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} = 57 - (1.66)(18) = 27.12$$

وتكون معادلة الانحدار كالآتي:

$$\hat{Y} = 27.12 + 1.66\, X_i$$

ومنه يُفهم أن ميل انحدار الدالة هو $\hat{b} = 1.66$ ، وأن (a) هي تقاطع الدالة مع الإحداثي (X_i) في نقطة 27.12.

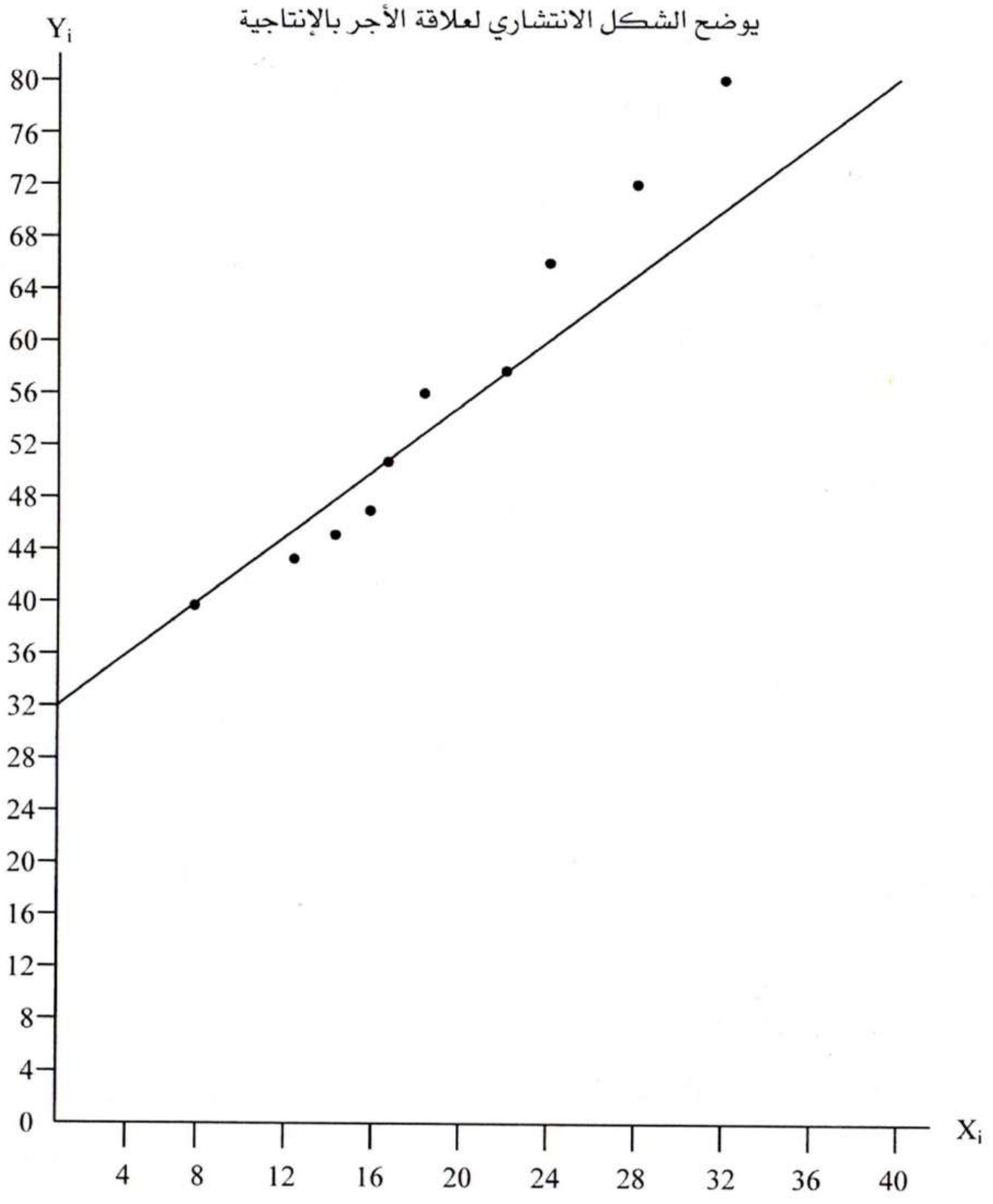
وأنه وفي حالة كون المتوسط الحسابي للأجور (18) ديناراً فإن متوسط الإنتاجية هو (57) دينار وهي النقاط التي تتوسط المشاهدات الفعلية للأجور والإنتاجية، حيث أن:

$$\overline{X} = \frac{180}{10} = 18$$

$$\overline{Y} = \frac{570}{10} = 57$$

شكل (3)

يوضح الشكل الانتشاري لعلاقة الأجر بالإنتاجية



2 - أما الخطأ المعياري للتقدير فهو:

$$S^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{47.3056}{10-2} = 5.9132$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{5.9132} = 2.4317$$

وإذا ما نسب الخطأ المعياري للتقدير إلى متوسط الإنتاجية سنحصل على معامل الاختلاف وكالآتي:

$$C.V = (2.4317 / 57) = 0.0427 \times 100 = 4.27\ \%$$

وهنا معامل الاختلاف صغير جداً، ويدل هذا على وجود معنوية عالية للدالة.

3 - الأخطاء المعيارية لتقديرات المعاملات $\hat{a}$ و $\hat{b}$ ويتم ذلك عبر الصيغ الآتية:

أولاً: الخطأ المعياري لتقدير ($\hat{a}$):

$$S_{\hat{a}}^2 = S\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2} = 2.4317\frac{3816}{10\,(576)} \approx 3.92$$

$$S_{\hat{a}} = \sqrt{S_{\hat{a}}^2} = \sqrt{3.92} = 1.98$$

ثانياً: الخطأ المعياري لتقدير ($\hat{b}$):

$$S_{\hat{b}} = S\times\frac{1}{\sum x^2} = 2.4317\times(1/576) = 0.01$$

$$S_{\hat{b}} = \sqrt{S_{b}^2} = \sqrt{0.01} = 0.1$$

وباستخدام معيار الانحراف المعياري (الخطأ المعياري للتقدير) فإن الخطأ المعياري لتقدير (a) يساوي 1.98 وهو أصغر من نصف قيمة المعلمة ($\hat{a}$) البالغ (27.12) فإن ($\hat{a}$) كتقدير أولي هي معنوية إحصائياً بمستوى معنوي 5٪. وبما أن الخطأ المعياري لتقدير (b) البالغ (0.1) هو أصغر من نصف قيمة ($\hat{b}$) البالغ (1.66) كذلك فهو معنوي إحصائياً بمستوى معنوية 5٪.

6.3 : اختبار جودة التوفيق (Goodness of Fit) أو اختبارات المعنوية باستخدام معاملي التحديد والارتباط :

6.3.1 : مفهوم وأهمية معاملي التحديد والارتباط واختباراتهما :

إن تقدير معلمات الانحدار واختباراتها الأولى بواسطة الانحراف المعياري (الخطأ المعياري للمعلمات)، فإننا نود التأكد من مدى جودة التوفيق لخط الانحدار الخاص بمشاهدات الظاهرة (Y) وعلاقتها بـ (X). هذا من جانب، ومن جانب آخر فإن المعلمات المحسوبة تقاس بنفس مقياس (Y). وكلما صغرت فئات المقياس كلما تضخمت قيم ($\hat{b},\hat{a}$) أو تصغر عندما نستخدم مقياس أكبر.

ولأجل تفادي هذه المشكلة ولأجل أن نعبر وبمقياس حيادي عن قوة الرابطة بين المتغيرين، وفحص دقة وقوة الرابطة بينهما فإنه نستخدم ما نطلق عليه (معامل التحديد ومعامل الارتباط) (Coefficient of Correlation & Determination) وتعني جودة التوفيق هو للوصول باستخدام طريقة المربعات الصغرى إلى أفضل صيغة للعلاقة والتي تعكس حقيقة العلاقة بين المتغير (X) و (Y) لأقرب دقة، مع تبيان قوة هذه العلاقة. وافضل مقياس لقوة هذه العلاقة هو معامل الارتباط (r) الذي تتراوح قيمته بين الصفر و (1) عدد صحيح، ومعامل التحديد الذي يحدد (قوة تأثير) العامل المعني أو المتغير المستقل على سلوك المتغير التابع. وقوة التأثير تعكس قوة العلاقة بين المتغيرين (X) و (Y) والذي يعني وجود رابطة أو تأثير حقيقي للمتغير المستقل على المتغير التابع. وتزداد قوة العلاقة (قوة التأثير) وتقل وفقاً لمدى التأثير، فإذا كان ضعيفاً فإنه سيقترب من الصفر، وإذا كان قوياً فإنه سيقترب من الواحد عدد صحيح.

وعندما تكون قوة العلاقة صفرية (أي صفراً) سيعني ذلك ألا تأثير يذكر من المتغير المستقل (المشاهد) على المتغير التابع. وعندما يكون مقداره بين (0.5) ودون ذلك، فهي علاقة ضعيفة، وما فوق (0.5) علاقة متوسطة، وعندما يصل إلى الواحد

عدد صحيح (1) فإن ذلك يعني أنه العامل الوحيد المؤثر على سلوك المتغير التابع. وكلما ابتعد عن الواحد عدد صحيح ازداد تأثير متغيرات مستقلة أخرى غير مشاهدة في العلاقة الانحدارية، أي أن العامل المستقل يتحمل أو يؤثر بنسبة 100٪ عندما يكون مقدار الارتباط (1) عدد صحيح، ويتنازل مع ابتعاده عن ذلك. وكلما انخفض عن النصف فإنه سيخلي تأثيره إلى متغيرات وعوامل أخرى يجب البحث عنها.

ومن هنا تظهر القوة الاختبارية لمعاملي التحديد والارتباط. فهما معايير جيدة لحسن وجودة توفيق الدالة الانحدارية بين المتغيرين، لذا فلهما أهمية كبيرة وذلك عندما يحددان بنسبهما المئوية الآتي:

1- قوة الرابطة بين المتغير المستقل (المتغيرات المستقلة) والمتغير التابع فيما إذا كانت – ضعيفة – متوسطة – قوية والذي يدعم المعنوية الإحصائية للدالة ككل ومعلمتها.
2- يحدد نسبة تأثير كل عامل مستقل على حدة على سلوك المتغير التابع ومنها يمكن التحكم بمسار الظاهرة وسلوكها المستقبلي.
3- أنه مقياس حيادي لا يتأثر بوحدات القياس فيعطي نتائج دقيقة.
4- أنه يحدد صحة الدالة المختارة، أو شكل المنحنى، فعندما نستخدم صيغة الخط المستقيم (الانحدار البسيط الخطي) والرابطة الحقيقية هي أقرب إلى (الانحدار البسيط اللاخطي) عند ذلك سيكون معامل الارتباط الخطي ضعيفاً وكذلك معامل التحديد، بينما لو احتسبت المعلمات باستخدام الانحدار البسيط اللاخطي فقد يزدادان ويقويان.
5- إنهما يحددان استقرار الدالة ومعلماتها خلال الحقب الزمنية المختلفة عندما تتغير قيمهما في الحقب الزمنية المختلفة
6- باستخدام عناصرهما (الجزء المفسر والجزء غير المفسر) يمكن الاستدلال على معنوية الدالة ككل إحصائياً باستخدام اختبار (F).

7- إن لميل خط الانحدار رابطة مباشرة مع معامل الارتباط والتحديد فكل منهما يحدد الآخر، وكما سيتم شرحه لاحقاً، بهذا فلهما رابطة إحصائية واقتصادية مع المعلمة الانحدارية.

6.3.2 : الاشتقاق الرياضي لمعاملي التحديد والارتباط :

من تحليلنا لخط الانحدار تبين بأن القيم الفعلية أو القيم المشاهدة قد تقترب أو تبتعد عن القيم المقدرة بخط الانحدار بقيمة يمكن أن نرمز لها بـ ($\hat{u}_i$). وهو المتغير العشوائي الذي يمكن تحديد قيمته من خلال الخطأ المعياري للتقدير. وتأخذ قيم ($\hat{u}_i$) إشارة سالبة عندما تكون القيم المشاهدة لـ (Y_i) (الفعلية) تحت خط الانحدار، وإشارة موجبة عندما تقع القيم المشاهدة لـ (Y_i) فوق خط الانحدار، وإشارة صفرية أو شبه صفرية عندما تقع القيم المشاهدة على خط الانحدار كما هو موضح في الشكل (4). بهذا فهي تأخذ القيم الآتية:

$$Y_i = \hat{Y}_i - \hat{u}_i \quad \ldots \quad (1)$$

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i \quad \ldots \quad (2)$$

$$Y_i = \hat{Y}_i - 0 \quad \ldots \quad (3)$$

وبغض النظر عن قيمة ($\hat{u}_i$) وإشارته فإن القيم المشاهدة تساوي القيم المقدرة مضافاً لها (سلباً أو موجباً أو صفراً) معامل الانحراف أو المتغير العشوائي ($\hat{u}_i$) أي:

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i \quad \ldots \quad (4)$$

وعندما يكون مجموع ($\hat{u}_i$) يساوي صفراً، وهو ما يتم عندما نوفق دالة مثلى عند ذاك نفترض بأن:

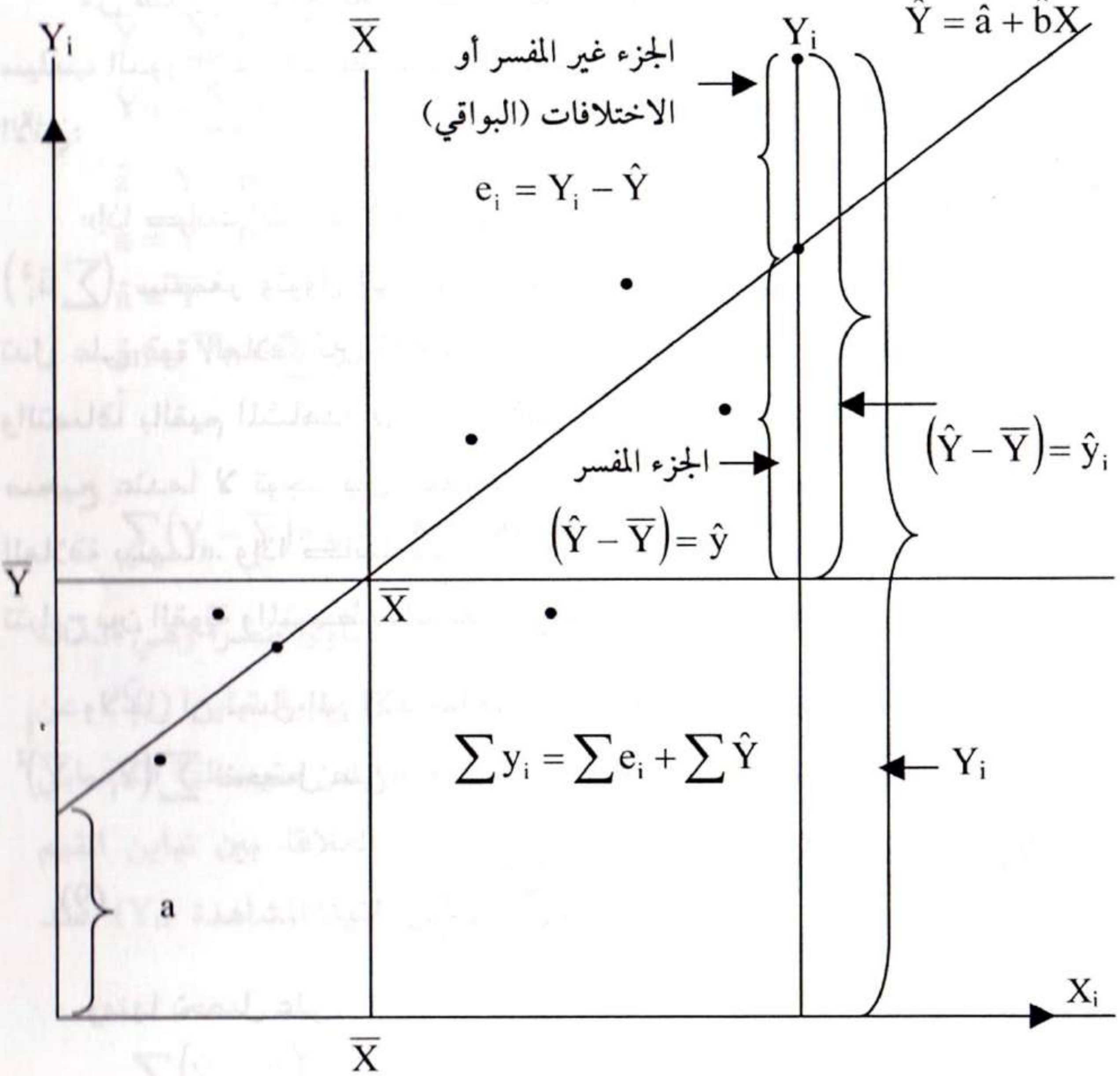
$$\sum \hat{u}_i = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

بهذا فإن:

$$\sum \hat{Y}_i = \sum Y_i \quad \ldots \quad (6)$$

شكل (4)

يوضح الجزء المفسر والجزء غير المفسر في تحليل الانحدار



ومنها نستنتج بأن متوسط قيم (Y_i) أو ($\overline{Y}$) ستكون مساوية لمتوسط قيم ($\hat{Y}$) أي ($\overline{\hat{Y}}$). وإذا ما طرحنا قيمة متوسط القيم المشاهدة ($\overline{Y}$) من الطرفين سنحصل على:

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$$

$$\left(Y_i - \overline{Y}\right) = \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right) + \hat{u}_i \qquad \ldots \qquad (7)$$

وعندما نربع الطرفين ونأخذ مجموعهما سنحصل على:

$$\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2=\sum\left(\hat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2+\sum\hat{u}_i^2 \qquad \ldots \qquad (8)$$

من هنا فإن مربع انحرافات القيم المشاهدة عن القيم المقدرة أو $\hat{u}_i^2$ هو الذي سيلعب الدور الأهم في تقدير قوة العلاقة بين المتغيرين (X) و (Y) وسبب ذلك هو الآتي:

«إذا كانت القيم ($\hat{Y}_i$) أكثر تلازماً والتصاقاً بالقيم المشاهدة (Y_i) فإن قيمة $\left(\sum\hat{u}_i^2\right)$ ستصغر وتؤول إلى الصفر عندما تكون الرابطة تامة، والعبارة الأخيرة تدل على قوة العلاقة بين المتغيرين». «وإذا كانت القيم المقدرة ($\hat{Y}_i$) أقل تلازماً والتصاقاً بالقيم المشاهدة (Y_i) فإن قيمة $\left(\sum\hat{u}_i^2\right)$ ستكبر وتؤول إلى الواحد عدد صحيح عندما لا توجد بين المتغيرين (X) و (Y) أية رابطة، مما يدل على انتفاء العلاقة بينهما». وإذا كانت $\left(\sum\hat{u}_i^2\right)$ قيماً مختلفة بين هاتين القيمتين فإن العلاقة تتراوح بين القوية والمتوسطة والضعيفة وهكذا».

ولأجل أن نصل إلى الاستنتاجات الأخيرة نقوم بقسمة طرفي المعادلة (8) على $\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$ لنحصل على:

$$\frac{\sum\left(Y_i-\overline{Y}^2\right)}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}=\frac{\sum\left(\hat{Y}_i-Y\right)^2}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}+\frac{\sum\hat{u}_i^2}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2} \qquad \ldots \qquad (9)$$

ومنها نحصل على:

$$1=\frac{\sum\left(\hat{Y}_i-\overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2}+\frac{\sum\hat{u}_i^2}{\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2} \qquad \ldots \qquad (10)$$

علماً بأن القيمة $\sum\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2$ هي قيمة موجبة دائماً إلا عندما تكون كل القيم المشاهدة (Y_i) مساوية لمتوسط المشاهدة ($\overline{Y}$) عندها ستكون قيمتها صفراً. وفي هذه الحالة يأخذ خط الانحدار شكلاً موازياً للمحور (X_i) ويتطابق مع خط المتوسطات ومنها تكون قيمة ($\hat{b}$) صفراً، و ($\hat{a}$) قيمة موجبة. ومنها فإن كل القيم

المشاهدة ومتوسط القيم المشاهدة مساوية لـ ($\hat{a}$) من هذا لا حاجة لتوفيق أية دالة انحدارية، لأن القيم المقدرة تتحدد حسابياً وكالآتي:

$$\overline{Y} = \sum Y_i / n \qquad \ldots \qquad (11)$$

$$\overline{Y}n = \sum Y_i \qquad \ldots \qquad (12)$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} \qquad \ldots \qquad (13)$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - 0\overline{X} \qquad \ldots \qquad (14)$$

$$\hat{a} = \overline{Y} \qquad \ldots \qquad (15)$$

$$\hat{a}n = \overline{Y}n = \sum Y_i \qquad \ldots \qquad (16)$$

ومنه:

$$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right) = 0 \rightarrow \sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = 0 \qquad \ldots \qquad (17)$$

أما في حالة كون القيمة $\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$ موجبة ولا تساوي صفراً وهي الحالة التي يجب أن توفق فيها معادلة الانحدار، عند ذاك فإن نسبة تباين ($\hat{Y}_i$) عن متوسط القيمة ($\overline{Y}$) قياساً إلى تباين القيم المشاهدة (Y_i) عن متوسطها الحسابي ($\overline{Y}$) يساوي واحد عدد صحيح، وذلك عندما تكون العلاقة بين تباين القيم المشاهدة (Y_i) عن القيم المقدرة ($\hat{Y}_i$) منسوبة إلى تباين القيم المشاهدة (Y_i) عند متوسطها الحسابي ($\overline{Y}$) مساوية للصفر، أي:

$$\frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = 1 \qquad \ldots \qquad (18)$$

عندما تكون:

$$\sum \hat{u}_i^2 = 0$$

أي أنه قد آلت القيمة $\left(\sum \hat{u}_i^2\right)$ أو (مجموع مربعات الخطأ) إلى الصفر فإن مجموع مربعات البواقي $\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)$ منسوبة إلى مجموع مربعات الانحرافات عن

متوسط القيم المشاهدة (مجموع القيم المشاهدة عن متوسطها الحسابي) سيساوي الواحد عدد صحيح بمعنى أن قيم:

$$\sum\left(\hat{Y}_2 - \overline{Y}\right)^2 = \sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 \qquad \ldots \qquad (18)$$

ومنه فإن:

$$\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = \frac{0}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} \qquad \ldots \qquad (19)$$

ومن هذه المطابقة نحصل على الآتي:

$$\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 = \sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 \qquad \ldots \qquad (20)$$

وبعد حذف ($\overline{Y}$) من الطرفين فإن:

$$\sum \hat{Y}_i = \sum Y_i \qquad \ldots \qquad (21)$$

وكذلك

$$\hat{Y}_i = Y_i \qquad \ldots \qquad (22)$$

لأن ($\sum$) هنا يعني مجموع إذا ما قسم على عدد ما وبفرض (n) فإننا نحصل على نتيجة المعادلة (22).

بهذا ستقع كل النقاط المقدرة والحقيقية على خط واحد وهو خط الانحدار، ولا توجد في هذه الحالة انحرافات عن قيم هذا الخط، باعتباره مجموعة نقاط لا متناهية من القيم المشاهدة أو المقدرة.

أما عندما تكون القيمة أدناه صفراً :

$$\frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y - \overline{Y}\right)^2} = 0 \qquad \ldots \qquad (23)$$

اختبارات المعنوية الأخرى

لمقدرات النموذج القياسي

7

Other Significant Tests

7.1 : اختبار (Z) للعينات الكبيرة.

7.2 : اختبار **Students (t)** .

7.3 : فرضيات الثقة .

7.4 : اختبار المعنوية لمعامل الارتباط.

7.5 : العلاقة بين اختبار **Z** واختبار الخطأ المعياري.

7.6 : مفهوم مستوى المعنوية (α).

: اختبار المعنوية الكلية للدالة من خلال اختبار **F** .

: بعض الملاحظات حول اختبار الفروض السابقة.

: تطبيقات وتمارين

1 - أنه عبارة عن مربع معامل الارتباط بين (Y_i) و $(\hat{Y})$ ويمكن إثباته كالآتي:

بفرض أن معامل ارتباط $\hat{Y}$ مع Y_i هو $\rho_{Y\hat{Y}}$ ويساوي:

$$\rho_{Y\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 \sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}} \quad \dots \quad (30)$$

بعد رفع الجذر عن المقام في المعادلة (28) نربع البسط كما هو وارد في المعادلة (29) والاستناد إلى (30) فإن المعادلة ستصبح:

$$\rho_{Y\hat{Y}} = \sqrt{\frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}} \quad \dots \quad (31)$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$\rho^2_{Y\hat{Y}} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} \quad \dots \quad (32)$$

2 - أنه يعكس نسبة التغيرات التي تطرأ على (Y) التي هي نتيجة لعوامل تختلف عن (X) وكالآتي: لو عدنا إلى الشكل (4) لوجدنا بأن مجموع التغيرات أو الاختلافات أو الانحرافات للقيم المشاهدة (Y_i) عن متوسطها $(\overline{Y})$ تؤلف لنا بعد تربيعها (مجموع مربع انحرافات القيم المشاهدة عن متوسطها الحسابي) (Total Variation) أي:

$$\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 = \hat{y}_i^2 \quad \dots \quad (33)$$

وأن هناك انحرافات أخرى عن المتوسط وهي (مجموع مربع انحرافات القيم المقدرة عن المتوسط الحسابي) أو مجموع مربعات الانحدار (Regression Variation) أو (Explained Variation):

$$\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 = \hat{y}_i^2 \qquad \dots \qquad (34)$$

كما أن هناك مجموعة من الانحرافات التي ليس لها تفسير والتي تسمى باختلاف البواقي Residuals أو (Unexplained Variation).

$$\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2 = e_i^2 \qquad \dots \qquad (35)$$

ويساوي الاختلاف في (Y_i) عن متوسطه الحسابي مجموع اختلافات القيم المقدرة عن وسطها الحسابي (وهي ناتجة عن تأثير (X) أو العوامل المفسِّرة) وتسمى بالاختلاف المفسر، مضافاً له الاختلاف غير المفسر، أو:

$$y_i^2 = \hat{y}_i^2 + e_i^2 \qquad \dots \qquad (36)$$

بهذا فإن انحراف كل مشاهدة عن متوسط قيم المشاهدة يتكون من جزئين:

الأول: هو الذي توضحه أو تفسره التغيرات في خط الانحدار ($\hat{y}_i$).

الثاني: هو التغيرات غير المفسرة من خلال التغيرات في خط الانحدار (e_i).

وإذا ما ربعنا هذه القيم نحصل على:

$$\sum y_i^2 = \sum\left(\hat{y}_i + e_i\right)^2 \qquad \dots \qquad (37)$$

$$= \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 + 2\sum \hat{y}_i e_i \qquad \dots \qquad (38)$$

وبما أن $\hat{y}_i e_i = 0$ عند ذاك:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 \qquad \dots \qquad (39)$$

ومنها نكتب المعادلة (39) كالتالي:

$\sum y_i^2$	=	$\sum \hat{y}_i^2$	+	$\sum e_i^2$
التغير الكلي في Y_i	=	الاختلاف المفسر	+	الاختلاف غير المفسر
Total Variation	=	Explained Variation	+	Unexplained Variation or Residuals Variation

وإذا ما قسمنا الاختلافات المفسَّرة وغير المفسَّرة والتغير الكلي على $\sum y_i^2$ سنحصل على:

$$\frac{\sum y_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \qquad (40)$$

TSS	=	RSS	+	ESS
Total Sequare Sum	=	Regression Sequare Sum	+	Error Sequare Sum

بهذا فإن النتيجة ستكون:

$$1 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \qquad (41)$$

فالواحد عدد صحيح يساوي النسبة المفسرة مضافاً إليها النسبة غير المفسرة. أو أن النسبة المفسرة ونسميها (R^2) تساوي (1) عدد صحيح مطروحاً منه النسبة غير المفسرة وكالآتي:

$$\frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \qquad \ldots \qquad (42)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \qquad \ldots \qquad (43)$$

أو

$$1 = R^2 + \frac{e_i^2}{\sum y_i^2} \qquad \ldots \qquad (44)$$

3 - ويعني معامل التحديد النسبة التي يفسرها التغير في (X) في التغير الكلي في (Y).

وكلما زادت هذه النسبة كلما كانت العلاقة قوية ونسبة التفسير عالية – بهذا فإنها تعكس جودة التوفيق لمعادلة الانحدار. وتكون بهذا المتغيرات المفسِّرة هي النسبة المئوية للتغيرات الناتجة عن التغير في (X) قياساً للتغير الكلي وكالآتي:

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} \qquad \ldots \qquad (45)$$

اما معامل الارتباط فهو الجذر التربيعي لمعامل التحديد. ويقيس قوة الارتباط بين المتغيرين (X) و (Y) وهو يقع بين (0) و (1) عدد صحيح، ويعبر عنه عادة بنسبة مئوية.

2 - علاقة الانحدار بالارتباط ومعامل التحديد:

هناك علاقة إحصائية وقياسية مهمة بين المعلمة $(\hat{b})$ ومعامل التحديد وكالآتي:

$$R^2 = \hat{b}\left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}\right) \qquad \ldots \qquad (46)$$

وهذه العلاقة يمكن توضيح كيفية الحصول عليها وكالآتي:

$$R^2 = \frac{\left(\sum xy\right)^2}{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)}$$

$$= \left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}\right) \cdot \left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}\right)$$

$$\therefore R^2 = \hat{b}\left(\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2}\right)$$

بهذا يمكن أن نحسب (R^2) بعدة طرق وآخرها ما ورد في المعادلة (46).

كما يمكن تحديد ($\hat{b}$) أيضاً من هذه العلاقة حيث أن:

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i^2} = \frac{R^2 \sum y_i^2}{\sum x_i y_i} \qquad \ldots \qquad (47)$$

كما يمكن تصوير العلاقة بينهما كالآتي:

$$\hat{b} = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$$

حيث أن: S_y = الخطأ المعياري لتقدير $Y = \sqrt{\sum y_i^2}$

S_x = الخطأ المعياري لتقدير $X = \sqrt{\sum x_i^2}$

وباستخدام التطبيق السابق (1) وبيانات الجدول فإننا سنحصل على:

$$R^2 = 1 - \frac{47.31}{1634} = 0.971 \qquad \text{or} \qquad 97.71\%$$

$$r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.971} = 0.9854$$

وهذا يدل على:

أولاً: أن العلاقة بين (X) و (Y) علاقة قوية موجبة بدليل ارتفاع معامل الارتباط بينهما الذي يقترب من الواحد عدد صحيح.

ثانياً: أن التغير في (X) يفسر أكثر من 97٪ في التغير في (Y) والباقي أقل من 3٪ تعود لعوامل غير (X) أو لعوامل عشوائية.

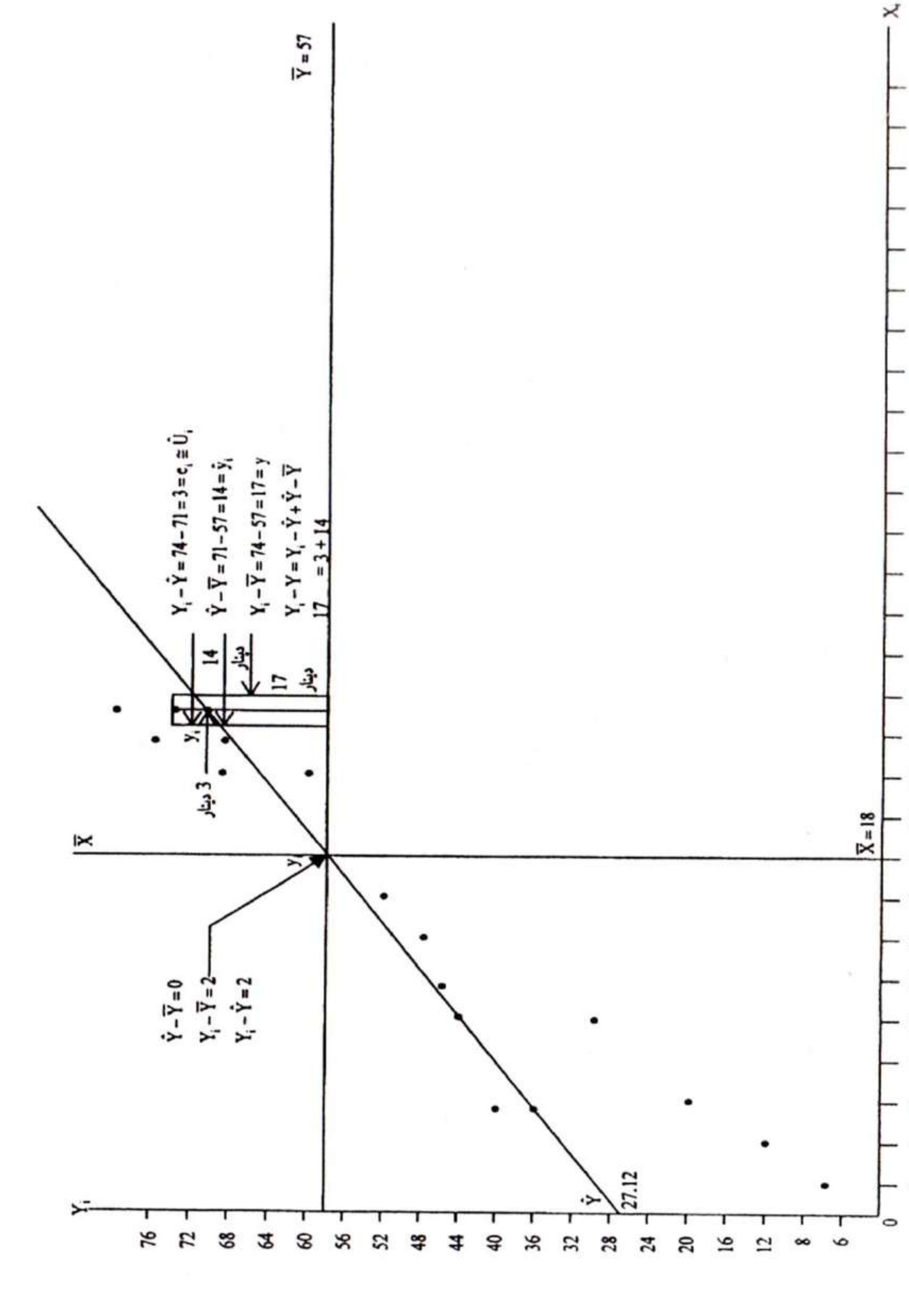
ثالثاً: أن القيمة المقدرة لـ ($\hat{Y}_i$) عندما يكون (X) مساوياً لـ (26) دينار (انظر الجدول السابق) هي (70) دينار تقريباً، بينما قيمتها الفعلية (Y_9) هي (74) وهذا يعني الآتي:

$$Y_i - \overline{Y} = 74 - 57 = 17$$

الجزء المفسر فيها $\hat{Y} - \overline{Y} = 71 - 57 = 14$

الجزء غير المفسر فيها $Y_i - \hat{Y} = 74 - 71 = 3$

المجموع 17 انظر الشكل أدناه:



شكل (5)
يوضح توزيع أثر التغير المفسر والتغير العشوائي تطبيقاً

6.4 : تقدير العلاقة عندما يكون (X) هو المتغير التابع وباستعمال معامل التحديد[1] :

إذا أخذنا العلاقة بين (Y) و (X)، فإن هذه العلاقة قد أمكن تقديرها كما أوضحنا سابقاً باعتبار أن (Y) هو المتغير التابع للمتغير (X). كما يمكن اعتبار (X) متغيراً تابعاً للمتغير (Y). فماذا يترتب على ذلك؟ وما هي العلاقة بين التقديرين؟ يمكن أن نضع العلاقة بين (X) و (Y) على النحو التالي:

$$X_i = \alpha + \beta Y_i + u_i$$

وبذلك يمكن الحصول على تقدير لقيمة (β) ولقيمة (α) كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)X_i}{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} = \frac{N\sum X_i Y_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)}{N\sum Y_i^2 - \left(\sum Y_i\right)^2} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\hat{\alpha} = \overline{X} - \hat{\beta}\overline{Y} \quad \ldots \quad (2)$$

ونلاحظ هنا أن

$$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)X_i = \sum\left(X - \overline{X}\right)Y_i \quad \ldots \quad (3)$$

وحيث أن حاصل ضرب ($\hat{\beta}$) في ($\hat{b}$) يمكن الحصول عليه بالكيفية التالية:

$$\hat{\beta}\hat{b} = \frac{\left[\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)X_i\right]^2}{\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}$$

وبإثبات أن:

$$\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)X_i = \sum \hat{b}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

وأن:

$$\sum \hat{b}^2\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)^2$$

(1) د. محمد لطفي فرحات، مصدر سابق، ص81 -87.

نلاحظ أن:

$$\hat{\beta}\hat{b} = \frac{\left[\sum \hat{b}^2 (X_i - \overline{X})^2\right]^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2 \sum (Y_i - \overline{Y})^2}$$

إذن:

$$\hat{\beta}\hat{b} = \frac{\sum (\hat{Y} - \overline{Y})^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} = R^2$$

وبذلك نستنتج أن قيمة ($\hat{\beta}$) يمكن إعطاؤها كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{R^2}{\hat{b}}$$

فإذا كانت العلاقة تامة بين المتغيرين (X) و (Y) بحيث تكون قيمة (R^2) مساوية للواحد صحيح، فإن قيمة ($\hat{\beta}$) يمكن الحصول عليها بقسمة (واحد) على قيمة ($\hat{b}$). ويعني ذلك أن الخط المستقيم الذي قدرناه باعتبار (X) متغير تابع للمتغير (Y) ينطبق تماماً على الخط الذي نقدره باعتبار (Y) متغيراً تابعاً للمتغير (X). أما إذا كانت (R^2) تختلف عن الواحد، فإن الخطين لا ينطبقان.

تطبيق **(2)**:

استخدم البيانات الموجودة بالجدول (2) لتقدير القيم $\hat{b}, \hat{a}, R^2, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}_a, \hat{\sigma}_b$.

الحل: باستخدام النتائج الواردة بالأعمدة رقم (1) و (2) و (5) و (6) في الجدول رقم (2) نحصل على:

$$\hat{b} = \frac{39}{54} = 0.722$$

$$\hat{a} = 6 - (0.722)\,9 = -0.5$$

وبذلك نحصل على المعادلة التقديرية التالية:

$$\hat{Y} = -0.5 + 0.722\,X$$

ومن هذه المعادلة يمكن الحصول على الأعمدة (8)، (9)، (10).

جدول (2)

يوضح حساب معادلة انحدار Y على X ومعامل التحديد والانحراف المعياري للقيم المقدرة

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Y_i	X_i	$(Y_i-\bar{Y})$ $\bar{Y}=\cancel{9}\,6$	$(X_i-\bar{X})$ $\bar{X}=9$	$(X_i-\bar{X})^2$	$(Y_i-\bar{Y})(X_i-\bar{X})$	X_i^2	$\hat{Y}_i$	$(Y_i-\hat{Y})$	$(Y_i-\hat{Y})^2$	$(Y_i-\bar{Y})^2$	$(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$
	4	7	-2	-2	4	4	49	4.56	-0.56	0.3136	4	2.0736
	6	9	0	0	0	0	81	6.00	0.00	0.000	0	0
	5	8	-1	-1	1	1	64	5.28	-0.28	0.0784	1	0.5184
	9	12	3	3	9	9	144	8.16	0.84	0.7084	9	4.6656
	8	12	2	3	9	6	144	8.16	-0.16	0.0256	4	4.6656
	7	10	1	1	1	1	100	6.72	0.28	0.0784	1	0.5148
	4	8	-2	-1	1	2	64	5.28	-1.28	1.6384	4	1.6384
	4	5	-2	-4	16	8	25	3.12	0.88	0.7744	4	8.2944
	5	7	-1	-2	4	2	49	4.56	0.44	0.1936	1	2.0736
	8	12	2	3	9	6	144	8.16	-0.16	0.0256	4	4.6656
Σ	60	90	0	0	54	39	864	60	0	3.8336	32	29.1136

$$\bar{Y}=\frac{60}{10}=6$$

$$\bar{X}=\frac{90}{10}=9$$

وباستخدام نفس البيانات الواردة في الجدول (2)، العمودين الحادي عشر والثاني عشر يمكن الحصول على معامل التحديد وكالتالي:

$$R^2 = \frac{29.1136}{32} = 0.91$$

ومن معامل التحديد يمكن الحصول على معادلة انحدار (X_i) على (Y_i) وكالتالي:

$$\hat{\beta} = \frac{R^2}{\hat{b}} = \frac{0.91}{0.722} = 1.26$$

$$\hat{\alpha} = \overline{X} - \hat{\beta}\overline{Y} = 6 - 1.26\,(9) = -5.34$$

وبذلك يمكن تقدير قيم x عن طريق المعادلة التالية:

$$\hat{X} = -5.34 + 1.26\,Y_i$$

أما عن التباين لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ فيمكن حسابها كالآتي:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n-k} = \frac{3.8336}{10-2} = 0.48$$

وحيث أن: $\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 54$ و $\sum X^2 = 864$

فإن:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2 \sum X_i^2}{n\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \frac{0.48\,(864)}{10\,(54)} = 0.768$$

و

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{n\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \frac{0.48}{54} = 0.009$$

وبذلك تكون قيمة الانحراف المعياري لكل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ كما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}} = \sqrt{0.768} = 0.876$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}} = \sqrt{0.009} = 0.09$$

وبذلك يمكن وضع المعادلة المقدرة كما يلي:

$$\underset{(0.09)}{\hat{Y} = -0.5} + \underset{(0.876)}{0.722\,X} \qquad n = 10 \qquad R^2 = 0.91$$

6.5 : تطبيقات وتمارين :

لقد تم ذكر مجموعة من التطبيقات في متن الفصل وأما التمارين راجع الفصل السابع والثامن.

7

اختبارات المعنوية الأخرى

لمقدرات النموذج القياسي

Other Significant Tests

7.1 : اختبار (Z) للعينات الكبيرة.

7.2 : اختبار (t) Students .

7.3 : فرضيات الثقة .

7.4 : اختبار المعنوية لمعامل الارتباط.

7.5 : العلاقة بين اختبار Z واختبار الخطأ المعياري.

7.6 : مفهوم مستوى المعنوية (α).

7.7 : اختبار المعنوية الكلية للدالة من خلال اختبار F .

7.8 : بعض الملاحظات حول اختبار الفروض السابقة.

7.9 : تطبيقات وتمارين

اختبارات المعنوية الأخرى

لمقدرات النموذج القياسي

Other Significant Tests

7.1 اختبار Z للعينات الكبيرة

بعد أن قمنا باختبار الانحراف المعياري وتأكدنا من معنوية المعلمات المقدرة بواسطته، سنقوم بإجراء اختبارات أخرى للتأكد من المعنوية الإحصائية للمعلمات المقدرة. واختبار Z هو أحد الاختبارات المستخدمة في الاقتصاد القياسي. ويتحدد فحواه في تحويل قيم المعلمات $(\hat{a})$ ، $(\hat{b})$ إلى قيم معيارية باستخدام الصيغة المعيارية المعروفة وهي:

$$Z = \frac{\text{القيمة المشاهدة} - \text{القيمة المتوسطة}}{\text{الانحراف المعياري}}$$

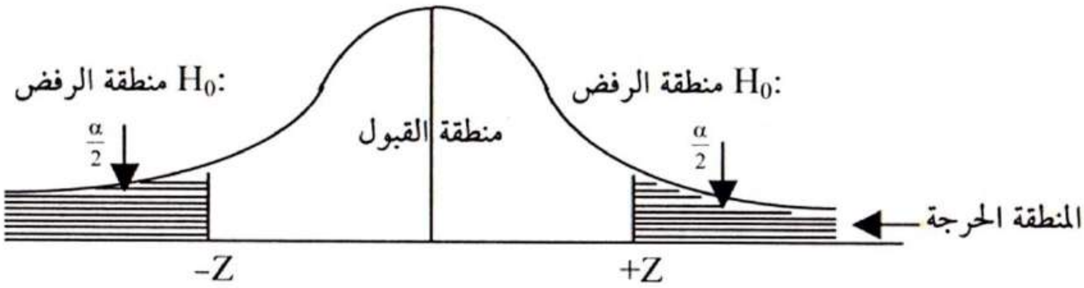
وهي بحد ذاتها تطوير لاختبارات الانحراف المعيارية لأنه الأساس الذي تقوم عليه طريقة تحويل القيم المقدرة للمعلمات إلى قيم معيارية وذلك عندما ننسبها إلى الانحراف المعياري. ويعبر البسط عن الفروق المطلقة بين القيمة المشاهدة لـ (a) أو (b) والقيم المتوسطة لها أو الحقيقية لمعلمات المجتمع. أما المقام فهو الانحراف المعياري المحدد للمعلمة المعنية. أما الناتج فنسميه (Z) ويعني كم انحراف معياري يعادل الفروق بين القيمة المشاهدة والقيمة المتوسطة.

وإذا ما عبرنا عن ذلك بواسطة شكل توزيع القيم لـ (a) و (b) والذي يشبه الناقوس (باعتباره التوزيع الطبيعي للقيم)، فإننا بهذا نقيس الانحرافات عن الوسط

الحسابي الذي قيمته صفراً وتباينه (1) أما يميناً ويساراً عنها فهي الانحرافات المعيارية وذلك بنسبة ثقة معينة كأن تكون 95٪ أو 99٪ أو بدرجة معنوية 5٪ أو 1٪ . وعندما تقع إحدى قيم (a) أو (b) ضمن منطقة القبول المحددة بدرجة الثقة، فإننا نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل وإذا ما كانت (Z) المحسوبة أكبر من القيمة المعيارية المحددة لمنطقة القبول نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل.

شكل (1)

يوضح التوزيع الطبيعي لقيم Z المعيارية



ويستخدم اختبار (Z) عندما يكون حجم العينة المشاهدة أكثر من (30) أي $X_i > 30$ ويستند هذا الاختبار على التوزيع المعياري المعتدل (أو منحنى غاوس Gauss Standard) أو المنحنى الطبيعي (Normal Curve) ويتطلب هذا الاختبار ما يلي:

1- أن يكون تباين المجتمع أو انحرافه المعياري معروفاً σ_u^2 أو σ_u.

2- عندما لا تكون هذه القيمة معروفة يمكن اللجوء إلى الخطأ المعياري للتقدير ولكن بأخذ عينات أكثر من (30) عينة، وعندما لا يتوفر هذا المطلب يصار إلى اختبار (t).

3- إن تباين المجتمع الإحصائي أو العينة هو نفس تباين المتغير العشوائي u أي σ_u.

4- يقدر تباين المجتمع الإحصائي من خلال الخطأ المعياري للتقدير S_u.

وعندما نجري الاختبار نقوم بتحديد فرضيتين هما:

1 - فرضية العدم – والذي يعني فرض أن المعلمة موضوع الاختبار تساوي صفراً وبالتالي ليس لها تأثير في انحدار Y على X وتكتب:

$H_0 : a = 0$ أو $H_0 : a = 2$

أو

$H_0 : b = 0$ أو $H_0 : b = 0.8$

وبالتالي ليس لها معنوية إحصائية.

2 - الفرضية البديلة وهي أن $a \neq 0$ أو b أو أي قيمة أخرى وبالتالي تختلف من الصفر جوهرياً بهذا فهي تؤثر في الانحدار ولها معنوية إحصائية وتكتب:

$H_1 : a \neq 0$ أو $H_1 : a \neq 2$

أو

$H_1 : b \neq 0$ أو $H_1 : b \neq 0.8$

وتحسب قيمة (Z) لكل معلمة كالآتي:

للمعلمة (**a**)

$$Z_a = \left(\hat{a} - A\right) / \hat{\sigma}_a$$

$$Z_b = \left(\hat{b} - B\right) / \hat{\sigma}_b$$

حيث أن: $\hat{a}, \hat{b}$: المعلمة المقدرة.

A,B : المعلمات الحقيقية للمجتمع.

ولكن العادة جرت في الاقتصاد القياسي أن تقارن المعلمات مع الصفر أي عدم كونها جوهرية أو أنها جوهرية وفي بعض الأحيان تقارن مع قيم أخرى مأخوذة من دالات لفترة سابقة أو دالة مشابهة. كما أن مستوى المعنوية الضروري للاختبار (Significance level) عادة ما يكون 5٪ أو 1٪ لتكون درجة الثقة عالية جداً ليكون القرار الاقتصادي ذو ثقة عالية.

وتقابل الـ 5٪ أو 1٪ عدد الحالات التي تحدث فيها أخطاء من الدرجة الأولى وهي رفض فرض العدم عندما يكون صحيحاً، أو قبول الفرض البديل عندما يكون خاطئاً.

ويجري اختبار ذو الطرفي أو الذيلين (Two-tailed test) وذلك بسبب عدم وجود أية معلومات مسبقة عن القيم الحقيقية للمعلمات وموقعها في التوزيع المعتدل. لهذا ستكون المنطقة الحرجة في الطرفين (Critical Region) ولهذا يأخذ كل طرف نصف قيمة مستوى المعنوية (α) أي $\alpha/2$ ولما كانت القيم الفعلية لـ A و B غير معلومة لهذا تعتبر صفراً ويجري الاختبار بالصورة الآتية:

$$Z^*_{\hat{a}} = \frac{\hat{a} - 0}{\sigma_{\hat{a}}}$$

$$Z^*_{\hat{b}} = \frac{\hat{b} - 0}{\sigma_{b}}$$

ويتحدد الخطأ المعياري لتقدير المعلمات كالآتي:

$$S_a = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \times \frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}$$

$$S_b = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \times \frac{1}{n\sum x_i^2}$$

بهذا سيكون الاختبار كالآتي:

$$Z^*_b = \frac{\hat{b}}{\frac{\sum\left(Y-\hat{Y}\right)^2}{n-k} \times \frac{1}{\sum\left(X-\hat{X}\right)^2}} = \frac{\hat{b}}{\frac{\sum e_i^2}{n-k} \times \frac{1}{\sum x_i^2}}$$

$$Z^*_a = \frac{\hat{a}}{\frac{\sum\left(Y-\hat{Y}\right)^2}{n-k} \times \frac{\sum X_i^2}{n\sum\left(X-\hat{X}\right)^2}} = \frac{\hat{a}}{\frac{\sum e_i^2}{n-k} \times \frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}}$$

بعد ذلك نقوم بتحديد احتمال حدوث القيمة المحسوبة $Z^*_{\hat{a}}$ و $Z^*_{\hat{b}}$ من خلال استخدام جدول التوزيع المعتدل المعياري (الملحق بهذا الكتاب) أي مقارنتها مع القيمة الجدولية لـ (Z). فإذا ما كانت القيمة المحسوبة $Z^*_{\hat{a}}$ و $Z^*_{\hat{b}}$ عند مستوى معنوية معينة (α) وبفرض أنها ($\alpha = 0.05$) إذن $\alpha/2 = 0.025$ وتساوي $Z = 1.96$ ، فإن ذلك يعني أن احتمال مشاهدة $Z^*_{\hat{a}}$ و $Z^*_{\hat{b}}$ ضئيل جداً ويساوي (0.025) وذلك إن كان فرض العدم صحيحاً.

حيث أن $Z^*_{\hat{a}}$ و $Z^*_{\hat{b}}$ قد تم احتسابها على أساس فرض العدم. لهذا نرفض فرض العدم أي نرفض فرض وقوع $Z^*_{\hat{a}}$ و $Z^*_{\hat{b}}$ في المنطقة الحرجة وهي المنطقة التي يكون فيها $Z^*_{\hat{a}}$ و $Z^*_{\hat{b}}$ يساوي ± 0.025 .

وعندما نرفض فرض العدم نقبل الفرض البديل ومن ثم نقبل تقدير العينة على أنها أحسن تقدير للمجتمع وتختلف عن الصفر وذات معنوية جوهرية. ومعنى ذلك أن اختلافها عن الصفر (أو أي رقم آخر) هو اختلاف جوهري لا يرجع لعوامل الصدفة ل لعوامل حقيقية.

أما عندما تكون القيمة المحسوبة $Z^*_{\hat{a}}$ و $Z^*_{\hat{b}}$ أصغر من القيمة الجدولية فإن هذا يعني أن احتمال مشاهدة $\hat{a}$ و $\hat{b}$ في المنطقة الحرجة احتمال كبير أي أكبر من 0.025 وذلك إن كان فرض العدم صحيحاً. لهذا نقبل فرضية العدم ونرفض الفرض البديل ومن ثم (نرفض تقدير العينة) ويكون استدلالنا الإحصائي غير معنوي. أي لا يكون للقيمة المقدرة معنوية إحصائية، ويكون اختلافها عن الصفر اختلافاً غير معنوياً أو غير جوهري ويرجع (لعوامل الصدفة).

7.2 : اختبار (t) Students :

من الناحية الاقتصادية والعملية يصعب أن يكون حجم العينة أكثر من 30 وخاصة في الاقتصاد (عدا بحث ميزانية الأسرة وبعض البحوث الأخرى) فإن

المشاهدات الإحصائية لسنوات معينة ولمتغير معين عادةً ما تكون بين (10–15) سنة أو عينة وبالتالي فإن اختبار (Z) يكون قليل الاستخدام ويصار بدلاً عن ذلك اللجوء إلى اختبار (t).

وتستخدم في هذه الاختبارات الصيغة الآتية:

$$t^* = \frac{X - \mu}{S_X}$$

وبالنسبة للمعلمات:

$$t^*_{\hat{a}} = \frac{\hat{a} - A}{S_{\hat{a}}} \qquad \& \qquad t^*_{\hat{b}} = \frac{\hat{b} - B}{S_{\hat{b}}}$$

حيث أن:

$S_{\hat{a}}$ و $S_{\hat{b}}$ هي الخطأ المعياري للتقدير للعينة. ويستخدم جدول (t) درجات الحرية المعتبر في تباين العينة بدلاً من التباين الحقيقي، حيث يصبح تباين العينة تقدير غير متحيز لتباين المجتمع (σ^2). وطريقة المقارنة والحساب مشابهة لاختبار (Z) وبنفس الفرضيات ومستويات المعنوية والثقة. وبما أن (A) و (B) للمجتمع غير موجودة عليه يتحول الاختبار إلى:

$$t^*_{\hat{a}} = \frac{\hat{a}}{S_{\hat{a}}} \qquad \& \qquad t^*_{\hat{b}} = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}}$$

وبما أن درجات الحرية المستخدمة في تحليل التباين في الانحدار الخطي البسيط هي (n-2) عليه ستكون درجات الحرية مساوية لـ (n-2).

وباستخدام مثالنا السابق نحسب الآتي:

$$t^*_{\hat{a}} = \frac{\hat{a} - A}{S_{\hat{a}}} = \frac{17.12 - 0}{1.98} = 13.7$$

$$t_{\hat{b}}^{*} = \frac{\hat{b}-B}{S_{\hat{b}}} = \frac{1.66-0}{0.1} = 16.6$$

حيث أن القيم الحقيقية لـ A و B تعتبر صفراً لأنها مجهولة، لهذا فإن ($t_{\hat{a}}^{*}$) و ($t_{\hat{b}}^{*}$) هي أصغر من (t) الجدولية البالغة (2.306) بدرجات حرية (8) (n-k) أو (10 -2) وبمستوى معنوية 5٪.

لهذا نرفض فرض العدم القائل بأن $\hat{a}=0$ و $\hat{b}=0$ ونقبل الفرض البديل القائل بأن $\hat{a}\neq 0$ و $\hat{b}\neq 0$. أي أن ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$) تختلف جوهرياً (معنوياً) عن الصفر ويمكن استخدامها لأغراض التنبؤ.

7.3 : فرضيات فترات الثقة (Confidence Intervals) لـ $\hat{a}$ ، $\hat{b}$ أو حدود الثقة بالمعلمات :

قد يتبادر لذهن القارئ بأن رفض فرضية العدم وقبول الفرض البديل للمعلمات المقدرة هي نهاية المطاف وأنها هي (التقدير المضبوط) والصحيح لمعلمات المجتمع.

لكنها في الحقيقة ليست سوى تقديرات تقريبية لمعلمات المجتمع (B,A) ولهذا فإننا بسبب هذا التقريب نلجأ إلى وضع حدود الثقة لهذه المعلمات، وهي حدين:

الحد الأدنى: وهو الحد الذي لا يمكن أن تكون معلمة المجتمع أدنى من.

الحد الأعلى: وهو الحد الذي لا يمكن لمعلمة المجتمع أن تتجاوزه.

بهذا فنحن نضع في هذه الحالة احتمالين تنحصر بينهما قيمة معلمة المجتمع الحقيقية، أو فترات ثقة أو حدود ثقة بالمعلمات، بحيث نكون متأكدين بنسبة 95٪ أو 99٪ مثلاً بأن معلمة المجتمع ستقع بين هذين الحدين وهذا يعني أنه في 95٪ أو 99٪ من الحالات فإن سلوك العينة يتطابق مع سلوك المجتمع، وأنه بنفس عدد الحالات تتطابق معلمة المجتمع مع معلمة العينة حتى حدود الثقة المحددة، وعند

اختبار مستوى ثقة 95٪ فإن قيمة (Z) الجدولية سوف تقع بين (1.96 +) أو (1.96−) أو (2) بالتقريب.

بهذا نكتب الصيغة الآتية وهي تعني أن هناك احتمال بنسبة 95٪ أن تقع معلمة المجتمع ضمن المدى الآتي:

$$P\left(-1.96 < Z < +1.96\right) = 0.95$$

وبإحلال قيمة (Z) بدلاً مما موجود في القيمة أعلاه سنحصل على:

$$P\left\{-1.96 < \frac{\hat{b} - B}{s_{\hat{b}}} < 1.96\right\} = 0.95$$

بهذا فإن حدود الثقة للمعلمة ($\hat{b}$) هي:

$$\left\{-1.96\left(\sigma_b\right) < B < b + 1.96\left(\sigma_b\right)\right\} = 0.95$$

من هنا يمكن القول بالآتي:

$$B = b \pm 1.96\left(\sigma_b\right)$$

أي أن معامل المجتمع (B) يقع ضمن هذه الحدود بمقدار (95) مرة من (100) مرة وكذلك يقال عن المعلمة (A) فهي ضمن:

$$A = \hat{a} \pm 1.96\left(\sigma_b\right)$$

وبما أن $\sigma a, \sigma b$ مجهول فإننا نستخدم $S\hat{a}$ و $S\hat{b}$ وكالآتي لـ ($\hat{b}$).

$$\begin{aligned} B &= 1.66 \pm 1.96\left(0.1\right) \\ B_1 &= 1.66 + 0.196 = 1.856 \\ B_2 &= 1.66 - 0.196 = 1.464 \end{aligned}$$

بهذا يمكن القول بأننا على ثقة 95٪ بأن المعلمة (B) للمجتمع ستكون بين (1.464) و(1.856)، أي أنها (95) مرة من (100) مرة ستكون بين هذين المدارين ولا تكون أقل من الحد الأدنى ولا أكبر من الحد الأعلى إلا (5) مرات فقط.

وينطبق الحال مع اختبار (t) حيث يكفي أن نكتب الآتي:

$$P\left\{-t_{0.025} < +t_{0.025}\right\} = 95$$

وبإحلال ما يقابل (t) سنحصل على:

$$P\left\{t_{0.025} < \frac{\hat{b} - B}{S_{\hat{b}}} < +t_{0.025}\right\}$$

وتكون بهذا فترة ثقة كالآتي:

$$P\left\{\hat{b} - t_{0.025}(Sb) < B < \hat{b} + t_{0.025}(Sb)\right\} = 95$$

$$B = b \pm t_{0.025}(Sb)$$

بدرجة حرية (n-k).

7.4 : اختبار المعنوية لمعامل الارتباط (اختبار دلالة معامل الارتباط) :

إن معامل الارتباط (X) مع (Y) الذي سبق وأن حددنا صيغته الرياضية واحتسبناه في مثالنا السابق ما هو إلا تقدير لمعامل الارتباط الحقيقي للمجتمع $\left(\frac{P}{P}\right)$ أي لقيم (X) و (Y) في المجتمع، بهذا تقدير من عينة لهذا المجتمع، عليه يتطلب الأمر هنا أيضاً قياس واختبار المعنوية الإحصائية بواسطة بعض الاختبارات الخاصة بمعنوية (r) والمعبرة عن توزيع معايناته، وتتم الاختبارات كالآتي:

1- اختبار معنوية (r) عندما يكون معامل ارتباط المجتمع الحقيقي مساوياً للصفر $\left(\frac{P}{P} = 0\right)$.

2- نفترض بأن $\left(\frac{P}{P} = 0\right)$ فإن توزيع المعاينة لـ (r) هو متناسق أو (Symetric):

$$r \approx N(O, \sigma_r) = \sqrt{\frac{(1-r)^2}{n-2}}$$

حيث أن: N : حجم المجتمع.

O: المتوسط $\left(\frac{P}{P}\right)$ الحسابي.

σ_r : الانحراف المعياري.

ويتم استخدام اختبار (t) من خلال تقدير (t^*) المحسوبة من معامل ارتباط العينة (r) وبالصيغة الآتية:

$$t_r^* = \frac{r}{\sigma_r} = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

$$t_r^* = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

ومن ثم نقارن t_r^* المحسوبة مع قيمة (t) الجدولية بمستوى معنوية مثل 5٪ أو (t = 0.025) وبدرجة حرية (n-2)، وباستخدام التطبيق السابق عن الأجور والإنتاجية يمكن إجراء الاختبار كالآتي:

1 - اختبار معنوية **(r)** عندما يكون $\left(\frac{P}{P}\right)$ مساوياً للصفر:

بما أن تقدير $\left(\frac{P}{P}\right)$ أو (r) يختلف عن الصفر، أي أن نستنتج بمستوى معنوية 5٪ مثلاً أن معامل ارتباط المجتمع $\left(\frac{P}{P}\right)$ يختلف عن الصفر، بهذا سنفترض الآتي:

فرض العدم $H_0 : \frac{P}{P} = 0$

في مواجهة الفرض البديل $H_1 : \frac{P}{P} \neq 0$

ومنها نحسب الآتي:

$$t_r^* = \frac{0.9854\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0.971)}} = \frac{2.7872}{0.17} = 16.37$$

وبما أن ($t_{0.025}$) الجدولية بدرجة حرية (8) هي (2.306) بهذا فإن t_r^* المحسوبة أكبر من (t) الجدولية ومنها:

نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن $\left(\frac{P}{P}\right)$ قيمة تختلف عن الصفر جوهرياً، وأن (r) بالتالي تختلف عن الصفر جوهرياً.

2 - اختبار معنوية **(r)** عندما لا يكون $\left(\frac{P}{P}\right)$ صفراً $\left(\frac{P}{P} \neq 0\right)$:

بفرض أن معامل الارتباط للمجتمع الحقيقي لا يساوي صفراً $\left(\frac{P}{P} \neq 0\right)$ فإن توزيع المعاينة لـ (r, s) منحرفة قليلاً وليست متجانسة، فإذا ما كانت $\left(\frac{P}{P}\right)$ عالية. فإن توزيع المعاينة لـ (r) ستكون أكثر انحرافاً؟ لهذا فإن (فيشر **Fisher**) يقترح الاختبار الآتي (1):

$$W = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$= 1.1513\log_{10}\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = 1.513\ \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

وأن له توزيع طبيعي تقريباً ومتوسط يساوي:

$$\mu_w = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+P}{1-P}\right) = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+P}{1-P}\right) = 1.1513\ \ \log_{10}\left(\frac{1+P}{1-P}\right)$$

وانحرافه المعياري الآتي:

$$\sigma_w = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

حيث أن:

$$W \approx N\left\{\frac{1}{2}\ \log_e\left(\frac{1+P}{1-P}\right) \quad \text{و} \quad \sigma_w = \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right\}$$

وبالاستناد إلى ما ورد في أعلاه فإن (W) ستكون معيارية Standardized كالآتي:

$$Z_i = \frac{w-\mu_w}{\sigma_w} \approx N\,(0.7)$$

وإذا ما عدنا إلى تطبيقنا السابق فإن (r = 0.9854) فهل نرفض الفرضية القائلة بأن معامل المجتمع الحقيقي هو (0.8) عند مستوى معنوية 5٪ ؟ بوجود الفرضيات الآتية:

فرض العدم $H_0 : P = 0.8$

في مواجهة الفرض البديل $H_1 : P > 0.8$

الحل:

من بياناتنا نحصل على:

$$W = 1.1513\ \log_{10}\left(\frac{1+0.9854}{1-0.9854}\right) = \frac{1.9854}{0.0146} = 1.1513\ \log_{10}(136)$$

$$= 2.45634$$

$$\mu_w = 1.1513\ \log_{10}\left(\frac{1+0.8}{1-0.8}\right) = 1.0986119$$

$$\sigma_w = \frac{1}{\sqrt{10-3}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = 0.37796$$

$$Z^{*}=\frac{w_i-\mu_w}{\sigma_w}=\frac{2.45634-1.098615}{0.37796}=3.592$$

ومن الجدول (1) في صفحة 93 نستخرج (Z) الجدولية البالغة (1.96)، لهذا فإن (Z^*) هي أكبر من (Z) الجدولية، ومنها نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن ($P > 0.8$).

وأن جدول (2) يبين قيم معامل الثقة وقيم $Z_{\alpha/2}$ المناظرة لها والشائعة وهي:

جدول (2)

يوضح مستويات المعنوية وقيم Z المناظرة لها

معامل الثقة ($1-\alpha$)	قيم Z المناظرة $Z_{\alpha/2}$
0.90	1.645
0.95	1.96
0.98	2.330
0.99	2.580

3 - اختبار معنوية معامل الارتباط الرتب لسبيرمان:

لمعامل الرتب لسبيرمان اختبار خاص كالآتي:

أولاً: إذا كان معامل ارتباط المجتمع صفراً فإن توزيع $\left(\frac{r'}{r'}\right)$ سوف يكون تقريباً منحنى طبيعي وله متوسط صفر وانحراف معياري مقداره:

$$\sigma_{r'}=\frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

وسيتم استخدام اختبار الطرفين إضافة لذلك يستخدم اختبار (Z) كالآتي:

$$Z^{*}=\frac{r'}{\sigma_{r'}}=r'(n-2)^{0.5}=r'\sqrt{m-1}$$

وتفاوت (Z^*) مع Z الجدولية وستكون Z^* كالآتي:

$$-1.96 \le Z^* \le 1.96$$

فإذا ما كانت ضمن هذه الحدود فنقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل وإذا ما كانت أكبر من (+1.96) أو اصغر من (−1.96) نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل بمستوى معنوية 5٪ مثلاً:

فإذا كانت $\frac{-1.96}{\sqrt{n-1}} > r' > \frac{1.96}{\sqrt{n-1}}$

نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل

أما إذا كانت $\frac{-1.96}{\sqrt{n-1}} \le r' \le \frac{1.96}{\sqrt{n-1}}$

نرفض الفرض البديل ونقبل فرض العدم.

وباستخدام معامل ارتباط الرتب في الفصل الثاني البالغ 0.94 يمكننا إجراء الاختبار الآتي:

$$Z^* = 0.94\,(n-1)^{0.5} = 0.94\,(10-1)^{0.5} = 2.82$$

وبما أنها وبمستوى معنوية 5٪ أكبر من Z الجدولية البالغة (1.96) عند ذاك فإن (r') لا يساوي صفراً وبهذا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل حيث أن:

$$\left(-1.96\big/_3\right) > 0.94 > \left(1.96\big/_3\right)$$

إذ أن $-0.65 > 0.96 > 0.65$

ومعنى ذلك أن (r') ذات معنوية إحصائية.

7.5 : العلاقة بين اختبار Z واختبار الخطأ المعياري :

اتضح من عرضنا لاختبار الفروض بأنه إذا ما زادت قيمة Z^* عن 1.96 عند مستوى معنوية 5٪ ومنها نرفض فرض العدم (H_0) ونقبل الفرض البديل (H_1)،

وعندما نقرب هذه (1.96) الشائعة الاستخدام في جدول Z باعتبار أن الشائع هو الاختبار بمستوى معنوية 5٪ في الاقتصاد القياسي، فعندما نقرب هذه إلى أقرب عدد صحيح فإنها تساوي 2، أي $1.96 \cong 2$ بهذا نستطيع أن نقول الآتي:

نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل عندما تكون Z^* أكبر من 2 أي $Z = \left(\hat{b} / S_{\hat{b}} \right) > 2$.

ونقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل عندما تكون Z^* أصغر من 2 أي $Z = \left(\hat{b} / S_{\hat{b}} \right) < 2$.

وإذا ما ضربنا طرفي اللامتساوية في $\left(S_{\hat{b}} / 2 \right)$ سنحصل على الاستنتاج التالي:

نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل عندما $S_{\hat{b}} < \left(\hat{b} / 2 \right)$ أي أن يكون الانحراف المعياري للمعلمة أكبر من $1/2$ قيمة المعلمة $\hat{b}$، ونقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل عندما $S_{\hat{b}} < \left(\hat{b} / 2 \right)$ أي عندما يكون الانحراف المعياري للمعلمة أكبر من $1/2$ قيمة المعلمة (b)، ويسري الحال على المعلمة ($\hat{a}$) أيضاً لهذا فإن اختبار الخطأ المعياري ما هو إلا تقريب الاختبار Z رغم أنه أقل دقة من اختبار Z.

7.6 :مفهوم مستوى المعنوية α :

لأجل أن نتعامل مع مستوى المعنوية بشكل صحيح فإنه يتوجب علينا أن نعرف مضمون هذه القيمة، يعبر مستوى المعنوية عن احتمال الخطأ عند اتخاذ قرار ما بصدد فرضية معينة، مثل قرار رفض فرض العدم أو قرار قبول الفرض البديل، قرار رفض فرض البديل وقرار قبول فرض العدم، والمعنى العام لهذه القيمة بفرض أننا قبلنا مستوى معنوية 5٪ فإن ذلك يعني أن مستوى الثقة في قرار الرفض أو القبول لا يكون 100٪ بل 95٪ فقط.

بعبارة أخرى أن كل (100) مرة يصدر فيها قرار الرفض أو القبول توجد (95) مرة يكون فيها هذا القرار صحيحاً و(5) مرات يكون القرار خاطئاً، وإذا ما حدث أن قرار الرفض مثلاً خاطئاً فإن هذا يعني أننا وقعنا في خطأ هو (رفض فرض هو في الحقيقة قرار صحيح) وهو خطأ من النوع الأول، وعندما نجري اختباراتنا عند مستوى معنوية 1٪ بدلاً من 5٪ فإن ذلك يعني أننا قللنا من احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول أي قللنا من احتمال رفض فرض العدم رغم أنه صحيح وقبول الفرض البديل رغم أنه خطأ.

خلاصة القول أن مستوى المعنوية (α) يشير إلى احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى عندما نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل فإن هناك احتمال أن يكون قرار قبول فرض العدم قراراً خاطئاً وإن حدث وكان قرار القبول قراراً خاطئاً فإن هذا يعني أننا قبلنا فرضاً هو في حقيقة الأمر خاطئ. وهذا النوع من الخطأ يسمى بالخطأ من النوع الثاني نرمز له بالرمز (β) وهو غير محدد بقيمة ثابتة كما هو الحال في الخطأ الأول.

ويعود السبب في ذلك هو اعتقاد بعض الاقتصاديين القياسيين بأن الخطأ من النوع الأول أكثر أهمية من النوع الثاني، الأمر الذي تم تبني فيه احتمال الوقوع في الخطأ عند مستوى منخفض وهو 1٪ ، 5٪ مع محاولة تدنيه احتمال الوقوع في خطأ النوع الثاني إلى أدنى حد ممكن، وتدعى النسبة بين β و (1) عدد صحيح أي $(1-\beta)$ بقوة الاختبار (Power of test)، وتدنيته يعني تعظيم قوة الاختبار حيث تشير $(1-\beta)$ إلى احتمال عدم الوقوع في الخطأ من النوع الثاني الذي يمكن إيضاحه بالجدول الآتي:

القرار / الفرض	صحيح	خاطئ
رفض	خطأ من النوع الأول	صح
قبول	صح	خطأ من النوع الثاني

7.7 اختبار المعنوية الكلية للدالة من خلال اختبار F :

يمكن اختبار المعنوية الكلية للانحدار أو النتائج الكلية للنموذج باستخدام تحليل التباين وذلك باستخدام ما يسمى باختبار (F) أو اختبار (Fisher)، فإن (F) تساوي نسبة التباين المفسر قياساً إلى التباين غير المفسر بدرجات حرية (K-1) و (n-K) وبالصيغة الآتية:

$$F^{*}_{(k-16),(m-k)}=\frac{\left(\dfrac{\sum\hat{y}}{k-1}\right)}{\left(\dfrac{\sum e_i'}{n-k}\right)}=\frac{\left(\dfrac{R^2}{R-1}\right)}{\left(\dfrac{1-R^2}{n-k}\right)}=\frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين غير المفسر}}$$

وإذا ما تجاوزت قيمة (F^*) المحسوبة قيمة (F) الجدولية عند مستوى معنوية ودرجات حرية محددة، نقبل بأن معلمات الانحدار ليست جميعها مساوية للصفر وأن (R^2) تختلف جوهرياً عن الصفر، وعندما تكون أقل من (F) الجدولية نقبل فرض العدم القائل بأن معلمات الانحدار جميعها مساوية للصفر وأن (R^2) لا تختلف جوهرياً عن الصفر.

ومن التطبيق السابق يمكن أن نحسب قيمة F^* كالآتي:

$$F_{1,8}=\frac{\left(\dfrac{0.971}{2-1}\right)}{\left(\dfrac{1-0.971}{8}\right)}=\frac{0.971}{0.029}=33.5$$

وبما أن F^* أكبر من F الجدولية البالغة (5.22) فإن المعنوية الكلية للدالة عالية بمستوى معنوية 5٪ حيث أن معلماتها ليست مساوية للصفر وأن (R^2) تختلف عن الصفر.

7.8 : بعض الملاحظات حول اختبار الفروض السابقة :

هناك عدم اختلاف بين الاقتصاديين القياسيين على الاختبارات الأكثر أهمية من بين الاختبارات التي تم شرحها لحد الآن، فالمعايير الإحصائية قد تظهر أحياناً

تناقضاً في نتائجها، فقد يكون معامل التحديد والارتباط عالياً لكن معنويات المعلمات منخفضة والعكس صحيح، لهذا فقد اتفق البعض من القياسيين على الآتي:

1- عندما تكون (R^2) عالية والأخطاء المعيارية للمعلمات عالية أيضاً وبالتالي معنوياتها الإحصائية، عند ذاك يكون (R^2) هو الحكم وتقبل المعلمات رغم أنها غير معنوية إحصائياً.

2- اعتماد غرض النموذج كمعيار للحكم، فعندما يكون الغرض من النموذج هو للتنبؤ يقبل (R^2) كمعيار رئيسي وتهمل معنويات المعلمات أو أخطائها المعيارية.

3- عندما يكون الغرض من النموذج شرح وتفسير الظواهر الاقتصادية وتحليلها يكون معيار الأخطاء المعيارية للمعلمات هو الأفضل ويهمل (R^2) واختباره.

4- في حالة ارتفاع معنويات (R^2) والمعلمات يكون التقدير أفضل للتنبؤ كذلك، وإذا لم يحصل ذلك فإن المعايير الاقتصادية ستكون هي الحكم بالمقارنة مع المعايير الإحصائية، ومحاولة إدخال تعديلات على النموذج عند حصول تناقض واضح.

7.9 : تطبيقات وتمارين :

لقد تم ذكر التطبيقات في متن الفصل وسنكتفي بذكر التمارين كما يلي:

1- لماذا نلجأ إلى اختبار الفرضيات؟

2- عدد أنواع الاختبارات الإحصائية واشرح اختبارات الانحراف المعياري وحدد أهميته وعلاقته باختبار (Z)؟

3- عدد اختبارات المعنوية الإحصائية للمعلمات وما هي أكثرها انتشاراً؟

4- ما معنى اختبار جودة التوفيق وما هي المعايير المستخدمة فيها؟

5- اكتب كيفية اشتقاق معاملي الارتباط والتحديد وارسم حدود التباين المفسر وغير المفسر بالنسبة لخط الانحدار؟

6- حدد رياضياً العلاقة بين معامل الانحدار ومعاملي الارتباط والتحديد وكيف يمكن اشتقاق أحدهما من الآخر؟

7- اشرح اختبار (Z) وفوائده؟

8- اشرح اختبار (t) للمعلمات المقدرة ومعامل الارتباط وفترات الثقة له؟

9- اشرح اختبار (F) وأهميته في تحديد المعنوية الكلية للدالة؟

10- حدد أساليب اختبار (r) لبيرسون وسبيرمان؟

11- أدناه العلاقة بين دخل الأسرة واستهلاكها حدد الآتي:

- المعلمات المقدرة واختبر معنويتها الإحصائية وفسر معانيها.
- معاملي الارتباط والانحدار واختبر معنويتها الإحصائية.
- اختبر المعنوية الكلية للدالة.

معدل الدخل للأسرة ألف دينار	10	12	15	17	18	20	23	25
معدل الاستهلاك ألف دينار	8	9	12	13	14	15	16	18

النموذج القياسي الخطي العام
(نموذج الانحدار الخطي المتعدد)

8

General Linear Model
(Multiple Linear Regression)

النموذج القياسي الخطي العام

(نموذج الانحدار الخطي المتعدد)

General Linear Model

(Multiple Linear Regression)

8.1 : مفهوم وطبيعة النموذج الخطي العام وفرضياته :

يطلق على العلاقة بين أكثر من متغير مستقل ومتغير تابع تسمية النموذج الخطي العام أو الانحدار الخطي المتعدد General Linear Model أو (Multiple Linear Regression) وهي تسمية لعلاقة خطية بين أكثر من متغير اقتصادي مستقل أو مفسر ومتغير تابع واحد، وقد دلتنا دراستنا للاقتصاد الجزئي والكلي بأن التغير في سلوك ظاهرة ما أو متغير معين لا يرتبط بواحد من المتغيرات أو العوامل المحددة فقط، بل أن سلوك الظاهرة المدروسة قد يتغير بفعل تأثير أكثر من عامل واحد يؤثرون في وقت واحد وبدرجة متفاوتة من القوة على سلوك هذه الظاهرة.

فالتغير في الطلب مثلا لا يحدد تغير في السعر لوحده، بل هناك عوامل أخرى مثل الدخل وأسعار السلع البديلة والذوق وتغير الموسم وعوامل عشوائية أو احتمالية أخرى. وكذلك الحال مع الادخار الذي يتحدد بسعر الفائدة والدخل ومقدار الثروة وغيرها، وكذلك الحال مع غلة الأرض فهي لا تتأثر فقط بالتسميد بل بالإرواء (كمية الأمطار) ودرجات الحرارة والمكافحة والتعشيب وغيرها من العوامل. لهذا ولأجل أن تكون تحليلاتنا القياسية صحيحة يتوجب الأمر الأخذ بنظر الاعتبار تأثير

كل هذه العوامل ضمن النموذج القياسي المعني. وبهذا يتعين علينا دراسة النموذج الذي يتضمن أكثر من متغير مستقل واحد تحقيقاً لدقة أفضل في التحليل والتقدير والتنبؤ. ويستخدم تحليل الانحدار المتعدد لاختبار الفروض الخاصة بالعلاقة بين متغير تابع (Y) واثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة، واستخدام تقديراتهم لفرض التنبؤ كما ذكرنا.

ومع مراعاة أن هناك فرض إضافي (إلى فروض النموذج الخطي البسيط) وهو أنه لا توجد علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة لأنه لو كان بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة ارتباط خطي تام، لاستحال حساب تقديرات معلمات (OLS) لأن مجموعة المعادلات الطبيعية سوف تشمل على معادلتين أو أكثر ليست مستقلة أما إذا كان هناك ارتباط خطي كبير وليس تاماً بين اثنين أو أكثر من المتغيرات المفسرة، فإنه يمكن تقدير المعلمات (OLS)، ولكن لا يمكن عزل تأثير كل من المتغيرات المستقلة ذات الارتباط الخطي الكبير فيما بينهما.

ويأخذ النموذج الخطي العام الشكل الآتي:

$$Y_i = \underbrace{a + bX_i + cZ_i}_{\text{الجزء المنتظم}} + \underbrace{U_i}_{\text{الجزء العشوائي}}$$

حيث أن:

U_i = المتغير العشوائي (حد الاضطراب) (Disturbance or error term) وحيث أن المعلمات (c, b, a) غير معلومة. لهذا يصبح الهدف تقدير هذه المعلمات بحيث نحصل على المعادلة الانحدارية التي تعطينا أقل مربع انحرافات (Less Squeres Estimation) أي تدنية القيمة $\left(\sum e_i^2\right)$ أو $\left(U_i^2\right)$.

وتقيس كل من (b) و (c) نسبة التغير الذي تحدثها العوامل المستقلة من نسبة التغير الكلية في المتغير التابع بمعنى أن:

$$b = \Delta Y \div \Delta X$$
$$c = \Delta Y \div \Delta Z \quad \ldots \quad (2)$$

إذن فهي معاملات انحدار جزئية، تقيس التغير في قيمة المتغير التابع نتيجة التغير في أحد المتغيرات المستقلة بوحدة واحدة مع ثبات المتغيرات الأخرى، وتقدر المعلمات باستخدام الطريقة الشائعة وهي طريقة المربعات الصغرى وذلك بتحقيق الشرط الضروري لتدنية الأخطاء عند أخذ المشتقة الجزئية للدالة بالنسبة للمعلمات (c, b, a) مساواتها بالصفر ومنها نحصل على المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= n\hat{a} + \hat{b}\sum X_i + \hat{c}\sum Z_i \\ \sum Y_i X_i &= \hat{a}\sum X_i + \hat{b}\sum X_i^2 + \hat{c}\sum X_i Z_i \quad \ldots \quad (3) \\ \sum Y_i Z_i &= \hat{a}\sum Z_i + \hat{b}\sum X_i Z_i + \hat{c}\sum Z_i^2 \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على قيم $\hat{c}, \hat{b}, \hat{a}$ كالآتي:

1 - الطريقة المباشرة أو طريقة الانحرافات:

$$\hat{b} = \left[\left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum z\right) - \left(\sum z_i y_i\right)\left(\sum x_i z_i\right)\right] \div \left[\left(\sum x\right)\left(z_i^2\right) - \left(\sum x_i z_i\right)^2\right]$$

$$\hat{c} = \left[\left(\sum z_i y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum x_i z_i\right)\right] \div \left[\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum z_i^2\right) - \left(\sum x_i z_i\right)^2\right]$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - b\overline{X} - \hat{c}\overline{Z}$$

2 - طريقة التعويض والحذف: وهي استخدام أقيام المتغيرات بالتعويض والحذف لاستخراج المعلمات.

3 - طريقة المصفوفات: نجد محدد مصفوفة المتغيرات بعد وضع مجموعة المعادلات الآتية (4) على هيئة مصفوفة وكالآتي:

$$\begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_i \\ \sum Y_i Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum X_i & \sum Z_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i Z_i \\ \sum Z_i & \sum X_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$|A| = \left(n \cdot \sum X_i^2 \sum Z_i^2\right) + \left(\sum X_i \cdot \sum X_i Z_i \cdot\right) + \left(\sum Z_i \cdot \sum X_i \cdot \sum X_i Z_i\right)$$
$$-\left(\sum Z_i \cdot \sum X_i^2 \cdot \sum Z_i\right) - \left(n \cdot \sum X_i Z_i \cdot \sum X_i Z_i\right) - \left(\sum X_i \cdot \sum X_i \cdot \sum Z_i^2\right)$$

ومن ثم نستخرج قيم المعلمات $\hat{c}, \hat{b}, \hat{a}$ كالآتي:

$$\hat{a} = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i & \sum Z_i \\ \sum Y_i X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i Z_i \\ \sum Y_i Z_i & \sum X_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\hat{b} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum Z_i \\ \sum X_i & \sum Y_i X_i & \sum X_i Z_i \\ \sum Z_i & \sum X_i Z_i & \sum Y_i Z_i \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\hat{c} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_i & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum Y_i X_i \\ \sum Z_i & \sum X_i Z_i & \sum Y_i Z_i \end{vmatrix}}{|A|}$$

8.2 : معامل التحديد والارتباط :

1 - معامل التحديد والارتباط بين ثلاث متغيرات:

نتكلم هنا عن الارتباط المتعدد بين المتغيرات وكذلك معامل التحديد المتعدد الذي يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$R^2_{Y.XZ} = \frac{\sum \hat{y}^2}{\sum y^2} = \frac{\sum\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum y^2 - \sum e^2}{\sum y^2}$$
$$= \frac{b \sum y_i x_i + c \sum y_i z_i}{\sum y_i^2}$$

حيث أن $e = Y_i - \hat{Y}$

وأن معامل الارتباط يساوي الجذر التربيعي لمعامل التحديد $\left(R = \sqrt{R^2}\right)$.

معامل التحديد والارتباط بين أكثر من ثلاث متغيرات:

$$R_{Y.X_1,X_2....X_n} = \frac{b\sum y_i x_i + c\sum y_i x_2 + ... + g\sum y_i x_k}{\sum y^2}$$

حيث أن: $X_1, X_2, ...X_n$ = عدد المتغيرات المستقلة.

$x_1, x_2, ...x_n$ = تباين قيم (X_n) عن متوسطاتها.

$\sum y^2$ = تباين قيم Y .

تطبيق **(1)**: عن دالة الطلب على الأجهزة المرئية:

في الجدول (1) البيانات الخاصة باستهلاك (الطلب على) الأجهزة المرئية الملونة وسعرها (X) ومتوسط دخل الأسرة (Z) في عينات مختارة في مدينة الموصل. وفق معادلة انحدار (Y) على (X) و (Z) وفسر النتائج.

الحل:

من الجدول ذاته نقوم بإجراء الحسابات اللازمة لتقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) وباستخدام برنامج الحاسوب (SPSS) وكالآتي:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X + \hat{c}Z$$

1 - نستخرج المعلمات a, b, c كالآتي:

$$\hat{b} = \frac{\left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum z^2\right) - \left(\sum z_i y_i\right)\left(\sum x_i z_i\right)}{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum z_i^2\right) - \left(\sum x_i z_i\right)}$$

$$= \frac{(-28)(74) - (38)(-12)}{(60)(74) - (-12)^2} = -0.38$$

جدول (1)

يبين حسابات انحدار استهلاك الأجهزة المرئية الملونة بالقياس إلى السعر والدخل

عدد التلفزيونات المستهلكة Y	السعر فئة دينار X	الدخل السنوي ألف دينار Z	y_i	x_i	z_i	xy	zy	xz	x^2	z^2	$\hat{Y}$	$e = Y_i - \hat{Y}_i$	$e^2 = (Y_i - \hat{Y}_i)^2$	y_i^2
6	9	8	-3	2	-4	-6	12	-8	4	16	6.44	-0.44	0.1936	9
8	10	13	-1	3	1	-3	-1	3	9	1	8.31	-0.13	0.0961	1
8	8	11	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	8.17	-0.17	0.0289	1
7	7	10	-2	0	-2	0	4	0	0	4	8.10	-1.10	1.2100	4
7	10	12	-2	3	0	-6	0	0	9	0	7.86	-0.86	0.7396	4
12	4	16	3	-3	4	-9	12	-12	9	16	11.94	-0.06	0.0036	3
9	5	10	0	-2	-2	0	0	4	4	4	8.86	-1.4	0.196	0
8	5	10	-1	-2	-2	2	2	4	4	4	8.86	-0.86	0.7396	1
9	6	12	0	-1	0	0	0	0	1	0	9.38	-0.38	0.1444	0
10	8	14	1	1	2	1	2	2	1	4	9.52	-0.48	0.2304	1
10	7	12	1	0	0	0	0	0	0	0	9.00	-1.00	1.0000	1
11	4	16	2	-3	4	-6	8	-12	9	16	11.94	-0.24	0.8863	4
9	9	14	0	2	2	0	0	4	4	4	9.14	-0.14	0.0196	0
10	5	10	1	2	-2	-2	-2	4	4	4	8.86	-1.14	1.2996	1
11	8	12	2	1	0	0	2	0	1	0	8.62	-2.38	5.6644	4
$\sum Y_i = 135$	$\sum X_i = 180$	$\sum Z_i = 180$	$\sum Y_i = 0$	$\sum X_i = 0$	$\sum Z_i = 0$	$\sum X_i Y_i = 28$	$\sum Z_i Y_i = 38$	$\sum X_i Z_i = -12$	$\sum X_i^2 = 6$	$\sum Z_i^2 = 74$	$\sum \hat{Y}_i =$	$\sum e = 0$	$\sum e^2 = 12.273$	$\sum Y_i^2 = 40$

$$\hat{c} = \frac{\left(\sum z_i y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum x_i z_i\right)}{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum z_i^2\right) - \left(\sum x_i z_i\right)}$$

$$= \frac{(38)(60) - (-28)(-12)}{(60)(74) - (-12)} = 0.45$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} - \hat{c}_i \overline{Z} = 9 - (-0.38)(7) - (0.45)(12) = 6.26$$

عليه فإن معادلة انحدار Y على X و Z ستأخذ الشكل الآتي

$$\hat{Y} = 6.26 - 0.38\, X_i + 0.45\, Z_i$$

وتشير معادلة انحدار (OLS) المقدرة على أن حجم الطلب على الأجهزة المرئية الملونة يرتبط ارتباطاً عكسياً مع أسعارها (وهي علاقة حقيقية) بدليل أن معامل X ($\hat{b}$) يأخذ إشارة سالبة، وطردياً مع معدل دخل الأسرة السنوي (Z). وتشير المعلمة ($\hat{b}$) إلى أن انخفاض بنسبة 1٪ في السعر تؤدي إلى زيادة الطلب بمقدار (380) جهازاً مرئياً وأن زيادة 1٪ في دخل الأسرة يزيد الطلب بمقدار (450) جهازاً مرئياً.

- اختبارات معنوية تقديرات المعلمات:

لاختبار المعنوية الإحصائية لتقديرات المعالم للانحدار المتعدد، فإن تباين لتقديرات مطلوب ويعتبر σ_U^2 هو تباين حد الخطأ في العلاقة الحقيقية بين X, Z, Y وأن S^2 هو تباين البواقي الذي يستخدم كتقدير غير متحيز للتباين (التباين المجتمع الذي هو ليس معلوماً لدينا) ويقسم على درجات الحرية (n-k) حيث k هي عدد المعلمات المقدرة:

$$S^2 = \sum e_i^2 = \frac{\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2}{n-k} = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

وهي ثلاثة متغيرات في هذه الحالة أي c, b, a بهذا تكون درجات الحرية هنا n-3 و n عبارة عن عدد المشاهدات، ولاختبار معنوية المعلمات المقدرة نحتاج إلى تباين المعلمات والتي تحسب كالآتي:

$$\text{Var}\left(\hat{b}\right)=\sigma_u^2\cdot\left(\frac{\sum z_i^2}{\sum x_i^2\sum z_i^2-\left(\sum x_i z_i\right)}\right)$$

$$\text{Var}\left(\hat{c}\right)=\sigma_u^2\cdot\left(\frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2\sum z_i^2-\left(\sum x_i z_i\right)}\right)$$

وبما أن σ_u^2 غير معروفة لهذا نستعيض عنها بتباين البواقي الذي قلنا هو تقدير غير متحيز لتباين المجتمع، لهذا فإن $\text{Var}\ \hat{b}$ و $\text{Var}\ \hat{c}$ هو تباين المعلمتين $\hat{b}$ و $\hat{c}$ ويمكن تقديرهما كالآتي:

$$\text{Var}\left(\hat{b}\right)=S_{\hat{b}}^2=S^2\left(\frac{\sum z_i^2}{\sum x_i^2\sum z_i^2-\left(\sum x_i z_i\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{\sum e_i^2}{n-k}\right)\cdot\left(\frac{\sum z_i^2}{\sum x_i^2\sum z_i^2-\left(\sum x_i z_i\right)}\right)$$

من الجدول (1) يمكن حساب قيمة التباين

$$=\left(\frac{12.273}{15-3}\right)\cdot\left(\frac{74}{(60)\,(74)-(-12)}\right)=0.02$$

$$S_{\hat{b}}=\sqrt{S_{\hat{b}}^2}=\sqrt{0.02}=0.14$$

$$\text{Var}\left(\hat{c}\right)=S_{\hat{c}}^2=S^2\left(\frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2\sum z_i^2-\left(\sum x_i z_i\right)}\right)$$

ويمكن أيضاً حساب قيمة تباين المعلمة $\hat{c}$ باستعمال بيانات الجدول (8) أيضاً كالتالي:

$$=(1.02)\left(\frac{60}{(60)\,(74)-(-12)}\right)=0.01$$

$$S_{\hat{c}}=\sqrt{S_{\hat{c}}^2}=\sqrt{0.01}=0.1$$

ويعتبر $S_{\hat{b}}$ و $S_{\hat{c}}$ تقديران غير متحيزين للانحراف المعياري غير المعلوم σ ويطلق عليهما:

$S_{\hat{b}}$ = الخطأ المعياري للمعلمة $\hat{b}$.

$S_{\hat{c}}$ = الخطأ المعياري للمعلمة $\hat{c}$.

أما $S_{\hat{a}}$ فإن المعلمة ($\hat{a}$) بحد ذاتها فإنها ليست ذات أهمية كبيرة في الحساب ما لم تكن $X_i = Z_i = 0$ ، ويمكن بهذا حذف اختبار معنوياتها علماً بأن معادلة الخطأ المعياري لتقديرها يأخذ الشكل المعقد الآتي:

$$\mathrm{Var}(\hat{a}) = S_a^2 =$$

$$\sigma_u^2\left(\frac{\sum X_i \sum Z_i^2 - \sum X_i Z_i}{n\left[\sum X_i^2 X_i^2 - \left(\sum X_i Z_i\right)^2\right] - \sum X_i\left(\sum X_i \sum Z_i^2\right) - \sum Z_i \sum X_i Z_i + \sum Z_i\left(\sum X_i \sum X_i \sum Z_i\right) - \sum Z_i \sum X_i^2}\right)$$

وعند اختبار معنوية المعالم الإحصائية فإنه يتوجب علينا استخدام الصيغ الإحصائية المناسبة والاختبار المناسب مع الفروض الإحصائية الضرورية. ويعتبر اختبار (t) من أفضل الاختبارات ويحسب بالطريقة الآتية (باستعمال بيانات الجدول 1):

$$t_b^* = \frac{\hat{b} - B}{S_{\hat{b}}} = \frac{0.38 - 0}{0.14} = 2.71$$

$$t_c^* = \frac{\hat{c} - C}{S_{\hat{c}}} = \frac{0.45 - 0}{0.10} = 4.5$$

حيث أن: C,B = معلمتي المجتمع ويعتبران هنا صفراً لأنهما غير معلومتين.

وحيث أن t_b^* المحسوبة تتجاوز t الجدولية البالغة (2.179) (من الملحق الإحصائي) بمستوى معنوية 5٪ (اختبار ذو طرفين) بدرجة حرية (12) لهذا فإننا نرفض فرض العدم وهي: $H_0 : \hat{b} = 0$ ونقبل الفرض البديل $H_1 : \hat{b} \neq 0$.

وهذا يعني أن ($\hat{b}$) تختلف عن الصفر وأن المتغير (X) أو سعر السلعة له تأثير جوهري وليس تأثيره بمحض الصدفة وذلك لوجود علاقة جوهرية بينهما.

وعند اختبار معنوية المعلمة ($\hat{c}$) لدينا فرضين أيضاً وهما :

$H_0 : c = 0$ مقابل $H_1 : c \neq 0$

ونجري الاختبار باستخدام صيغة t أيضاً وكالآتي (وباستعمال بيانات الجدول 1):

$$t^*_{\hat{c}} = \frac{\hat{c} - C}{S_{\hat{c}}} = \frac{0.45 - 0}{0.1} = 4.5$$

وبما أن $t^*_{\hat{c}} = 4.5$ هي أكبر من t الجدولية البالغة 2.179 لهذا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن العلاقة بين (Z) و (Y) هي علاقة جوهرية وتختلف عن الصفر ولا تعود للصدفة لأن معامل ($\hat{c}$) ذو معنوية إحصائية بمستوى معنوية 5٪ .

3 - تكوين فترات الثقة بنسبة **95**٪ للمعلمتين:

تكون فترات الثقة بالنسبة للمعلمة $\hat{b}$ كالآتي:

$$B = \hat{b} \pm 2.179\,(S_{\hat{b}})$$

$$= -0.38 \pm 2.179\,(9.14) = -0.38 \pm (0.31)$$

$$B_1 = -\,0.38 = 2.17\,(0.14) = -0.69$$

$$B_2 = -\,0.38 + 0.31 = -\,0.07$$

$$-\,0.07 \leq B \leq -\,0.69$$

أي أن الحد الأعلى لـ (B) الحقيقية هو 0.69 والأدنى هو 0.07 بدرجة ثقة 95٪ .

أما بالنسبة للمعلمة $\hat{c}$ وباستعمال بيانات الجدول (8) أيضاً فستكون:

$$C = \hat{c} \pm 2.179\,(0.01) = 0.45 \pm 0.22$$

$$C_1 = 0.45 + 0.22 = 0.67$$

$$C_2 = 0.45 - 0.22 = 0.23$$

$$0.23 \leq C \leq 0.67$$

أي أن الحد الأعلى لـ (C) هو 0.67 والحد الأدنى هو 0.23 بدرجة ثقة 95٪ .

4 - معامل التحديد المتعدد R^2 :

يعرف معامل التحديد المتعدد بأنه نسبة التغير الإجمالي في المتغير التابع (Y) الذي يفسره الانحدار المتعدد للمتغير التابع على المتغيرين المستقلين (Z,X) ويحسب باستخدام إحدى الصيغ الآتية:

$$R^2 = \frac{\hat{b}\sum y_i x_i + \hat{c}\sum yz^2}{\sum y_i^2} \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \qquad \ldots \qquad (3)$$

وباستعمال بيانات الجدول (8) نحصل على قيمة (R^2) وكالآتي:

$$R^2 = 1 - \frac{12.273}{\sum y^2} = 1 - \frac{12.273}{40} = 0.6932$$

أو من المعادلة الثانية يمكن إيجاد قيمة معمل التحديد وهي كالآتي:

$$R^2 = \frac{27.273}{40} = 0.6932$$

ويعني معامل التحديد أن المتغيرين (X) و (Z) يفسران أكثر من 69٪ من التغير في (Y).

أو يمكن أن يستخرج معامل التحديد من الجدول (1) وباستعمال المعادلة (1) كالآتي:

$$R^2 = \frac{(-0.38)\,(0.28) + (0.45)\,(38)}{40} = 0.6935$$

و(R^2) تأخذ قيماً عليا (منحازة قليلاً) نتيجة إضافة متغيرات مستقلة أو مفسرة أخرى يرفع على الأرجح RSS لنفس قيمة TSS، فإذا أخذنا في الاعتبار نقص عدد درجات الحرية مع إضافة متغيرات مستقلة إضافية، فإن R^2 المعدلة أو $\overline{R}^2$ يمكن حسابها كالآتي:

$$1-R^2=\left(1-\overline{R}^2\right)\left[\frac{(n-k)}{(n-1)}\right]$$

ومنها:

$$\overline{R}^2=1-\left(1-R^2\right)\left[\frac{n-1}{n-k}\right]$$

حيث: n = عدد المشاهدات.

k = عدد المعالم المقدرة.

وعندما تكون $k = 1$ و $\left(\frac{n-1}{n-k}\right)$ قريبة من الواحد عدد صحيح عند ذلك يكون معامل التحديد المتعدد يساوي معامل التحديد المعدل $\left(R^2=\overline{R}^2\right)$. وعندما تكون (n) صغيرة نسبياً وتكون (k) كبيرة قياساً لـ n فإن $\overline{R}^2$ تكون أصغر من R^2، ويمكن حسابها أيضاً كالآتي من الجدول (1):

$$\overline{R}^2=1-\left(1-R^2\right)\left[\frac{n-1}{n-k}\right]=1-(1-0.6932)\left[\frac{15-1}{15-3}\right]=0.641$$

وإذا ما حسبنا معاملات التحديد المنفردة (الانحدار البسيط بين الدخل والطلب) بين (Y) و (X) سنجد أنها (0.33) وتزداد إلى (0.69) بعد إضافة الدخل (Z) وهذا ما يبرر إدخال المتغير (Z) لأنه يعطي الفرق بين المعاملتين 0.69-0.33=0.36 وهو ما يبرر الإبقاء على (Z) كمتغير مستقل، ولكن عندما نأخذ في الاعتبار حقيقة أن إضافة Z يقلل درجات الحرية بمقدار 1 من $(n - k = 15 - 2 = 13)$ في حالة الانحدار البسيط للمتغير (Y) على (X) إلى $(n - k = 15 - 3 = 12)$ في الانحدار المتعدد للمتغير (Y) على (Z, X)، فإن $(\overline{R}^2)$ تنخفض إلى 0.46 .

5 - اختبار المعنوية الإجمالية للدالة:

يمكن اختبار المعنوية الإجمالية للدالة باستخدام نسبة التباين (المفسّر) إلى التباين غير المفسر ويتبع هذا اختبار (F) بدرجات حرية (k-1 و n-k) حيث n عدد المشاهدات و k عدد المعالم المقدرة وذلك تحت الفرضيات الآتية:

1- أن كل المتغيرات المستقلة لا تفسر التغير الحاصل في Y . وهو الفرض العدمي $H_0 : \hat{a} = \hat{b} = ... = \hat{c} = 0$.

2- مقابل الفرض البديل وهو ليس كل قيم $\hat{c}, \hat{b}, \hat{a}$ لا تساوي صفراً $H_1 : \hat{a} \neq \hat{b} \neq \hat{c} \neq 0$.

واختبار (F) يحسب كنسبة بين التباين المفسر والتباين غير المفسر أو تباين البواقي. وكلما ارتفعت الإحصائية لـ (F) ارتفعت العلاقة المعنوية بين المتغير التابع Y والمتغيرات المستقلة Z, X وغيرها مؤدية إلى رفض الفرض العدمي بأن معاملات كل المتغيرات المفسرة كلها أصفار وتحسب F كالآتي للانحدار البسيط والمتعدد:

$$F_{k-1} = \frac{\sum \hat{Y}_i^2 \div (k-1)}{\sum e_i^2 \div (n-k)} = \frac{\sum \left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)^2 \div (k-1)}{\sum e_i^2 \div (n-k)}$$
$$= \frac{RSS \div (k-1)}{ESS \div (n-k)}$$

k = عدد المعالم.

k - 1 = عدد درجات الحرية للبواقي (RSS).

n - 2 = عدد درجات الحرية للخطأ المعياري للتقدير (ESS).

وتساوي (F) التباين المفسر مقسوماً على التباين غير المفسر وبالنسبة لمسألتنا فإنه مساوي: $F_{k-1,n-1}$ حيث تشير رموز الدليل إلى عدد درجات الحرية للبسط

والمقام. وعندما تكون F^* المحسوبة أكبر من F الجدولية ولكن معنوية المعلمات منخفضة وأقل من الجدولية فيكون ذلك ممكناً بسبب وجود ارتباط ذاتي قوي بين المتغيرات المستقلة ذاتها.

فإذا تجاوزت نسبة (F) المحسوبة قيمة (F) الجدولية عند مستوى المعنوية ودرجات الحرية المحددة يقبل الفرض بأن معالم الانحدار ليست جميعها مساوية للصفر وأن (R^2) تختلف جوهرياً عن الصفر.

ويمكن في حالات معينة أن يكون اختبار (F) غير معنوياً ويمكن أن يرفض الفرض العدمي بغض النظر عن أن النموذج قد يفسر أو لا يفسر جزء كبير من التغير في (Y) ويمكن أيضاً استخدام الصيغة الآتية لـ F للانحدار المتعدد:

$$F_{k-1,n-1} = \frac{R^2/k-1}{1-R^2/n-k}$$

فإذا ما أردنا اختبار (F) بمستوى معنوية 5٪ مثلاً سنحصل على:

$$F_{k-1,n-1} = F_{2.12} = \frac{27.722/2}{12.273/12} \approx 13.59$$

وبما أن F^* المحسوبة أكبر من F الجدولية ($F = 3.88$) بمستوى معنوية 5٪ بدرجات حرية (12، 2) فإننا نقبل الفرض البديل ونرفض فرض العدم، وأن كل قيم ($\hat{c}, \hat{b}$) لا تساوي الصفر.

ويمكن أيضاً باستخدام الصيغة الثانية أن نختبر معنوية (R^2):

$$F_{2.12} = \frac{0.6932/2}{1-0.6932/12} = 13.54$$

وبما أن F^* المحسوبة أكبر من F الجدولية بمستوى معنوية 5٪ وبدرجات حرية (2، 12) بهذا فإن (R^2) تختلف معنوياً أيضاً عن الصفر عند مستوى معنوية 5٪ .

6 - معامل الارتباط الجزئي:

معامل الارتباط الكلي (R) ومعامل التحديد الكلي (R^2) أيضاً يحددان قوة علاقة المتغيرين المستقلين والمتغير التابع ويحدد تأثيرهما في آن واحد دون أن يبين لنا قوة تأثير كل منهما على المتغير التابع وأيهما أكثر أهمية من الآخر. ويمكن إبعاد تأثير أي من المتغيرين عن المتغير المستقل مثل (X) وقياس قوة العلاقة بين (Z) و (Y)، أو إبعاد (Z) وقياس قوة العلاقة بين (X) و (Y) على حدة من خلال ما نسميه معامل الارتباط والتحديد الجزئي.

فلإبعاد تأثير (Z) مثلاً نحسب انحدار (X) على (Y) ونوجد البواقي $e_i^2 = \left(Y_x - \overline{Y}_x\right)$، بهذا فإن ($\hat{Y}_x$) تمثل التغير في (Y) نتيجة التغير في (X). بهذا فإن معامل الارتباط الجزئي ليس إلا معامل الارتباط البسيط بين البواقي أي ($r_{yx} \cdot z$) أي معامل الارتباط الجزئي يقيس صافي الارتباط بين المتغير التابع ومتغير مستقل بعد حذف التأثير المشترك (أي مع تثبيت للمتغيرات المستقلة الأخرى في النموذج) أي معامل ارتباط (Y) مع (X) بعد استبعاد (Z).

وتقع قيمة معامل الارتباط الجزئي بين (1 -) و (1+)، وتمثل الإشارة السالبة وجود علاقة عكسية تامة بين (X) و (Y) والموجبة وجود علاقة طردية تامة بعد إزاحة التأثير المشترك للمتغير Z. وعندما تكون صفراً فإن العلاقة تكون معدومة أو غير خطية. ولهذا يمكن بالنتيجة حذف (X) مع الانحدار المقدر لأنه لا تأثير له بسبب عدم وجود علاقة خطية لأن $r_{yx.z} = 0$. ويأخذ معامل الارتباط الجزئي نفس إشارة معلمة المتغير المعني (إشارة المعلمة المقدرة المناظرة). ويستخدم معامل الارتباط الجزئي في تحليل الانحدار المتعدد، ويفيدها في قياس الأهمية النسبية لكل متغير تفسيري في النموذج.

فالمتغير المستقل صاحب أعلى معامل ارتباط جزئي مع المتغير التابع يساهم أكثر من المتغيرات المستقلة الأخرى في القدرة التفسيرية للنموذج ويدخل أولاً في

تحليل الانحدار المتعدد خطوة – بخطوة (Step-wise procedure). ولكن يجب ملاحظة أن معامل الارتباط الجزئي يعطي مقياساً لترتيب صافي الارتباط وليس مقياساً لقيمته، فمجموع معاملات الارتباط الجزئي بين المتغير التابع وكل المتغيرات المستقلة لا يساوي الواحد صحيح بالضرورة. أما مجموع المعاملات الجزئية فهو ليس (1) عدد صحيح لأنه قد يكون في الغالب أكثر من (1) لأنه يجمع تراتيب المتغيرات المستقلة. ولأجل استخراج معامل الارتباط الجزئي، يجب حساب معاملات الارتباط الثنائية البسيطة بين كل متغير مع آخر وعلى الترتيب الآتي:

r_{yx} = معامل الارتباط البسيط بين (X) و (Y).

r_{yz} = معامل الارتباط البسيط بين (Z) و (Y).

r_{xz} = معامل الارتباط البسيط بين (X) و (Z) (الارتباط بين المتغيرين المستقلين).

ومن الجدول (1) يمكننا حساب هذه القيم وكالآتي:

$$r_{YX} = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}} = \frac{-28}{\sqrt{60}\sqrt{40}} = -0.5715$$

$$r_{YZ} = \frac{\sum z_i y_i}{\sqrt{\sum z_i^2}\sqrt{\sum y_i^2}} = \frac{38}{\sqrt{74}\sqrt{40}} = 0.6984$$

$$r_{ZX} = \frac{\sum x_i z_i}{\sqrt{\sum x_i^2}\sqrt{z_i^2}} = \frac{-12}{\sqrt{74}\sqrt{60}} = -0.1801$$

ومنها فإن معامل الارتباط الجزئي بين X ، Y بعد تثبيت Z أو بتحديدها سيكون:

$$r_{YX.Z} = \frac{r_{YX} - r_{YZ}\, r_{XZ}}{\sqrt{1-r_{XZ}^2}\sqrt{1-r_{YZ}^2}} = \frac{(-0.5715)-(0.6984)(-0.1801)}{\sqrt{1-(-0.1801)^2}\sqrt{1-(0.6984)^2}} = 0.6331$$

كما يمكن إيجاد معامل الارتباط الجزئي بين Y ، Z بعد تثبيت X كالتالي:

$$r_{YZ.X} = \frac{r_{YZ} - r_{YZ}\, r_{XZ}}{\sqrt{1-r_{XZ}^2}\sqrt{1-r_{YX}^2}} = \frac{(0.6984)-(-0.5715)(-0.1801)}{\sqrt{1-(0.1801)^2}\sqrt{1-(0.6984)^2}} = 0.8072$$

وهنا نلاحظ أن مجموع المعاملين (1.4403 = 0.6331 + 0.8072) وهو أكبر ن الواحد وهذا يمكن تفسيره بأن المعامل (Z) وهي الدخل الخاص بالأسرة يساهم كثر من (X) وهو سعر السلع في القدرة التفسيرية للنموذج.

8.4 : العلاقة بين الارتباط المتعدد والارتباط البسيط[1]:

رأينا أن معامل الارتباط المتعدد بين ثلاثة متغيرات يمكن حسابه بالعلاقة التالية:

$$r_{1.23} = \sqrt{1-\frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}}$$

حيث المتغير (1) هو المتغير التابع وكل من المتغيرين 3، 2 هي المتغيرين المستقلين، ويمكننا الحصول على معامل الارتباط المتعدد كذلك باستخدام معاملات الارتباط البسيط. فإذا علمنا بأن معامل الارتباط بين المتغيرين الأول والثاني يرمز له بالرمز (r_{12}) أي معامل الارتباط بين المتغير التابع وأحد المتغيرات المستقلة فقط مع ثبات المتغير المستقل الآخر تماماً. وكذلك إذا علمنا معامل الارتباط بين المتغير الأول والثالث ونرمز له بالرمز (r_{13}) أي معامل ارتباط المتغير التابع بالمتغير المستقل الآخر فقط. ونحتاج أيضاً إلى معامل الارتباط بين المتغيرين المستقلين أي (r_{23}). وفي هذه الحالة يكون معامل الارتباط المتعدد مساوياً للآتي:

$$r_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}\, r_{13}\, r_{23}}{1-r_{23}^2}}$$

---

(1) د. أبو القاسم الطبولي، ود. فتحي أبو سدرة، مبادئ الإحصاء، الدار الجماهيرية للنشر، 1988، ص169-178.

كما يمكن حساب معاملات الارتباط المتعدد الأخرى باستخدام معادلات انحدار مختلفة فمثلاً ($r_{2.13}$) هي كعامل ارتباط المتغير (2) كمتغير تابع وكل من المتغيرين (1، 3) كمتغيران مستقلان ويمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$r_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{21}^2 \; r_{13}^2 - 2\, r_{12}\; r_{13}\; r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

فعلى سبيل المثال إذا علمت أن معاملات الارتباط الجزئية معلومة وهي ($r_{12} = 0.6$, $r_{13} = 0.70$, $r_{23} = 0.65$)، فاحسب معاملات الارتباط المتعدد $r_{1.23}$ وأيضاً $r_{3.12}$.

الحل:

$$r_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2\, r_{12}\; r_{13}\; r_{23}}{1 - r_{23}^2}} = \sqrt{\frac{0.36 + 0.49 - 2(0.6)\,(0.7)\,(0.65)}{1 - 0.422}} = 0.725$$

$$r_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{31}^2 + r_{32}^2 - 2 r_{31} r_{32} r_{12}}{1 - r_{12}^2}} = \sqrt{\frac{0.44 + 0.422 - 2(0.7)(0.65)(0.6)}{1 - 0.36}} = 0.756$$

نلاحظ أن معامل الارتباط المتعدد إما يزيد عن أو على الأقل يساوي معاملات الارتباط البسيط حيث أننا أضفنا متغير مستقل لشرح التغير في المتغير التابع وقد تساهم هذه الإضافة في تفسير التغيرات في المتغير التابع وبالتالي يزيد حجم معامل الارتباط المتعدد عن معاملات الارتباط البسيط. أو أن إضافة المتغير المستقل الجديد لا تساهم في تفسير التغير في المتغير التابع ولكنها لا تقلل من تفسير المتغير المستقل الأول للتغيرات في المتغير التابع وهكذا نجد أن معامل الارتباط المتعدد يساوي معامل الارتباط البسيط.

أما إذا كانت العلاقة بين أربعة متغيرات ويود الباحث حساب معامل الارتباط الجزئي بين متغيرين منهم مع ثبات المتغيرين الآخرين فيمكن استخدام نفس الطريقة وحساب معامل الارتباط من معاملي انحدار المعادلتين. فمثلاً:

$$r_{13.24} = \sqrt{(\hat{b}_{13.24})(\hat{\beta}_{31.24})}$$

$r_{13.2}$: هو معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين الأول والثالث بفرض ثبات المتغيرين الثاني والرابع.

$\hat{b}_{13.24}$: معامل انحدار المتغير الأول على الثالث بفرض ثبوت المتغيرين الآخرين.

$\hat{\beta}_{13.24}$: معامل انحدار المتغير الثالث على الأول بفرض ثبات المتغيرين الآخرين.

ويمكن استعمال الارتباط البسيط أيضاً للحصول على الارتباط الجزئي وفي وجود متغيرات وكالتالي:

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{1-r_{14.3}^2}\sqrt{1-r_{24.3}^2}} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{1-r_{13.4}^2}\sqrt{1-r_{23.4}^2}}$$

أي لحساب معامل الارتباط الجزئي المطلوب لابد من حساب معاملات الارتباط الجزئي بين متغيرين بفرض بقاء غيرهما ثابت. أي لابد من حساب $(r_{12.3})$ و $(r_{24.3})$ و $(r_{14.3})$ وهذه تسمى معاملات ارتباط جزئية من الرتبة الأولى حيث يوجد متغير واحد ثبت عند مستوى معين. والذي يلاحظ هنا بأننا استخدمنا معاملات الارتباط البسيط بين متغيرين لحساب معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة ونستخدم الأخيرة لحساب معاملات الرتبة الثانية وهي تعبر عن الارتباط بين متغيرين مع بقاء متغيرين آخرين على حالهما. ونستخدم معاملات الرتبة الثانية بدورهم لحساب معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الثالثة التي تحسب الارتباط بين متغيرين بفرض بقاء ثلاثة متغيرات أخرى ثابتة وهكذا.

8.5 : تقدير معادلات الانحدار باستخدام المصفوفات :

إن أسهل طريقة لتمثيل المعادلات الجبرية التي تم شرحها في المباحث السابقة يمكن أن تكون عن طريق المصفوفات حيث بافتراض أنه لدينا المعادلة التالية:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots\dots\dots + \beta_k X_k + u$$

وبافتراض أيضاً أننا حصلنا على n من المشاهدات المستقلة ($Y_n, \dots\dots, Y_2, Y_1$) في Y ، ففي هذه الحالة يمكننا كتابة المشاهدات Y_i على النحو التالي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \dots\dots\dots + \beta_k X_{ik} + u$$

حيث X_{ij} تمثل العامل المستقل (j) للمشاهدة I ($i = 1, 2, \dots\dots, n$) يمكننا الآن تعريف (توصيف) المصفوفات التالية ($X_0 = 1$):

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}_{(n-1)} \qquad X = \begin{bmatrix} X_0 & X_{11} & X_{12} & \dots\dots & X_{1K} \\ X_0 & X_{21} & X_{22} & \dots\dots & X_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots\dots & \vdots \\ X_0 & X_{n1} & n_2 & \dots\dots & X_{nk} \end{bmatrix}_{(n,k)}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{(k,1)} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{(n,1)}$$

وفي هذه الحالة يمكننا كتابة n من المعادلات التي تمثل Y_i في شكل دالة تحتوي على كل عناصر (مكونات) X و β ومعامل الخطأ (الإزعاج) على النحو التالي:

$$Y = \beta X + u$$

لو افترضنا أن لدينا n من المشاهدات لمعادلة الانحدار البسيط (لمتغيرين) على سبيل المثال والتي تأخذ النموذج التالي:

$$Y=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\:\\:\\:\\Y_n\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}1 & X_1\\1 & X_2\\: & :\\1 & X_n\end{bmatrix}\qquad u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\:\\u_n\end{bmatrix}\qquad \beta=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

ومن المباحث السابقة علمنا بأن المعادلات لمجموع المربعات لتقدير $\hat{a},\hat{b}$ هي:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{a}\sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{b}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

وبما أن:

$$X'X=\begin{bmatrix}1 & 1 & .. & .. & 1\\X_1 & X_2 & .. & .. & X_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & X_1\\1 & X_2\\: & :\\: & :\\1 & X_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & \sum_{i=1}^{n} X_i\\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2\end{bmatrix}$$

$$X'Y=\begin{bmatrix}1 & 1 & .. & .. & 1\\X_1 & X_2 & .. & .. & X_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\:\\:\\Y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n} Y_i\\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\end{bmatrix}$$

ويمكن ملاحظة أن معادلات مجموع المربعات تأخذ الشكل التالي:

$$(X'X)\hat{B} = X'Y$$

وعليه نستطيع الحصول على قيمة كل من $\hat{a}$ و $\hat{b}$ بعد إيجاد مقلوب المصفوفة ($X'X$) التالية والتي يجب أن يكون لها محدد (non-singular matrix).

$$(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix}$$

وذلك كما يلي:

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sum X_i^2}{n\sum(X_i-\overline{X})^2} & \dfrac{-\sum X_i}{n\sum(X_i-\overline{X})^2} \\ \dfrac{\sum X_i}{n\sum(X_i-\overline{X})^2} & \dfrac{1}{\sum(X_i-\overline{X})^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}=(X'X)^{-1}\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=(X'X)^{-1}X'Y$$

ونحصل على التقديرات التالية:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (\overline{Y}-\overline{X})\left(\dfrac{\sum(X_i-\overline{X})y_i}{\sum(X_i-\overline{X})^2}\right) \\ \dfrac{\sum(X_i-\overline{X})y_i}{\sum(X_i-\overline{X})^2} \end{bmatrix}$$

ويمكننا ملاحظة أن التقديرات التي تحصّلنا عليها هنا هي نفس التقديرات السابقة وذلك لأن:

$$\hat{a}=\overline{Y}-\hat{b}\,\overline{X}$$
$$\hat{b}=\frac{\sum(X_i-\overline{X})y_i}{\sum(X_i-\overline{X})^2}$$

وحيث أن تباين هذه القيم يمكن إعطاؤه كما يلي:

$$\operatorname{Var}(\hat{a})=\frac{\sigma_u^2\sum X_i^2}{n\sum(X_i-\overline{X})^2}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{b}\right)=\frac{\sigma_u^2}{\sum\left(X_i-X'\right)^2}$$

كما يمكن الحصول على هاتين القيمتين بضرب (σ_u^2) في القيم الموجودة في محور معكوس المصفوفة ($X'X$)، وهي القيم التي توجد داخل المستطيلات في المصفوفة:

$$\left(X'X\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sum X_i^2}{n\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2} & \dfrac{-\sum X_i}{n\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\\ \\ \dfrac{-\sum X_i}{n\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2} & \dfrac{n}{n\sum\left(X_i-\overline{X}\right)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{00} & C_{01}\\ C_{10} & C_{11}\end{bmatrix}$$

وبضرب القيم التي توجد بعيدة عن محور المصفوفة السابقة في (σ_u^2) نحصل على قيمة التباين المشترك بين $\hat{b}$ ، $\hat{a}$ ، أي أن:

$\hat{\beta}_i$ تباين = $\hat{\beta}_i=\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_i\right)=C_{ii}\sigma_u^2 \quad , \quad i=0,1$.

$\hat{\beta}_i$ تغاير = $\left(\hat{b},\hat{a}\right)=\mathrm{Cov}\left(\hat{a},\hat{b}\right)=C_{01}\sigma_u^2$.

8.6 : اختبار المعنوية وفترات الثقة لمعلمات الانحدار الخطي العام :

لاختبار معنوية الفرضية، لابد من استخدام أحد معايير الاختبارات، وسوف نولي اهتمامنا لاختبار كل من (t) و (F) كما يلي:

1 - اختبار **t** :

بافتراض أن المتغير العشوائي (U_i) موزع توزيعاً طبيعياً، ومع وجود الفرضيات السابقة للنموذج الخطي العام فإن:

$$t=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{\left(\sqrt{\dfrac{\sum u_i^2}{n-k}}\right)\sqrt{C_{ii}}}=\frac{\hat{\beta}_i-\beta_i}{S\sqrt{C_{ii}}}$$

وبما أن (β_i) تساوي صفراً وهذا ما تنص عليه فرضية العدم فإن صيغة حساب قيمة t تكون كما يلي:

$$t = \frac{\hat{B}_i}{s\sqrt{C_{ii}}}$$

فإذا كانت القيمة المطلقة لـ t الحسابية (calculated t) أكبر من القيمة المطلقة لـ t الجدولية (tabulated t) وبمستوى معنوي معين، فإننا نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة وهي أن β_i لا تساوي صفراً. أي أن المتغير المستقل (X_i) يؤثر على المتغير التابع (Y_i)، وإذا كانت قيمة (β_i) تساوي صفراً فهذا يعني أن المتغير المستقل (X_i) ليس له تأثير على المتغير التابع (Y_i).

وكذلك استكمالاً للاختبار، لابد من الأخذ بنظر الاعتبار حدود الثقة للمعلمات ويمكن حسابها بالصيغة التالية:

$$\hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2}\ s\sqrt{C_{ii}}$$

2 - اختبار (**F**) لحسن المطابقة :

أما تحليل استخدام (F) فيمكن توضيحه بالصيغة التالية:

$$F = \frac{\text{التباين المفسر بواسطة الانحدار}}{\text{التباين غير المفسر}}$$

$$F = \frac{\text{variance Expalined by Regression}}{\text{unexplained variance}}$$

$$F = \frac{(\hat{\beta}'X'Y)/(K-1)}{SSE/(n-k)} = \frac{(\hat{\beta}'X'Y)/(K-1)}{u'u/(n-k)}$$

ويمكن قيمة F أن تأخذ الصيغة التالية أيضاً:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$$

وهي تمثل صيغة معامل التحديد.

ومنها:

$$\hat{\beta}X'Y' = R^2(Y'Y)$$

وبما أن:

$$u'u = e'e = Y'Y - \hat{\beta}X'Y$$

وبالتعويض فإن:

$$u'u = Y'Y - (Y'Y)R^2 = Y'Y\left[1 - R^2\right]$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة أعلاه لاختبار (F) نحصل على:

$$F = \frac{(R^2Y'Y)/(k-1)}{Y'Y(1-R^2)/n-k} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/n-k}$$

3 - معامل التحديد المعدل ($\overline{R}^2$) **Adjusted R^2**:

إن الصيغة السابقة لمعامل التحديد (R^2) وكما أوضحنا سابقاً قد تبالغ (تضخم) حقيقة تأثير المتغير المستقل على المتغير التابع أو من حقيقة شرح مقدار التغير الذي يحدثه المتغير المستقل في المتغير التابع، ولهذا نلجأ إلى معامل التحديد المعدل لإزالة هذا التحيز ويتم ذلك عن طريق الآتي:

بما أن:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$$

وكذلك:

$$R^2 = 1 - \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$$

وأيضاً:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{U}_i^2}{\sum y_i^2}$$

لذا يمكن أن نحصل على معامل التحديد المعدل وكالآتي:

$$\overline{R}^2 = 1 - \left(\frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}\right)\left(\frac{n-1}{n-k}\right)$$

8.7 : تطبيقات على حل النماذج القياسية باستخدام المصفوفات :

تطبيق (**2**):

باستعمال البيانات التالية، أوجد معادلة انحدار Y على X ثم اختبر ميل هذه المعادلة إذا كان مساوياً للصفر أم لا عند مستوى معنوية 5٪ ثم أوجد (R^2) و ($\overline{R}^2$) واختبار (F) لحسن المطابقة وحدود الثقة بالنسبة للمعلمة ($\hat{b}$).

Y_i	0	0	1	1	3
X_i	-2	-1	0	1	2

الحل:

من البيانات الواردة في التدريب، يمكن أولاً تحديد المصفوفة (X)، والمصفوفة (X'X) وكذلك المصفوفة (X'Y) وكما يلي:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ومن مصفوفة ($X'X$) يمكن إيجاد معكوسها كالآتي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

ومن استعمال العلاقة أدناه يمكننا الحصول على قيم المعلمتين في معادلة حدار Y على X وكما يلي:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

وبالتعويض فإن:

1 - في هذه حالة تكون معادلة انحدار Y على X هي:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

2 - لإجراء الاختبار اللازم لمعرفة ما إذا كان الميل مساوياً للصفر أم لا فإننا نحتاج إلى تباين المعلمة ($\hat{b}$) وكالتالي:

$$\sum (Y_i - \hat{Y})^2 = u'u = SSE = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y = SST - SSR$$

$$\therefore Y'Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 11$$

$$u'u = SEE = 11 - 9.9 = 1.1$$

$$S = \frac{SSE}{n-k} = \frac{1.1}{5-2} = \frac{1.1}{3} = 0.367$$

وبالحصول على قيمة الخطأ المعياري لمعلمة ميل خط الانحدار فإننا الآن نستطيع أن نقوم بإجراء اختبار (t) وكالآتي:

$$H_0 : b = 0 \quad , \quad H_a : b \neq 0$$

$$t^*_{\hat{b}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_{i0}}{s\sqrt{C_{ii}}} = \frac{0.7 - 0}{0.367\sqrt{0.1}} = \frac{0.7}{0.1161} = 6.029$$

وحيث أن القيمة المطلقة $t^*_{\hat{b}}$ أكبر من القيمة المطلقة t الجدولية (3.182) من الملحق الإحصائي المرفق بمستوى معنوية 5٪ (اختبار ذو طرفين) بدرجات حرية (2) ولهذا فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل.

3 - أما تقدير حدود الثقة للمعلمة ($\hat{b}$) لمستوى معنوية 5٪ يمكن الحصول عليها وكالآتي:

$$\hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{C_{ii}} = 0.7 \pm 3.182\,(0.367)\,\sqrt{0.1} = 0.7 \pm 0.3693$$

4 - اختبار المعنوية الإجمالية للدالة:

يمكن اختبار المعنوية الإجمالية للدالة باستخدام اختبار (F) وكالتالي:

$$F^* = \frac{(\hat{\beta}'X'Y)/(k-1)}{(u'u)/n-k} = \frac{9.9/1}{1.1/3} = \frac{9.9}{0.367} = 26.97$$

وبما أن F^* الحسابية أكبر من F الجدولية (10.13) بمستوى معنوية 5٪ وبدرجات حرية (1 ، 3)، لهذا فإننا نقبل الفرض البديل ونرفض فرض العدم، أي أن قيم ($\hat{a}$)، ($\hat{b}$) لا تساوي صفراً.

5 - معامل التحديد **(R^2)**:

ويمكن الحصول على قيمته باستعمال العلاقة التالية:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} = \frac{9.9}{11} = 0.9$$

ومن هذا نستنتج بأن تأثير المتغير المستقل (X) يشكل حوالي 90٪ من التغيرات (Variation) في المتغير التابع أما عند معامل التحديد المعدل فيمكن حسابه كالتالي:

$$\overline{R}^2 = 1 - \left[\left(\frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}\right)\left(\frac{n-1}{n-k}\right)\right] = 1 - \left[\left(\frac{11-9.9}{11}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\right]$$

$$= 1 - 0.133 = 0.866$$

أي أن 87٪ من التغير الذي يحدث في المتغير التابع (Y) يعود إلى المتغير (X) ومن هذا نستنتج بأن معامل التحديد المعدل يقلل التضخم لدرجة العلاقة التي يعطيها معامل التحديد (R^2) بدرجة حرية (2)، لهذا فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل.

تطبيق (**3**):

باستعمال البيانات في التطبيق السابق، أوجد معادلة انحدار Y على X علماً بأن العلاقة بينهما من الدرجة الثانية ثم اختبر أن $\hat{b} = 0$ ضد الفرضية أن ($\hat{b}$) لا تساوي صفر عند مستوى 5٪ ثم أوجد الثقة بنسبة 95٪ بالنسبة للمعلمة ($\hat{b}$).

الحل:

1 - بما أن العلاقة بين المتغيرين X,Y من الدرجة الثانية، فإن شكل معادلة الانحدار سيكون كالتالي:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X + \hat{c}X^2 + u$$

المطلوب الآن هو تقدير الثوابت $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ بحيث يكون المنحنى أوفق المنحنيات تمثيل العلاقة المتوسطة بين الظاهرتين وفي هذه الحالة ستكون مصفوفة X مختلفة عن سابقتها في المثال السابق بحيث تشمل عمود جديد يمثل X^2 وستكون على النحو التالي:

$$X = \begin{bmatrix} X_0 & X & X^2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

المتغيرات X_0 ، X ، X^2 موضحة في المصفوفة X كل فوق العمود الذي يمثله.

أما عن نواتج المصفوفتين ($X'X$)، ($X'Y$) موضحة كالتالي:

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

أما معكوس المصفوفة ($X'X$) فيمكن حسابه بعدة طرق (ليس مجالنا هنا كيفية حسابه) ويساوي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{35} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

وباستعمال منظومة المعادلة التالية يمكن إيجاد قيم المعلمات $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$:

$$\because \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

وبالتعويض نجد أن:

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{35} & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 7/10 \\ 3/14 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.571 \\ 0.700 \\ 0.214 \end{bmatrix}$$

وبذلك تكون القيم التقديرية لمنظومة المعادلة أعلاه هي:

$$\hat{Y} = 0.571 + 0.7\,X + 0.214\,X^2$$

2 - وكما ذكرنا سلفاً بأننا نحتاج إلى تباين المعلمة ($\hat{b}$) لإجراء الاختبار المناسب وكما يلي:

$$\sum\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2 = SSE = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 11$$

$$\therefore \hat{\beta}'X'Y = \begin{bmatrix} 0.571 & 0.7 & 0.214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 57 \\ 13 \\ 13 \end{bmatrix} = 10.537$$

$$SSE = 11 - 10.537 = 0.463$$

وبعد الحصول على ($S_{\hat{b}}$) فإننا نستطيع القيام بإجراء t وكالآتي:

$$\therefore S_{\hat{b}}^2 = \frac{SSE}{n-k} = \frac{0.463}{5-3} = 0.232$$

$$S_{\hat{b}} = \sqrt{0.232} = 0.48$$

$H_a : b \neq 0$ مقابل $H_0 : b = 0$

وهذا يعني:

$$t_{\hat{b}}^{*} = \frac{\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_0}{S\sqrt{C_{ii}}} = \frac{0.214 - 0}{0.48\sqrt{1/14}} = 1.76$$

وحيث أن القيمة المطلقة ($t_{\hat{b}}^{*}$) الحسابية أصغر من القيمة المطلقة (t) الجدولي (4.303) من الملحق الإحصائي بمستوى معنوية 5٪ (اختبار ذو الطرفين) بدرجات حرية (3) لهذا فإننا لا نستطيع رفض العدم، أي نقبل العدم بمستوى معوية قدره 95٪.

3 - تكوين فترة الثقافة بنسبة **95**٪ للمعلمة $\hat{b}$:

تكون فترة الثقة النسبة للمعادلة $\hat{b}$ كالآتي:

$$\hat{\beta}_i + t_{\alpha/2}\, s\sqrt{C_{ii}} = \hat{b} \pm t_{0.025}(0.48)\sqrt{C_{22}}$$
$$0.214 \pm (4.303)(0.48)\sqrt{1/14}$$
$$0.2`4 \pm 0.552$$

8.8 : تطبيقات وتمارين :

التطبيقات مذكورة في متن الفصل وعددها ثلاثة تطبيقات مفصلة وهي بمثابة مراجعة عامة للفصول الثمانية المذكورة.

أما التمارين فيتم مراجعة الفصل الحادي عشر وذلك لكونه يتضمن تمارين عن الفصل الثامن والتاسع والعاشر والحادي عشر.

نموذج الانحدار الخطي المتعدد بثلاث متغيرات مستقلة

9

Multiple Linear Regression Model With Three Independent Variables

نموذج الانحدار الخطي المتعدد بثلاثة متغيرات مستقلة

Multiple Linear Regression Model With Three Independent Variables

9.1 : مفهوم وأهمية العلاقة المتعددة المتغيرات :

يشمل النموذج الخطي العام دراسة العلاقات المتعددة بين المتغيرات الاقتصادية وذلك بهدف استنفاد العلاقات التي تهدف إلى:

1- دراسة تأثير كل المتغيرات المؤثرة على الظاهرة المدروسة وإثبات ما جاءت به النظرية الاقتصادية من تحليلات واستنتاجات.
2- دراسة وتحليل تأثير كل عامل على المتغير المستقل من أجل استخدامها في وضع السياسات الاقتصادية المناسبة.
3- تحسين مقدرة النموذج البسيط ذو المتغيرين على التنبؤ بإضافة متغيرات جديدة.
4- حساب أهم العوامل بحيث يمكن إهمال العوامل الأخرى أو إدراجها ضمن المتغير العشوائي، للتركيز على تطوير وتحفيز هذه العوامل على الظاهرة المعنية.
5- تحديد أسباب ومصادر المتغير العشوائي وتصغيره قدر الإمكان.

ومن هذا المنطلق فإن النماذج القياسية لم تعد تلك النماذج البسيطة المؤلفة من متغيرين أحدهما تابع والآخر مستقل، بل انسحبت على عدة متغيرات مستقلة ومتغير واحد تابع، وبسبب طبيعة العلاقات ذاتها.

9.2 : نموذج اقتصادي شائع :

هناك فرضية أثبتتها النظرية الاقتصادية، وهي أن الطلب على سلعة معينة تؤثر فيها أربعة عوامل رئيسية وهي: السعر والدخل وأسعار السلع البديلة والذوق إضافة إلى عوامل أخرى كالطقس والموسم وغيرها من العوامل التي تدرس ضمن مواضيع أخرى في الإحصاء الاقتصادي كتحليل التباين والمتغيرات الوهمية.

ويعد السعر والدخل وأسعار السلع البديلة من أهم العوامل المؤثرة على الطلب حيث يمكن كتابة هذه العلاقة كالآتي:

$$Y = f(X, P, D, U)$$

حيث أن: Y = كمية اطلب على سلعة معينة.

X = سعر السلعة البديلة.

D = دخل الفرد.

ويمكن في هذه الحالة إيجاد العلاقة بين متغير ومتغير وأكثر من متغير ومتغير وكالآتي:

النماذج البسيطة:

$$Y = a + bX = U$$

$$Y = A + B\rho + U$$

$$Y = \alpha + \beta I + U$$

النماذج المتعددة:

$$Y = a + bX + cP + U$$

$$Y = a + bX + gD + U$$

$$Y = a + bP + gD + U$$

$Y_i = a + bX_i + cP_i + gD_i + U_i$ وهو النموذج الأشمل والأعم

9.3 : تطبيق (1): (دالة الطلب المتعددة المتغيرات المستقلة) :

في الجدول (1) كميات الطلب على السمك وأسعارها ودخل المستهلك وأسعار اللحوم (السلعة البديلة) المستخدمة في بحث ميزانية الأسرة وفق نموذج الطلب المتعدد باستخدام طريقة المربعات الصغرى واختبر معنوية التقديرات.

جدول (1)

يوضح كمية الطلب على الأسماك وأسعارها للكغم ومتوسط دخل الأسرة وأسعار السلع البديلة

كمية استهلاك الفرد للسمك السنوي كغم Y_i	أسعار كغم سمك دينار X_i	متوسط دخل الفرد السنوي دينار D_i	متوسط أسعار السلع البديلة دينار P_i	الاستهلاك المقدر كغم $\hat{Y}$
40	9	400	10	44.4
45	8	500	14	49.81
50	9	600	12	46.1
55	8	700	13	53.1
60	7	800	11	58.6
70	6	900	15	66.5
65	6	1000	16	68.2
65	8	1100	17	60.2
75	5	1200	22	77.4
75	5	1300	19	78.456
80	5	1400	20	80.2
100	3	1500	23	91.9
90	4	1600	18	87.9
95	3	1700	24	97.9
85	4	1800	21	95.0
$\sum Y_i = 1050$	$\sum X_i = 90$	$\sum D_i = 16500$	$\sum P_i = 255$	$\sum \hat{Y} = 1050$

الحل:

1 - يكون النموذج القياسي في هذه الحالة الآتي:

$$Y_i = a + bX_i + cP_i + gD_i + U_i \qquad \dots \qquad (1)$$

2 - منظومة المعادلات الطبيعية كالآتي:

$$\left.\begin{aligned}
\sum Y_i &= an + b\sum X_i + c\sum D_i + g\sum P_i + U_i \\
\sum X_i Y_i &= a\sum X_i + b\sum X_i^2 + c\sum D \sum X_i + g\sum P_i \sum X_i + U_i \\
\sum D_i Y_i &= a\sum D_i + b\sum X_i \sum D_i + c\sum D_i^2 + g\sum P_i \sum D_i + U_i \\
\sum P_i Y_i &= a\sum P_i + b\sum X_i \sum P_i + c\sum D_i \sum P_i + g\sum P_i^2 + U_i
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

3 - إن الحل يكون باستخدام المصفوفات أو الأفضل هو استخدام الحاسب الإلكتروني ومنها نحصل على الشكل العام للنموذج الآتي:

$$\hat{Y}_i = 79.106 - 4.928\, X_i + 0.01590\, D_i + 0.1748\, P_i$$

ومنها نفهم أن:

($\hat{a}$) = 79.106 ويعبر عن الاستهلاك المستقل أو حد الكفاف.

($\hat{b}$) = 4.928 - ويعبر عن نسبة انخفاض الطلب لكل دينار زيادة في السعر أي أن الطلب ينخفض بمقدار (0.49) كغم عند زيادة السعر بمقدار دينار واحد.

($\hat{c}$) = 0.01590 وهو مقدار الزيادة في الاستهلاك نتيجة زيادة الدخل بمقدار دينار واحد.

($\hat{g}$) = 0.1748 وهو مقدار الزيادة في الاستهلاك نتيجة سعر اللحم الأحمر بمقدار دينار واحد (سعر السلعة البديلة).

4 - معامل الارتباط والتحديد:

معامل الارتباط المتعدد = 0.97518

معامل التحديد المتعدد = 0.9598

معامل التحديد المتعدد المعدل = 0.93761

5 - الخطأ المعياري للتقدير: يساوي **S = 4.52761**

6 - تحليل التباين (اختبار المعنوية الكلية للدالة):

مجموع مربعات الاختلاف بسبب الانحدار = 4374.5 .

متوسط مجموع مربعات الاختلاف بسبب الانحدار = 1458.17 بدرجة حرية (3) .(k-1 = 4-1 = 3)

مجموع مربعات الاختلاف بسبب الخطأ (البواقي) = 225.5

متوسط مجموع مربعات الاختلاف بسبب الخطأ = 20.5 = (n-k) (4 -25)

7 - معامل F^* :

متوسط مجموع مربعات الاختلاف بسبب الخطأ = 20.5 = (n-k) (4 -25)

$$F^*_{11.3} = \frac{225.5}{20.5} = 71.13$$

معامل (F^*) المحسوبة أكبر من F الجدولية البالغة (8.76) بمستوى معنوية 5٪ فإن النموذج الكلي له معنوية إحصائية.

8 - اختبار **t** :

$$t_{\hat{b}} = \hat{b} / S_{\hat{b}} = -4.9281/1.6111 = -3.059$$
$$t_{\hat{c}} = \hat{c} / S_{\hat{c}} = 0.0159 / 0.0074 = 2.149$$
$$t_{\hat{g}} = \hat{g} / S_{\hat{g}} = 0.1748 / 0.6367 = 0.275$$

ومن هذه الاختبارات فإن المعلمة ($\hat{b}$) لها معنوية إحصائية فقط عند مستوى معنوية (5٪) لأن (t) المحسوبة أكبر من (t) الجدولية، لهذا فإن تأثيرها جوهري على الاستهلاك وهذا يعني أن السعر له التأثير الأكبر على حركة الاستهلاك. أما المعلمتين ($\hat{c}$ و $\hat{g}$) فإنها غير معنوية إحصائياً، مما يعني عدم إمكان استخدامها

للتنبؤ وبالتالي عدم إمكانية استخدام الدخل وأسعار السلع البديلة كمتغيرات جوهرية مؤثرة في التنبؤ والاستهلاك المستقبلي.

9 - معاملات الارتباط والتحديد الجزئية:

$$r_{YX\cdot DP} = 0.964 \;\Rightarrow\; R^2 = 0.93$$
$$r_{YD\cdot XP} = 0.975 \;\Rightarrow\; R^2 = 0.95$$
$$r_{YP\cdot DX} = 0.89 \;\Rightarrow\; R^2 = 0.79$$

10 - معامل الارتباط والتحديد البسيط:

$$r_{YX} = -0.96 \;\Rightarrow\; R^2 = 0.92$$
$$r_{YD} = \;\; 0.95 \;\Rightarrow\; R^2 = 0.90$$
$$r_{YP} = \;\; 0.88 \;\Rightarrow\; R^2 = 0.77$$

ويدل هذا على وجود ارتباط معنوي بين الاستهلاك والسعر وأقل منه مع الدخل وأقل من ذلك مع أسعار السلع البديلة. وعادة ما لا تكون طبيعة العلاقات بهذا الشكل بل إنها مع زيادة كل متغير تزداد القوة التنبؤية للنموذج وكذلك معنويات مقدراته، ولكن المعطيات الخاصة التي تم الحل بها فيها بعض التناقض.

9.4 : دراسة مقارنة للنموذج بثلاث متغيرات والنموذج بمتغيرين :

بافتراض أننا لم ندخل (أسعار السلع البديلة) فإننا في هذه الحالة سنتناول العلاقة بين السعر والدخل (X و D) مع الطلب (Y) وعندها سيكون شكل النموذج كالآتي:

$$Y_i = a + bX + cD + U_i$$

وعند الحل وباستعمال بيانات الجدول (1) سنحصل على:

1 - قيمة المعلمات:

$$\hat{b} = \left[\left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum d^2\right) - \left(\sum d_i y_i\right)\left(\sum x_i d_i\right)\right] \div \left[\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum d_i^2\right) - \left(\sum x d_i\right)\right]$$
$$= \left[(-505)(2800000) - (107500) - (11900)\right] \div \left|(60)(2800000) - (-11900)^2\right|$$
$$\hat{b} = 5.1061$$

$$\hat{c} = \left[\left(\sum d_i y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)\left(\sum x_i d_i\right)\right] \div \left[\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum d^2\right) - \left(\sum x_i d_i\right)\right]$$

$$= \left[(107500)(60) - (505)(-11900)\right] \div \left[(60)(2800000) - (-11900)^2\right]$$

$$\hat{c} = 0.1607$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - b\overline{X} - c\overline{D}$$

$$= 70 - (-5.1061)(6) - (0.0167)(1100)$$

$$\hat{a} = 82.27$$

لهذا سيأخذ النموذج الشكل الآتي:

$$\hat{Y} = 82.27 - 5.1061\, X_i + 0.0167\, D_i$$

ومنها نفهم الآتي:

أن ($\hat{a}$) تمثل الاستهلاك المستقل بغض النظر عن السعر والدخل، وهو الحد المتوسط المطلوب استهلاكه سنوياً.

($\hat{b}$) تمثل الانخفاض في قيمة الاستهلاك بمقدار 5.1061 كغم لكل زيادة دينار واحد في سعر السلعة.

($\hat{c}$) وتمثل الزيادة في الاستهلاك بمقدار 0.167 كغم لكل زيادة دينار في الدخل السنوي للفرد.

2 - معامل التحديد المتعدد والمعدّل:

$$R^2 = \left[b\left(\sum y_i x_i\right) + C\left(\sum y_i d_i\right)\right] \div \left(\sum y_i^2\right)$$

$$= \left[(-5.1061)(-505) + (0.0167)(10700)\right] \div (4600)$$

$$R^2 = 0.9508$$

$$\overline{R} = \left[1 - \left(1 - R^2\right)\right]\left[(n-1) \div (n-k)\right] = \left[1 - (1 - 0.9508)\right]\left[(15-1) \div (15-3)\right]$$

$$\overline{R} = 0.4426$$

3 - مجموع مربعات الخطأ ($\sum e^2$):

$$\sum e^2 = (1 - R^2)\sum y_i^2 = (1 - 0.9508)4600 = 226.32$$

4 - الخطأ المعياري لتقدير المعلمات:

$$S_{\hat{b}}^2 = \left[\frac{\sum e_i^2}{n-k}\right] \cdot \left[\frac{\sum d^2}{\sum x_i \sum d_i^2 - \left(\sum x_i d_i\right)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{226.32}{15-3}\right] \cdot \left[\frac{2800000}{(60)(2800000) - (-11900)^2}\right] = 2.0011$$

$$S_{\hat{b}} = \sqrt{2.0011} = 1.4146$$

$$S_{\hat{c}}^2 = \left[\frac{\sum e_i^2}{n-k}\right] \cdot \left[\frac{\sum x_i}{\sum x_i^2 \sum d_i^2 - \left(\sum x_i d_i\right)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{226.32}{15-3}\right] \cdot \left[\frac{60}{(60)(2800000) - (-11900)^2}\right] = 0.0004$$

$$S_{\hat{c}} = \sqrt{S_{\hat{c}}^2} = \sqrt{0.0004} = 0.0065$$

5 - اختبار المعلمات:

$$t_{\hat{b}} = (\hat{b}) \div (S_{\hat{b}}) = (-5.1061) \div (1.4146) = -3.6096$$

$$t_{\hat{c}} = \hat{c} \div S_{\hat{c}} = 0.0167 \div 0.0065 = 2.5692$$

وبمستوى معنوية 5٪ فإن $t_{\hat{b}}$ و $t_{\hat{c}}$ المحسوبة أكبر من t الجدولية لهذا فإن ($\hat{b}$ و $\hat{c}$) هما معنويتان إحصائياً.

6 - اختبار المعنوية الإحصائية لمعامل التحديد:

$$F^*_{(k-1,\, n-k)} = \left[R^2 \div (k-1)\right] \div \left[\left(1 - R^2\right) \div (n-k)\right]$$

$$= \left[(0.9508)\div(3-1)\right]\div\left[(1-0.9508)\div(15-3)\right]=115.9512$$

حيث أن قيمة F^* الحسابية أكبر من قيمة F الجدولية، بهذا فإن R^2 يختلف معنوياً عند الصفر عند مستوى معنوية 5٪ .

7 - اختبار المعنوية الكلية للدالة باختبار **F**:

لاختبار المعنوية الكلية للدالة يجب إيجاد قيمتي ESS و RSS وكالآتي:

RSS = 4375.68 ÷ 2 = 2187.89 و MSE = 226.32 ÷ 12 = 18.86

$$F^*_{(2.12)} = \frac{RSS}{ESS} = 2187.84 \div 18.86 = 115.9512$$

وحيث أن قيمة F^* الحسابية أكبر من قيمة t الجدولية بهذا فإن المعنوية الكلية للنموذج عالية.

8 - إيجاد معاملات الارتباط الجزئية:

إيجاد معاملات الارتباط الجزئية نقوم بإيجاد معاملات الارتباط البسيطة وكالآتي:

$$r_{XY} = \left(\sum x_i y_i\right)\div\left[\left(\sum x_i^2\right)^{0.5}\left(\sum y_i^2\right)^{0.5}\right]$$
$$= (-505)\div\left[(60)^{0.5}(4600)^{0.5}\right] = -0.9613$$

وهذا يعني أن هناك ارتباط وثيق بين السعر والاستهلاك.

$$r_{YD} = \left(\sum d_i y_i\right)\div\left[\left(\sum d_i^2\right)^{0.5}\left(\sum y_i^2\right)^{0.5}\right]$$
$$= (107500)\div\left[(2800000)^{0.5}(4600)^{0.5}\right] = 0.7492$$

وكذلك هناك ارتباط فردي بسيط بين السعر والاستهلاك.

$$r_{XD} = \left(\sum d_i x_i\right)\div\left[\left(\sum d_i^2\right)^{0.5}\left(\sum x_i^2\right)^{0.5}\right]$$

$$= -11900 \div \left[(28000000)^{0.5}(60)^{0.5}\right] = -0.9184$$

ويدل ذلك على وجود ارتباط قوي بين السعر والدخل أيضاً لكن سالب أو عكسي.

أما معامل الارتباط الجزئي بين Y و X بإهمال الدخل (D) يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$r_{YX \cdot D} = \frac{r_{YX} - r_{YD}\, r_{XD}}{\sqrt{1-r_{XD}^2}\,\sqrt{1-r_{YD}^2}}$$

$$= (-0.9613) - (0.9472)(-0.9181) \div \left[\left(1-(-0.9181^2\right)^{0.5}\left(1-(-0.9472^2\right)^{0.5}\right]$$

$$= -\ 0.7213$$

كما يمكن حساب معامل الارتباط الجزئي بين الاستهلاك والدخل بإهمال السعر كالآتي:

$$r_{YD \cdot X} = \frac{r_{YD} - r_{YX}\, r_{XD}}{\sqrt{1-r_{XD}^2}\,\sqrt{1-r_{YX}^2}} = \frac{0\,(9472) - (-0.9631)\,(-0.9182)}{\sqrt{1-(0.9181)^2}\,\sqrt{1-(-0.9613)^2}}$$

$$= 0.5919$$

بهذا فإن السعر (X) يساهم أكثر في التغير في الاستهلاك قياساً بالدخل.

هذا ويمكن للقارئ أن يقوم بنفسه بمقارنة نموذج الانحدار الخطي البسيط مع هذه النماذج ويخرج باستنتاجاته.

9.5 : تطبيق (2): شركة المدافئ الكهربائية وسياستها الإنتاجية :

تطلب عمل الشركة العامة لإنتاج المدافئ الكهربائية وضع سياسة إنتاجية وتسويقية في ضوء البيانات التاريخية المسجلة في شركة عن حجم المبيعات، فوجد أحد الباحثين أن حجم المبيعات يعتمد على (متوسط دخل الفرد السنوي في الجماهيرية) و(المعدل السنوي لدرجات الحرارة)، ورغب في دراسة هذه العلاقة إحصائياً واقتصادياً وتحليلها وذلك من واقع البيانات السنوية الآتية:

جدول (2)

يبين عينات المبيعات من المدافئ ومتوسط دخل الفرد والمعدل السنوي لدرجات الحرارة

السنة	كمية مبيعات المدافئ السنوية ألف وحدة (Y)	متوسط دخل الفرد السنوي ألف دينار (X)	المعدل السنوي لدرجات الحرارة (Z درجة مئوية)
1990	20	1.5	26
1991	25	3	20
1992	30	4	25
1993	34	4	22
1994	35	7	18
1995	40	10	15

أوجد معادلة الانحدار وحدد معلماتها ومعامل الارتباط الكلي والجزئي وفسرها واختبر المعنوية الإحصائية للدالة والمعلمات؟

الحل:

1 - نرسم خط الانتشار وهو مبين في الشكل البياني رقم (1)، ومنها تبين لنا بأن الشكل الانتشاري هو مقارب للخط المستقيم، بهذا فإننا نستخدم معادلة الانحدار المعدد الخطي وبالصيغة الآتية:

$$\hat{Y} = a + bX + cZ + U$$

2 - نستخدم الصيغة الآتية في إيجاد معلمات الدالة الانحدارية:

$$\hat{b} = \left[\left(\sum z^2\right)\left(\sum xy\right) - \left(\sum xz\right)\left(\sum zy\right)\right] \div \left[\left(\sum x^2\right)\left(\sum z^2\right) - \left(\sum xz\right)^2\right]$$

$$\hat{c} = \left[\left(\sum zy\right)\left(\sum x^2\right) - \left(\sum xy\right)\left(\sum xz\right)\right] \div \left[\left(\sum x^2\right)\left(\sum z^2\right) - \left(\sum xz\right)^2\right]$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X} - \hat{c}\overline{Z}$$

حيث أن:

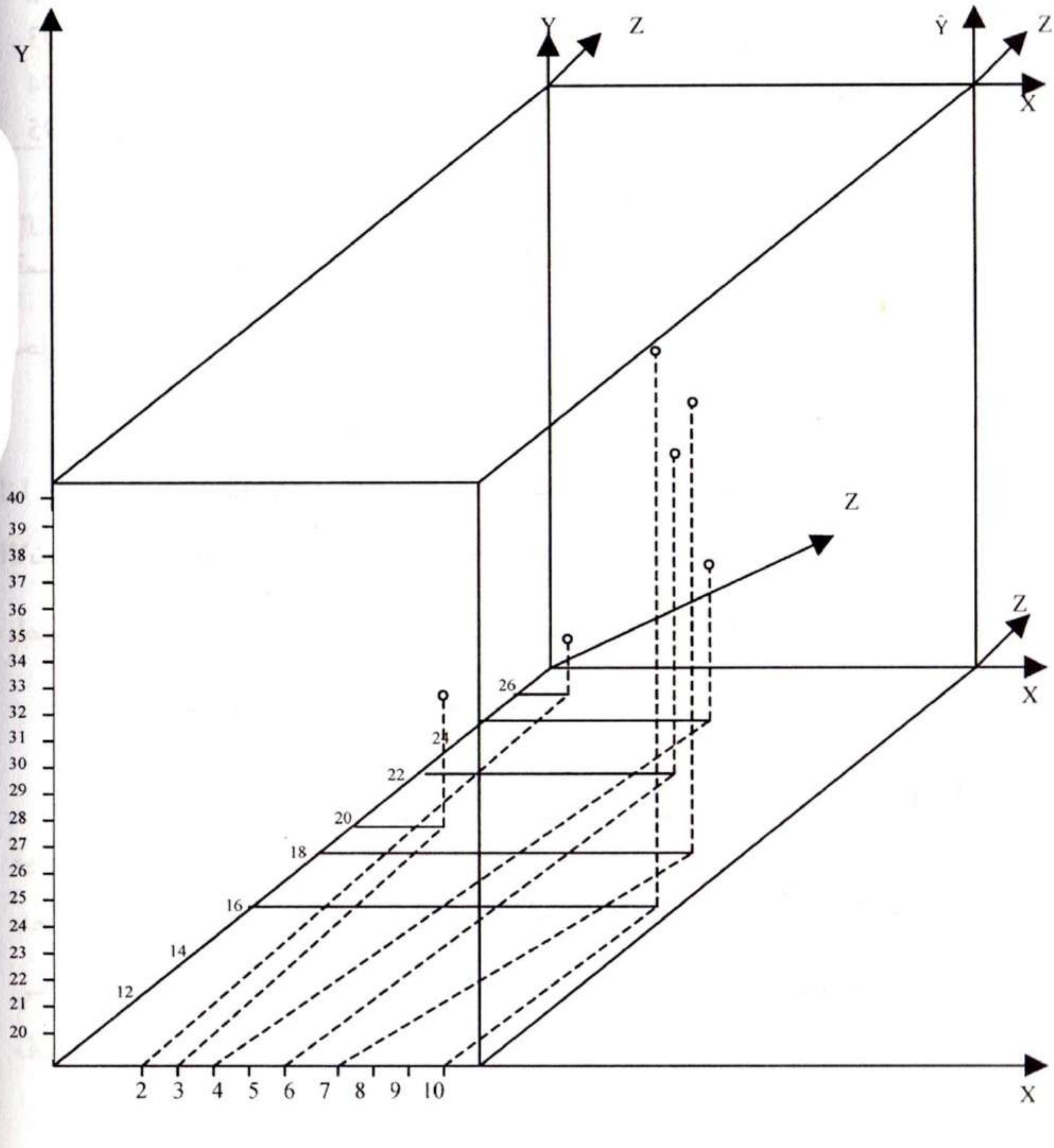
$$Z-\overline{Z}=z$$

$$X-\overline{X}=x$$

$$Y-\overline{Y}=y$$

شكل (1)

يبين الشكل الانتشاري لعلاقة طلب المدافئ الكهربائية مع دخل الفرد ودرجات الحرارة



جدول (3)

يبين الحسابات استخراج المعلمات لمعادلة الانحدار الخطي المتعدد

Y	X	Z	Y	X	Z	Y^2	X^2	Z^2	Xy	Xz	Yz	$\hat{Y}_i$
20	1.5	26	-9	-3.75	5	81	14.063	25	37.75	-18.75	-45	20.72
25	3	20	-4	-2.25	-1	16	5.063	1	9	2.25	4	25.52
30	4	25	1	-1.25	4	1	1.563	16	-1.25	-5	4	25.37
24	6	22	-5	0.75	1	25	0.563	1	13.75	0.75	-5	29.91
35	7	18	6	1.75	-3	36	3.063	9	10.5	-5.25	-18	33.11
40	10	15	11	4.75	-6	121	22.56	36	52.25	-28.5	-66	39.36
$\sum Y_i$	$\sum X_i$	$\sum Z_i$	$\sum y_i$	$\sum x$	$\sum z$	$\sum y^2$	$\sum x^2$	$\sum z^2$	$\sum xy$	$\sum xz$	$\sum yz$	$\sum \hat{Y}_i$
174	31.9	126	0	0	0	280	46.88	88	100.5	-54.5	-126	174

$e = (Y - \hat{Y})$	$e^2 = (Y - \hat{Y})^2$
-0.7	0.49
-0.55	0.3
4.0	21.10
-5.91	34.8
1.9	3.61
7	0.49
$\sum e_i = 0$	$\sum e_i^2 = 60.85$

من بيانات الجدول (3) نحصل على البيانات الضرورية للحل كالآتي:

$$\hat{b} = [(88)(100.5) - (-54.5)(-126)] \div [(46.8)(88) - (-54.5)^2] = 1.712$$

$$\hat{c} = [(46.8)(-126) - (-54.5)(100.5)] \div [(1148.15)] = -0.3715$$

$$\hat{a} = 29 - 1.712\,(5.25) - 0.37\,(21) = 27.846$$

بهذا يمكن كتاب معادلة الانحدار كالآتي:

$$\hat{Y} = 29.846 + 1.712\,X - 0.3715\,Z$$

وتمثل المعلمة ($\hat{a}$) كمية المدافئ المباعة بغض النظر عن درجات الحرارة والدخل. أما المعلمة ($\hat{b}$) فهي تمثل نسبة الزيادة في المدافئ (1.712) لكل 10٪ زيادة في الدخل أما المعلمة ($\hat{c}$) فهي تمثل نسبة الانخفاض في المدافئ (0.37) لكل 10٪ زيادة في درجات الحرارة.

هذا وبحساب معامل التحديد والارتباط نجد أن العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع علاقة وثيقة $R = 0.78$ وكذلك ما يفسره العاملان ينعكس في معامل التحديد الذي هو عال أيضاً 0.8841 والباقي هو نتيجة عوامل أخرى غير الحرارة والدخل.

ولأجل مزيد من التحليل نستخرج معاملات الارتباط الجزئية وكالآتي:

1 - معامل التحديد والارتباط الكلي:

$$1-\frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{\sum(Y-\overline{Y})^2}=0.7817$$

أو:

$$R^2=1-\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{\sum(y-\overline{y})^2}=1-\frac{61.127}{280}=0.7817$$

$$r=(R^2)^{0.5}=(0.7817)^{0.5}=0.8841$$

2 - معامل الارتباط بين (Y) و (X):

$$r_{YX}=\left[\sum xy\div\left(\sum x^2\right)^{0.5}\left(\sum y^2\right)^{0.5}\right]$$

$$=\left[100.5\div\left(4888^{0.5}\right)\left(280^{0.5}\right)\right]=0.8772$$

3 - معامل الارتباط بين (Y) و (Z):

$$r_{YZ}=\sum zy\div\left[\left(\sum z^2\right)^{0.5}\left(\sum y^2\right)^{0.5}\right]$$

$$=-126\div\left[(88)^{0.5}(280)^{0.5}\right]=-0.993$$

4 - معامل الارتباط بين (X) و (Z):

$$r_{XZ} = \sum xz \div \left[\left(\sum z^2\right)^{0.5}\left(\sum x^2\right)^{0.5}\right]$$
$$= -54.5 \div \left[(46.88)^{0.5}(88)^{0.5}\right] = 0.8489$$

5 - معامل الارتباط الجزئي بين (Y) و (X) بعد حذف تأثير (Z):

$$r_{YX \cdot Z} = \left[r_{YX} - (r_{YZ})\right] \div \left[\left(1 - r_{XZ}^2\right)^{0.5}\left(1 - r_{YZ}^2\right)^{0.5}\right]$$
$$= \left[0.8772 - (0.993 \times 0.8489)\right] \div \left[(1 - 0.7198)^{0.5}(1 - 0.986)^{0.5}\right]$$
$$= (0.8772 - 0.8430) \div (0.2811 \times 0.014) = 0.0342 \div 0.0395 = 0.866$$

6 - معامل الارتباط الجزئي بين (Y) و (Z) بعد حذف تأثير (X):

$$r_{YX \cdot Z} = \left[r_{YZ} - (r_{YX})(r_{XZ})\right] \div \left[\left(1 - r_{XZ}^2\right)^{0.5}\left(1 - r_{YZ}^2\right)^{0.5}\right]$$
$$= \left[0.993 - (0.8772 \times 0.8484)\right] \div \left[(1.0721)^{0.5}(1 - 0.769)^{0.5}\right]$$
$$= (0.993 - 0.744) \div (0.530 \times 0.48) = 0.249 \div 0.25473 = 0.977$$

وفي تحليل معامل الارتباط نجد أن الارتباط الكلي قوي جداً وأن معامل التحديد تشير إلى أن (X) و (Z) يفسر جزءاً كبيراً من التغير في (Y) يعادل 78٪. إضافة لذلك فإن حساب معاملات الارتباط الجزئية، فإنها تبين بأن تأثير الدخل على المبيعات أصغر بكثير من تأثير درجات الحرارة على هذه المبيعات، والتي تعكس معنوية إحصائية منخفضة وذلك ما سنتبينه من تحليل المعنوية وكالآتي:

1 - الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) للمعلمة ($\hat{a}$) تحسب كالآتي:

$$\delta_{\hat{a}}^2 = \delta_u \left[\left(\sum X_i^2\right) \div \left(n \sum x_i^2\right)\right] = 12.17 \times \left[212.25 \div (6 \times 46.88)\right] = 9.199$$

$$\delta_{\hat{a}} = (9.199)^{0.5} = 3.03$$

2 - الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) للمعلمة ($\hat{b}$) تحسب كالآتي:

$$\hat{a} = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i & \sum Z_i \\ \sum Y_i X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i Z_i \\ \sum Y_i Z_i & \sum X_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\hat{b} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum Z_i \\ \sum X_i & \sum Y_i X_i & \sum X_i Z_i \\ \sum Y_i Z_i & \sum X_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$\hat{c} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_i & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum Y_i X_i \\ \sum Z_i & \sum X_i Z_i & \sum Y_i Z_i \end{vmatrix}}{|A|}$$

9.6 : معامل التحديد والارتباط لثلاث متغيرات :

1 - معامل التحديد والارتباط بين ثلاث متغيرات:

نتكلم هنا عن الارتباط المتعدد بين المتغيرات وكذلك معامل التحديد المتعد الذي يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$R^2_{Y\cdot XZ} = \frac{\sum \hat{y}^2}{\sum y^2} = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y - \hat{y})^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\sum y^2 - \sum e^2}{\sum y^2}$$

$$= \frac{b \sum y_i x_i + c \sum y_i z_i}{\sum y_i^2}$$

حيث أن: $e = Y_i - \hat{Y}$

معامل الارتباط يساوي الجذر التربيعي لمعامل التحديد ($R = \sqrt{R^2}$)

2 - معامل التحديد والارتباط بين أكثر من ثلاث متغيرات:

$$R_{Y \cdot X_1, X_2, \ldots X_n} = b\sum y_i x_1 + c\sum y_i x_2 + \ldots\ldots + g\sum y_i x_k$$

حيث أن: $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ = عدد المتغيرات المستقلة.

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ = تباين قيم (X_n) عند متوسطاتها.

$\sum y^2$ = تباين قيم Y .

$$\delta_{\hat{b}}^2 = \delta_u^2 \left(1 \div \sum x^2\right) = 12.17\left(1 \div 46.88\right) = 0.26$$
$$\delta_{\hat{b}} = (0.26)^{0.5} = 0.51$$

2 - اختبار (t):

$$t_a^* = (a - A) \div S_a = (27.58 - 0) \div 3.03 = 9.1$$
$$t_b^* = (b - B) \div S_b = (1.7 - 0) \div 0.51 = 3.33$$

ومنه يتبين وباستعمال بيانات الجدول (1) أن t المحسوبة أكبر من t الجدولية بدرجة حرية (3) ولهذا نرفض فرض العدم القائل بأن (a) و (b) مساوية للصفر ونعتبر بأنها تختلف جوهرياً عن الصفر بمستوى معنوية 5٪ وبدرجة ثقة 95٪ حيث أن (t) الجدولية تساوي 2.62– أي أن $a \neq 0$ و $b \neq 0$.

3 - اختبار معامل الارتباط:

$$t_r^* = r \div \left[\left(1 - r^2\right) \div (n - 2)\right]^{0.5} = 0.8841 \div (1 - 0.782) = 1.13$$

وبما أن t^* المحسوبة أصغر من (3.182)، ولهذا فإن معامل الارتباط لا يختلف عن الصفر، آي ليس له معنوية إحصائية ويفضل عدم استخدام الدالة للتنبؤ.

4 - اختبار المعنوية الكلية للدالة الانحدارية:

$$F^* = \left[r^2 \div k - 1\right] \div \left[\left(1 - r^2\right) \div (n - k)\right]$$
$$= \left[0.782 \div (3 - 1)\right] \div \left[(1 - 0.782) \div (6 - 3)\right] = 0.391 \div (0.218 \div 3) = 5.38$$

بما أن F^* المحسوبة أصغر من F الجدولية البالغة (2.2) نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل.

9.7 : تطبيقات وتمارين :

لا توجد تطبيقات وتمارين في هذا الفصل لأنه هو بمثابة تطبيقات وتمارين فقط لما سبقه من الفصول.

التحليل القياسي للمتغيرات النوعية

(الوهمية)

10

Econometrics Analysis of Dummy Variables

التحليل القياسي للمتغيرات النوعية

(الوهمية)

Econometric Analysis of Qualitative (Dummy) Variables

10.1 : مفهوم وأهمية المتغيرات النوعية في التحليل القياسي :

10.1.1 : مفهوم المتغيرات النوعية (الوهمية) :

تكون المتغيرات الاقتصادية عموماً على نوعين هما:

1- المتغيرات الكمية Quantitative Variables .

- المتغيرات النوعية Qualitative Variables .

المتغيرات الكمية عبارة عن مقاييس أو متغيرات قابلة للقياس الكمي أو العددي أو القيمي أو الحجمي مثل الدخل القومي والنقود والاستهلاك والإنتاج والادخار والاستثمار والقوى العاملة والأجور. ويمكن قياسها إن كان ذلك ما يتعلق بتكرارها أو عددها أو كميتها أو حجمها أو قيمتها.

أما المتغيرات النوعية فهي متغيرات وصفية تصف نوعية وجودة وصفة وحالة المتغير المقصود ولكن ليس لها قياس محدد في الحياة العملية مثل الجنس (ذكر وأنثى) والديانة (مسلم أو غيره) والمهنة (عامل، موظف، مدرس) والمستوى التعليمي (يقرأ ويكتب، أميّ، حاصل على مؤهل عالي، شهادة عليا) أو المرحلة العمرية (مراهق، شاب، كهل، عجوز) أو اللون (أسود أو أبيض أو أصفر) أو القومية (عربي وغيره) أو الجنسية (ليبي، فلسطيني، عراقي، أجنبي وغيره) أو الموقع الجغرافي (حضر أو ريف) أو الحالة الاجتماعية (متزوج، أعزب، مطلق، أرمل) أو

الأزمات (أزمة، استقرار) أو حالة السلم (سلم أو حرب) أو الحالة الصحية (سليم أو مريض)، الجودة (أولى أو ثانية) أو في حالة الإضراب (مضرب أو غير مضرب) وغيرها من الصفات النوعية للمتغيرات.

وقد أطلق على هذه المتغيرات أسماء قياسية وإحصائية مختلفة مثل:

- المتغيرات الصماء (الوهمية) Dummy Variables .
- المتغيرات النوعية Qualitative Variables .
- المتغيرات التصنيفية Categorical Variables .
- المتغيرات المصطنعة Artificial Variables .
- المتغيرات (واحد – صفر) One-Zero .
- المتغيرات الترميزية Coded Variables .

وتأخذ هذه المتغيرات قيمتين تحكميتين فقط وهما (1 و 0) أي واحد وصفر، ولا يوجد رقم وسيط بينهما. فالشخص أو المتغير أو المادة التي لها صفة معينة أو خاصية معينة يأخذ رقماً معيناً مثل (1) والذي لا يمتلك هذه الخاصية يأخذ الرقم صفر (0).

ويكون الأساس التي تُبنى عليه الصفة هو المطلق. فالذكر يأخذ رقم (1) مثلاً والأنثى (0).

الأسود يأخذ رقم (0) مثلاً والأبيض (1) في إفريقيا السوداء.

الأبيض يأخذ الرقم (1) مثلاً والسود (0) في بلدان أوروبا وأميركا الشمالية والساكن في المدينة يأخذ رقم (1) والسكان في الريف يأخذ رقم (0).

والتعامل مع مثل هذه المتغيرات صعب إحصائياً إن لم يعطي رقماً معيناً وخاصة عندما تؤخذ كمتغيرات مستقلة أو تابعة، وعادةً ما تأخذ صفة المتغير المستقل لأنها تؤثر أكثر مما تتأثر.

ويأخذ التحليل الإحصائي عند تعامله مع متغيرات كمية فقط صفة تحليل إحصائي كمي، والعلاقة بين المتغيرات الكمية فقط تسمى ارتباطاً. وتحليل علاقتها المشتركة يسمى بتحليل التباين (Analysis of Variance).

أما تحليل العلاقة المشتركة بين متغيرات كمية ومتغيرات نوعية فتسمى تحليل التغاير (Analysis of Covariance) وقد يطلق عليه بتحليل التباين أيضاً في أغلب الأدبيات الإحصائية والقياسية.

10.1.2 : الأهمية الاقتصادية لاستخدام المتغيرات النوعية :

المتغير النوعي رغم صعوبة تحويله إلى رقم قابل للقياس، أي استخدامه كمتغير تفسيري له فوائد واستخدامات اقتصادية متعددة أبرزها:

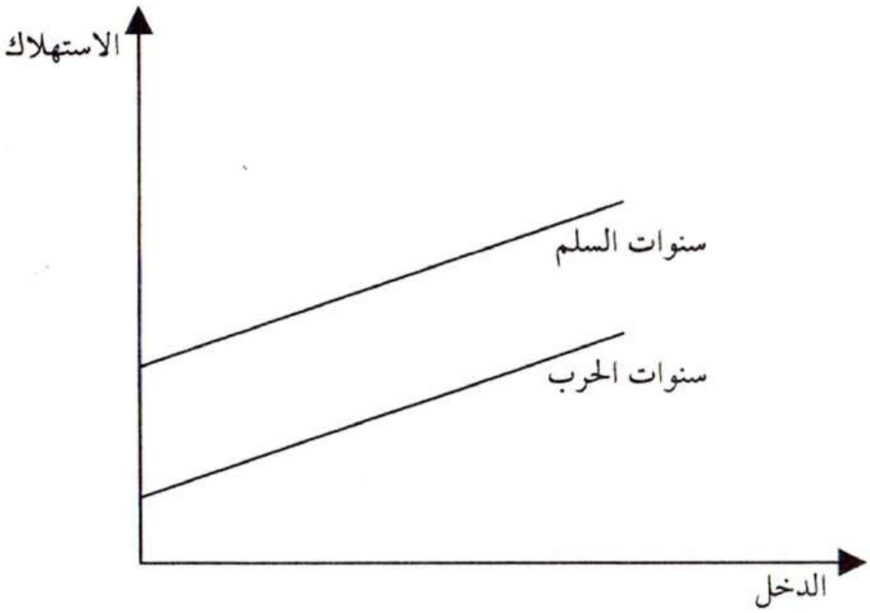
1 - استخدامه كتقريب للعوامل النوعية: فهي تقرب العوامل النوعية كالحرفة والجنس والمنطقة إلى عوامل قابلة للقياس كمتغيرات تفسيرية للتغير الذي يحدث في المتغير التابع.

2 - استخدامه كتقريب للعوامل العددية: فهناك عوامل عددية مختلفة لكن يصعب إدخالها كمتغيرات تفسيرية كمتوسطات، لهذا تقسم إلى مجموعات تقريبية مثل (الشباب) وتضم الفئة (A) من عمر (20–35) سنة والكهول فئة (B) من عمر (35–50) والشيوخ (من فئة 51 فما فوق) ويصبح بالإمكان قياس تأثيرها كمتغيرات تفسيرية في دالة الادخار مثلاً أو استهلاك السجاير أو الأجور. وتفسيره أن الشباب قد لا يميل إلى الادخار مثل الشخص الكهل الذي قد حقق استقراراً اقتصادياً معيناً.

3 - قياس التحولات الجذرية التي تحدث في الدالة خلال فترة زمنية معينة: فمثلاً الحروب والكوارث التي حدثت خلال الفترة 1900–1945 فهي فترة أزمات وكوارث وتؤثر على دوال الإنتاج والاستهلاك والفترة التي تليها تكون خالية من هذا التأثير وهكذا. (انظر الشكل 1).

شكل (1)

يبين دوال الاستهلاك خلال فترتيّ الحرب والسلم



4 - قياس التغير في المعلمات: فالكثير من التحولات في الدالة ذاتها تضم في طياتها تحولات وتغييرات في المعلمات أيضاً. فدالة الاستهلاك مثلاً يتغير فيها الميل الحدي للاستهلاك (المعلمة b) والمرونات خلال الحقب الزمنية المختلفة.

5 - قياس التغيرات الموسمية وتعديل السلاسل الزمنية: فالتغير الموسمي يمكن أن يأخذ (1) في بعض المواسم وفي المواسم الأخرى (0) وهكذا.

10.2 : أسلوب استخدام المتغيرات النوعية في التحليل القياسي :

إن تطور الرياضيات الاقتصادية والطرق القياسية قد أوجد الكثير من الأساليب الخاصة باستخدام المتغيرات النوعية في الدوال القياسية وذلك كمتغيرات تفسيرية أو متغيرات تابعة وذلك حسب الصيغ الآتية، وسنكتفي بذكر طرق قياس المتغيرات النوعية من النوع الأول، وكما يلي:

1 - متغير تفسيري وهمي واحد بصفتين دون وجود متغيرات تفسيرية كمية: وتستخدم هذه الصيغة لقياس التأثير الاقتصادي لظاهرة معينة (نوعية) على ظاهرة

أخرى (كمية). فوجود أو زيادة أو انخفاض نوع أو صنف معين من خصائص نوعية قد نجد لها آثار اقتصادية على متغير تابع معين والتي يمكن قياسها باستخدام دوال معينة تضم متغير تفسيري نوعي واحد مثل الجنس (ذكر أو أنثى) على مستويات الأجور في حقول معينة وفي بلدان معينة، كالعمل في صناعات أو مهن ما كصناعة الغزل والنسيج والإلكترونيات والتعليم والتي يمكن لدولها أن تأخذ لصيغ الآتية:

$$Y_i = a + bD_i + U_i$$

$$Y_i = a + bS_i + U_i$$

حيث:

Y_i المرتب السنوي للمدرس خريج الجامعة في حقل اقتصادي معين أو الأجور لسنوية أو الشهرية في صناعة معينة.

S_i or D_i = الجنس على نوعين:

$S_i = 1$ لو كان المدرس ذكراً.

$S_i = 0$ لو كان المدرس أنثى.

فجنس العاملين مثلاً وفي بعض البلدان فيه تمييز أجري. لهذا فإن معدل الأجور ستتأثر بالفروق النسبية للإناث أو الذكور في حقول معينة كالتعليم الفني والثقافة والصناعات والعمل المزرعي في البلدان النامية...الخ.

ويعتبر المتغير النوعي (الوهمي) هنا هو المتغير الرئيس والحاسم في التحليل القياسي، أي أنه المتغير التفسيري الوحيد (Unique explanatory Variable) ومثله في ذلك تأثير المنطقة (ريف وحضر) على استهلاك زيت الغاز أو مكيفات الهواء أو الثلاجات أو المنتجات الغذائية المعلبة والسجاير والوقود كالكيروسين والغاز – ومرشحات المياه وخزانات المياه المتنقلة وكذلك الخزانات الصغيرة الثابتة وسيارات النقل الصغيرة والجرارات وغيرها من المتغيرات التابعة.

10.3 : تطبيق (1): دالة جنس العاملين وأجورهم في مصانع الغزل والنسيج

في الجدول (1) بيانات مجمعة من (5) مصانع للغزل والنسيج في دولة معينة اشتق معادلة انحدار جنس العامين على أجورهم.

الحل:

1 - نقوم باستخراج المؤشرات الضرورية للحل مثل متوسط الأجور وتحديد قيمة المتغير الوهمي وهي:

الذكر = 1

الأنثى = 0

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{10400}{10} = 1040$$

$$\overline{D} = \frac{\sum D}{n} = \frac{5}{10} = 0.5$$

2 - نستخرج التباين المشترك للأجور وجنس العاملين ($y_i d_i$) وكذلك الخطأ المعياري للتقدير وذلك كما هو وارد في الجدول (1).

3 - يتم توفيق الدالة الانحدارية لجنس العاملين على الأجور السنوية باستخدام الصيغة الآتية:

$$\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}D + U_i$$

وبالخطوات الآتية تُستخرج المعلمات $\hat{b}, \hat{a}$:

$$\hat{b} = \frac{\sum y_i d_i}{\sum d^2} = \frac{750}{2.5} = 300$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - b\overline{D}$$

$$= 1040 - (300)(0.5) = 890$$

جدول (1)

يبين العمليات الحسابية لمعادلة انحدار جنس العاملين على أجورهم

N	الجنس	الأجور السنوية دينار Y_i	المتغير الوهمي D_i	$y_i = Y_i - \overline{Y}$	$d_i = D_i - \overline{D}$	$y_i d_i$	d_i^2	D_i^2	$e_i = Y_i - \hat{Y}$	e_i^2
1	ذكر	1000	1	-40	0.5	-20	0.25	1	-190	36100
2	ذكر	1100	1	-60	0.5	30	0.25	1	-90	8100
3	أنثى	800	0	-240	-0.5	120	0.25	0	-90	8100
4	أنثى	900	0	-140	-0.5	70	0.25	0	-10	100
5	ذكر	1050	1	10	0.5	5	0.25	1	-140	19600
6	أنثى	250	0	-90	-0.5	45	0.25	0	-240	57600
7	أنثى	850	0	-190	-0.5	95	0.25	0	-40	1600
8	ذكر	1300	1	-190	0.5	130	0.25	1	-110	12100
9	ذكر	1500	1	460	0.5	230	0.25	1	-310	96100
10	أنثى	950	0	-90	-0.5	45	0.25	0	60	3600
N = 10		$\sum Y_i = 10400$	$\sum D = 5$	$\sum y_i = 0$	$\sum d_i = 0$	$\sum y_i d_i = 750$	$\sum d_i^2 = 2.5$	$\sum D_i^2 = 5$	$\sum e_i = 0$	$\sum e_i^2 = 243000$

بهذا تأخذ الدالة الصيغة العامة الآتية:

$$\hat{Y} = 890 + 300\,D_i + U$$

4 - تستخرج المتوسط الحسابي لمرتبات الإناث (Y_F) ولمرتبات الذكور (Y_m) وكالآتي:

متوسط أجر الأنثى: $\overline{Y}_F = \frac{\sum Y_F}{n_F} = \frac{4450}{5} = 890$

متوسط أجر الذكر: $\overline{Y}_m = \frac{\sum Y_m}{n_m} = \frac{5950}{5} = 1190$

ومن الملاحظ من هذه الحسابات ما يلي:

1 - أن ($\hat{a}$) هي القيمة المتوقعة لأجر العاملة الأنثى لأنها تساوي:

$$a = E\,(Y_F)$$

وهي تكون كذلك عندما تكون $D_F = 0$ وتكتب كالآتي:

$$\left[E\left(Y_F\right)/\,D_F = 0\right] = a$$

ويشير الخط المائل إلى الشرط الضروري لذلك وهو أن ($D_F = 0$) أي أن قيمة هذا المتغير للإناث = صفراً ويعني ذلك أن قيمة المعلمة الوهمية للأنثى تساوي صفراً ويعني ذلك الآتي:

1- أن قيمة المعلمة الوهمية للأنثى تساوي صفراً.

2- أن ($a + b$) هي القيمة المتوقعة لأجور العامل الذكر وتكتب كالآتي:

$$E\left(Y_m\right) = \hat{a} + \hat{b}$$

ويمكن كتابته كالآتي عند ذكر الشرط الضروري لذلك. هو أن تكون قيمة المعلمة الوهمية للذكر (1) عدد صحيح أي بشرط أن تكون (1). أي:

$$E(Y_m)/D_m = 1$$

3- يتحقق ما جاء في (1) و (2) بشرط أن يكون المتغير العشوائي مساوياً للصفر أي: $u_i = 0$.

عند ذاك فإن المعلمة التقاطعية ($\hat{a}$) تشير إلى متوسط أجور العاملة (الأنثى) وهو يساوي (890) ديناراً ويساوي:

$$\overline{Y}_F = \frac{\sum Y_F}{n_F}$$

5 - أما المعلمة الانحدارية ($\hat{b}$) فهي تشير إلى الفرق بين متوسط أجر العامل (الذكر) والعاملة (الأنثى) حيث يكون متوسط أجر العامل الذكر ($\hat{a} + \hat{b}$) .

$$\hat{a} + \hat{b} = 890 + 300 = 1190$$

وهو يساوي:

$$\overline{Y}_m = \frac{\sum Y_m}{n_m}$$

6 - سيكون الفرق بين مرتب الذكر والأنثى عبارة عن الفرق بين متوسطات أجور هما وكالآتي:

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \hat{Y}_m - \hat{Y}_F \\ 300 &= 1190 - 890 \end{aligned}$$

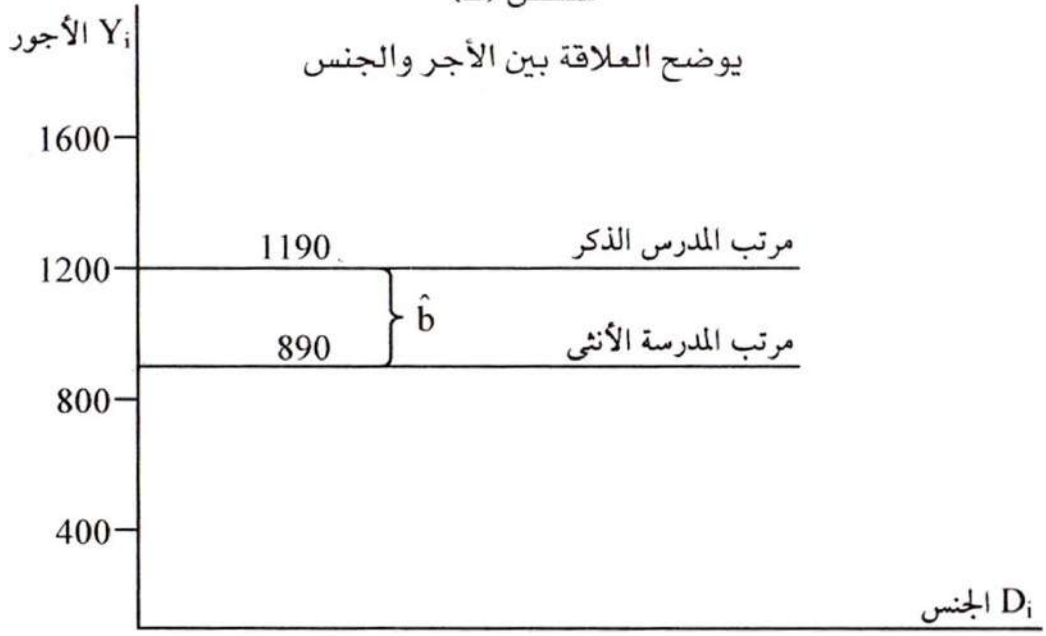
ويساوي:

$$(\hat{a} + \hat{b}) - \hat{a} = \hat{b}$$

ويمكن التعبير هندسياً عن هذه المعلمات كالآتي:

شكل (2)

يوضح العلاقة بين الأجر والجنس



7 - اختبار الفروض عن جودة الاستدلال: عندما نفترض أن أجور العامل الذكر هي أكبر من أجور العاملة (الأنثى) بهذا فإننا نقرر أن هناك فرض اقتصادي قياسي مفاده:

(أن هناك تمييز في الأجور وفقاً لجنس العاملين في الصناعة المعنية) ويمكن التأكد من ذلك عن طريق اختبارات الفروض وكالآتي:

أولاً: الفرض الصفري (فرض العدم) وهو أن $b = 0$ أي لا توجد فوارق في أجور الجنسين.

$$H_0 : b = 0$$

ثانياً: الفرض البديل وهو أن هناك فوارق في أجور الجنسين وكالتالي:

$$H_1 = b \neq 0$$

ويمكن اختبار هذه الفرضيات باستخدام اختبار (t) كالآتي:

$$t^* = \frac{\hat{b}}{S_b}$$

فإذا ما ثبت من الاختبار أن (b) لها معنوية إحصائية (بمستوى معنوية معينة) فإن هذا سيعني أن الاختلاف بين أجور العمال والعاملات اختلاف جوهري، ومن ثم نقبل الفرض القائل (بأن هناك تمييز في الأجور وفقاً للجنس). وإذا لم يثبت ذلك نقر بأنه لا توجد فروق جوهرية بين أجور العمال الذكور والعاملات الإناث، مما يعني قبول الفرض البديل ورفض فرض العدم في الحالة الأولى أو قبول فرض العدم ورفض الفرض البديل في الحالة الثانية. أي أنه وباستعمال بيانات جدول (1) يمكن الحصول على الآتي:

$$S_b^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} \cdot \frac{\sum D_i^2}{n\sum d_i^2}$$

$$= \frac{243000}{10-2} \cdot \frac{5}{5\,(2.5)} = 30375\,(0.4) = 12150$$

$$S_b = \sqrt{S_b^2} = \sqrt{12150} = 110.2$$

$$t^* = \frac{b-B}{S_b} = \frac{300-0}{110.2} = 2.72$$

وحيث أن t^* المحسوبة أكبر من t الجدولية البالغة (2.306) بمستوى معنوية 5٪ عليه نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل والذي يعني أننا وبمستوى ثقة 95٪ متأكدين أن هناك فروقاً جوهرية في أجور الجنسية بدليل أن $b \neq 0$.

ويستخدم هذا الأسلوب في إيجاد تأثير الكثير من المتغيرات الوهمية الأخرى كأجور الأطباء بين أحياء معينة في المدينة أو بين المدينة والريف، أو بين المدن الصغيرة والكبيرة، وبين الكبيرة والعاصمة، أو أجرة النقل لنفس المتغيرات أو تمييز سعري في سوقين مختلفين وهكذا.

فإذا ما كان لدينا عينة من أسعار سلعة معينة مثل السجائر ويرمز لها بـ (Y_i). وأن أسعارها في البلد (A) هو (Y_A) دينار للكروص في البلد (B) (Y_B) دينار. وتعطي رمزاً جبرياً (D_i) وتأخذ صفراً للمنطقة A وللمنطقة (B) تأخذ رقم (1) وهكذا.

أما المعلمات $\hat{b}, \hat{a}$ فستكون:

$\hat{a}$ = ستكون متوسط السعر في البلد (A).

و ($\hat{b}+\hat{a}$) متوسط السعر في البلد (B).

وعند اختبار المعنوية سيمكن تحديد فيما إذا كان هناك تمييز سعري أم لا.

ويمكن أن تكون للريف والحضر وهكذا.

والاستنتاج النهائي هو:

أن المعلمة التقاطعية بنموذج ما يأخذ صيغة معينة تشير إلى متوسط المتغير التابع في حالة الصفة التي يكون عندها $D_F = 0$ صفراً أما المعلمة الانحداري (b) فهي تشير إلى متوسط المتغير التابع في حالة الصيغة التي يكون عندها $D_F = 1$ والمتوسطة في حالة الصفة التي يكون فيها $D_F = 0$ أي:

$$\hat{b} = \overline{Y}_m - \overline{Y}_F$$

10.4 : نموذج صفات وهمية متعددة كمتغير تفسيري وهمي واحد دون وجود متغيرات تفسيرية كمية :

وهي حالة يستخدم فيها أكثر من متغير وهمي واحد لتفسير التغيرات في المتغير التابع:

فهناك حالات يدمج فيها أكثر من متغير وهمي واحد ليمثل متغير تفسيري نوعي واحد في نموذج معين.

فإذا ما أردنا اختبار تأثير (المستوى التعليمي) على مستويات الأجور لعاملين في مجال معين فيمكن استخدام هذه الصيغة.

ففي حالات عديدة نجد أن هناك مثلاً ثلاث مستويات تعليمية وهي:

عاملون بمستوى تعليم متوسط (دبلوم متوسط) D_1 .

عاملون بمستوى تعليم عال (بكالوريوس) D_2 .

عاملون بمستوى تعليم أعلى (ماجستير ودكتوراه) D_3 .

بهذا نجد بأن هناك ثلاثة متغيرات وهمية تعبر عن متغير وهمي واحد وهو (مستوى التعليم).

عند ذاك يمكننا كتابة العلاقة بين المستوى التعليمي والأجور كالآتي:

$$Y_i = a + bD_2 + cD_3 + u_i$$

حيث أن: Y_i = الراتب السنوي للموظف في:

D_2 = (1) وذلك عندما يكون الموظف ذو مستوى تعليمي يكافئ البكالوريوس.

D_2 = (0) وذلك عندما يكون الموظف ذو مستوى تعليمي آخر غير البكالوريوس.

D_3 = (1) وذلك عندما يكون الموظف ذو مستوى تعليمي يكافئ الماجستير.

D_3 = (0) وذلك عندما يكون الموظف ذو مستوى تعليمي آخر غير الماجستير.

ولا يجوز تكرار موظف واحد بأكثر من شهادة (مثل عامل عنده ماجستير وله بكالوريوس أيضاً) وبالتبعية له دبلوم أيضاً.

ولما كانت المعلمة التقاطعية (a) تعني قيمة المتغير التابع (Y_i) عندما تكون كل المتغيرات التفسيرية المدرجة بالدالة تساوي صفراً.

أي عندما تكون $D_2 = 0$ و $D_3 = 0$

∴ فهي تمثل القيمة التي يأخذها المتغير التابع (Y_i) عندما يكون $D_1 = 1$ وتسمى (المعلمة الأساس).

بهذا لا توجد ضرورة لكتابة (D_1) كمتغير ثالث لأنه يصاحب المعلمة الناقلة وقيمته (1) فإذا ما كانت لدينا عينة من (12) موظف ذو مستويات تعليمية مختلفة كما هو موضح بالجدول (2) عند ذاك يمكن استخدام بيانات الأعمدة (3 ، 4 ، 5) من الجدول ذاته في تقدير علاقة الانحدار وباستخدام الصيغة القياسية الآتية:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}D_2 + \hat{c}D_3 + u_i$$

مع ملاحظة الآتي:

1- إن القيم المتوقعة لمرتب حامل الدبلوم المتوسط ستكون $E\left(Y/D_3 = D_3 = 0\right) = \hat{a}$

2- أن القيمة المتوقعة لمرتب حامل البكالوريوس كالآتي: $D\left(Y/D_2 = 1, D_3 = 0\right) = \hat{a} + \hat{b}$

وتعني أن D_2 تأخذ الرقم (1) باعتبار أن D_3 تساوي صفراً.

3- أن القيمة المتوقعة للمرتب بالنسبة لحامل الماجستير ستكون: $E\left(Y/D_3 = 1, D_2 = 0\right) = \hat{b} + \hat{c}$

جدول (2)

يبين بيانات رواتب العاملين في القطاع الصناعي العام

المفردة 1	المرتب السنوي Y_i 2	المستوى التعليمي 3	D_2 4	D_3 5
1	1000	بكالوريوس	1	0
2	1200	بكالوريوس	1	0
3	1300	ماجستير	0	1
4	1400	ماجستير	0	1
5	800	دبلوم متوسط	0	0
6	900	دبلوم متوسط	0	0
7	1100	بكالوريوس	1	0
8	1200	بكالوريوس	1	0
9	2000	ماجستير	0	1
10	1500	ماجستير	0	1
11	850	دبلوم متوسط	0	0
12	950	دبلوم متوسط	0	0

ويمكن تحديد المصفوفة كالآتي:

البيـان	D_1	D_2	D_3
موظف / ماجستير	-	-	1
موظف بكالوريوس	-	1	-
موظف / دبلوم متوسط	1	-	-

وهنا فقد استخدمنا متغيرين وهميين هما (D_2) و (D_3) للتعبير عن متغير تفسيري واحد هو (المستوى التعليمي)، ومنها يتضح أن المعلمة التقاطعية ($\hat{a}$) تمثل معلمة الأساس أي (متوسط مرتب حامل الدبلوم المتوسط) وهي فئة الأساس.

أما المعلمة الانحداري ($\hat{b}$) فهي تمثل الفرق بين متوسط مرتب حاملي (البكالوريوس) ومتوسط مرتب حامل الدبلوم المتوسط (فئة الأساس) وتقيس المعلمة ($\hat{c}$) الفرق بين متوسط مرتب حامل شهادة الماجستير ومتوسط مرتب حامل الدبلوم المتوسط التي يمكن توضيحها كالآتي شكل (3).

بهذا فإن المعلمة ($\hat{a}$) تعني قيمة المتغير التابع (Y_i) عندما تكون كل المتغيرات التفسيرية المدرجة بالدالة مساوية للصفر.

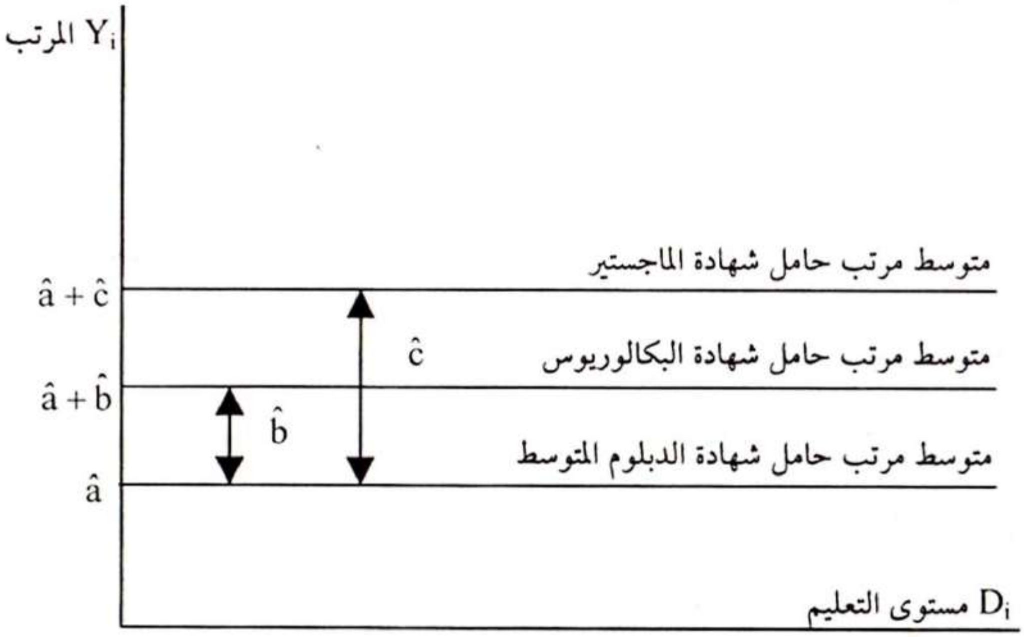
أي عندما تكون $D_3 = 0$ ، $D_2 = 0$ وتسمى (معلمة الأساس) ولهذا لا توجد هناك ضرورة لكتابة (D_1) كمتغير ثالث لأنه يصاحب المعلمة الناقلة وقيمته (1) أي $D_1 = 1$ أما المعلمة ($\hat{b}$) فإنها تمثل الفرق بين متوسط مرتب حامل البكالوريوس والدبلوم (المتوسط) (الفئة الأساس).

والمعلمة ($\hat{c}$) تمثل الفرق بين متوسط مرتب فئة حاملي الماجستير ومتوسط مرتب حاملي الدبلوم المتوسط.

ويلاحظ هنا أننا استخدمنا ثلاثة متغيرات وهمية للتعبير عن متغير وصفي واحد يؤدي لنوع واحد من أخطاء التقدير. والسبب في ذلك هو أن المتغير الوهمي الثالث يعتبر متغير ضمني يمكن التوصل إليه من خلال المتغيرين الآخرين.

شكل (3)

يبني العلاقة بين (متوسطات المرتبات) والمؤهلات العلمية (المستوى التعليمي)



فالمعامل الذي لا يخص الفئة الثانية (D_2) أو الفئة الثالثة (D_3) هو بالضرورة يخص الفئة الأولى دون النص على ذلك صراحة، ومن هذا المنطلق يمكن أن نقرر أن عدد المتغيرات الصماء يساوي عدد الفئات أو الصفات التي يحتوي عليها المتغير التفسيري النوعي.

وتستخرج هذه المعاملات من خلال احتساب متوسطات الأجور وكالآتي:

$$\overline{Y}_1 = \frac{800+900+850+950}{4} = 875 \text{ دينار}$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{1000+1200+1100+1200}{4} = 1125 \text{ دينار}$$

$$\overline{Y}_3 = \frac{1300+1400+2000+1500}{4} = 1550 \text{ دينار}$$

وعندها سنحدد الآتي:

$$\overline{a} = 875$$

$\hat{b} = 1125 - 875 = 250$ دينار

$\hat{c} = 1550 - 875 = 675$ دينار

ويكون النموذج كالآتي:

$$\hat{Y}_i = 875 + 250\,D_2 + 675\,D_3$$

10.5 : نموذج أكثر من متغير تفسيري نوعي دون وجود متغير تفسيري كمي:

حيث يمكن بناء النموذج القياسي باستخدام اكثر من متغير تفسيري نوعي واحد. فإذا افترضنا أن مرتب العامل (Y_i) يعتمد على:

1- المستوى التعليمي (دبلوم، متوسط، أو بكالوريوس أو الماجستير) ونرمز له بـ (D_i).

2- نوع المؤسسة أو الشركة التي يعمل بها (قطاع عام أو قطاع خاص) ونرمز له بـ (K_i). في هذه الحالة يتوفر لدينا عدد من المتغيرات الصماء عددها (m). ويساوي:

m_D = عدد المتغيرات الصماء الممثلة للمستوى التعليمي $2 = 1 - 3$

m_k = عدد المتغيرات الصماء المتمثلة لنوع المؤسسة $1 = 1 - 2$

m = عدد المتغيرات الصماء الكلية بالنموذج القياسي $2+1=3$ أو $m_D+m_k = m$

ويمكن حصر الصفات المتعلقة بقيمة المتغيرين النوعيين السابقين فيما يأتي:

جدول (3)

يوضح صفات المتغيرين النوعيين

نوع المؤسسة / المستوى التعليمي	قطاع عام K_1	قطاع خاص K_2
دبلوم متوسط D_1	1	2
بكالوريوس D_2	3	4
ماجستير D_3	5	6

من هنا فإن معادلة الانحدار الممثلة للعلاقة بين مرتب الموظف (Y_i) والمتغيرات التفسيرية النوعية المؤثرة يمكن صياغتها على النحو الآتي:

$$Y_i = b_1 + b_2D_2 + b_3D_3 + a_2K_2 + u_i$$

حيث أن: Y_i = المرتب السنوي للموظف.

D_2 = 1 إذا كان الموظف من حاملي درجة البكالوريوس.

D_2 = صفر إذا كان الموظف من حاملي درجة أخرى.

D_3 = 1 إذا كان الموظف من حاملي درجة الماجستير.

D_3 = 0 إذا كان الموظف من غير حاملي الماجستير.

K_2 = 1 إذا كان الموظف من العاملين في القطاع الخاص.

K_2 = 0 إذا كان الموظف من العاملين في القطاع العام.

من هذا يتضح لنا أن فئة الأساس التي تنعكس في المعلمة التقاطعية هم العاملين من حملة الدبلوم المتوسط في القطاع العام.

وتكون القيم التقديرية كالآتي:

متوسط مرتب العاملين بالقطاع العام من حملة الدبلوم المتوسط

$$E\left(Y_i/D_2 = D_3 = K_2 = 0\right) = \hat{b}$$

متوسط مرتبات العاملين بالقطاع العام من حملة البكالوريوس:

$$E\left(Y_i = D_2 = 1 = D_3 = K_2 = 0\right) = \hat{b}_1 + \hat{b}_2$$

متوسط مرتبات العاملين في القطاع الخاص من حملة الماجستير:

$$E\left(Y_i/D_3 = 1, D_2 = K_2 = 0\right) = \hat{b}_1 + \hat{b}_3$$

متوسط مرتب العاملين بالقطاع الخاص من حملة الدبلوم المتوسط:

$$E\left(Y_i = K_2 = 1, D_2 = K_2 = 0\right) = \hat{b}_1 + \hat{a}_2$$

متوسط مرتب العاملين في القطاع الخاص من حملة البكالوريوس:

$$E\left(Y_i = D_2 = 1, K_2 = 1, D_3 = 0\right) = \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{a}_2$$

متوسط مرتب العاملين في القطاع الخاص من حملة الماجستير:

$$E\left(Y/D_3 = 1, K_2 = 1, D_2 = 0\right) = \hat{b}_1 + \hat{b}_3 + \hat{a}$$

اختبارات الفروض:

تجري بعد إيجاد هذه القيم اختبارات للفروض ومنها:

1 - هل هناك فروق جوهرية بين مرتبات العاملين في القطاع العام من مختلف المستويات التعليمية؟ أو بين مرتبات العاملين بالقطاع الخاص من مختلف المستويات التعليمية، ويمكن عمل ذلك باختبار الفرض: a_2 = صفر ويتم اختبار (t) لإتمام الاختبارات حيث تختبر فروض العدم والبديلة الآتية:

فروض العدم		الفروض البديلة
b_2 = صفر		$b_2 > 0$
b_3 = صفر	في مواجهة الفروض البديلة	$b_3 > 0$
a_2 = صفر		$a_2 > 0$

ومن نتيجة الاختبارات يمكن تحديد ما إذا كان المستوى التعليمي أو نوع المؤسسة التي يعمل بها العامل ذات تأثير جوهري على مستوى المرتب أم لا.

10.6 : متغيرات تفسيرية نوعية وكمية :

يمكن أن يُبنى النموذج القياسي على أساس وجود عدد من المتغيرات التفسيرية النوعية بجانب عدد آخر من المتغيرات التفسيرية الكمية. وسوف نتعرض هنا لأكثر من نموذج وذلك على النحو الآتي:

a) متغير كمي واحد ومتغير نوعي واحد بصفتين:

بفرض أن مرتب العاملين من حملة البكالوريوس في مجال معين (Y_i) ويتحدد بعنصرين وهما:

أولاً: عدد سنوات الخبرة كمتغير كمي (X_i).

ثانياً: الجنس (ذكر أم أنثى) كمتغير نوعي (D_i).

بهذا يمكن أن نصوغ العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرين المستقلين في صورة نموذج قياسي وعلى الوجه الآتي:

$$Y_i = a + bD_1 + cX_i + u_i$$

حيث أن: Y_i = المرتب السنوي للعامل.

X_i = عدد سنوات الخبرة في العمل للعامل.

D_1 = 1 إذا كان العامل ذكر.

D_2 = 0 إذا كان العامل أنثى.

ويحوي النموذج القياسي هنا متغيرين تفسيرين أحدهما كمي وهو عدد سنوات الخبرة والآخر نوعي وهو ذو صفتين ويتعلق بجنس العاملين (ذكر أم أنثى) ومن ثم فإن القيمة المتوقعة لمرتب العامل الأنثى:

$$E\left(Y_i / X, D_2 = 0\right) = \hat{a} + \hat{c}X_i$$

القيمة المتوقعة لمرتب العامل الذكر:

$$E\left(Y_i / X, D_2 = 1\right) = \left(\hat{a} + \hat{b}\right) + \hat{c}X_i$$

وبمقارنة القيمتين المتوقعتين نلاحظ الآتي:

أولاً: أن متوسط المرتب لكل فئة ممثلاً في القيمة المتوقعة هو مقدار متغير وليس ثابت كما في الحالات السابقة، فهو يتغير في الحالتين تبعاً لتغير عدد سنوات الخبرة.

ثانياً: عدا ذلك فإن عدد سنوات الخبرة يؤثر على متوسط مرتب العاملين الذكور بنفس المعدل الذي تؤثر به على متوسط مرتب العاملات الإناث. ويتضح هذا من تساوي المعلمة الانحدارية الخاصة بعدد سنوات الخبرة في معادلتي الانحدار السابقتين.

$$\hat{c} = \frac{\partial Y_F}{\partial_X} = \frac{\partial Y_m}{\partial_X}$$

أي أن ميل معادلتي الانحدار واحد.

ثالثاً: إضافة لما تقدم فإن متوسط مرتب العاملين الذكور في نموذج الانحدار:

$$Y_m = \left[\left(\hat{a} + \hat{b}\right) + \hat{c}X_i\right]$$

يفوق متوسط مرتب العاملات الإناث ممثلاً في معادلة الانحدار:

$$Y_F = \hat{a} + \hat{c}X_i$$

وذلك بالمقدار (b)، أي أن المعلمة التقاطعية في النموذج الانحداري الأول أكبر منه في علاقة الانحدار الثاني بالمقدار (b) بافتراض أن $b > 0$ ويوضح الشكل رقم (4) هذه العلاقة.

رابعاً: من الممكن التوصل إلى معادلتي الانحدار الموضحتين في الشكل (4) من خلال تقدير معادلة انحدار واحدة هي:

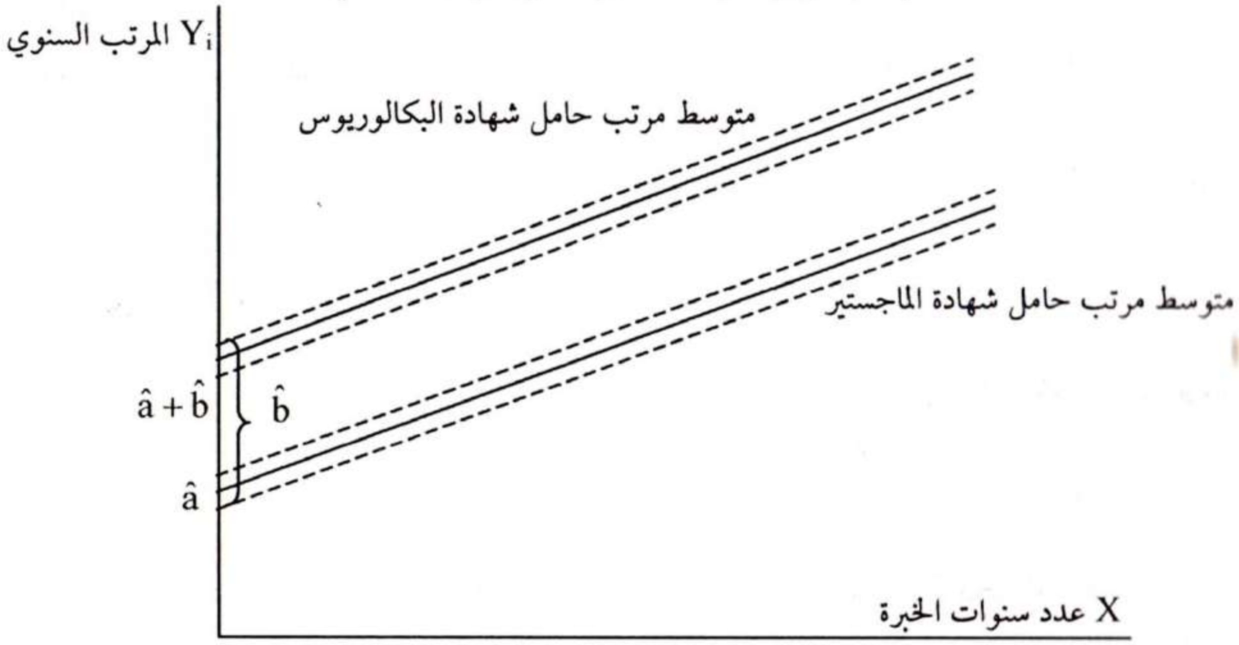
$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}D + \hat{c}X_i + u$$

ويتضح من هذه المعادلة أن فئة الأساس هي العاملين الإناث، لذلك فإن المعادلة التقاطعية لهذه الدالة وهي (a) تمثل المعلمة التقاطعية لنموذج انحدار أجور أو مرتبات العاملات.

أما المعلمة التقاطعية للمتغير الوهمي (D) وهي (b) فهي تمثل الفرق بين متوسط مرتب فئة العاملين الذكور ومتوسط مرتب فئة الأساس ومن العاملات ومن المتوقع أن تكون b > صفر في هذه الحالة.

شكل (4)

أثر الجنس وسنوات الخبرة على مرتب العاملين



خامساً: إن ما أردنا اختبار مدى وجود تمييز أجري يعود إلى الجنس فإننا نختبر الفرض:

$H_0 : b = 0$ في مواجهة الفرضية $H_1 : b > 0$.

وذلك باستخدام اختبار (t):

فإذا ما كانت ($\hat{b}$) المقدرة من بيانات العينة لها معنوية إحصائية فإن هذا يرجح صحة الفرض القائل بوجود تمييز أجري يرجع إلى الجنس.

سادساً: يعتبر اختبار الفئة التي تمثل فئة الأساس أمر تحكمي يرجع لتقدير الباحث، ففي الحالة التي درسناها جعلنا فئة العاملات هي فئة الأساس وفئة العاملين هي فئة المقارنة. ويمكن أن نعكس الوضع حيث نحدد من البداية أن:

$D = 1$ إذا كان العامل أنثى.

$D = 0$ إذا كان العامل ذكراً.

وهنا تصبح فئة الأساس هي العاملين من الذكور حيث يتم إعطاء المتغير الوهمي (D) قيمة صفرية بالنسبة لها ومما سبق نجد أن القيمة المتوقعة لمرتب لعاملات يساوي:

$$E\left(Y_i/X_i, D=1\right)=\left(\hat{a}+\hat{b}\right)=cX_i$$

والقيمة المتوقعة لمرتب العاملين من الذكور:

$$E\left(Y_i/X_i, D=0\right)=\hat{a}+\hat{c}X_i$$

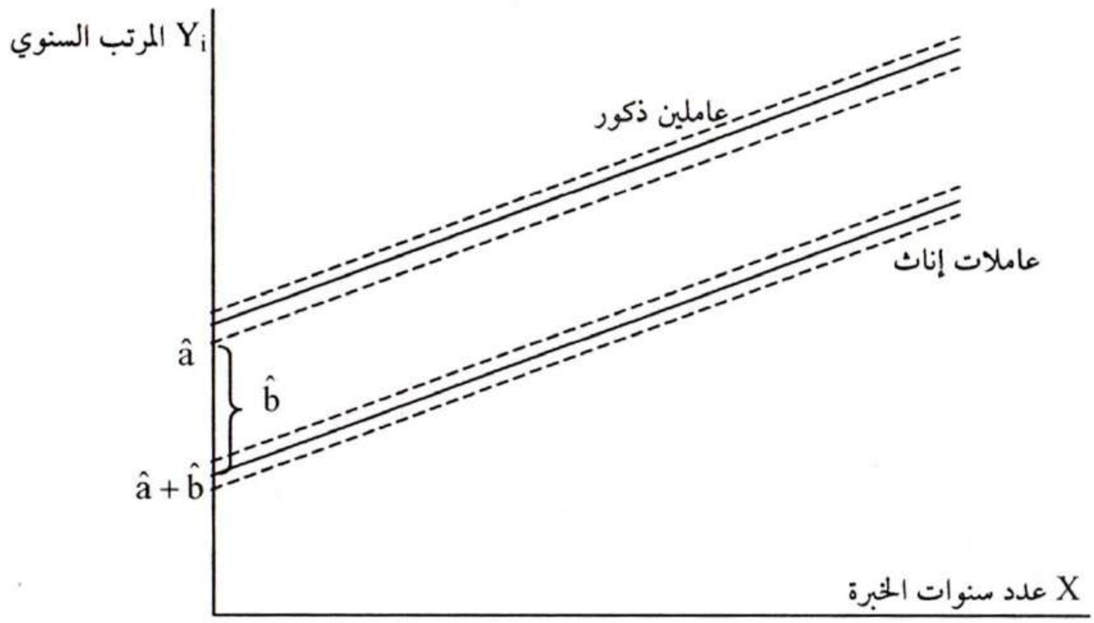
ويلاحظ أن الفرق بين القيمة المتوقعة لمرتب العاملات ومرتب العاملين هو (b) غير أنه من المتوقع أيضاً أن تكون $b < 0$ في هذه الحالة.

ويكون الاختبار هنا هو وجود تمييز أجري يرجع للجنس ففي هذه الحالة نختبر الفرض الآتي:

$H_0 : b = 0$ في مواجهة الفرض $H_1 : b < 0$ ويتضح هذا الشكل رقم (5).

شكل (5)

أثر الجنس وسنوات الخبرة على المرتب



b) متغير كمي ومتغير نوعي بأكثر من صفتين:

نفرض أن إنفاق الفرد على المواصلات لمتغير تابع (Y_i) يتأثر بعاملين هما:

أولاً: مستوى الدخل كمتغير تفسيري كمي (X_i).

موقع العمل كمتغير نوعي (D) ممثلاً في:

شمال المدينة (D_1).

وسط المدينة (D_2).

بهذا فإن مجموعة العاملين القاطنين شمال المدينة يمكن أن نقيس لهم العلاقة بين الإنفاق على المواصلات وبين الدخل وموقع العمل خلال معادلة الانحدار الآتية:

$$Y_i = a + bD_2 + cD_3 + gX_i + u_i$$

حيث أن: Y_i = الإنفاق السنوي على المواصلات للعامل.

X_i = الدخل السنوي للعامل.

D_2 = 1 إذا كان العامل يعمل في وسط المدينة.

D_2 = 0 إذا كان العامل يعمل في مكان آخر غير وسط المدينة.

D_3 = 1 إذا كان العامل يعمل في جنوب المدينة.

D_3 = 0 إذا كان العامل يعمل في مكان آخر.

ونلاحظ هنا أن فئة الأساس هي مجموعة العاملين الذين يعملون في شمال المدينة، وذلك لأن المعلمة التقاطعية بالنموذج أعلاه وهي ($\hat{a}$) تشير إلى أن المعلمة التقاطعية لمعادلة انحدار هذه الفئة. وبافتراض أن قيمة الحد العشوائي المتوقعة $u_i = 0$ يمكن أن نحدد الآتي من النموذج أعلاه:

$$E\left(Y_i / X_i\right), D_2 = D_3 = 0 = \hat{a} + \hat{g}X_i$$

وهي القيمة المتوقعة للإنفاق على المواصلات من جانب العاملين في شمال المدينة:

أما القيمة المتوقعة للإنفاق على المواصلات من جانب العاملين في وسط المدينة فتساوي:

$$E\left(Y_i/X_i\right), D_2=1, D_3=0=(\hat{a}+\hat{b})+\hat{g}X_i$$

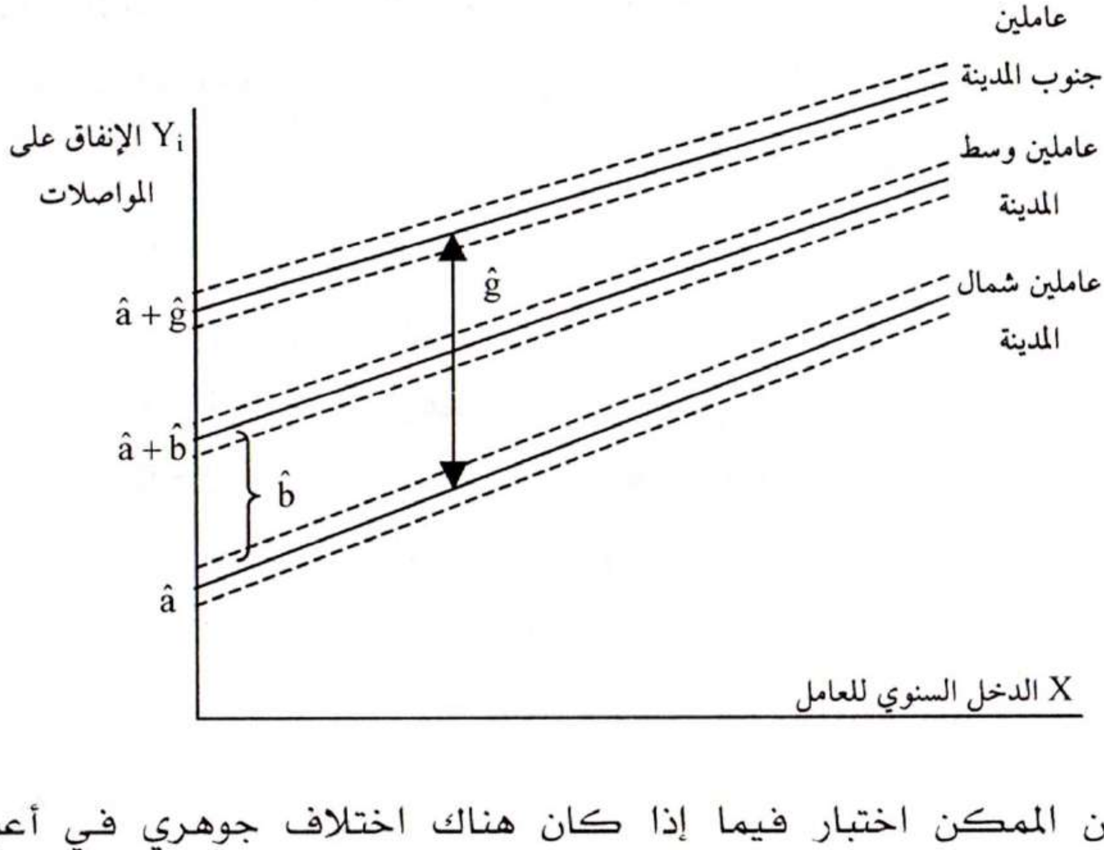
أما القيمة المتوقعة للإنفاق على المواصلات من جانب العاملين في جنوب المدينة تتساوى:

$$E\left(Y_i/X_i\right), D_3=1, D_2=0=(\hat{a}+\hat{c})+\hat{g}X_i$$

ويمكن أن تتمثل الحالات الثلاثة بالشكل (6) الآتي:

شكل (6)

يوضح أثر الدخل وموقع العمل على الإنفاق على المواصلات



ومن الممكن اختبار فيما إذا كان هناك اختلاف جوهري في أعباء المواصلات بين هذه الفئات الثلاثة باستخدام معيار (t) وذلك كالآتي:

اختبار الفرض الصفري أي:

$$H_0 : a = 0$$
$$c = 0$$

في مواجهة الفرض البديل:

$$H_1 : a > 0$$
$$c > 0$$

c) متغير كمي ومتغيرين نوعيين:

بفرض أن مرتب العامل أو الموظف يتأثر بثلاثة متغيرات اقتصادية وهي:

عدد سنوات الخبرة كمتغير كمي (X_i).

نوع المؤسسة التي يعمل بها (قطاع عام أم قطاع خاص) كمتغير نوعي K_i المستوى التعليمي (مؤهل عالي أم متوسط) كمتغير نوعي آخر D_i. ويصبح من الممكن صياغة دالة الانحدار التي تمثل هذه العلاقات بالنموذج الآتي:

$$Y_i = a + bK + cD + gX_i + u_i \qquad \ldots \qquad (1)$$

حيث أن: Y_i = المرتب السنوي للعامل.

X_i = عدد سنوات الخبرة للعامل.

K = 1 إذا ما كان العامل يعمل بالقطاع الخاص.

K = 0 إذا كان العامل يعمل بالقطاع العام.

D = 1 إذا كان العامل يحمل مؤهل عال.

D = 0 إذا كان العامل يحمل مؤهل متوسط.

من هذه المعلومات فإننا قد حددنا فئة العاملين بالقطاع العام بمؤهل متوسط كفئة أساس. وبافتراض أن القيمة المتوقعة للحد العشوائي $u_i = 0$ فإننا نتمكن من اشتقاق نماذج الانحدار النوعية من النموذج الأصلي أعلاه (1): فالقيمة المتوقعة لمرتب العامل بالقطاع العام من حملة الشهادات المتوسطة:

$$E(Y_i / X_i, K = D = 0) = \hat{a} + \hat{g}K_i$$

والقيمة المتوقعة لمرتب العامل بالقطاع العام من حملة الشهادات العليا يساوي:

$$E\left(Y_i/X_i, K=0, D=0\right)=(\hat{a}+\hat{c})+\hat{g}X_i$$

القيمة المتوقعة لمرتب بالقطاع الخاص من حملة المؤهلات المتوسطة يساوي:

$$E\left(Y_i/X_i, K=1, D=1\right)=(\hat{a}+\hat{b})+\hat{g}X_i$$

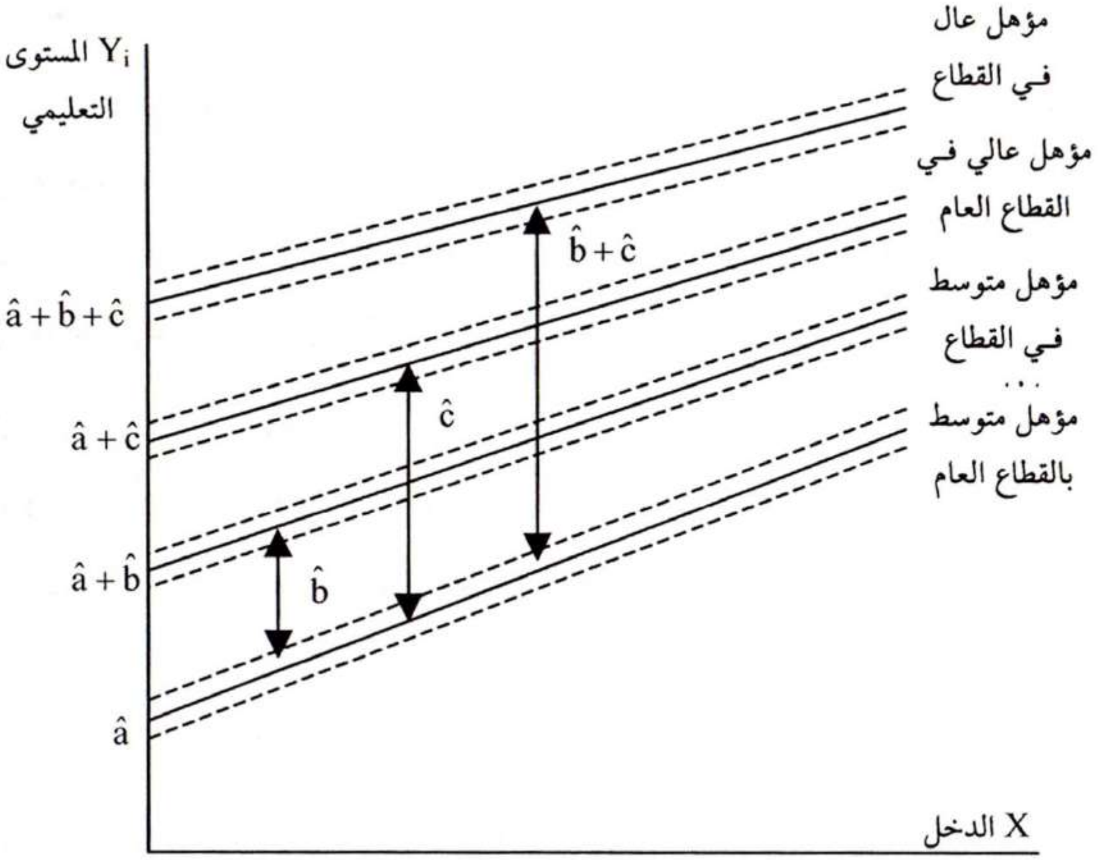
القيمة المتوقعة لمرتب العامل بالقطاع الخاص من حملة المؤهلات العليا:

$$E\left(Y_i/X_i, K=1, D=1\right)=(\hat{a}+\hat{b}+\hat{c})+\hat{g}X_i$$

ويمكن إيضاح ذلك بالشكل (7) الآتي:

شكل (7)

يوضح أثر المؤهل على المستوى التعليمي



ويمكن في هذه الحالة إجراء الفروض الآتية:

$$H_0 : b = 0$$
$$C = 0$$

في مواجهة الفرض البديل.

في مواجهة الفرض البديل.

$$H_1 : b > 0$$
$$C > 0$$

وعندما يثبت من هذه الاختبارات أن ($\hat{b}$) المقدرة من عينة لها معنوية إحصائية فهذا يعني أن نوع المؤسسة التي يعمل بها الفرد تؤثر بصورة جوهرية على مستوى المرتب. وعندما يثبت أن (c) المقدرة من عينة لها معنوية إحصائية فإن هذا يعني أن المستوى التعليمي للعاملين يؤثر بصورة جوهرية على مستوى المرتب.

10.7 : نموذج يحتوي على أكثر من متغير كمي وأكثر من متغير نوعي :

تتفاعل أحياناً العديد من المتغيرات الكمية والنوعية في آن واحد لتحدد مستوى متغير تابع واحد، مثل ما هي العوامل التي تؤثر على دخل مدرس ثانوية من خريجي الجامعات (Y_i)؟ ومن البحث تبين لنا أن هناك نوعين من العوامل وهي عوامل كمية وعوامل نوعية مثل:

- المرتب الأساسي الذي يتقاضاه في المدرسة كمتغير كمي (M_i).
- عدد سنوات الخبرة في التدريس كمتغير كمي (X_i).
- نوع المدرسة التي يدرس فيها (خاصة أم حكومية) (K_i) وهو متغير نوعي.
- المكان الذي توجد فيه المدرسة التي يعمل بها (حضر) (ريف) Z_i وهو متغير نوعي.
- جنس المدرس نفسه (ذكر أم أنثى) D_i وهو متغير نوعي.

من هذا يتضح لنا أن هناك خمسة متغيرات تفسيرية تحدد دخل المدرس، منها متغيرين كميين وثلاثة متغيرات نوعية، وبناءً على هذه المعلومات يمكن صياغة نموذج الانحدار التي تمثل هذه العلاقة بالآتي:

$$Y_i = a + bK + cZ + gD + eM_i + wX_i + u_i$$

حيث أن: Y_i = دخل مدرس الثانوية في الساعة.

M_i = المرتب الأساسي للساعة.

X_i = عدد سنوات خبرة المدرس.

K_2 = 1 إذا كان المدرس يعمل بمدرسة خاصة.

K_3 = 0 إذا كان المدرس يعمل بمدرسة عامة.

Z = 1 إذا كان المدرس يعمل بمدرسة تقع في المدينة (حضر).

Z = 0 إذا كان المدرس يعمل بمدرسة تقع في الريف.

D = 1 إذا كان المدرس ذكراً.

D = 0 إذا كان المدرس أنثى.

ومن المعلومات في أعلاه فإننا اعتمدنا المدرسات اللائي يعملن بمدارس عامة في الريف كفئة أساس.

وعند تقدير العلاقة السابقة من بيانات واقعية واضح لنا أن هذه العلاقات كانت كالآتي:

$$\hat{Y}_i = 2 + \underset{(1)}{3K_i} + \underset{(2)}{5Z_i} + \underset{(1.5)}{4D_i} + \underset{(0.05)}{0.75M_i} + \underset{(0.05)}{1.5X_i} + u_i$$

فإن هذا يعني أن القيمة المتوقعة لدخل الساعة لمدرسة بمدارس عامة في الريف يساوي:

$$E\left(Y_i / M_i, X_i, K_2 = Z = D = 0\right) = 2 + 0.75\,M_i + 1.5\,X_i$$

والقيمة المتوقعة لدخل الساعة لمدرس بمدارس خاصة بالحضر سيساوي:

$$E\left(Y_i / M_i, X_i, K = 1, Z = 1, D = 1\right) = 14 + 0.75\,M_i + 1.5\,X_i$$

بهذا فإن الفرق بين مستويين للدخل يساوي 14 – 2 = 12 دينار في الساعة وهو في هذا جوهري وذلك لأن معلمات المتغيرات النوعية والكمية لها معنوية

إحصائية وذلك كما يوضحه الانحراف المعياري (الخطأ المعياري للتقدير) في الأقواس تحت المعلمة.

وهذا يعني أن كل سنة خبرة إضافية تزيد من دخل المدرس في الساعة (1.5) دينار كما أن زيادة المرتب الأساسي بمقدار دينار واحد تؤدي إلى زيادة الدخل للساعة بمقدار (750 درهماً) بعد اقتطاع الضرائب والتأمينات وغيرها.

10.8 : تطبيقات وتمارين :

لقد ذكرت التطبيقات في متن الفصل. وأما التمارين فإنها مذكورة في متن الفصل الحادي عشر.

دراسات تطبيقية عن المتغيرات الوهمية

11

Case Studies on the Dummy Variables

11.1 : قياس التغيير في الميول الحدية.

11.2 : قياس التغيرات الهيكلية.

11.3 : قياس أثر التقلبات الموسمية.

11.4 : تطبيقات وتمارين.

التحليل القياسي للمتغيرات النوعية

(الوهمية)

10

Econometrics Analysis of Dummy Variables

10.1 : مفهوم وأهمية المتغيرات النوعية في التحليل القياسي.

10.2 : أسلوب استخدام المتغيرات النوعية في التحليل القياسي.

10.3 : تطبيق (1): دالة جنس العاملين وأجرهم في مصانع الغزل والنسيج.

10.4 : نموذج صفات وهمية متعددة كمتغير تفسيري وهمي واحد دون وجود متغيرات تفسيرية كمية.

10.5 : نموذج أكثر من متغير تفسيري نوعي دون وجود متغير تفسيري كمي.

10.6 : متغيرات تفسيرية نوعية وكمية.

10.7 : نموذج يحتوي على أكثر من متغير كمي وأكثر من متغير نوعي.

10.7 : تطبيقات وتمارين.

دراسات تطبيقية عن المتغيرات الوهمية

Case Studies on the Dummy Variables

لقد شاع استخدام المتغيرات النوعية في السنوات الأخيرة بسبب التوجه الجاد لتكميم الظواهر النوعية Quantification of Qualitative Phenomena . ويتأتى ذلك من السعي الحثيث للاقتصاديين الكميين إلى إعطاء إجابات قياسية للظواهر القياسية وغير القياسية لوضع فرشة معلوماتية واسعة ودقيقة لمتخذي القرارات الاقتصادية من منظمين ومدراء وباحثين.

ولهذا السبب تزداد استخدامات وتطبيقات المتغيرات الوهمية في الاقتصاد القياسي وتزداد وسعاً عام بعد عام. ومن أبرز الاستخدامات الآتي:

11.1 : قياس التغيير في الميول الحدية :

الميول الحدية كثيرة منها الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار والميل الحدي للاستثمار والميل الحدي للاستيراد وغيرها من الميول الاقتصادية.

ويتأثر الميل الحدي (رياضياً واقتصادياً وإحصائياً) بالمعلمة التقاطعية للنموذج القياسي فكلما اتسعت هذه المعلمة الموجبة تقلص الميل الحدي وكلما ضاقت هذه المعلمة الموجبة ازداد الميل والعكس صحيح. فعندما تتقلص المعلمة التقاطعية الموجبة يزداد الميل الحدي وعندما تزداد المعلمة التقاطعية السالبة يزداد الميل الحدي أيضاً وهكذا.

وعند إدخال أي متغير وهمي فإنه يؤدي إلى واحدة من النتائج أعلاه وفيما يأتي مثال على ذلك.

تطبيق (**1**):

بفرض أننا نود أن نقارن دالة الاستهلاك في الريف بنظيرتها في الحضر فإذا ما أخذنا عينتين واحدة من الريف والأخرى من الحضر لمجموعة من الأسر، وكانت عينة الريف بحجم (n_1) وقدرت دالة استهلاكها وكانت كالآتي:

$$C_1 = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 Yd_i \qquad \ldots \qquad (1)$$

وكانت عينة الحضر بحجم (n_2) وقدرت دالة استهلاكها وكانت كالآتي:

$$C_2 = \hat{a}_2 + \hat{b}_2 Yd_2 \qquad \ldots \qquad (2)$$

حيث أن: C_2, C_1 = الإنفاق الاستهلاكي للريف والحضر.

Yd_2, Yd_1 = الدخل في الريف والحضر.

ومن مقارنة دالتي الاستهلاك فهناك أربعة احتمالات ممكنة وهي:

الأول: أن تكون:

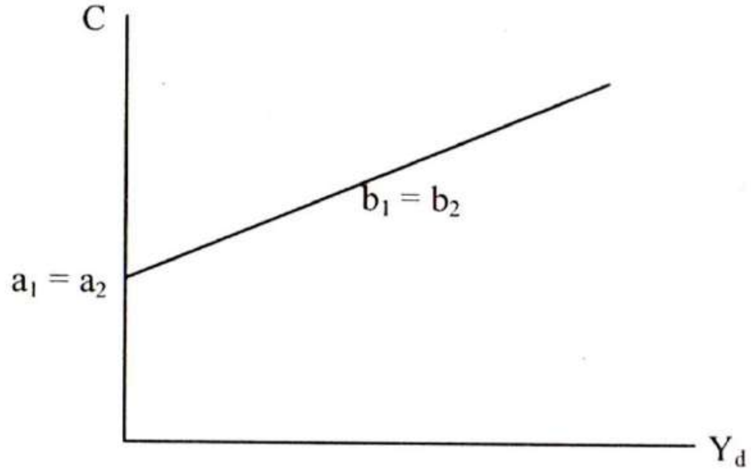
$a_1 = a_2$

$b_1 = b_2$

لاحظ الشكل (1) أدناه:

شكل (1)

يوضح دالتين متماثلتين



ومن هنا فإن الدالتين تكونان متماثلتين.

الثاني: أن تكون:

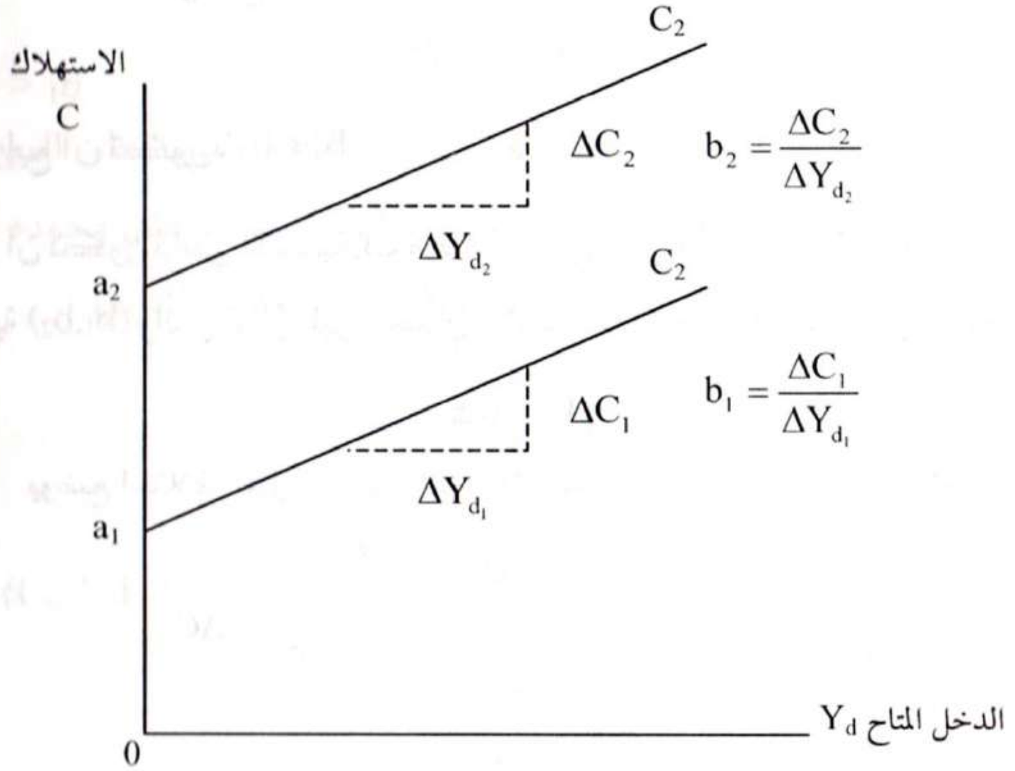
$a_1 \neq a_2$

$b_1 \neq b_2$

من هنا تكون الدالتين مختلفتين في المعلمة التقاطعية فقط التي تمثل حد الكفاف في الإنفاق الاستهلاكي ولكنهما متماثلتين في الميل الحدي للاستهلاك وكما هو موضح في الشكل (2) الآتي:

شكل رقم (2)

يبين اختلاف حد الكفاف بين الريف والحضر

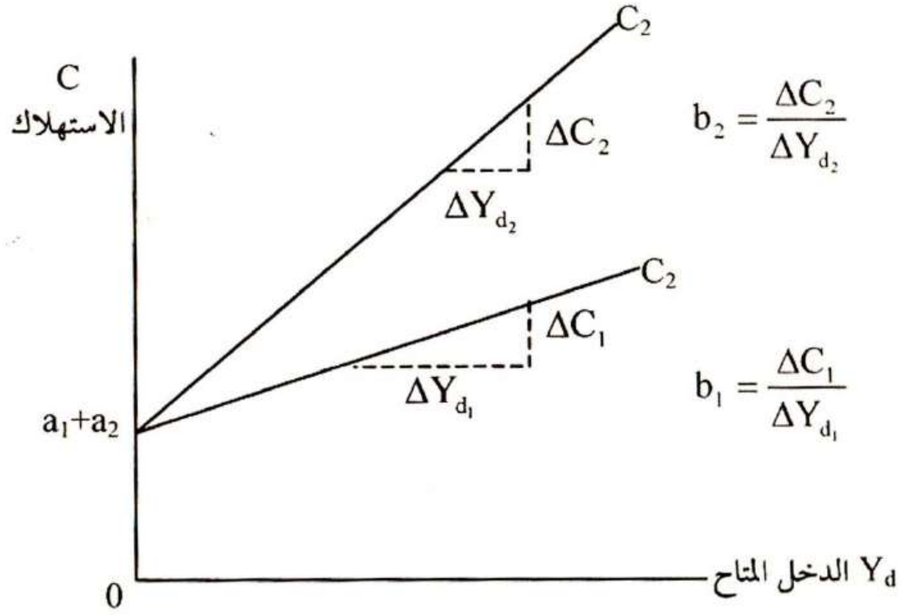


الثالث أن تكون: $b_1 \neq b_2$, $a_1 = a_2$

من هنا تكون دالتي الاستهلاك مختلفتيّ الميل الحدي للاستهلاك ومتماثلتين في المعلمة التقاطعية وكما هو مبين في الشكل (3) الآتي:

شكل (3)

يبين اختلاف الميل الحدي للاستهلاك بين الريف والحضر



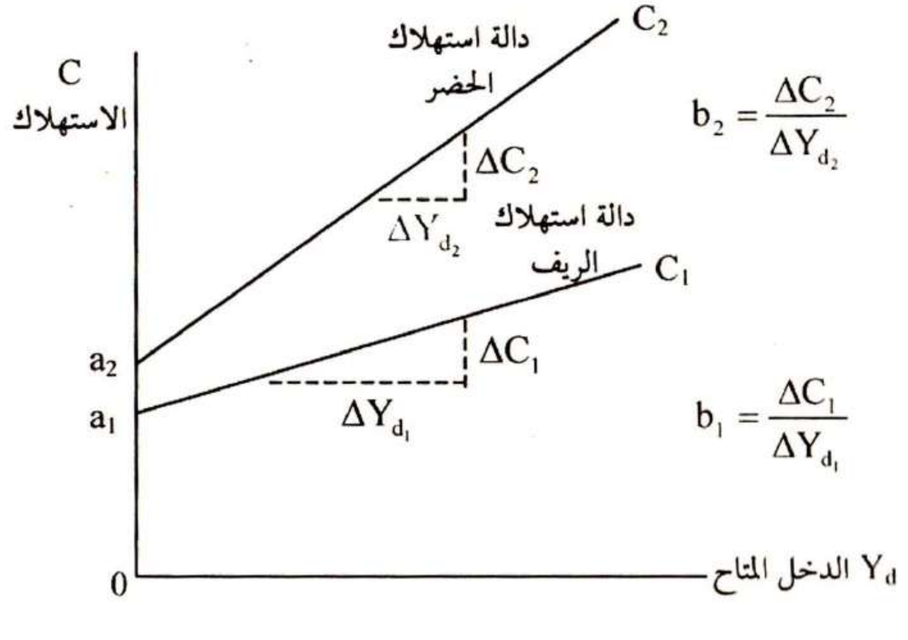
$b_1 < b_2$

الرابع أن تكون: $b_1 \neq b_2$, $a_1 \neq a_2$

أي أن تكون دالتي الاستهلاك مختلفتان في كل من المعلمة التقاطعية (a_1,a_2) والمعلمة الانحدارية (b_1,b_2) والتي تمثل الميل الحدي للاستهلاك وكما هو مبين في الشكل (4).

شكل (4)

يوضح اختلاف الميل الحدي للاستهلاك وحد الكفاف بين الريف والحضر



وهنا يمكن للمتغير الوهمي أن يساعد في اختبار كل الاحتمالات السابقة من خلال تقدير (معلمة انحدار واحدة) بدلاً من تقدير معادلتين ومقارنتهما. وفي هذه الحالة يتم تقدير معادلة انحدار من كل البيانات المتاحة عن الريف والحضر والتي تمثل عينة كبيرة مقدارها $(n = n_1 + n_2)$ وستأخذ في هذه الحالة الصيغة الآتية:

$$\hat{C}_i = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 D_1 + \hat{a}_2 Yd_i + \hat{b}_2 D_2 Yd_i + u \quad \ldots \quad (3)$$

حيث أن: C_i = الإنفاق الاستهلاكي.

Yd_i= الدخل المتاح.

D_i = موطن الأسرة (ريف أو حضر).

D_2 = 1 إذا كانت الأسرة تقطن الحضر.

D_2 = 0 إذا كانت الأسرة تقطن الريف.

ومن هذه المعلومات يتضح أن فئة الأساس هي الأسر التي تقطن الريف كما تحوي المعادلة الأخيرة على متغير مركب هو (D_2Yd_i) يترتب على وجوده اختلاف ميول دوال الانحدار المختلفة والتي يمكن اشتقاقها من المعادلة الأخيرة.

كما يتضح من المعادلة (3) الآتي:

أن القيمة المتوقعة للإنفاق الاستهلاكي في الريف =

$$E\,(C_i, Yd_i, D = 0) = C_2 = (a_1 + a_2) + (b_1+b_2)\,Yd_i \quad (4)$$

أن القيمة المتوقعة للإنفاق الاستهلاكي في الحضر =

$$E\,(C_i\,,\,Yd_i\,,\,D_2 = 0) = C_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,Yd_i \quad (5)$$

وبمقارنة دالتي الاستهلاك (4) و (5) يتضح الآتي:

أولاً: أن حد الكفاف في الريف هو (a_1) وفي الحضر هو $(a_1 + a_2)$ أي أن مقدار اختلاف حد الكفاف في الحضر عن الريف هو (a_2) .

وللتأكد فيما إذا كان هذا الاختلاف جوهرياً أم لا يتعين اختبارها باستخدام اختبار (t) بفرضين.

فرض العدم $H_0 : a_2 > 0$ في مواجهة الفرض البديل $H_1 : a_2 > 0$

ثانياً: إن الميل الحدي للاستهلاك في الريف = b_1 أما في الحضر فهو ($b_1 + b_2$)، ومن ثم فإن مقدار الاختلاف في الميل الحدي للاستهلاك هو (b_2) ولاختبار ما إذا كان الاختلاف جوهرياً أم غير جوهري نختبر فرض العدم $H_0 : b_2 = 0$. في مواجهة الفرض البديل $H_1 : b_2 > 0$

ثالثاً: إن صياغة معادلة الانحدار على النحو الموضح في المعادلة (3) يفترض أن دالة الاستهلاك في الحضر تختلف عنها في الريف في كل من المعلمتين التقاطعية والانحدارية، أما إذا افترضنا أن الدالتين مختلفتين في المعلمة الانحدارية فقط ومتماثلتين في المعلمة التقاطعية فإن نموذج الانحدار سيأخذ الصيغة الآتية:

$$\hat{C}_i = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 Yd_i + \hat{b}_2 Yd_i D_i + u_i$$

ومن هذه المعادلة يتضح أن القيمة المتوقعة للإنفاق الاستهلاكي في الريف يساوي:

$$E\,(C_i \,/\, Yd_i\,,\, D_2 = 0\,)$$

$$\hat{C}_i = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 (Yd_i)$$

والقيمة المتوقعة للإنفاق الاستهلاكي في الحضر كالآتي:

$$E\,(C_i \,/\, Yd_i\,,\, D_2 = 1\,)$$

$$\hat{C}_2 = \hat{a}_1 + (\hat{b}_1 + \hat{b}_2)\, Y_{di}$$

ومن ثم فالاختلاف في هذه الحالة يكون في المعلمة الانحدارية ومقداره (b_2).

11.2 : قياس التغيرات الهيكلية Measurement of Structural Changes :

يحدث أحياناً أن يُدرس تطور ظاهرة معينة لفترة طويلة نسبياً باستخدام السلاسل الزمنية مثل قياس دالة الاستهلاك للفترة (1900 -1990) فإن استخدام

المتغيرات التفسيرية الكمية فقط لتقدير هذه الدالة لا يعطي صورة حقيقة لسلوك هذه الظاهرة خلال مدة البحث، لأنه وفي الفترات الزمنية الطويلة قد تحدث هناك تغيرات جوهرية نتيجة لبعض الأحداث الكبيرة مثل الأزمات الاقتصادية الدورية، الحروب، الأحداث السياسية الداخلية كالثورات والانقلابات، أو حلول سلام بعد حرب وهكذا.

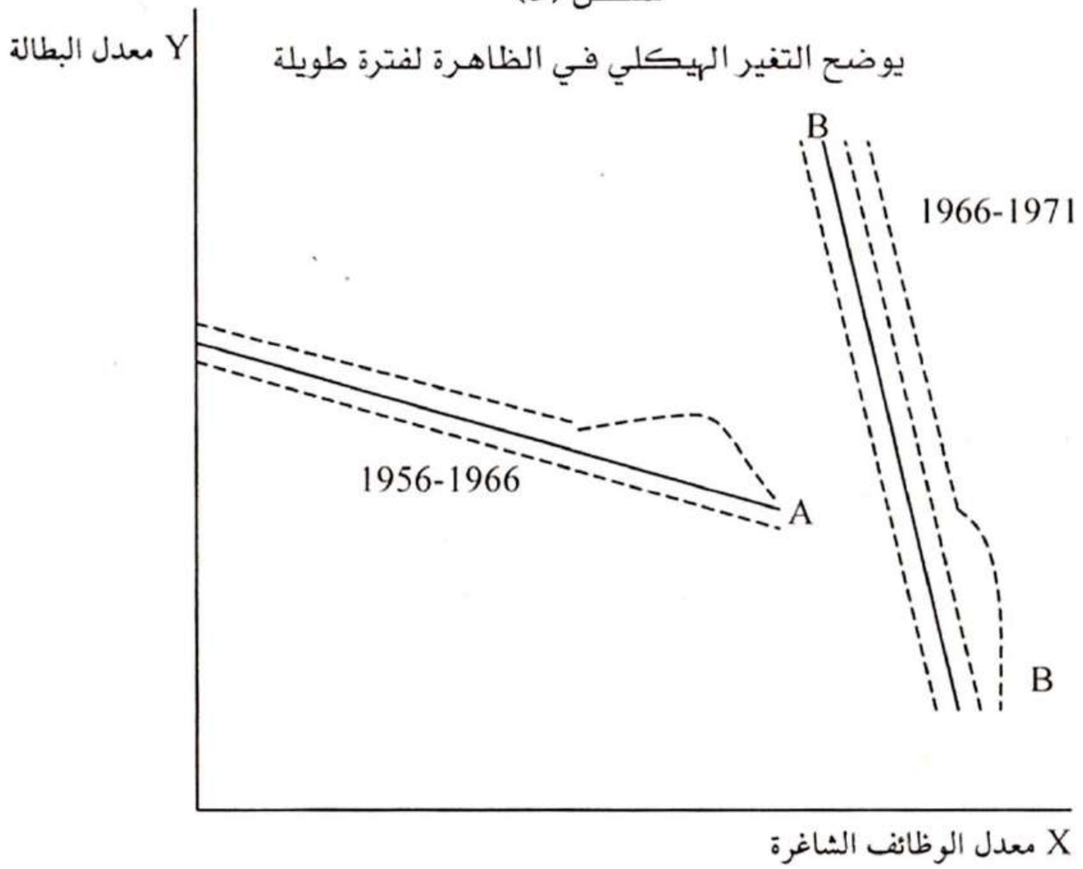
ومثل هذه الأحداث الكبيرة تقسم التاريخ إلى مراحل متباينة وتجعل من سلوك الظاهرة سلوكاً متبايناً في كل مرحلة من هذه المراحل، لهذا يصبح من الضروري تقدير معادلة انحدار مستقلة في كل مرحلة من هذه المراحل لاختلاف طبيعة الظاهرة داخل الفترة الزمنية الطويلة.

بيد أن استخدام المتغيرات الوهمية قد يساعدنا في تقدير نموذج قياسي واحد لكل هذه المراحل، ومنها يمكننا اشتقاق معادلة مستقلة لكل مرحلة مع تحديد وجه الاختلاف في سلوك الظاهرة بين كل المراحل.

ومن الأمثلة على ذلك ما قام به الاقتصادي (دمادار كوجاراتي) (Damodar Gujarati) في دراسة للعلاقة بين معدل البطالة ومعدل الوظائف الشاغرة في بريطانيا خلال مدة زمنية طويلة نسبياً (1958–1971).

ومن خلال الشكل الانتشاري الخاص بالعلاقة بين هذين المتغيرين اتضح للمؤلف أن هناك تغيراً هيكلياً أو جذرياً قد حدث في هذه العلاقة اعتباراً من عام 1966 وكما هو مبين في الشكل (5). ومن الشكل المذكور يتضح أن الحظ الممثل للعلاقة بين المتغيرين قد انتقل إلى الأعلى بعد عام (1966) وأصبح في شكله خلال الفترة (1971–1977) يختلف عنه في الفترة (1958–1966) وذلك من حيث المعلمة التقاطعية والانحدارية على حد سواء.

شكل (5)



ومن الملاحظ أن التغير أو الانتقال من المنحنى (A) إلى (B) يحدد الآتي: (إن لكل معدل وظائف شاغرة هناك مستوى أعلى للبطالة) أي أن لكل وظيفة شاغرة أصبح هناك عدد أكبر من العاطلين، وهذا بحد ذاته ظاهرة غير اعتيادية سيما وأن هناك زيادة كبيرة في معدل الوظائف الشاغرة.

وبعد البحث عن أسباب الظاهرة اتضح أن حكومة العمال في بريطانيا قد أصدرت قانوناً جديداً للتأمينات الاجتماعية عام 1966 بحيث يضمن تعويضات بطالة عالية للعاطلين الأمر الذي شجع الكثير من العاطلين على عدم قبول العديد من الوظائف وقضاء وقت أطول في البحث عن وظيفة مناسبة لميوله مما حرره من ضغط الحاجة والبطالة.

ولتقدير معادلة الانحدار الممثلة لهذه العلاقة خلال كل الفترة 1958–1971 استخدم المؤلف النموذج القياسي الآتي:

$$M_i = a_1 + a_2 S_2 + b_1 Z_1 + b_2 S_2 Z_i + u_i \quad \ldots \quad (1)$$

حيث أن: M_i = معدل البطالة ٪ .

Z_i = معدل الوظائف الشاغرة ٪ .

S_2 = 1 للفترة من الشهر العاشر لعام 1966 لغاية 1971 .

S_2 = 0 للفترة من الشهر العاشر لعام 1958 لغاية 1966 .

ويتضح من هذه المعلومات أن الباحث قد اعتبر الفترة 1958 -1966 هي فترة الأساس كما أن الاختلاف بين الفترتين كان في كل من المعلمة التقاطعية والمعلمة الانحدارية وقد قدرت معلمات النموذج كالآتي:

$$M_i = 2.75 + \underset{(0.32)}{1.15}\, S_2 = \underset{(0.11)}{1.53}\, Z_i = \underset{(0.42)}{0.85}\, (S_2 Z_2) + u_i \quad (2)$$

$$R^2 = 0.91$$

وقد وجد أن المعلمات المحتسبة لها معنوية إحصائية مما يؤكده وجود فرق جوهري في النماذج الانحدارية بين الفترتين من المعادلة (2) يمكن إيجاد الآتي:

العلاقة المقدرة للفترة 1958–1966:

$$E\,(M_i / Z_i\,,\, S_2 = 0)\ M_i = 2.75 - 1.53\, Z_i$$

العلاقة المقدرة للفترة 1966–1971: $E\,(m_i / Z_i\,,\, S_2 = 1)$

$$M_2 = (2.75 + 1.15) - (1.53 + 0.85)\, Z_i = 3.9 - 2.38\, Z_i$$

كما توجد اختلافات جوهرية في كل من المعلمة التقاطعية بالمقدار $(a_2 = 1.15)$ والمعلمة الانحدارية بالمقدار $(b_2 = 0.85)$ في العلاقة بين الفترتين.

11.3 قياس أثر التقلبات الموسمية Seasonal Fluctuations

التقلبات الموسمية ظاهرة متكررة في الأحداث الاقتصادية في كل الأقطار، وهي أحد العوامل التي تؤثر على العديد من المتغيرات الاقتصادية إلى جانب العوامل الأخرى.

فقدوم الشتاء يزيد من الطلب على المنتجات الصوفية والملابس الثقيلة وقدوم فصل الصيف يزيد من الطلب على الملابس القطنية وتقلص الصوفية، عدا أنها تزيد من طلب المشروبات الساخنة والحلويات أو الباردة كالثلج والمشروبات الغازية والمياه.

ولهذا يتطلب الأمر قياس أثر التقلبات الموسمية على الظواهر الاقتصادية وعلى ذلك باستخدام المتغيرات الوهمية وبالاتجاهات الآتية:

1- التأثير على المعلمة التقاطعية للنموذج.

2- التأثير على المعلمة الانحدارية للنموذج.

3- التأثير على المعلمتين في آن واحد في النموذج.

وفيما يلي استعراض لهذه التأثيرات:

1 - التأثير الموسمي (التغيرات الموسمية) على المعلمة التقاطعية:

يعتمد حجم الإيرادات الكلية ومنها الأرباح للشركات المنتجة ونرمز له بـ (F) على عاملين رئيسين:

الأول: هو حجم المبيعات Q_i

الثاني: هو أسعار السلع (p) وهامش الربح فيها.

ويدمج العاملان بقيمة المبيعات (Z).

الثالث: التقلبات الموسمية.

والتقلبات الموسمية متناوبة وفقاً للفصول الأربعة في العام وهي:

الربيع = S_1

الصيف = S_2

الخريف = S_3

الشتاء = $S4$

ومنها يمكن صياغة النموذج القياسي لانحدار هذه العوامل كالآتي:

$$F_i = a_1 + a_2S_2 + a_3S_3 + a_4S_4 + bZ_i + U_i \quad \ldots \qquad (1)$$

حيث أن: F_i = الأرباح السنوية.

Z_i = قيمة المبيعات ربع السنوية (الفصلية).

S_2 = 1 قيمة المبيعات في فصل الصيف.

S_2 = 0 في أي فصل آخر.

S_3 = 1 في فصل الخريف.

S_3 = 0 في أي فصل آخر.

S_4 = 1 في فصل الشتاء.

S_4 = 0 في أي فصل آخر.

ونجد من النموذج أن الفصول مانعة بالتبادل. فوجدنا في فصل الصيف يمنع وجودنا في أي فصل آخر. ولهذا نعطي في هذه الحالة فصل الصيف قيمة (1) وللفصول الأخرى القيمة صفر (0).

ويتضح أيضاً أن فصل الأساس هو فصل الربيع عليه فإن المعلمة التقاطعية (a_1) تخص هذا الفصل. فالمعلمة (a_1) تشير إلى مستوى الأرباح عندما تكون $S_2 = S_3 = 0$ وذلك لا يحدث إلا في فصل الربيع.

ومن المعادلة (1) يمكن اشتقاق معادلات الانحدار الخاصة بالأرباح في الفصول الأربعة كلها وكالآتي:

القيمة المتوقعة لأرباح في فصل الربيع

$$E(F_i / Z_i, S_2 = S_3 = S_4 = 0)\ F_1 = a_1 + b_1Z_i \quad \ldots \qquad (2)$$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الصيف.

$$E(F_i / Z_i, S_2 = 1, S_3 = S_4 = 0)$$

$$F_2 = (a_1 + a_2) + b_1 Z_i \quad \ldots \quad (3)$$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الخريف

$$E\,(F_i / Z_i\,,\, S_3 = 1,\, S_2 = S_4 = 0)$$

$$F_3 = (a_1 + a_3) + b_1 Z_i \quad \ldots \quad (4)$$

القيمة المتوقعة للأرباح في فصل الشتاء:

$$E\,(F_i / Z_i\,,\, S_4 = 1,\, S_2 = S_3 = 0)$$

$$F_4 = (a_1 + a_4) + b_1 Z_i \quad \ldots \quad (5)$$

ومن العرض القياسي أعلاه نجد أن:

a_2 = الفرق بين مستوى الأرباح في فصل الصيف وفصل الربيع.

a_3 = الفرق بين مستوى الأرباح في فصل الخريف وفصل الربيع.

a_5 = الفرق بين مستوى الأرباح في فصل الشتاء وفصل الربيع.

كما يمكننا اختبار فيما إذا كانت هذه الفروق جوهرية أم لا من خلا' اختبار (t) بالفروض الآتية:

فرض العدم: $H_0 : a_2 = a_3 = a_4 = 0$ أو $a_2 = 0\,,\, a_3 = 0\,,\, a_4 = 0$

في مواجهة الفروض البديلة: $H_1 : a_2 > 0\,,\, a_3 > 0\,,\, a_4 > 0$

ويمكن توضيح ذلك من معادلات الانحدار الأربعة الواردة في الشكل (6).

وقد أجريت دراسة تقيمية عن الأرباح في دولة ما خلال الفترة 1965–1970 وكانت نتيجة الدراسة كالآتي:

$$\hat{F}_i = 6688 + 1323\,S_2 - 218\,S_3 + 148\,S_4 + 0.038\,Z_i$$
$$(638.48) \quad (632.26) \quad (654.29) \quad (0.011)$$

ومن هذه النتيجة يتبين لنا أن الفروق بين أرباح الربع الثالث والربع الرابع من ناحية وأرباح الربع الأول من ناحية أخرى غير جوهري حيث أن:

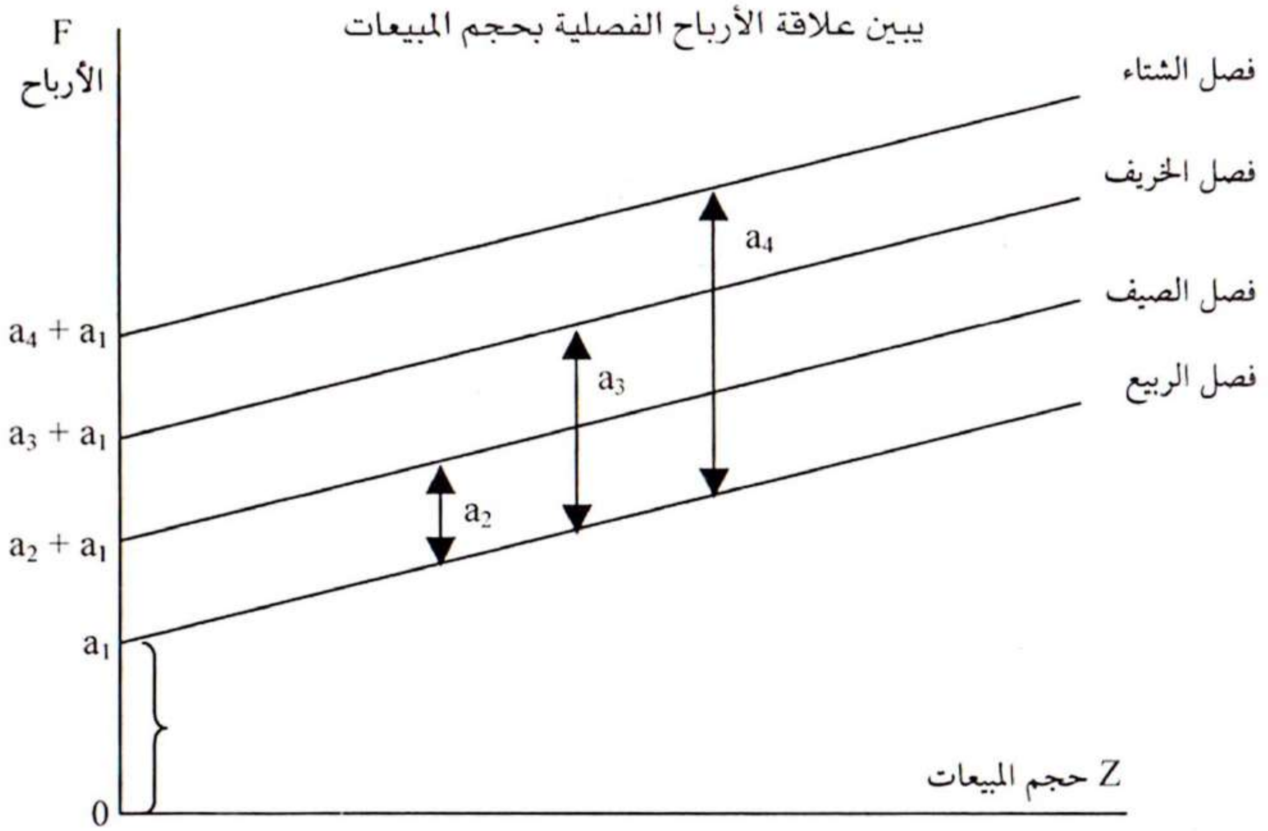
$$\frac{a_3}{2} < \sigma a_3 = \frac{218}{2} = 109 < (632.26)$$

إن نصف معلمة a_3 أصغر من الانحراف المعياري له والبالغ (26.632). وكذلك:

$$\frac{a_4}{2} < \sigma a_4 = \frac{148}{2} = 654.29$$

شكل (6)

يبين علاقة الأرباح الفصلية بحجم المبيعات



أما عن الفرق بين أرباح الربع الثاني وأرباح الربع الأول المتمثل في المعلمة (a_2) فإنه جوهري حيث أن a_2 معنوية إحصائياً، وكذا الحال بالنسبة للمعلمة (b_1) الخاصة بحجم المبيعات فهي معنوية إحصائياً أيضاً ونستنبط من المعادلة السابقة أن:

$$E(F_i / Z_i, S_2 = 1, S_3 = S_4 = 0)$$

$$F_2 = (6688 + 1323) + 0.038\, Z_i$$

$$= 8011 + 0.038Zi$$

وهذا يعني أن مستوى الأرباح في الربع الثاني يفوق مستوى الأرباح في الربع الأول بمقدار $a_2 = 1323$ مليون دينار كما أن زيادة المبيعات بما قيمته (1) دينار يترتب عليه زيادة في مستوى الأرباح بمقدار (4) درهماً فقط تقريباً.

ويمكن حساب القيمة المتوقعة للأرباح في الربع الأول والثالث والرابع كالآتي:

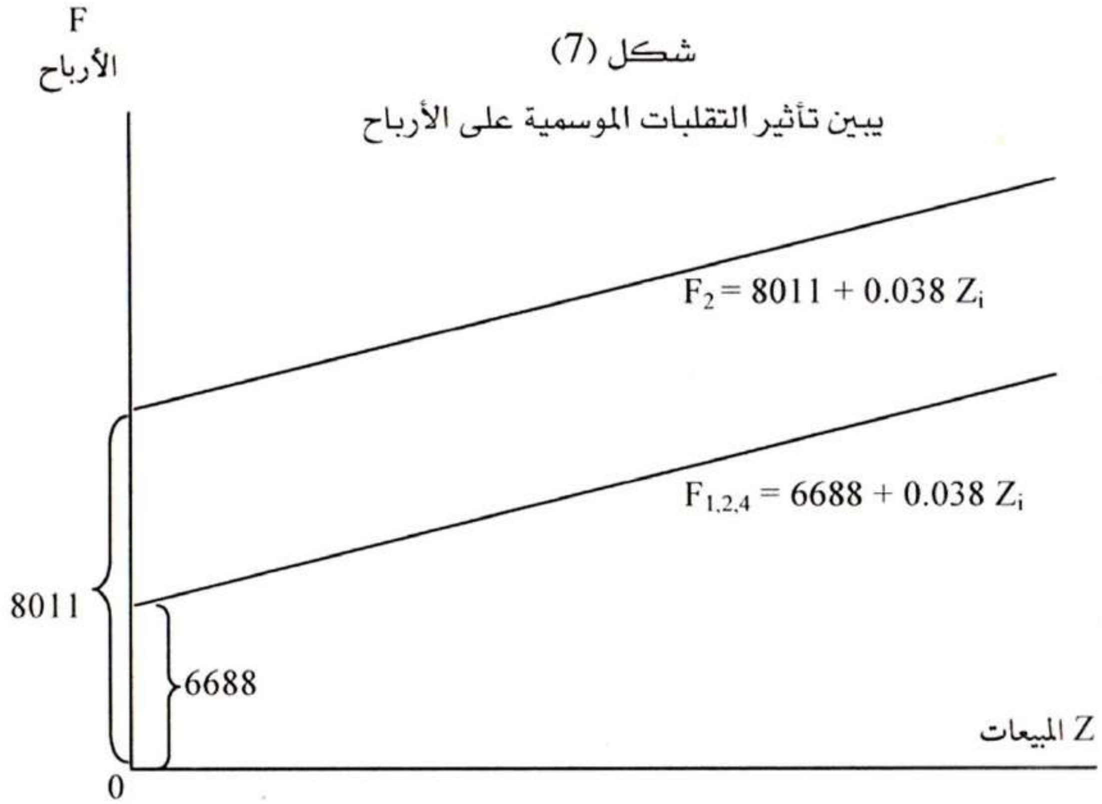
$$E\,(F_i / Z_i\,,\, S_2 = S_3 = S_4 = 0)$$

$$F_{1,2,4} = 6688 + 0.038\,Z_i$$

ويمكن تمثيل ذلك كالآتي في الشكل رقم (7).

شكل (7)

يبين تأثير التقلبات الموسمية على الأرباح



2 - تأثير التقلبات الموسمية على المعلمة الانحدارية:

بفرض أن التقلبات الموسمية تؤثر على الميول الحدية فقط، فإن معادلة الانحدار التي تصف العلاقة بين الأرباح من ناحية والتقلبات الموسمية وحجم المبيعات من ناحية أخرى تأخذ الصيغة الآتية:

$$F_i = a_1 + b_1 Z_i + b_2 Z_i S_2 + b_3 Z_i S_3 + b_4 Z_i S_4 + U_i$$

وبافتراض أن فصل الربيع هو فصل الأساس نجد أن:

لفصل الربيع: $F_1 = a_1 + b_1 Z_i$

لفصل الصيف: $F_2 = a_1 + (b_1 + b_2) Z_i$

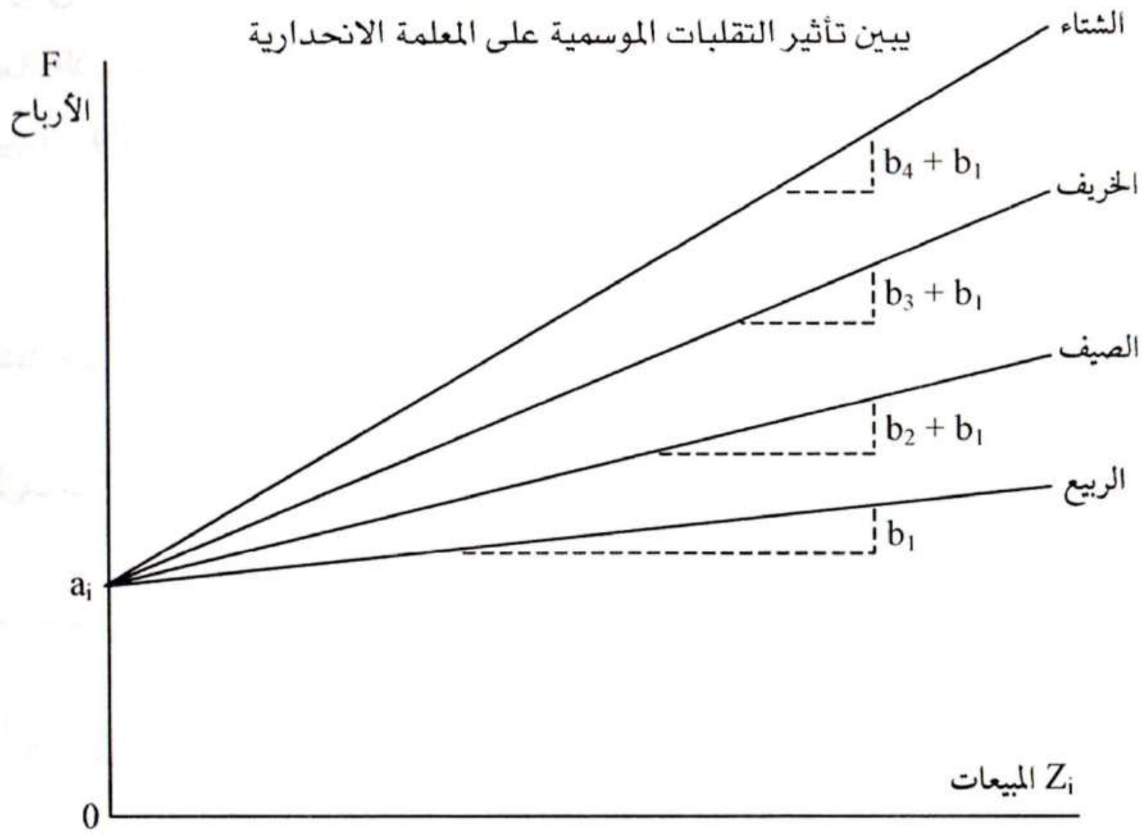
لفصل الخريف: $F_3 = a_1 + (b_1 + b_3) Z_i$

فصل الشتاء: $F_4 = a_1 + (b_1 + b_4) Z_i$

من هنا يفهم أن التقلبات الموسمية تؤثر فقط على المعلمات الانحدارية الخاصة بالفصول دون أن تؤثر في المعلمة التقاطعية، حيث تبقى ثابتة لكل الفصول، ويوضح الشكل (8) الاختلاف بين دوال الأرباح المختلفة للفصول الأربعة.

شكل (8)

يبين تأثير التقلبات الموسمية على المعلمة الانحدارية



3 - تأثير التقلبات الموسمية على المعلمتين الانحدارية والتقاطعية معاً:

إذا ما افترضنا أن التقلبات الموسمية تؤثر على مستوى الربح فتجعله يختلف من فصل لآخر، وفي نفس الوقت فهي تؤثر على معدلات الزيادة في الربح فينمو

بمعدل مختلف من فصل لآخر. بهذا فإن المعادلة الانحدارية التي تصف هذه العلاقة بين الربح وحجم المبيعات في ظل ظروف كهذه ستكون كالآتي:

$$F_i = a_1 + a_2S_2 + a_3S_3 + a_4S_4 + b_1Z_i + b_2Z_iS_2 + b_3Z_iS_3 + b_1Z_iS_4 + u_i$$

من هنا فإن المعادلات الانحدارية لكل فصل ستكون:

لفصل الربيع: $F_1 = a_1 + b_1Z_1$

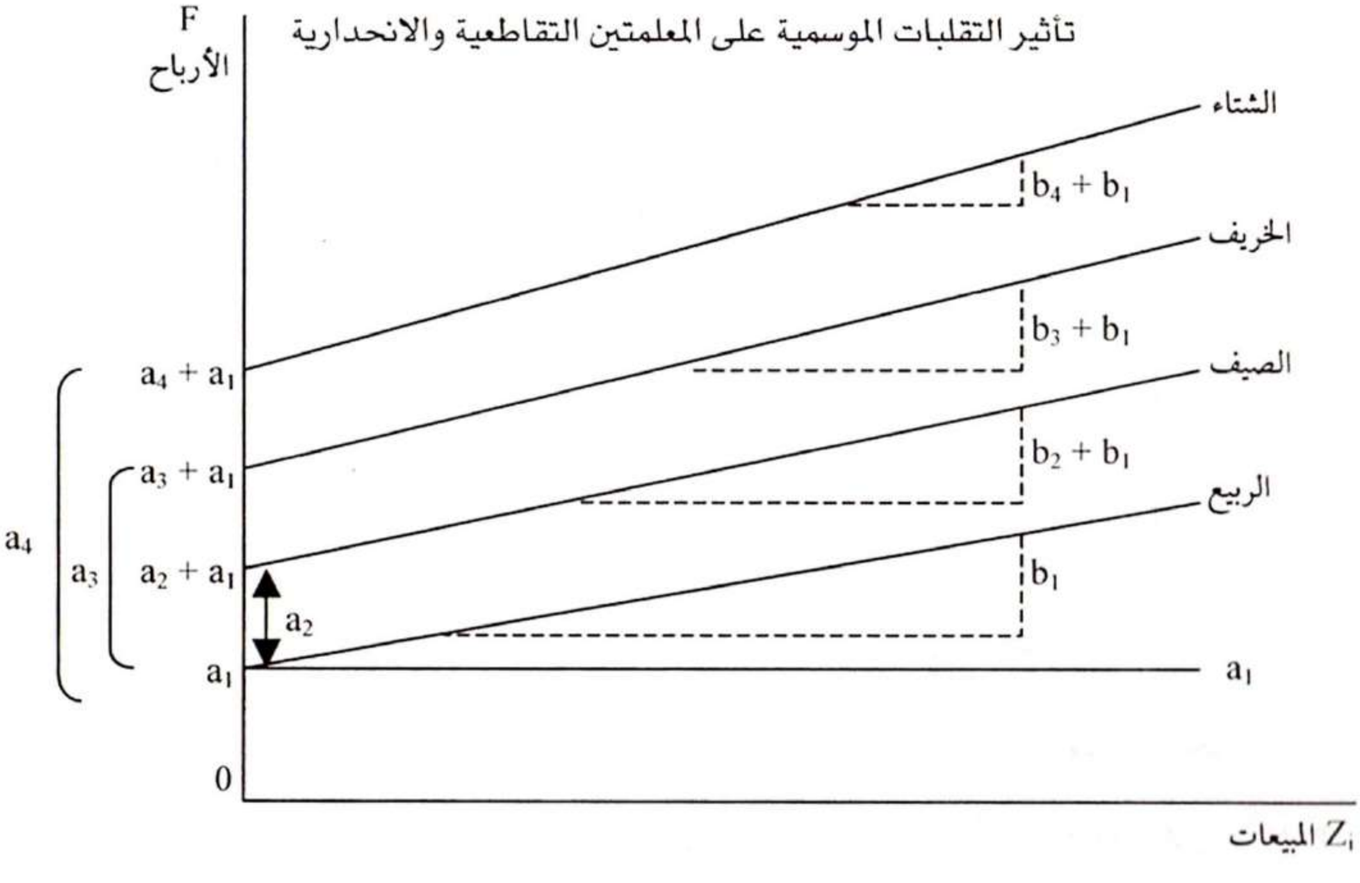
لفصل الصيف: $F_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\ Z_i$

لفصل الخريف: $F_3 = (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)\ Z_i$

لفصل الشتاء: $F_4 = (a_1 + a_4) + (b_1 + b_4)$

ومن ثم تكون التقلبات الموسمية قد أدت لاختلاف في كل المعلمة التقاطعية والمعلمة الانحدارية لدالة الربع في آن واحد ولدَ ويمكن تصوير ذلك بالشكل (9).

شكل (9)

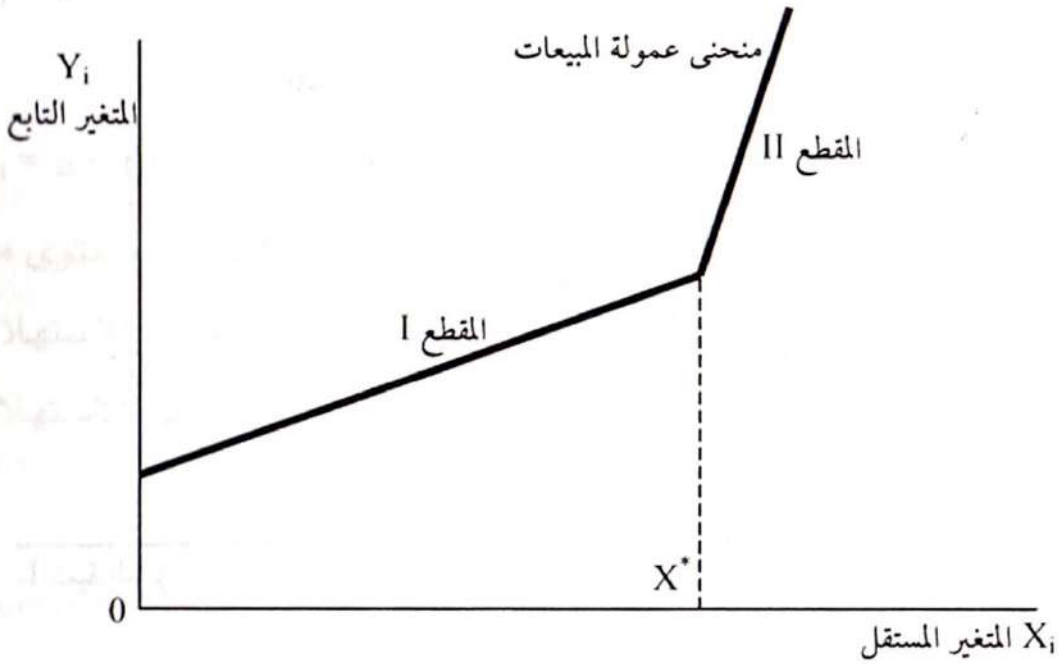


4 - قياس خط الانحدار المنكسر (**Piecewise Linear Regression**):

توجد في الممارسة الاقتصادية علاقات كثيرة يمكن أن نمثلها على هيئة خط منكسر بسبب تغير اتجاه العامل (المتغير المفسر) بدرجة حادة، وكما هو مبين في الشكل (10).

شكل (10)

علاقة انحدارية لخط منكسر



ومثل هذه العلاقات تشير إلى أن المتغير التابع أكثر مرونة في الاتجاه الصعودي أو التنازلي أو أنه يزداد بمعدل معين حتى يصل إلى نقطة ما يبدأ بعدها بالتصاعد أو التنازل بميل يختلف جذرياً، بحيث يزداد أو يقل المتغير التابع بوتيرة أسرع من وتيرة زيادة المتغير المستقل. ومن المشاهدات الاقتصادية هي العلاقة بين الدخل والاستهلاك فزيادة الدخل بوحدة واحدة قد تؤدي إلى زيادة الاستهلاك بنفس المقدار (b_1) وربما أقل من ذلك أي (b_1-b_2).

وكذلك العلاقة بين العمولة الممنوحة لمسئولي المبيعات وحجم المبيعات، فقد تكون العمولة في حجم معين نسبة ضئيلة حتى مستوى معين تزداد بعدها إلى نسبة

X_i = الدخل.

D_2 = 1 = إذا كانت $X^* \leq X_i$

D_2 = 0 إذا كانت $X^* > X_i$

حيث أن: X^* هي قيمة معلومة.

وتكون دالة الاستهلاك أو العمولة للمقطع (I) بالشكل رقم (11) بالصيغة أدناه:

$$Y_i = a + b_1X_i$$

وللمقطع II الصيغة الآتية:

$$Y_i = a + (b_1 + b_2)\, X_i$$

أي أن (b_2) تشير إلى التغير في الميل الحدي للاستهلاك بعد مستوى معين من الدخل (X^*) ومن ثم يمكن القول أن زيادة الدخل تؤدي إلى زيادة الاستهلاك وفقاً للميل الحدي للاستهلاك ($b_1 + b_2$) ونقص الدخل يؤدي إلى نقص الاستهلاك وفقاً للميل الحدي للاستهلاك ($b_1 + b_2$).

وللتأكد من أن التغير في الميل الحدي جوهري أم غير جوهري نختبر الفرض الآتي:

فرض العدم: $H_0: b_2 = 0$ في مواجهة الفرض البديل $H_1 : b_2 \neq 0$ أو أكبر من الصفر.

5 - المتغير الوهمي كمؤشر للمتغيرات الكمية (الرقمية):

يمكن في حالات معينة إحلال المتغير الوهمي بدلاً من متغير كمي، وذلك ندما يكون المتغير الكمي غير دقيق أو مشكوك في صحته أو في حالة عدم رفر بيانات كافية عنه.

فالادخار مثلاً مرتبط بالعديد من المؤشرات الاقتصادية كالدخل ومعدل الفائدة والميل الحدي للاستهلاك والمستوى التعليمي والسن. فالسن هنا يعمل

كمؤشر كمي، ويرتبط الادخار معه ارتباطاً طردياً. فكلما زاد سن الفرد كان أكثر عقلانية في استهلاكه، بهذا يقل ميله الحدي للاستهلاك، ويزداد عنده الميل الحدي للادخار.

لهذا فإن استخدام السن كمؤشر كمي يصعب استخدامه مباشرة لأن بداية الحصول على دخل مستقل للفرد يتفاوت من سن لأخرى، لهذا يكون الميل الحدي للادخار مختلف أيضاً. ويمكن في مثل هذه الحالات جمع كل التأثيرات الكمية في متغير وهمي واحد وهو عامل (السن).

فإذا ما كانت لدينا عينة مدروسة، ولحساب الميل الحدي للادخار عند أفراد العينة فيمكن تقسيمها إلى ثلاث عينات نوعية وهي:

مجموعة I : وتحوي أفراداً تتراوح أعمارهم بين 15–25 سنة.

مجموعة II : وتحوي أفراداً تتراوح أعمارهم بين 26–40 سنة.

مجموعة III : وتحوي أفراداً تتراوح أعمارهم بين 41–60 سنة.

فإذا ما افترضنا أن الادخار يتأثر بمستوى الدخل أولاً، والسن ثانياً، بهذا يمكن تصوير دالة الادخار على النحو التالي:

$$S_i = a_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + b_1 Yd_i + b_2 Yd_i Z_2 + b_3 Yd_i Z_3 + u_i \qquad (1)$$

حيث أن: S_i = الادخار.

Yd_i = الدخل المتاح.

Z_2 = 1 إذا كان الفرد من المجموعة الثانية.

Z_2 = 0 إذا كان الفرد من أية مجموعة أخرى.

Z_3 = 1 إذا كان الفرد في المجموعة الثالثة.

Z_3 = 0 إذا كان الفرد من أية مجموعة أخرى.

ومن ثم فإن فئة الأساس هي الفئة الأولى.

ويتضح من صياغة دالة الادخار السابقة أن السن يؤثر ليس فقط على مستوى الادخار لكنه يؤثر أيضاً على الميل الحدي للادخار، ويمكن تجزئة المعادلة (1) إلى:

متوسط الادخار المتوقع لمجموعته الأولى:

$$E\left(S_i / Yd_i , Z_2 = Z_3 = 0\right) S_i = a_1 + b_1\, Yd_i$$

$$S_1 = a_1 + b_1\, Yd_i$$

متوسط الادخار المتوقع للمجموعة الثانية:

$$E\left(S_i / Yd_i , Z_2 = 1 , Z_3 = 0 \right)$$

$$S_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, Yd_i$$

متوسط الادخار المتوقع للمجموعة الثالثة:

$$E\left(S_i / Yd_i , Z_3 = 1 , Z_2 = 0 \right)$$

$$S_3 = (a_1 + a_3) + (b_1 + b_3)\, Yd_i$$

بهذا فإن مستوى الادخار والميل الحدي الادخار يختلف من مجموعة عمرية لأخرى.

11.4 : تطبيقات وتمارين :

يمثل هذا الفصل جانباً تطبيقياً لعدد من الفصول وبنفس الوقت تعبر عن التمارين لهذا الفصل.

الارتباط وقياسه بين المتغيرات النوعية

(الوهمية)

12

Correlation in Dummy Variables

12.1 : مفهوم الارتباط النوعي.

12.2 : معامل الاقتران.

12.3 : معامل التوافق.

12.4 : معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان.

12.5 : المشاكل الرئيسية في تحليل المتغيرات الوهمية.

12.6 : تطبيقات وتمارين.

الارتباط وقياسه بين المتغيرات النوعية

Correlation in Dummy Variables

12.1 : مفهوم الارتباط النوعي :

الارتباط الكمي كما تم شرحه سابقاً يعكس قوة العلاقة بين متغيرات كمية ويعطي مؤشراً كمياً لقوة العلاقة أيضاً. ويعكس معامل التحديد النسبة التي يفسرها المتغير التفسيري الكمي من التغيير في المتغير التابع.

أما المتغيرات النوعية كالذوق والديانة ومستوى التعليم والثقافة والجنس والموقع الجغرافي وغيرها من المتغيرات النوعية فهي لا يمكن أن يُعبر عنها بأرقام كمية، إلا أنه يمكن اعتبارها حاضرة التأثير أو غير حاضرة، بهذا فإن قياس قوة ارتباطها مع ظاهرة مشابهة أو ظاهرة كمية فيمكن أن ندعوه بـ (الاقتران) أي قياس اقتران ظاهرة نوعية مع ظاهرة نوعية أخرى وبـ (التوافق) إذا كان ذلك الارتباط بين ظاهرة نوعية وأخرى كمية.

12.2 : معامل الاقتران Association Coefficient :

يقيس هذا المعامل اقتران متغير نوعي أو تصاحبه أو اشتراكه (أو تواردة أو تخاطره) مع متغير نوعي آخر مثل: اقتران التخصص والوظيفة التي يشغلها، مستوى التعليم والطبقة الاجتماعية، الجنس والوظائف القيادية وهكذا.

تطبيق (**1**):

إذا ما أخذنا عينة من عاملين في حقل معين عددها (100) شخص منهم (60) شخصاً متخصصون في الطب و(40) فرداً متخصصون في التدريس، وأردنا تحديد درجة ارتباط اقتران التخصص الوظيفة التي يمارسها الأفراد فإننا سنقول الآتي:

1 - إذا ما حصل كل متخصص على وظيفة مطابقة لتخصصه فإن الاقتران يكون تاماً في هذه الحالة، ويمكن وصف ذلك وقياسه كما هو موضح في الجدول رقم (1).

جدول (1)

يبين جدول الاقتران بين التخصص والوظيفة

التخصص / الوظيفة	طبيب	مدرس	المجموع
طب	$a = 60$	$b = 0$	60
تدريس	$c = 0$	$d = 40$	40
المجموع	60	40	100

حيث أن d, c, b, a هو تكرار كل صفة في العينة. ويقاس معامل الاقتران كالآتي:

$$A = \frac{ad - bc}{ad + bc}$$

ويستخدم معامل الاقتران تكرار الصفة في كل عينة. وعند استخدام بيانات الجدول (1) نحصل على:

$$A = \frac{(60 \times 40) - (0 \times 0)}{(60 \times 40) + (0 \times 0)} = 1$$

أي أن الاقتران بين التخصص والوظيفة اقتراناً (طردياً) تاماً.

2 - وإذا ما افترضنا أن كل شخص يعمل في وظيفة لا تناسب تخصصه دائماً، فإذا كان الطبيب يعمل مدرساً في مدرسة ثانوية ويعمل المدرس موظفاً في المستشفيات فإن معامل الاقتران يكون اقتراناً (عكسياً) تاماً.

ويمكن حساب معامل الاقتران في هذه الحالة كالآتي:

$$A = \frac{0-(40\times 60)}{0+(40\times 60)} = 1$$

وذلك عندما تكون:

$a = 0$ $b = 60$

$d = 0$ $c = 40$

كما في الجدول (1)

وهذا يعني وجود اقتران تام عكسي بين التخصص والوظيفة مما يعني ألا أحد يعمل في تخصصه إطلاقاً.

c) وفي حالة اشتغال جزء من تخصصات الطب في التدريس والجزء الأخرى في الطب، وبعض المدرسين في التدريس وجزء في المستشفيات. في هذه الحالة سنحل على الآتي (في حالتين مختلفتين) وبفرض أن:

$a = 30$	,	$a = 10$
$b = 30$	,	$b = 50$
$c = 20$	,	$c = 10$
$d = 20$	,	$d = 50$

$$A_1 = \frac{(30\times 20)-(20\times 30)}{(30\times 20)+(20\times 30)} = 0$$

والنتيجة صفر تعني لا وجود ارتباط للتخصص بالوظيفة، أو أن التخصص ليس هو العامل الفعال الذي يؤثر على الوظيفة، وإن كان هذا لا يعني أنه لا يوجد هناك من يعمل في تخصصه أما الحالة الثانية فتكون صفراً أيضاً.

$$A_2 = \frac{(10 \times 50) - (50 \times 10)}{(10 \times 50) + (10 \times 50)} = 0$$

مع ذلك فإن معامل الاقتران يعاني من بعض النواقص وهي:

1 - يقتصر استخدامه على المتغيرات ذات الصفتين المتقابلتين فقط مثل أسود وأبيض، ذكراً أو أنثى لأن جدول الاقتران لا يحوي أكثر من أربعة خلايا جزئية.

لهذا لا يمكن استخدامه في الحالات التي يحمل فيها المتغير أكثر من صفتين مثال على ذلك تعليم، تعليم متوسط، أميّ وهكذا.

2 - يتأثر فيه معامل الاقتران بطريقة عرض التكرارات بالجدول، وعندما يرتب بطريقة أخرى يعطي نتائج مضللة، فإذا ما عرضنا المعلومات السابقة بالطريقة التي هي موضحة في الجدول (2) سنحصل على نتائج.

جدول (2)

يوضح معامل الاقتران بين الاختصاص والوظيفة

الوظيفة / التخصص	موظف في تخصصه	موظف في غير تخصصه	المجموع
طب	a = 60	b = 0	60
تدريس	c = 40	d = 0	40
المجموع	100	صفر	100

ومن هذا يتضح أن الجدول (2) يعطي نفس القدر من المعلومات التي يحويها الجدول السابق إلا أن معامل الاقتران يكون مختلفاً ومساوياً للصفر وفقاً لحسابه من المعادلة التالية:

$$A = \frac{ad - bc}{ad + bc} = \frac{(60 \times 0) - (0 \times 40)}{(60 \times 0) + (0 \times 40)} = 0$$

وهي قيمة غير محددة ولكن من الأفضل في مثل هذه الحالة أن نحسب معامل الاقتران كالآتي:

$$B = \frac{ac - bd}{ac + bd} = \frac{(60 \times 40) - (0 \times 0)}{(60 \times 40) - (0 \times 0)} = 1$$

وهي نفس النتيجة المستخدمة بمساعدة الجدول (1).

12.3 : معامل التوافق Contingency Coefficient :

وهو معامل يقيس درجة الارتباط بين ظاهرتين من بيانات وصفية حتى في حالة احتواء هذه البيانات على أكثر من قسمين، فإذا ما أردنا قياس الارتباط بين مستوى التعليم والوعي المصرفي والذي يمكن أن نعبر عنه بالادخار المصرفي فإن معامل التوافق يساعدنا على ذلك، رغم أن مستوى التعليم يحتوي على أكثر من فئتين، حيث يوجد تعليم عالي ومتوسط ودون المتوسط.

تطبيق (**2**):

إذا ما استبينت عينة من 100 شخص وكان فيهم (20) شخصاً ذو تحصيل عال و(50) تعليم متوسط و(30) دون التعليم المتوسط عندئذ يمكن وصف جدول التوافق بين المستوى التعليمي والوعي المصرفي كما في الجدول (3).

جدول (3)

يوضح علاقة الوعي المصرفي بالتحصيل العلمي

درجة الوعي المصرفي / مستوى التعليم	يدخر في المصرف	يكتنز	مجموع
تعليم عال	$D_{11} = 20$	$D_{12} = 0$	$D_{1j} = 20$
تعليم	$D_{21} = 25$	$D_{22} = 25$	$D_{2j} = 50$
تعليم دون المتوسط	$D_{31} = 0$	$D_{32} = 30$	$D_{3j} = 30$
المجموع	$D_{i1} = 45$	$D_{i2} = 55$	$D_{ij} = 100$

وتشير خلايا (مصفوفة) جدول التوافق إلى تكرارات الفئات المختلفة وتشير D_{ij} إلى تكرار خلية واقعة في الصف (i) والعمود (j) ويمكن استخدام الصيغة الآتية في حساب معامل التوافق.

$$G = \sqrt{\frac{C-1}{C}}$$

حيث G هي معامل التوافق، ويحتسب (C) كالآتي:

$$C = \sum \frac{(D_{ij})^2}{D_i \times D_j}$$

أي أن (C) تساوي مجموع مربع التكرارات بعد قسمتها على حاصل ضرب تكرار الصف (i) وتكرار العمود (j) وفي مثالنا الموضح في الجدول (3) يمكن حساب معامل التوفيق كالآتي:

$$C = \frac{(20)^2}{45\times 20} + \frac{(0)^2}{55\times 20} + \frac{(25)^2}{45\times 50} + \frac{(25)^2}{55\times 50} + \frac{(0)^2}{45\times 30} + \frac{(30)^2}{55\times 30}$$
$$= 0.44 + 0 + 0.28 + 0.23 + 0 + 0.55 = 1.5$$

$$G = \sqrt{\frac{1.5-1}{1.5}} = 0.6$$

وتشير إلى وجود ارتباط طردي بين مستوى التعليم ودرجة الوعي المصرفي أي كلما زاد المستوى التعليمي زاد الوعي المصرفي.

إلا أن قيمة المؤشر تتأثر بطريقة عرض التكرارات فإذا حسبنا معامل التوافق من جدول الاقتران السابق (1) سنحصل على:

$$G = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = 0.7$$

وإذا ما حسبناه من الجدول (2) بعد عرض المعلومات بطريقة مخالفة نحصل على:

$$G = \sqrt{\frac{1-1}{1}} = 0$$

كذلك لا نحصل على معامل سالب مساوٍ لـ (1−).

12.4 : معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان :

تقوم فكرة هذا المعامل إلى (سبيرمان) ويتركب من ترتيب مفردات كل متغير من المتغيرات الوصفية موضوع الدراسة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً مع إعطاء كل مفردة قيمة رقمية تظهر ترتيبها.

ويمكن باستخدام هذه الرتب لحساب معامل الارتباط الرتبي. ويمكننا تطبيقه على المتغيرات النوعية مثل الارتباط بين الثقافة والادخار أو التغيرات الهيكلية في الاقتصاد القومي. ويحسب معامل الارتباط الرتبي لسبيرمان كالآتي:

$$R_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n\,(n^2 - 1)}$$

حيث أن: n = عدد المشاهدات.

D = الفرق بين رتبتي كل قيمتين متقابلتين.

راجع الفصل الثالث الفقرة 3.9 لزيادة التوضيح.

12.5 : المشاكل الرئيسية في تحليل المتغيرات الوهمية :

يواجه تحليل المتغيرات الوهمية عند استخدامه في الاقتصاد القياسي بعض المشاكل المنهجية وتتلخص بالآتي:

1 - أن التوسع في استخدام المتغيرات الوهمية في النماذج القياسية مع ثبات حجم العينة يقلل من درجات الحرية وهذا بدوره يقلل من معنوية المعلمات المقدرة.

2 - توجد الكثير من المتغيرات النوعية المؤثرة على المتغيرات الاقتصادية ذات تأثير متعاكس. فالاستهلاك يتأثر بالدخل، لكنه وفي الوقت نفسه يتأثر بالجنس

(ذكر أم أنثى) والديانة والمستوى التعليمي والحالة الاجتماعية (متزوج أم أعزب) وحجم الأسرة والموقع الجغرافي وخلافها.

وقد يلغي أحد المتغيرات أثر الأخرى وخاصة في متغيرات مهمة كالاستهلاك، ورغم ذلك فإن إلغاء أثر هذه المتغيرات لا يؤثر على المقدرة التفسيرية للنموذج عند استخدام البيانات الكمية.

3 - إن استخدام المتغيرات الوصفية مقتصر على النموذج الخطي البسيط دون سواه والذي يحد من استخدامه في نماذج أخرى بسبب الصعوبات التي تكتنف هذا الموضوع.

فقد استخدم النموذج مثلاً لقياس تأثير الدخل على مدى ملكية الأسرة أو الفرد لمنزل خاص به. وقد جمعت بيانات من عينة من أسرة مالكة وغير مالكة لمنازل خاصة واستخدم فيها النموذج القياسي البسيط الآتي:

$$Y_i = a + bX_i + u_i \qquad \ldots \qquad (1)$$

حيث أن: Y_i = متغير نوعي تابع (يشير إلى ملكية المنازل).

X_i = دخل الأسرة كمتغير تفسيري.

Y_i = 1 إذا كانت الأسرة مالكة لمنزل خاص بها.

Y_i = 0 إذا كانت الأسرة لا تملك منزلاً خاصاً بها.

تطبيق (**3**):

مستهلكون متباينون في مستوياتهم الثقافية مع ثبات العوامل الأخرى كالعمر والدخل والموطن وقسموا إلى مجموعتين وطلبنا من كل مجموعة أن ترتب عدداً من التوليفات السلعية وفقاً لتفضيلاتها الشخصية وكان الترتيب كالآتي:

المجموعة السلعية	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ترتيب المجموعة الأولى	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ترتيب المجموعة الثانية	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
D الفرق بين الرتب	-9	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9
$\sum D^2 = (330)$	81	49	25	9	1	1	9	25	49	81

$$R_s = 1-\frac{6\times 330}{10\,(10^2-1)} = 1-\frac{1980}{990}1-2=-1$$

وتوضح هذه النتيجة إلى أن تفضيلات المستهلكين ذوي المستويات الثقافية المختلفة تكون متناقضة تماماً، وربما يعني هذا أن المستوى الثقافي يكون مرتبطاً بذوق المستهلك ارتباطاً عكسياً تماماً.

تطبيق (**4**):

ومن بيانات عشرة أسر عن الملكية والدخل حصلنا على المعلومات التالية:

الأسرة (1)	موقفها من الملكية (2)	Y_i (3)	الدخل / ألف دينار X_i (4)
1	تملك	1	10
2	تملك	1	15
3	لا تملك	صفر	5
4	تملك	1	20
5	لا تمتلك	صفر	6
6	لا تمتلك	صفر	4
7	تملك	1	25
8	تملك	1	25
9	لا تملك	صفر	7
10	تملك	1	23

ومن هذه البيانات نستطيع أن نقدر العلاقة الانحدارية باستخدام البيانات في العمودين (3) و (4).

ومن ملاحظة هذه البيانات نجد أن الملكية هي متغير احتمالي من نوعية خاصة لأن قيمته هي بين الصفر والواحد عدد صحيح، بهذا فإن قيمته المتوقعة أو متوسط قيمته ستقع بين الصفر و(1) عدد صحيح أيضاً أي:

$$0 \le (EY_i / X_i) \le 1$$

عدا ذلك فهو متغير احتمالي ومجموع احتمالات قيمته بين الصفر وأقل من الواحد عدد صحيح، ومن تطبيقنا السابق رقم (2) نجد أن التوزيع الاحتمالي له كالآتي:

قيمة Y_i	الاحتمال
1	0.60
0	0.40
مجموع الاحتمالات	1

كما يمكن كتابة التوزيع الاحتمالي بصورة عامة كالآتي:

قيمة Y_i	احتمال
1	P
صفر	1-P
مجموع	1

ومن ثم فإن القيمة المتوقعة للمتغير $Y_i = \sum Y_i P_i$

أو

$$E\,(Y_i / X_i = 1\,(P) + O\,(1\text{-}P) = P \qquad \ldots \qquad (1)$$

ومن المعادلة (1) نجد أن:

$$E\,(Y_i / X_i) = a + bX_i \qquad \ldots \qquad (2)$$

حيث أن $\sum (u_i) = 0$

∴ من المعادلة (1) و (2) نجد أن:

$$E\,(Y_i / X_i) = a + bX_i = P_i \qquad \ldots \qquad (3)$$

ومن ثم فإن القيمة المقررة لـ (Y_i) تساوي احتمال هذه القيمة أي أن:

$$\hat{Y}_i = P_i$$

وتبرز هنا بعض المشاكل القياسية التي تنجم عند استخدام المتغير الوهمي كمتغير تابع ويمكن تلخيصها بالآتي:

1 - أن من أبرز افتراضات طريقة المربعات الصغرى هو أن يكون توزيع الحد العشوائي توزيعاً معتدلاً، بينما لا يتحقق ذلك في حالة استخدام المتغير الوهمي لأن توزيع الحد العشوائي (u_i) غير معتدل لأنه يأخذ أحد قيمتين إما صفر أو (1).

وإذا ما اعتمدنا صيغة استخراج الحد العشوائي والتي هي:

$$u_i = Y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i$$

فإن قيمة (u_i) ستكون كالآتي:

قيمة Y_i	قيمة u_i
1	$1 - a - bX_i$
0	$O - a - bx_i = -a - bX_i$

في هذه الحالة يكون توزيع (u_i) غير معتدلاً ومن الصعب في هذه الحالة اختبار معنوية المقدرات (المعلمات المقدرة) حيث لا نجد مثل هذه القيم في الجداول t أو Z التي تفترض اعتدالية التوزيع، ولكن عند زيادة حجم العينة يمكن أن يصبح التوزيع معتدلاً.

2 - كذلك فإن الافتراض الثاني الخاص بعدم وجود ارتباط بين الحد العشوائي (u_i) والمتغير المستقل (Y_i) من أجل تحديد كل واحد منها بطريق منفصلة. وللتخلص من هذه المشكلة يمكن أن نقوم بتعديل البيانات الخاصة بالعينة بقسمة النموذج $Y_i = a + bX_i + u_i$ على حد جديد وهو:

$$Z = \sqrt{P_i - (1 - P_i)}$$

وبما أنه من الصعب علينا تحديد احتمال (P_i) الخاصة بالمجتمع لهذا نستعيض عنه بالاحتمال المقدر من العينة ومن المعادلة السابقة وهي:

$$\hat{Y}_i = P_i \qquad \ldots \qquad (4)$$

حيث سنحل على الآتي:

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\hat{Y}_i(1 - Y_i)} \qquad \ldots \qquad (5)$$

وبقسمة طرفي المعادلة $\hat{Y}_i = a + bX_i + u_i$ على $\hat{\lambda}$ سنحصل على:

$$\frac{Y_i}{\hat{\lambda}_i} = \frac{a}{\hat{\lambda}_i} = b\frac{Y_i}{\hat{\lambda}_i} + \frac{u_i}{\hat{\lambda}_i} \qquad \ldots \qquad (6)$$

وعندما نقوم بتحويل البيانات المتوفرة لدينا باستخدام المعادلة (6) سنعيد التقدير باستخدام طريقة المربعات العشوائي وذلك باتباع ما يأتي:

أولاً: نقوم بتقدير المعادلة (1) وهي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i + u_i$$

وذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية من خلال البيانات التي يوفرها الجدول (4) نحصل بذلك على:

$$\hat{Y}_i = 0.1 + 0.05\,X_i + u_i \qquad \ldots \qquad (7)$$

وتعني المعادلة رقم (7) أنه لكي تكون $Y_i = 1$ ، يجب أن تكون قيمة $(X = 22)$، $(- 0.1 + 0.05\ X_i) = 1$ والتي يمكن أن نحصل عليها من ($- 0.1 + 0.05$ $X_i = 1$) أي أن $22 = \frac{1.1}{0.05}$

ومعنى ذلك لكي يصبح الشخص مالكاً لمنزل خاص به يتعين أن يكون دخله في المتوسط (22) ألف دينار.

ومن المعادلة (7) نجد أن:

$$\hat{Y}_i = -0.1 + 0.05\,X_i \qquad \ldots \qquad (7)$$

جدول (4)

يبين تحليل بيانات عشرة أسرة ودخلها وملكيتها للمنزل

Y_1	X_1	$\hat{Y}_i$	$1-\hat{Y}_i$	$(1-\hat{Y}_i)(\hat{Y}_i)$	$\lambda=\sqrt{(1-\hat{Y}_i)(\hat{Y}_i)}$	$\hat{Y}_i$ المعدلة	$(1-\hat{Y})$ المعدلة	$(1-\hat{Y}_i)(\hat{Y}_i)$ المعدلة	$\hat{\lambda}$ المعدلة
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	0.4	0.6	0.24	0.49	0.4	0.6	0.024	0.49
1	15	0.65	0.35	0.2275	0.48	0.65	0.35	0.2275	0.48
0	5	0.15	0.85	0.1275	0.26	0.15	0.85	0.1275	0.26
1	20	0.90	0.10	0.09	0.3	0.90	0.10	0.09	0.3
0	6	0.20	0.80	0.16	0.4	0.20	0.80	0.16	0.4
0	4	0.10	0.90	0.09	0.3	0.10	0.90	0.009	0.3
1	25	1.15	-0.15	-0.1725	جذر	0.99	0.01	0.0099	0.1
1	25	1.15	-0.15	-0.1725	وهمي	0.99	0.01	0.0099	0.1
0	7	0.95	0.75	0.1875	0.43	0.25	0.75	0.1875	0.43
1	23	1.05	-0.05	-0.525	جذر وهمي	0.99	0.01	0.0099	0.1

وبحصولنا على نتائج ($\hat{Y}_i$) باستخدام التعويض بالمعادلة (7) فإنه يمكن استخدام النتائج الخاصة بـ $\hat{Y}_i$ للحصول على النتائج المطلوبة في المعادلة رقم (5).

ثانياً: نقوم بتعديل قيم Y_i المشاهدة و X_i بقسمتها على $\hat{\lambda}$ مرة ثانية باستخدام البيانات المعدلة. بهذا نكون قد تخلصنا من مشكلة وجود ارتباط بين (u_i) و (x_i) كما هو موضح في الجدول (4).

3 - وقد تظهر في حالات معينة قيم لـ ($\hat{Y}_i$) تقل عن الصفر أو تزيد عن (1) رغم أن المتوقع هو إما (0) أو (1) كما هو وارد في بيانات الجدول (4) عمود (3) حيث ظهرت قيم مثل (1.15) لهذا ستكون قيم ($1-\hat{Y}_i$) قيم سالبة ولا يمكننا الحصول على جذرهما التربيعي (جذور وهمية) وذلك للتوصل إلى قيمة $\hat{\lambda}$ كما حدث في العمود (6) من الجدول (4).

ولأجل أن نزيل هذه التناقضات نقوم بتحويل كل قيمة لـ (Y_i) أقل من الصفر إلى قيمة موجبة قريبة من الصفر مثل (0.01) وتحويل كل قيمة لـ (Y_i) أكبر من الواحد إلى أقرب قيمة للواحد عدد صحيح مثل 0.99 ثم نحسب ($\hat{\lambda}$) ونقوم بالتعديل

المطلوب. وبعد الحصول على ($\hat{\lambda}$) المعدلة كما هو وارد في العمود (10) في الجدول (4) يمكننا عند ذاك من الحصول على:

$$\frac{X_i}{\hat{\lambda}}, \frac{Y_i}{\hat{\lambda}}$$

جدول (5)

يوضح القيم المعدلة لـ (Y_i) و (X_i)

$\frac{X_i}{\hat{\lambda}}$	$\frac{Y_i}{\lambda}$
20.4	2.04
31.9	2.08
13.9	0
66.7	3.33
15	0
13.3	0
250	10
250	10
16.3	0
230	10

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى نحصل على معادلة انحدار Y_i على X_i باستخدام $\frac{X_i}{\hat{\lambda}}, \frac{Y_i}{\hat{\lambda}}$ بهذا نتخلص من مشكلة الارتباط بين (X_i) و (u_i) وتسمى هذه الطريقة بطريقة المربعات الصغرى المرجحة.

تطبيق **(5)**:

الجدول التالي يوضح الاستثمار المحلي (Y) والناتج القومي لإجمالي (X) ببلايين الدنانير خلال الفترة من 1980–1994 لدولة ما. قدّر أثر المتغير الوهمي (الحرب والسلم) في إجمالي الاستثمار المحلي.

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Y	9.3	13.1	17.9	9.9	5.8	7.2	10.6	30.7	34.0	45.9	35.2	35.8	59.2	52.1	53.1
X	90.8	100	124.9	158.8	192.0	210.5	212.3	209.3	232.8	259.1	258	286.2	330.2	347.2	366.1
D	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

الحل:

1 - نكوّن عمود إضافي في الجدول أعلاه يمثل عنصر المتغير الوهمي حيث تشير D = 1 إلى سنوات الحرب وهي بافتراض تبدأ من 1983–1987 و D = 0 إلى سنوات السلم كما هي موضحة أعلاه.

2 - نستخرج المعادلة التقديرية لإجمالي الاستثمار وهي كالآتي:

$$Y = -2.58 + \underset{(10.79)}{0.16\,X} - \underset{(-6.82)}{20.81\,D}$$

$$R^2 = 0.94$$

3 - نجري عملية الاختبار والتي منها نجد أن المتغير الوهمي (D) معنوي إحصائياً بمستوى 5٪ حيث أن a = - 2.58 تعود لزمن السلم، و = (-2.58 + 20.81-) (-23.39) تعود لزمن الحرب (وهذه تم الحصول عليها من إضافة قيمة المقطع (a) إلى قيمة معلمة المتغير الوهمي. أما $\hat{b} = 0.16$ فهي معلمة الميل.

تطبيق **(6)**:

الجدول الآتي يبين الإنفاق الاستهلاكي (C) والدخل المتاح فيه (Y_d) ونوع الجنس لربّ العائلة لعينة حجمها (12) والمطلوب:

1- إيجاد انحدار (C) على (Y_d).

2- اختبار اختلاف حد المقطع للعوامل التي يكون ربّ الأسرة فيها أنثى أو ذكر.

3- اختبار اختلاف الميل الحدي للاستهلاك (MPC) للعوائل التي ربّ الأسرة فيها أنثى أو ذكر.

n	رقم الأسرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_i	الاستهلاك	18.54	11.35	12.13	15.21	8.68	16.76	13.48	9.68	17.84	11.18	14.32	19.86
Y_i	الدخل المتاح	22.55	14.04	13.04	17.50	9.43	20.64	16.47	10.72	22.35	12.20	16.81	23.00
D_i	المتغير الوهمي	M(0)	M(0)	F(1)	M(0)	F(1)	M(0)	M(0)	F(1)	M(0)	F(1)	F(1)	M(0)

الحل:

1 - نستخرج معادلة انحدار الإنفاق الاستهلاكي (C) على الدخل المتاح (Y_d) وكالآتي:

$$\hat{C} = 1664.6 + 0.75\ Y_d$$

$$R^2 = 0.978$$

2 - نرمز للمتغير الوهمي (D = 1) للعوائل التي ربّ العائلة فيها أنثى و (D = 0) للعوائل التي ربّ العائلة فيها ذكر وهذا واضح في عمود المتغير الوهمي في الجدول المذكور أعلاه، والمعادلة التي تشير إلى تقدير المتغير الوهمي للجنس كما يلي:

$$\hat{C} = 186.12 + \underset{(16.56)}{0.82\ Y_d} + \underset{(1.82)}{832.09\ Y_d\ D}$$

$$R^2 = 0.984$$

3 -

$$\hat{C} = 709.18 + \underset{(18.11)}{0.79\ Y_d} + \underset{(1.51)}{0.05\ Y_d\ D}$$

$$R^2 = 0.983$$

4 -

$$\hat{C} = 184.70 + \underset{(13.65)}{0.83\ Y_d} + \underset{(1.03)}{1.758\ D} - \underset{(-0.57)}{0.06\ Y_d}$$

$$R^2 = 0.985$$

5 - الذي يمكن ملاحظته من جميع التقديرات أن (D) و Dy_d غير معنويان إحصائياً بمستوى من المعنوية قدره 5٪ في المعادلات (2)، (3)، (4)، ولا يوجد اختلاف في نسق الاستهلاك لأرباب العوائل الذكور أو الإناث، وعليه فإن أفضل تقدير هو المبين في الفقرة (1).

تطبيق (7):

يعطي الجدول التالي كمية الألبان بالآلاف (الوحدة ¼ جالون) التي يوردها أحد المصانع التابعة للشركة العامة للألبان خلال فترة أربعة عشر شهراً عند أسعار مختلف (p). ولو افترضنا أن المصنع واجه نقص في بعض قطع الغيار خلال الشهور الثالث والرابع والخامس والسادس.

المطلوب:

1- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع خلال فترات نقص قطع الغيار وعدم نقص قطع الغيار.

2- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع وفي الميل.

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Q	98	100	82	85	80	87	94	113	116	118	121	123	126	128
P	0.79	0.80	0.92	0.93	0.95	0.96	0.88	0.88	0.90	0.90	0.93	0.94	0.96	0.97
D	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

الحل:

1 - نجري معادلة انحدار الكمية الموردة من الألبان (Q) على السعر (P) وكالآتي:

2 - نرمز للمتغير الوهمي (D = 1) خلال الشهور نقص قطع الغيار و (D = 0) في غير ذلك وكما هو موضح في الجدول أعلاه العمود الخاص بالمتغير الوهمي. وباتباع نفس الخطوات في التطبيقات السابقة لنحصل على كون (D) معنوية إحصائياً عند مستوى أفضل من 1٪ .

12.6 : التطبيقات والتمارين :

لقد تم ذكر التطبيقات في متن الفصل. وأما التمارين فهي كما يلي:

1 - أدناه بيانات عينة من (15) أسرة:

المستوى التعليمي رب الأسرة	الموطن Z_i	الادخار S_i ألف دينار	الإنفاق الاستهلاكي C_iألف دينار	الدخل Y^d الألف بالدينار	الأسرة
عال	حضر	0.2	0.8	1	1
عال	حضر	0.2	1.4	1.6	2
متوسط	ريف	0.3	1.3	1.7	3
بدون	ريف	0.8	2.2	3	4
متوسط	حضر	0.7	2.1	2.8	5
متوسط	حضر	0.7	2.8	3.5	6
عال	حضر	0.9	3.2	4.1	7
بدون	ريف	0.08	0.42	0.5	8
متوسط	ريف	0.1	0.2	0.3	9
متوسط	حضر	0.1	0.5	0.6	10
متوسط	حضر	0.6	0.9	1.5	11
عال	ريف	0.9	1.6	2.5	12
متوسط	ريف	0.6	2.1	2.7	13
بدون	حضر	0.7	2.5	3.2	14
عال	حضر	0.5	1.5	2	15

أوجد ما يأتي:

1- اختبر تأثير الموقع الجغرافي (الموطن) على متوسط الدخل ومتوسط الاستهلاك.

2- اختبر تأثير المستوى التعليمي على متوسط الدخل ومتوسط الادخار.

3- اختبر تأثير الموقع الجغرافي على ما يأتي:

أولاً: الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

ثانياً: جد حد الكفاف الاستهلاكي.

4- اختبر تأثير كل من الموطن والمستوى التعليمي على متوسط الاستهلاك ومتوسط الادخار والميول الحدية للاستهلاك والادخار وحد الكفاف.

2 - قام باحث بإيجاد علاقة انحدارية. جمعها من (50) مريضاً يراجعون العيادات الطبية الخاصة في مدينة ما وهي كما في أدناه.

$$\hat{Y} = 100 + 30\,X_i + u_i$$
$$(20) \quad (0.05)$$

حيث أن: Y_i = متوسط ثمن فحص المريض.

X = 1 إذا كان موقع المجمع الطبي في وسط المدينة.

X = 0 إذا كان موقع المجمع الطبي في ضواحي المدينة.

فهل هناك تمييز سعري في أجور فحص المرضى بين أجزاء المدينة؟

3 - تم تقدير دالة ادخار من بحث ميزانية الأسرة لعينة (50) أسرة وكانت كالآتي:

$$S_i = -20 + 0.3\,Y_d + 0.08\,G_2Y_d + 0.005\,G_3Y_d + u_i$$

حيث أن: S_i = الادخار.

Y_i = الدخل المتاح.

G_2 = 1 إذا كان رب الأسرة بعمر أكثر من (30) سنة وأقل من (50) سنة.

G_2 = 0 إذا كان سن رب الأسرة غير ذلك.

G_3 = 1 إذا كان رب الأسرة أكبر من (50) سنة.

G_3 = 0 إذا كان رب الأسرة غير ذلك.

أوجد الآتي:

1- دالة الادخار لمجموعة الأسر التي تكون سن عائلهم أقل من (30) سنة.

2- دالة الادخار لمجموعة الأسر التي يتراوح سن رب الأسرة بين 30–50 سنة.

3- دالة الادخار لمجموعة الأسر التي يزيد سن رب العائلة عن 50 سنة.

4- جد الاختلاف بين الميول الحدية للادخار بين المجموعة الأولى والثانية وحدد معنوية هذا الاختلاف.

5- اختبر الاختلاف بين الميول الحدية للمجموعة الثانية والثالثة.

4 - قام باحث بتقدير دالة استهلاك للفترة 1970–1995 وكانت كالآتي:

$$Y_i = 120 + 15\ T_{2i} + 0.7\ X_i + 0.05\ T_2 Y_d + u_i$$

حيث أن: Y_i = الإنفاق الاستهلاكي.

T_2 = 1 إذا كانت الفترة بعد عام 1990 (عام فرض الحصار).

T_2 = 0 إذا كانت الفترة قبل عام 1990 (عام فرض الحصار).

فهل توافق على أن هناك اختلاف جوهري في حد الكفاف والميل الحدي للاستهلاك في الفترة قبل وبعد الحصار ولماذا.

5 - وجد باحث بأن ميل دالة تكاليف الإنتاج يتغير عندما يصل الإنتاج اليومي للعصائر إلى (5) ألف صندوق، وإذا ما علمت بأن البيانات المتاحة عن حجم الإنتاج (X_i) وتكاليفه الكلية (Y_i) لعشرة شركات كانت كما هو مبين في أدناه جد دالة التكاليف المنكسرة وفسر معاني معلماتها الاقتصادية.

حجم الإنتاج (ألف صندوق)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
تكاليف الإنتاج (ألف دينار)	8	16	24	32	40	60	70	80	90	100

6 - كانت مبيعات الطماطم (Q) ومتوسط أسعارها (P) بالدرهم خلال فصول السنة الأربعة لمدة ثلاث سنوات كالآتي:

السنة	الربع الأول		الربع الثاني		الربع الثالث		الربع الرابع	
	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P
1990	100	30	150	40	120	30	80	30
1991	150	20	200	40	180	50	100	50
1992	200	30	250	50	220	60	180	60

قدر دالة المبيعات مستخدماً الصيغة الآتية وفسر المعنى الاقتصادي للدالة.

$$Y_i = a + bX_i + cZ_2 + gZ_3 + hZ_4 + u_i$$

حيث أن: $Z_2 = 1$ في الفصل الثاني.

$Z_2 = 0$ في الفصل الأولى.

$Z_3 = 1$ في الفصل الثالث.

$Z_3 = 0$ في الفصول الأخرى.

$Z_4 = 1$ في الفصل الرابع.

$Z_4 = 0$ في الفصول الأخرى.

7 - في الجدول أدناه التوزيع النسبي للناتج القومي بين القطاعات الإنتاجية المختلفة في دولة ما للأعوام 1950-1990.

القطاعات	199 ٪	1996 ٪
1- صناعة استخراجية	40	10
2- صناعة تحويلية استهلاكية	10	30
3- صناعة تحويلية إنتاجية	10	25
4- زراعة	15	15
5- خدمات	25	20
المجموع ٪	100	100

المطلوب:

1- حدد معامل الارتباط الرتبي بين التوزيعين.

2- تحديد التغير الهيكلي الحاصل ومقداره من خلال معامل الارتباط.

الحل:

1- ترتب القطاعات تنازلياً حسب أهميتها النسبية وكما هو وارد في الجدول (6).

2- في حالة تساوي قطاعين إنتاجيين في الرتبة يقوم بقسمة الرتبتين على (2) ونرصد متوسط الرتبة لهما.

جدول (6)

حساب معامل الارتباط الرتبي

القطاع	A	B	C	D	E
ترتيب 1950	1	$\frac{4+5}{2} = 4.5$	$\frac{4+5}{2} = 4.5$	3	2
ترتيب 1980	5	1	2	4	3
الفرق بين الرتب:					
D	- 4	3.5	2.3	- 1	- 1
D^2	16	12.25	6.25		
$\sum D^2 = 36.5$					

معامل الارتباط الرتبي $R_s = 1 - \frac{6 \times 36.5}{5\,(25-1)} = 1 - \frac{219}{120} = -0.8$ ويظهر معامل الارتباط السالب وجود ارتباط قوي بين الترتيبين لكنه عكسي، وهو دليل على أن هناك تغيير هيكلي كبير قد حدث في اقتصاد الدولة وباتجاه معاكس.

النماذج القياسية اللاخطية البسيطة والمتعددة

13

Non-Linear Econometric Models

النماذج القياسية اللاخطية البسيطة

Simple Non-Linear Econometrics Models

13.1 : مفهوم وأهمية النماذج القياسية اللاخطية :

إن النماذج الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية والإدارية قد أعطيت مكانتها العلمية في الدراسة والتطبيق ولكن النماذج الغير خطية لم تعطى مثل تلك الأهمية. ولهذا جاء هذا الفصل والفصل الرابع عشر ليغطي وبإسهاب أهمية ومسببات استخدام النماذج الغير خطية في المجالات الإدارية والاقتصادية في فصلين. يتناول المبحث الأول من الفصل الثالث عشر منها الأهمية والمسببات في حين المبحث الثاني منه جاء ليغطي أنواع النماذج الغير خطية البسيطة وبصورة تفصيلية وتطبيقية. أما الفصل الرابع عشر فهو توسع للفصل الثالث عشر حيث شمل النماذج الغير خطية المتعددة. وهذا ما سنقوم به تباعاً وكما يلي:

13.1.1 : مفهوم النموذج اللاخطي (غير الخطي) :

العلاقات الخطية بين الظواهر الاقتصادية علاقات شائعة وذات استخدام واسع، إلا أن هناك الكثير من العلاقات اقتصادية بين المتغيرات التي لا تأخذ طابعاً خطياً، ويخطأ الباحث بالتأكيد، عندما يلجأ إلى سهولة التقدير، ومنها القفز من فوق العلاقات غير الخطية إلى الخطية، مما ينتج عنه أخطاء جسيمة في التقدير ودرجة المعنوية، ويخالف بذلك كل الفروض الضرورية للقياس. وأخيراً فإن توقعاته ستكون منحازة جداً، إما إلى الأعلى أو إلى الأسفل، وينتج عن ذلك خللاً في سياسة المنشأة أو الشركة أو القطاع أو القطر.

فهناك الكثير من الحالات التي تظهر فيها العلاقات بين متغير تابع والمتغيرات المستقلة على أشكال غير خطية، وذلك نابع من طبيعة العلاقة ذاتها واتجاهها وتأثير المتغيرات إحداهما على الأخرى.

فعندما نحصل على تقديرات غير متناسبة لـ (Y) قياساً إلى (X) وذلك بالمقارنة مع المشاهدات الحقيقية، وعندما نجد أن معامل الارتباط قد يكون منخفضاً وأن الخطأ المعياري للتقدير كبيراً، فذلك قد يكون دليلاً على عدم صحة توفيقنا للنموذج الصحيح للعلاقة بين المتغيرات. وهذا ناتج عن زيادة كبيرة في تشتت القيم حول متوسطاتها. وينبع هذا الناتج من ارتفاع قيم الانحرافات المعيارية للمتغيرات قياساً إلى التباين بينهما، أو أن القدرة التفسيرية للمتغيرات المستقلة ستكون منخفضة بسبب عدم دقة توليف النموذج، وكذلك الحال عندما ترتفع قيمة (S_{YX}) وتنخفض قيمة (S_Y^2) أو عندما تزداد قيمة $(\sum e_i^2)$ قياساً إلى المعهود.

وينبع ذلك من انحراف القيم المشاهدة عن المقدرة انحرافاً كبيراً بسبب سوء توفيق النموذج.

ونعني بالنموذج اللاخطي الحالات الآتية:

1- عندما تتزايد أو تنخفض القيمة المشاهدة للمتغير التابع بوتيرة أسرع من وتيرة زيادة أو انخفاض القيم المشاهدة للمتغيرات المستقلة في حالة العلاقة الطردية.
2- عندما تتزايد أو تنخفض القيمة المشاهدة للمتغير التابع بوتيرة أسرع أو أبطأ من وتيرة انخفاض أو زيادة القيم المشاهدة للمتغيرات المستقلة في حالة العلاقة العكسية.
3- وفي مثل هذه الحالات فإن الشكل الانتشاري لا يعطي صورة عن وجود علاقة خطية بل علاقة غير خطية بشكل خطوط منحنية إلى الأعلى أو الأسفل، أو تأخذ شكل موجة (Directed)، أو قطع مكافئ أو قطع ناقص أو منحنى من المنحنيات الواردة في الأشكال رقم (1 إلى 34).

4- أن يكون مجموع مربعات الخطأ أقل منه في الخط المنحني قياساً للخط المستقيم.

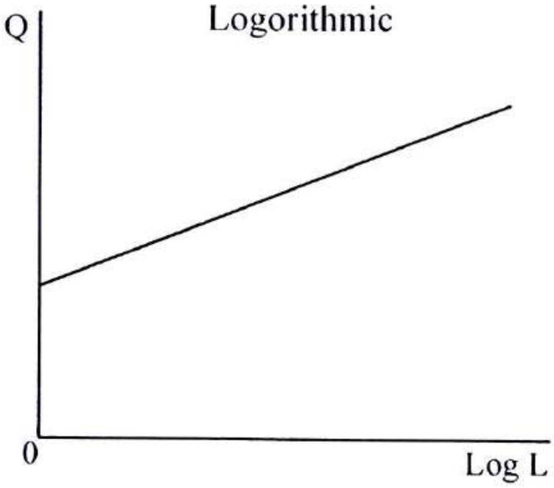
13.2 : أهمية النماذج اللاخطية في الدراسات الاقتصادية والإدارية :

للنماذج اللاخطية أهمية كبيرة في الممارسة الاقتصادية وخاصة في تلك الحالات التي ستأخذ متغيراتها علاقات غير خطية كما هو الحال في دوال الكلف ودالات الإنتاج ودالة المنفعة ودوال الطلب الأسية وغيرها من النماذج التي تكون فيها العلاقة بين متغير واحد تابع وواحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

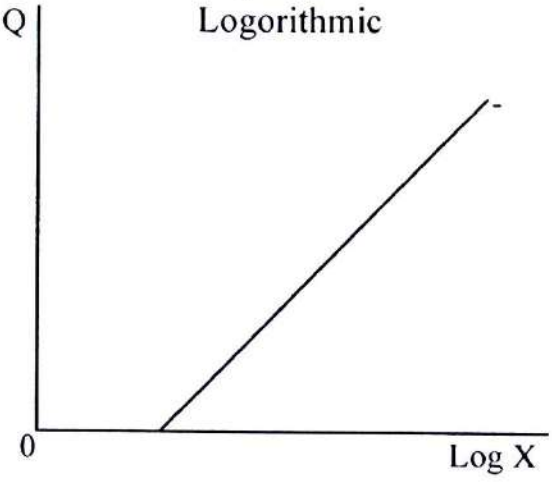
والفائدة التي نجنيها من استخدام مثل هذه النماذج هو الآتي:

1- صحة الوصف والتفسير للعلاقة بين المتغيرات.
2- التحليل العلمي والمنطقي.
3- دقة التقديرات الخاصة بالنموذج ومعلماته والتي تحقق الفروض الرئيسية للنماذج الخطية مثل أقل تباين ومتوسط صفري للخطأ العشوائي.
4- دقة التنبؤات وعلميتها والتي تستند على تحليل واقعي باستخدام الأدوات المناسبة.
5- تجنب الوقوع في أخطاء قياسية واقتصادية قد تكون عواقبها وخيمة على المنشأة أو القطاع أو الاقتصاد الوطني.

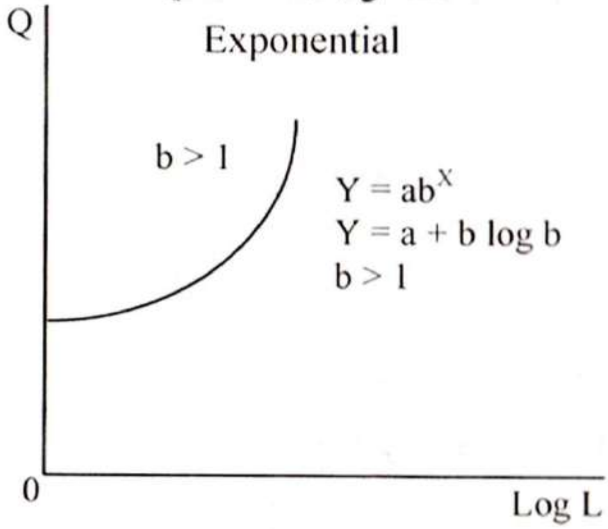
شكل (1): دالة لوغارتمية بعد تحويلها



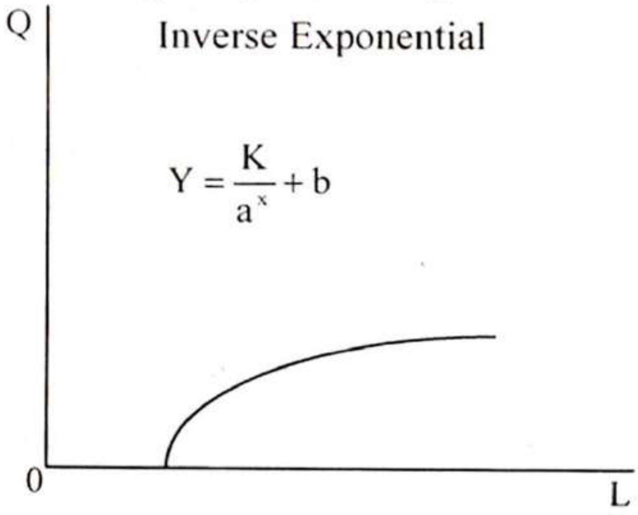
شكل (2): منحنى خطي لدالة لوغارتمية



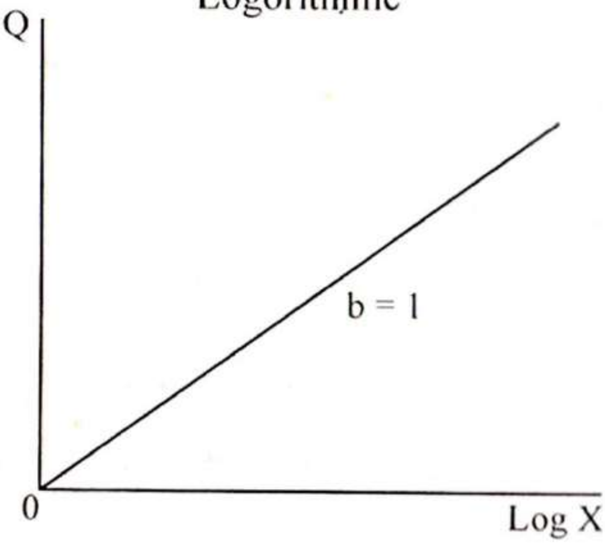
شكل (3): دالة أسية



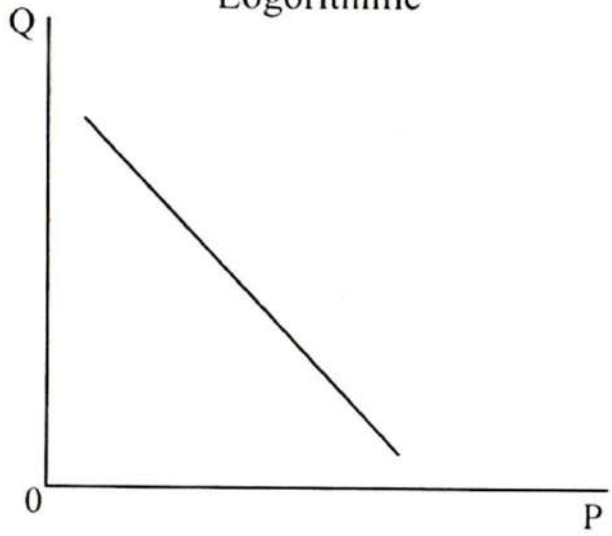
شكل (4): دالة اسية مقلوبة



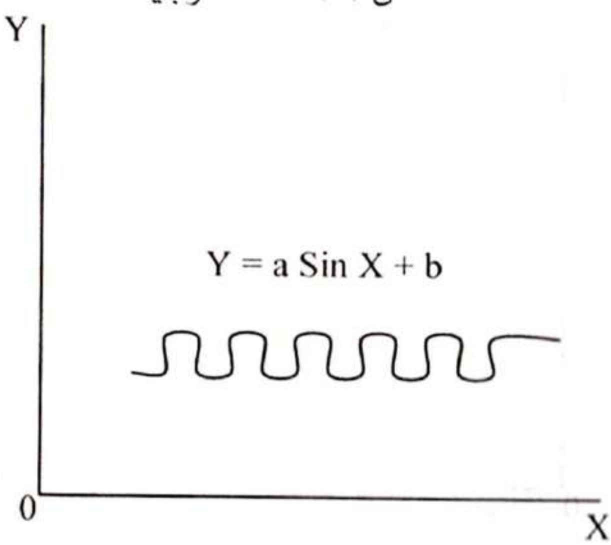
شكل (5): منحنى خطي لدالة لوغاريتمية



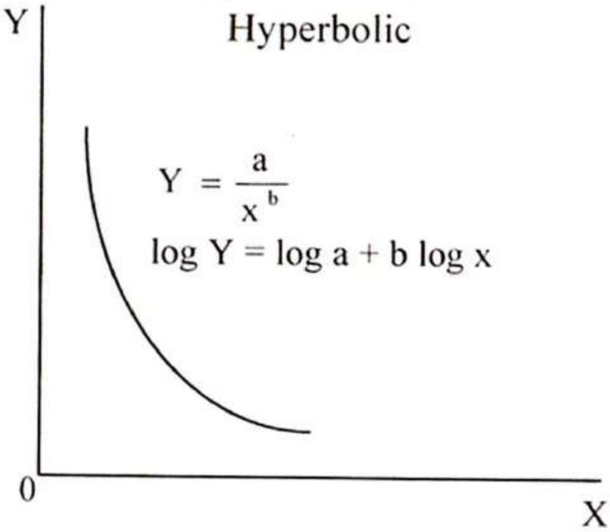
شكل (6): منحنى خطي لدالة لوغاريتمية



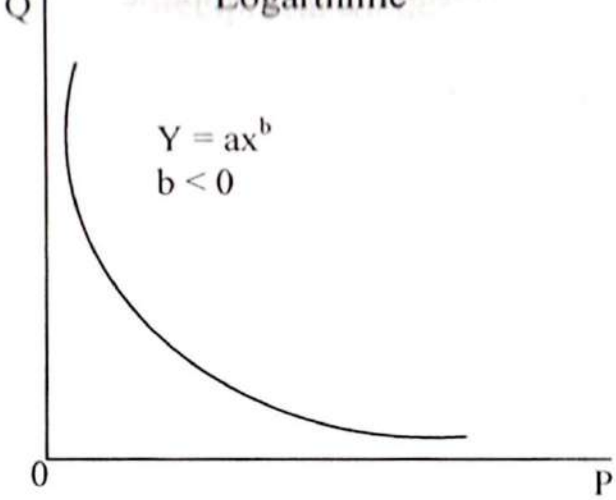
شكل (7): دالة تموّجية



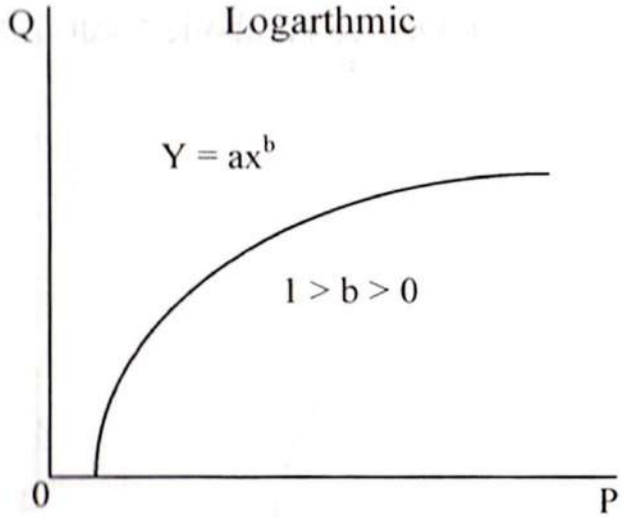
شكل (8): دالة قطع زائد



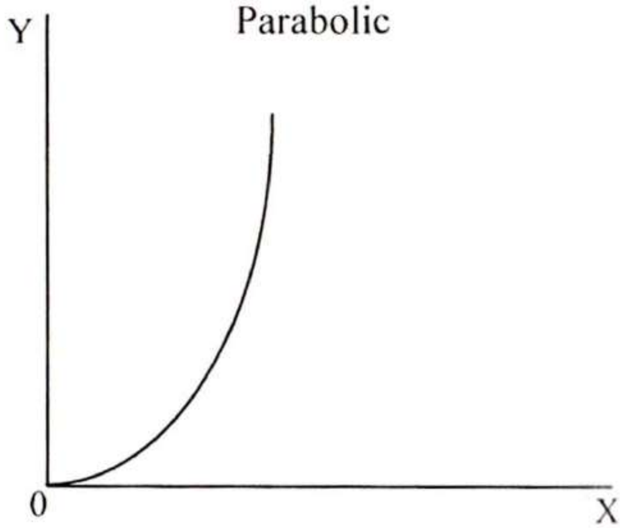
شكل (9): منحنى لوغارتمي
Logarthmic



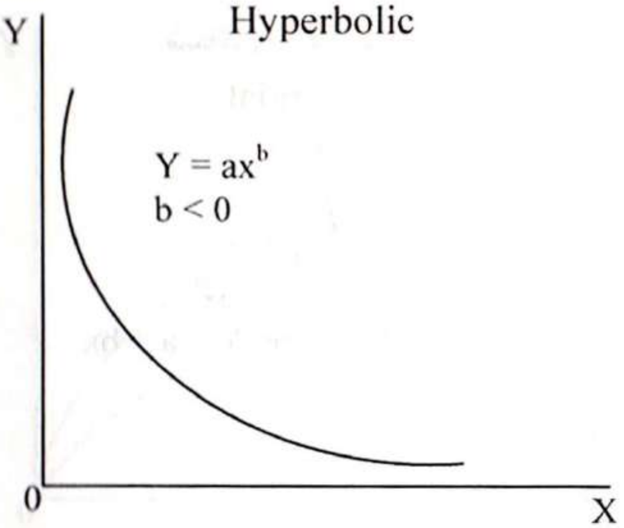
شكل (10): منحنى لوغارتمي
Logarthmic



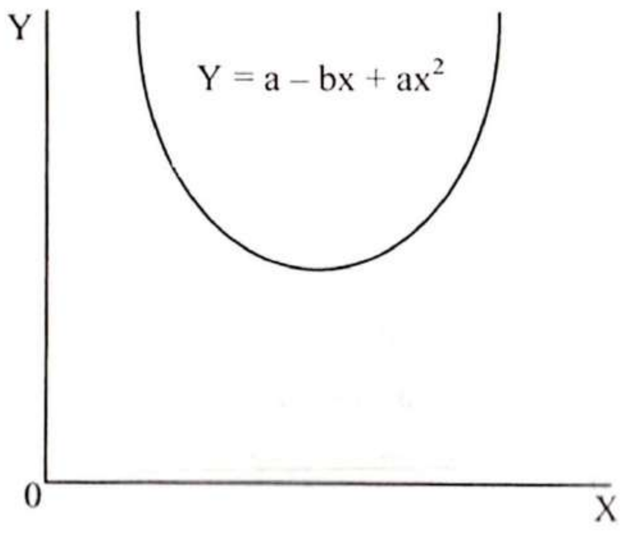
شكل (11): دالة قطع مكافئ
Parabolic



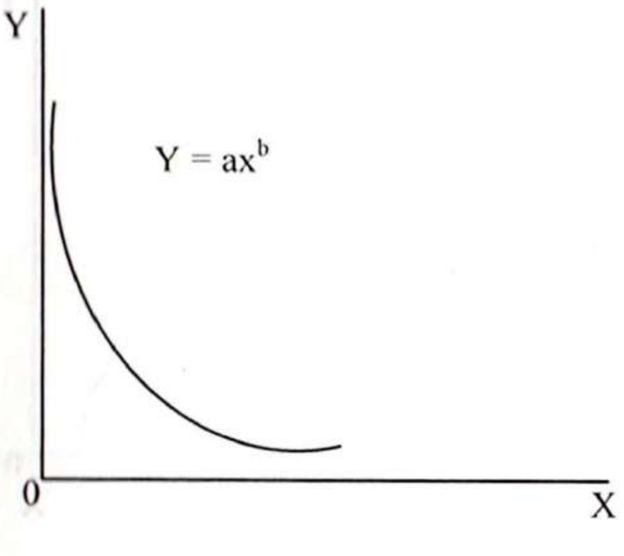
شكل (12): دالة قطع زائد
Hyperbolic



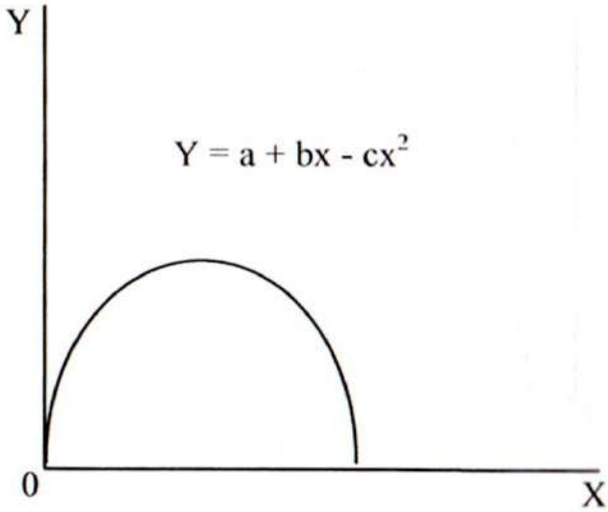
شكل (13): نموذج قطع مكافئ من الدرجة الثانية Second Degree Parabolic



شكل (14): دالة قطع زائد
Hyperbolic

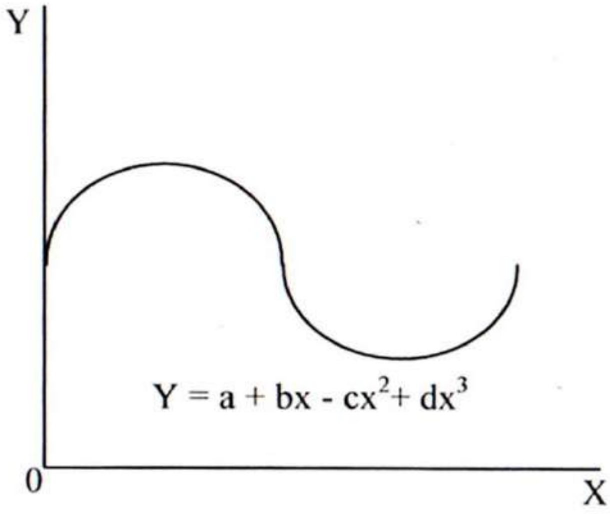


شكل (15): دالة قطع مكافئ من الدرجة الثانية Second Degree Parabolic



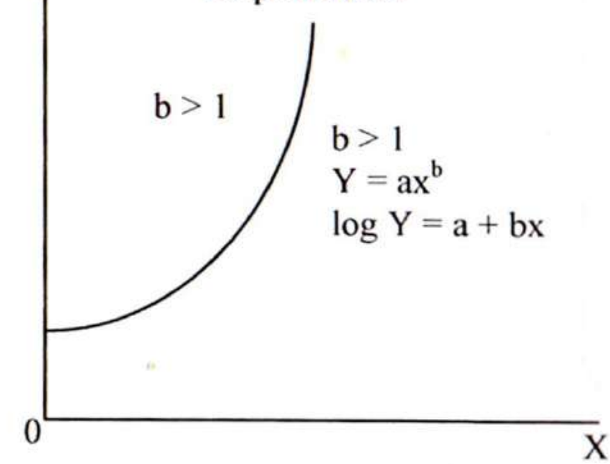
شكل (16): دالة قطع مكافئ من الدرجة الثالثة

Third Degree Parabolic



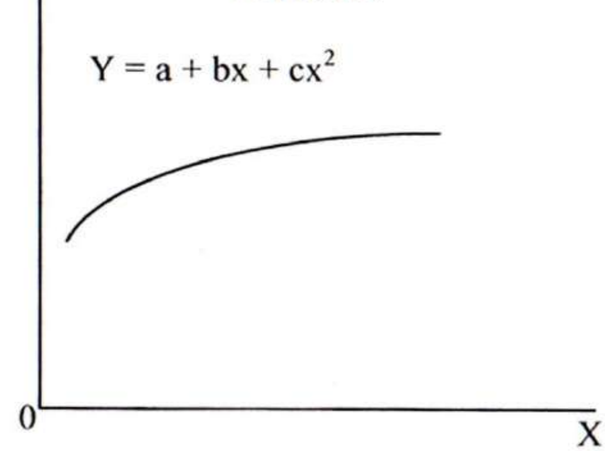
شكل (17): دالة أسية

Exponential

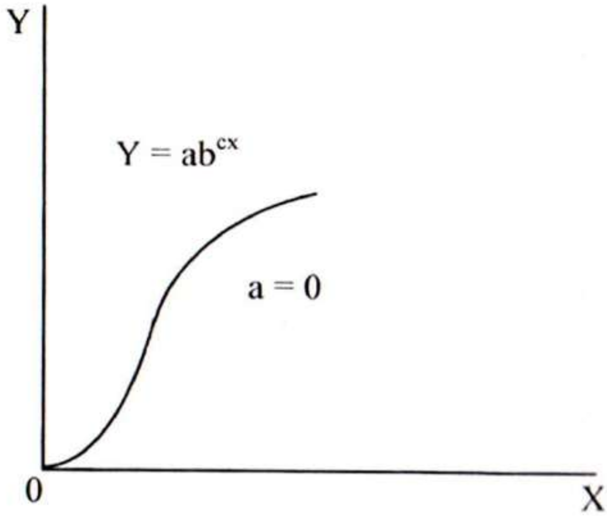


شكل (18): نموذج قطع مكافئ

Parabolic

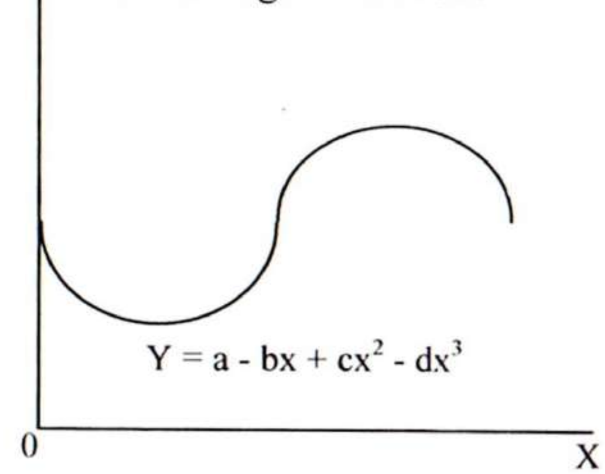


شكل (19): نموذج لوغارتمي



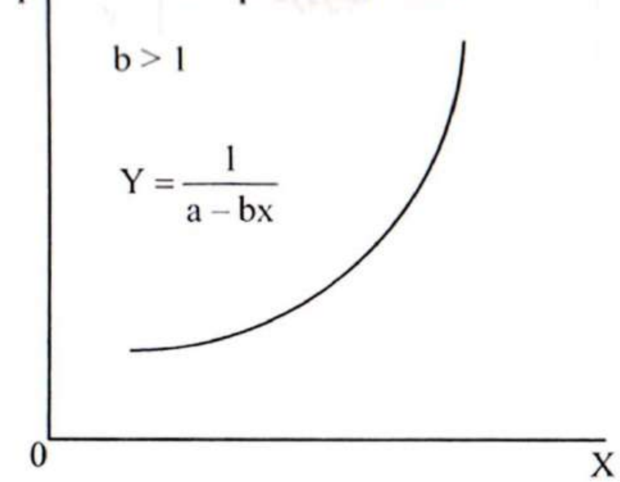
شكل (20): دالة قطع ثنائي من الدرجة الثالثة

Third Degree Parabolic

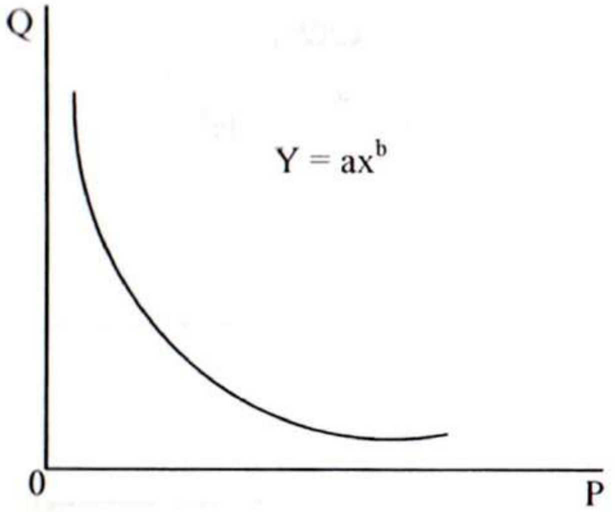


شكل (21): النموذج المقلوب

Reciprocal Model

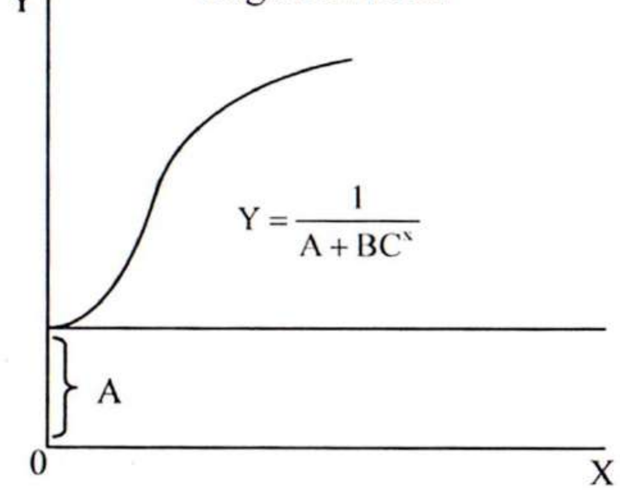


شكل (22): دالة قطع زائد



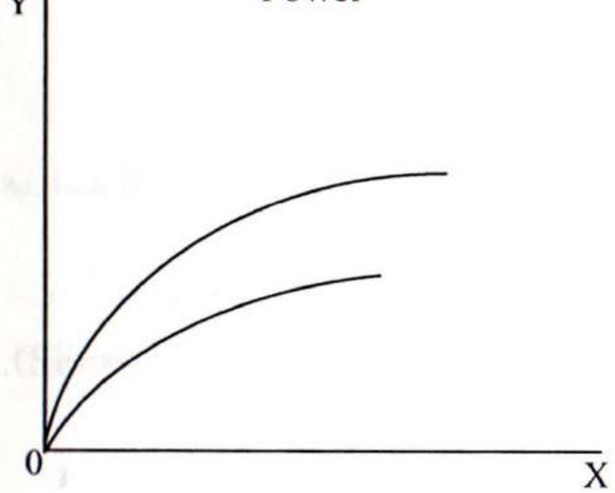
شكل (23): نموذج لوجستي

Logistic Model



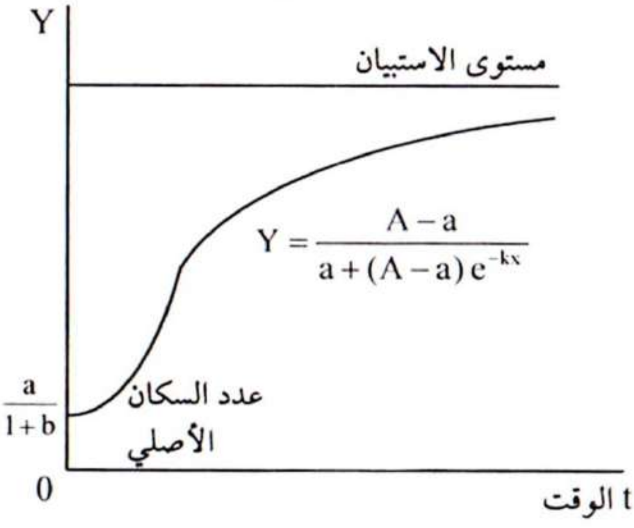
شكل (24): نموذج قطع مكافئ من الدرجة الثانية

Power



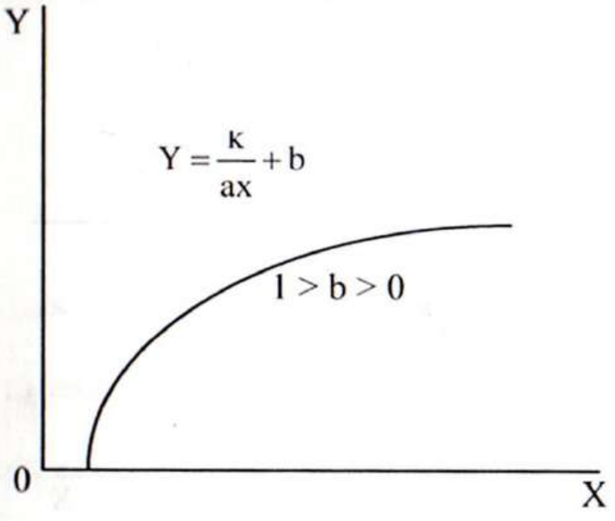
شكل (25): نموذج لوجستي

Logistic Model

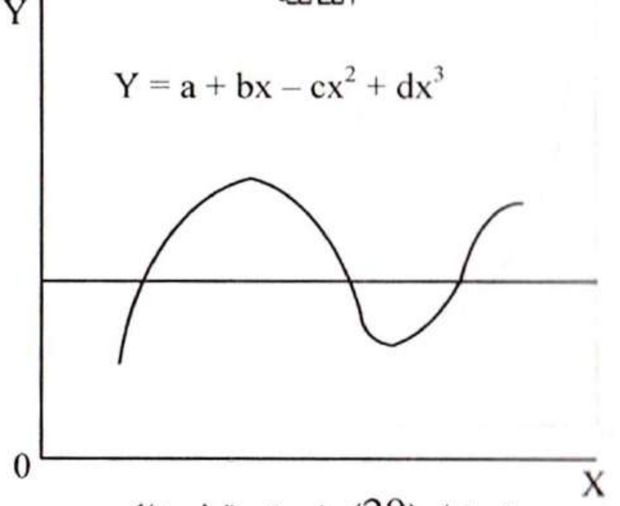


شكل (26): النموذج الأسي المقلوب

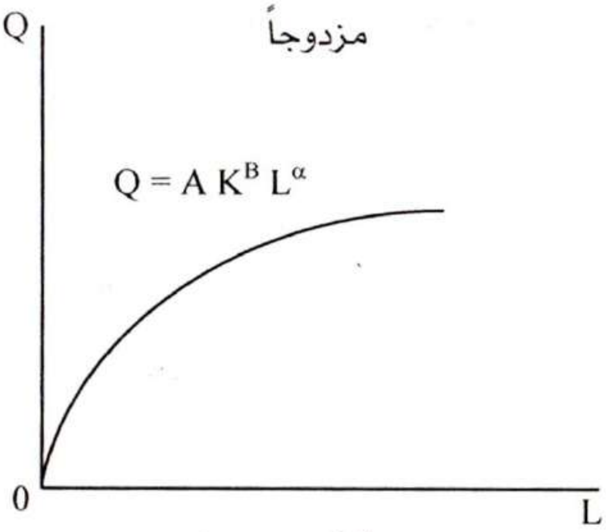
Inverse Exponential



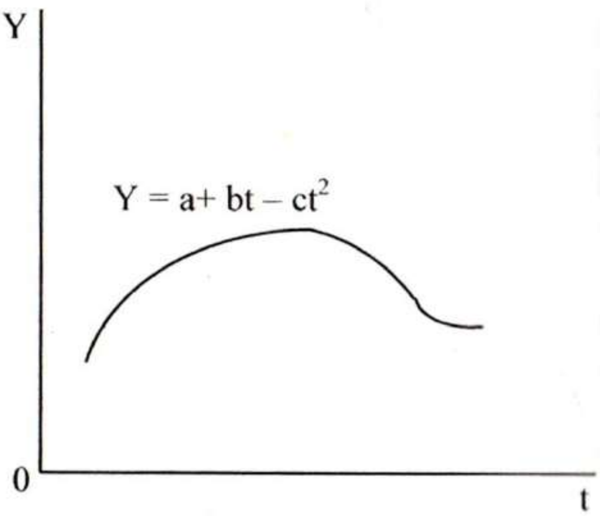
شكل (27): دالة مقطع مكافئ من الدرجة الثالثة



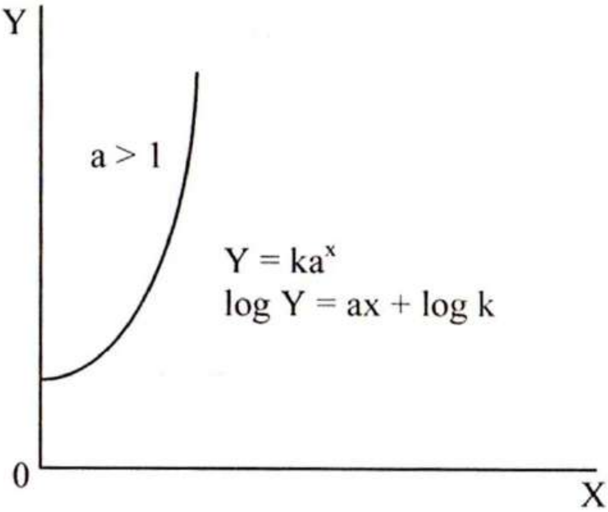
شكل (28): نموذج دالة الإنتاج اللوغارتمية مزدوجاً



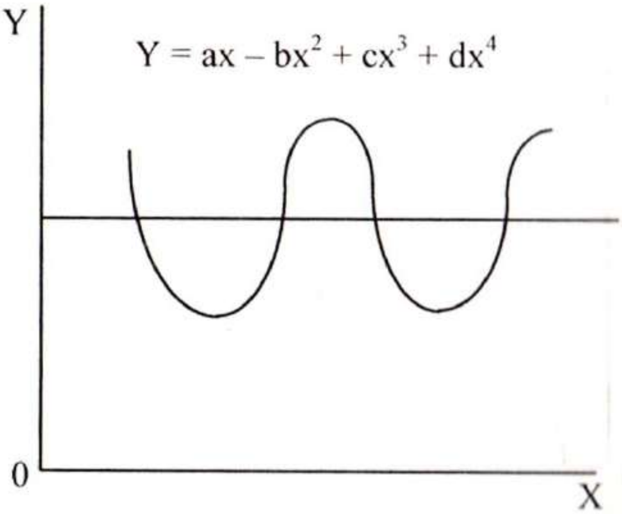
شكل (29): نموذج قطع زائد



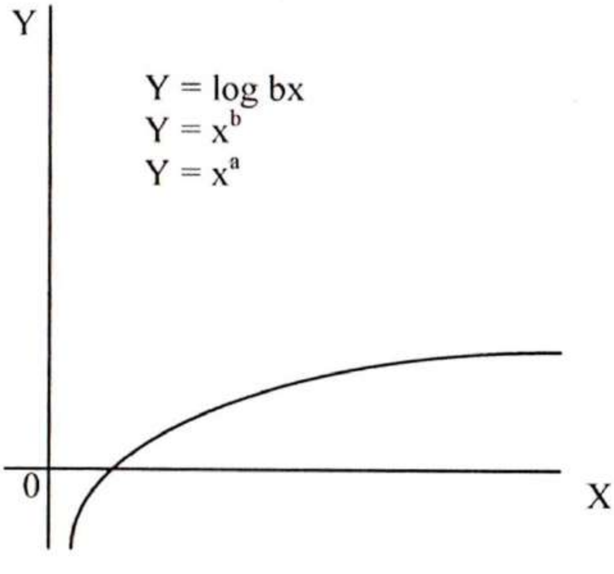
شكل (30): نموذج أسي



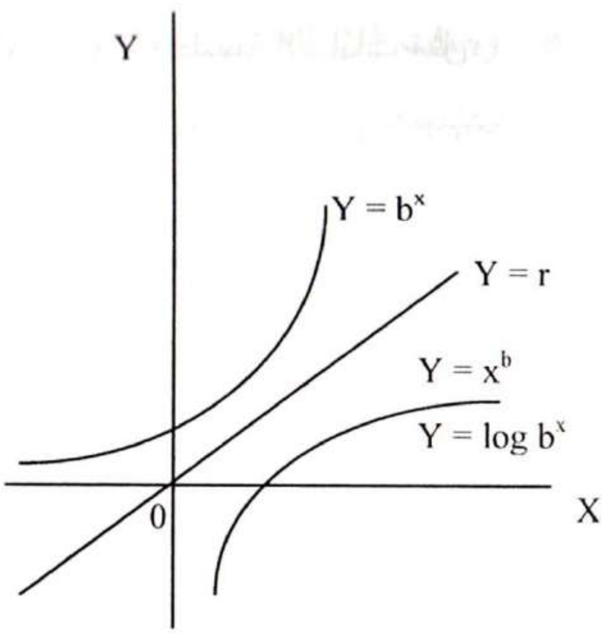
سكل (31): دالة قطع مكافئ من الدرجة الرابعة



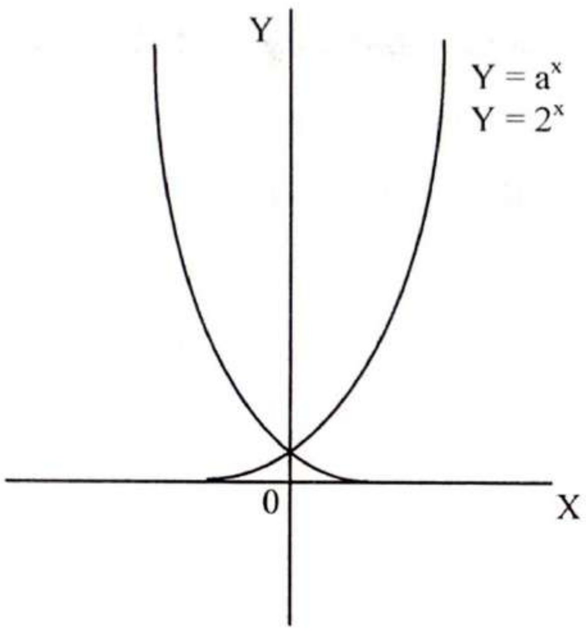
شكل (32): نموذج لوغارتمي



شكل (33): نموذج لوغارتمي



شكل (34): نموذج أسي



13.2 أنواع النماذج اللاخطية:

هناك مجموعتان رئيسيتان من النماذج اللاخطية في الممارسة الاقتصادية والإحصائية وهما:

1- النماذج القياسية اللاخطية البسيطة (Simple Non Linear Models). وستكون محور للدراسة في هذا الفصل.

2- النماذج القياسية اللاخطية المتعددة (Multiple Nonlinear Models). وستكون محور للدراسة في الفصل الرابع عشر، وسنقوم بشرح هذين النموذجين تباعاً:

13.3 : النموذج البسيط اللاخطي :

13.3.1 : أسس النموذج اللاخطي (مكونات) :

تقوم أسس النموذج اللاخطي على وجود علاقة بين متغيرين فقط، أحدهما مستقل (X_i) والآخر تابع (Y_i)، لكن قيم (X_i) لا تأخذ درجة واحدة، بل تكون درجتها أكثر من واحد، وذلك عندما تتكرر قيم (X) لكنها تتكرر بدرجات

متفاوتة في النموذج ذاته، درجة أولى فثانية فثالثة وهكذا، شريطة ألا تتكرر درجة معينة لمتغير واحد أكثر من مرة، وذلك نابع من طبيعة البيانات مثل:

$$Y = a + bX + cX^2 + gX^3$$

حيث أن: X : المتغير التابع من الدرجة الأولى:

X_2 : المتغير التابع ذاته لكن من الدرجة الثانية.

X_3 : المتغير التابع نفسه لكن من الدرجة الثالثة.

ويتألف النموذج من عدة مقاطع وهي:

Y : المتغير التابع.

a : المقطع الذي يقطعه منحنى النموذج على الإحداثي Y. وقد يأخذ القيم (صفر) في بعض الأحيان، ومثاله الكلفة المتغيرة الكلية والمتوسطة.

b : معلمة المتغير المستقل من الدرجة الأولى، وهو يساوي ميل منحنى النموذج ويبين وحدات التغير في (Y) مقابل وحدات التغيير في (X).

X : التغيرات التابع لكل بدرجات مختلفة.

c : التغيرات في الميل لكل وحدة من (X).

g : التغيرات في ميل الميل لكل وحدة من (X).

وغالباً ما تأخذ (b) و (c) إشارات متقاطعة. فعندما تكون (b) موجبة تكون (c) سالبة في النموذج ذاته. وعندما تكون (b) سالبة تكون (c) موجبة في النموذج ذاته. وتكون لبعض النماذج نهايات عظمى أو صغرى كالنموذج من الدرجة الثانية.

$$Y = a + bX + cX^2$$

فهو يصل إلى نهايته العظمى عندما يكون (b) موجباً وتكون (c) سالبة. ويصل إلى نهايته الصغرى عندما يكون (b) سالباً و(c) موجبة. فعندما يرتفع

المنحنى في نقطة الشروع يكون (b) موجباً أو عندما يصل إلى نقطة عظمى تكون (b) قد وصلت إلى الصفر ويكون (c) سالباً لأنه يبدأ فعله بعد وصول (b) إلى لاصفر. وعندما ينخفض المنحنى من نقطة الشروع يكون (b) سالباً، وعندما يصل إلى نقطة صغرى تكون (b) قد وصلت إلى الصفر وتكون (c) موجبة لأنه يبدأ فعله عند وصول (b) إلى الصفر.

13.4 : النماذج البسيطة اللاخطية الشائعة الاستعمال :

هناك عدة نماذج بسيطة لاخطية شائعة في الممارسة الاقتصادية والإدارية، منها:

1- نموذج القطع (المكافئ) من الدرجة الثانية (Second Degree Parabola) وتأخذ الصيغة الآتية:

$$Y = a + bX - cX^2$$

$$Y = a + bx + cX^2 \qquad Y = a - bX + cX^2$$

2- نموذج القطع المكافئ من الدرجة الثالثة (Third Degree Parabola) ويأخذ الشكل العام الآتي:

$$Y = a + bX + cX^2 + gX^3$$

3- النموذج اللوغاريتمي المزدوج (Double Logarithmic) أو النموذج الأسي وصيغته كالآتي:

$$Y = aXb_{e}^{u}$$

4- النموذج شبه (نصف) اللوغاريتمي Exponential or semi Logarithmic، ويأخذ أحد الصيغتين:

$$Y = abx \qquad \text{or} \qquad \log Y = a + bX$$

5- النموذج المقلوب (Reciprocal Transformation) وصيغته الآتية:

$$Y = a + b/X$$

6- نموذج القطع الزائد Hyperbola ويأخذ الصيغة الآتية:

$$Y = \frac{a}{X^b}$$

7- النموذج اللوجستي Logistic Models وصيغته هي:

$$Y = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

وتستخدم هذه النماذج لشرح نظرية مالثوس في المجاعة مستخدمة بيانات السلاسل الزمنية. وهناك عدة تحويرات لهذه النماذج لا مجال لذكرها جميعاً ونكتفي بهذه النماذج لأنها الشائعة في الممارسة الاقتصادية والإدارية، وهي كما يلي:

13.5 : نموذج القطع المكافئ (Parabola) :

وهي على نوعين:

a) نموذج القطع المكافئ من الدرجة الثانية (**Second Degree Parabola**):

وهو نموذج يمثله شكل يكون انحناءه إلى أعلى أو إلى أسفل. أو من الأسفل إلى الأعلى والذي يمثله النموذج القياسي بالصيغة الجبرية الآتية:

$$Y = a + bX + cX^2 + u_i \qquad \ldots \qquad (1)$$

وهو نموذج أقرب ما يكون إلى النموذج الخطي لكنه غير خطي ويأخذ شكل منحنى واحد ويمكن حله باستخدام المعادلات الطبيعية الآتية:

$$\sum Y_i = na + b\sum X_i + c\sum X_i^2 \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$\sum X_i Y_i = a\sum X_i + b\sum X_i^2 + c\sum X_i^3 \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$\sum X_i^2 Y_i = a\sum X_i^2 + b\sum X_i^3 + c\sum X_i^4 \qquad (4)$$

حيث أن: a = المقطع الذي يقطعه المنحنى على الإحداثي (Y).

b = ميل الخط ويمثل عدد وحدات التغير في Y_i لكل وحدة في (X_i).

c = التغير في الميل لكل وحدة من (X_i) ويأخذ عادة إشارة معاكسة لإشارة (b).

تطبيق (**1**):

في الجدول (1) بيانات عن دالة الإنتاج في الأمد القصير عن عدد العاملين وإنتاجيتهم الحدية. وفق النموذج القياسي لهذه العلاقة واختبر معلماته.

الحل:

أولاً: نرسم الشكل الانتشاري شكل (35) ومنه يتبين أن العلاقة تأخذ شكل مقطع مكافئ من الدرجة الثانية.

ثانياً: نقوم بحساب المؤشرات الرئيسية الضرورية للحل بالمعادلات الآنية (الطبيعية) وكالآتي:

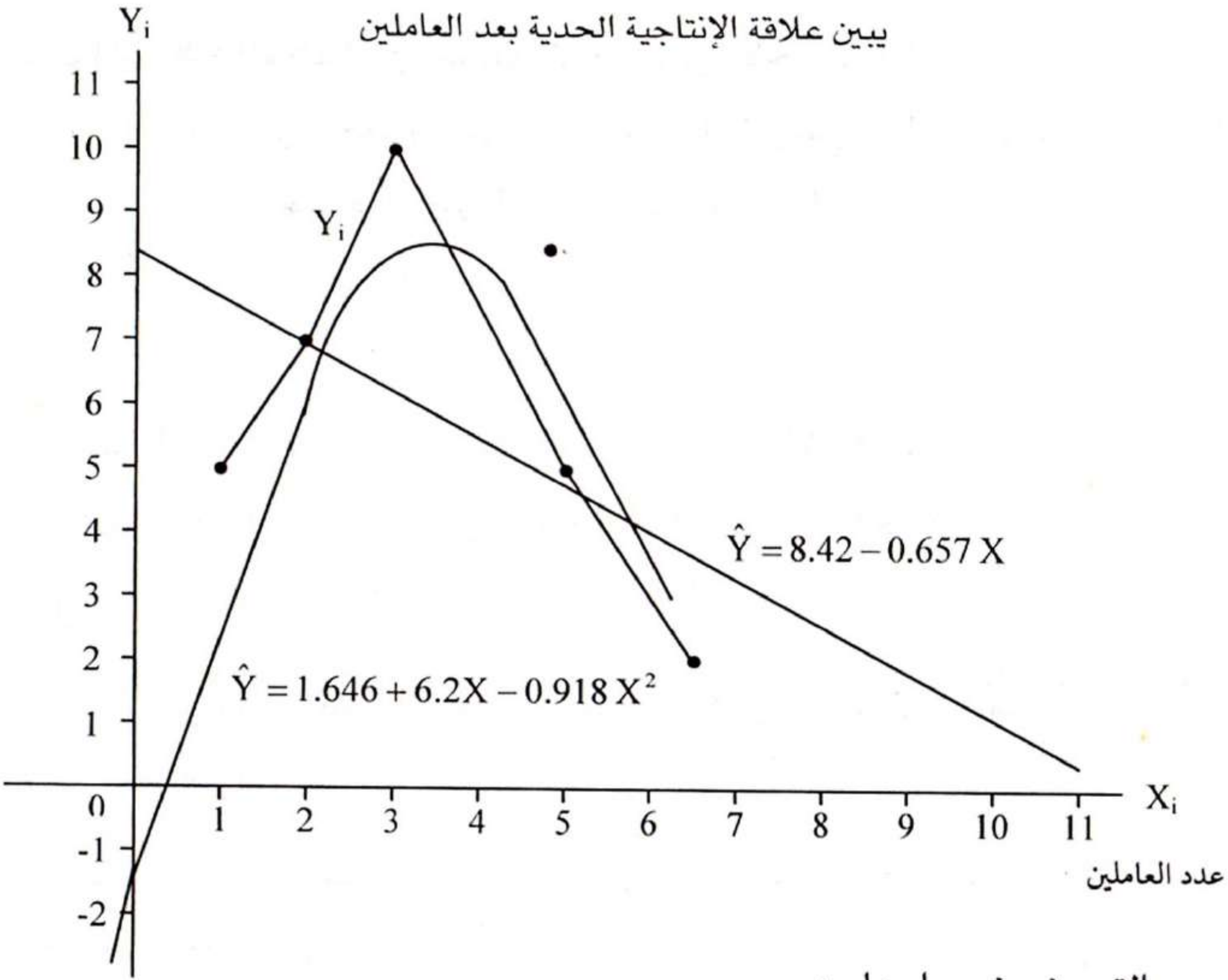
جدول (1)

يوضح نموذج القطع المكافئ من الدرجة الثانية

عدد العاملين X_i	الإنتاجية الحدية Y_i	X_i^2	X_i^3	X_i^4	X_iY_i	X_2Y	$\hat{Y}$	$u_i = e_i = (Y-\hat{Y})^2$	$U_i^2 = e_i^2 = (Y-\hat{Y})^2$
1	5	1	1	1	5	5	3.6	+1.4	1.96
2	7	4	8	16	14	28	7.1	- 0.1	0.01
3	10	9	27	81	30	90	8.7	+1.3	1.69
4	8	16	64	256	32	128	8.5	- 0.5	0.25
5	5	25	125	625	25	125	6.5	- 1.5	2.25
6	2	36	216	129	12	72	2.6	- 0.6	0.36
$\sum X_i =$ 21	$\sum Y_i =$ 37	$\sum X_i^2 =$ 91	$\sum X_i^3 =$ 441	$\sum X^4 =$ 2275	$\sum X_iY_i =$ 118	$\sum X_i^2Y_i =$ 448	$\sum \hat{Y}_i =$ 37	$\sum e_i =$ 0	$\sum e_i^2 =$ 6.27

شكل (35)

يبين علاقة الإنتاجية الحدية بعدد العاملين



بالتعويض نحصل على:

$37 = 6a + 21\,b + 91\,c$ … (2)

$118 = 21\,a + 91\,b + 441\,c$ … (3)

$448 = 91\,a + 441\,b + 227\,c$ … (4)

نضرب المعادلة (2) في (3.5) ونطرح المعادلة (3) منها وكالآتي:

$129.5 = 21a + 73.5b + 318.5c$

$118.0 = 21a + 91.0b + 441.0c$

$11.5 =- 17.5\,b - 122\,c$ … (5)

نضيف المعادلة (1) إلى المعادلة (2) ونضربها في (3) ونطرح منها المعادلة (4).

معادلات [(2) + (1)] $\therefore\ 155 = 27\,a + 112\,b + 531\,c$

$$465 = 91\,a + 336\,b + 1553\,c \qquad [(2) + (1)] * 3$$

$$(-)\ 448 = 91\,a + 441\,b + 2275\,c$$

$$\therefore\ 17 = -\,105\,b - 682\,c \qquad \ldots \qquad (6)$$

نضرب المعادلة (5) في (6–) ونجمعها مع المعادلة (6) لنحصل على:

$$(+) - 69 = +\,105\,b + 735\,c \qquad \ldots \qquad (7)$$

$$-\,52 = 53\,c$$

$$\hat{c} = -0.91811$$

نعوض عن ($\hat{c}$) في المعادلة (7) لنحصل على:

$$-\,69 = 105\,b - 721.13$$

$$652.13 = 105\,b$$

$$\hat{b} = 6.21076$$

نعوض عن قيمتي ($\hat{b}$) و ($\hat{c}$) في المعادلة (2) فيها نحصل على:

$$37 = 6\,a + 130.426 - 83.548$$

$$-9.87799 = 6\,a$$

$$\hat{a} = -1.646$$

بهذا سيأخذ النموذج القياسي القيم الآتية:

$$\hat{Y}_1 = 1.646 + 6.21076\,X - 0.91811\,X^2$$

ومنها نحصل على: $S^2_{Y\cdot XX^2} = 6.27$

حيث أن $S^2_{Y\cdot XX^2}$ عبارة عن مجموع مربعات الخطأ (بوجود X و Y).

ومنه نحصل على الخطأ المعياري للتقدير وهو:

$$S_{Y\cdot XX^2} = \sqrt{\frac{6.77}{6}} = 1.02225$$

ونجد هنا أن إشارة (b) موجبة و (c) سالبة لأن للدالة نهاية عظمى. وعندما نوفق البيانات الواردة كمعادلة خطية سنجد الآتي:

$$37 = 6\,a + 21\,b \qquad \ldots \qquad (8)$$

$$118 = 21\,a + 91\,b$$

ومنها نحصل على:

$$129.5 = 219 + 73.5\,b$$

$$118.0 = 21\,a + 91.0\,b$$

$$11.5 = 17.5\,b$$

$$\hat{b} = -0.657$$

نعوض (b) في المعادلة (8):

$$37 = 69 - 13.8$$

$$\hat{a} = 8.47$$

ويكون شكل النموذج الخطي كالآتي:

$$Y_i^2 = 8.47 - 0.657 \qquad \ldots \qquad (10)$$

وعند التعويض بهذا النموذج ستقابلها القيم الآتية:

جدول (2)

يوضح حسب معادلة انحدار Y على X باعتبار أن العلاقة بينهما من الدرجة الأولى

X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$	$\sum e_i^2$
1	5	- 78	- 1.8	3.24
2	7	7.2	- 0.2	0.04
3	10	6.5	+ 3.5	12.25
4	8	5.8	+ 2.8	7.84
5	5	5.2	- 0.2	0.04
6	2	4.5	- 2.5	6.25
$\sum X_i = 21$	$\sum Y_i = 37$	$\sum \hat{Y}_i = 37$	$\sum e_i = +1.6$	$\sum e_i^2 = 29.66$

$$S_{YX}^2 = \frac{29.66}{6} 4.943$$

$$S_{YX} = \sqrt{4.943} = 2.223$$

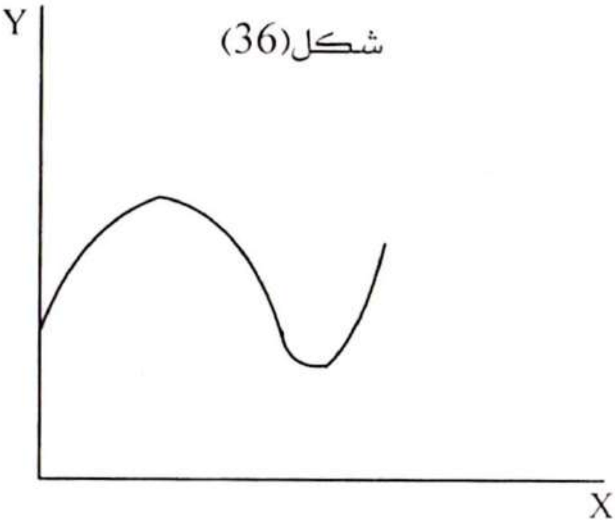
وهو رقم أكبر بكثير من الذي حصلنا عليه عند استخدام نموذج القطع المكافئ مما يدل على صحة الحسابات أضف إلى أن $\sum u_i = \sum e_i \neq 0$

ويمكن للقارئ الكريم اختبار الفروض على الطريقتين وإجراء المقارنة. هذا ومن الملاحظ وكما ذكرنا سالفاً أن إشارة (b) هناك تكون موجبة و (c) تكون سالبة ولذلك فلدينا نقطة عظمى Maximum. أما عندما يكون لدينا نقطة دنيا مثل الكلفة المتوسطة فإننا سنحصل على (-b) و (+c). ويمكن تدقيق هذه النتائج باستخدام برنامج SPSS .

b) نموذج القطع المكافئ من الدرجة الثالثة (**Third Degree Parabola**) :

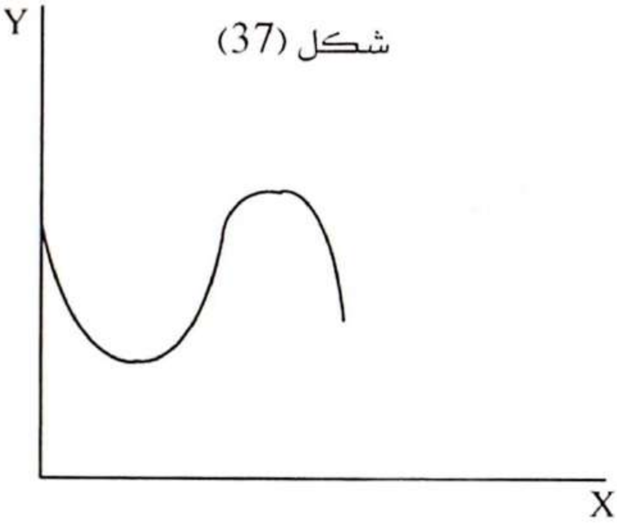
يستخدم هذا النوع من النماذج عندما يكون لدينا شكل انتشاري من النوع:

شكل(36)



أو

شكل (37)



أي موجة كاملة وكما هو مبين في الأشكال (13) و(15) و(16) والتي سبق توضيحها بيانياً.

وتكون الصيغة العامة للنموذج كالآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X + \hat{c}X^2 + \hat{d}X^3 + u_i$$

وهنا يضاف للنموذج من الدرجة الثانية العنصر ($\hat{d}X^3$) وهو الذي يعطي الشكل الانتشاري أو المنحنى (انحناءته الثانية).

ويأخذ (dX^3) إشارتين أيضاً (سالبة وموجبة) فعندما تكون إشارة المعامل ($\hat{b}$) سالبة تكون إشارة المعامل (c) موجبة عندئذ تكون الإشارة للمعامل ($\hat{d}$) موجبة بهذا فهو يأخذ دائماً إشارة المعلمة ($\hat{b}$).

وعندما تكون إشارة ($\hat{d}$) موجبة فإن المنحنى يبدأ بالازدياد أولاً ثم يصل إلى نقطة عظمى وبعدها يبدأ بالانخفاض ليصل إلى النقطة الدنيا، ومن ثم يصعد مرة أخرى وهكذا.

وعندما تكون إشارة ($\hat{d}$) سالبة فإن المنحنى يبدأ بالانخفاض أولاً ثم يصل إلى النقطة الدنيا ثم بعدها يبدأ بالارتفاع ليصل إلى نقطة عظمى وهكذا. ويجد هذا النموذج حله في منظومة المعادلات الآتية:

$$\sum Y_i = na + b\sum X_i + c\sum X_i^2 + d\sum X_i^3$$
$$\sum X_i Y_i = a\sum X_i + b\sum X_i^2 + c\sum X_i^3 + d\sum X_i^4$$
$$\sum X_i^2 Y_i = a\sum X_{i2}^2 + b\sum X_i^3 + c\sum X_i^4 + d\sum X_i^5$$
$$\sum X_i^3 Y_i = a\sum X_i^3 + b\sum X_i^4 + c\sum X_i^5 + d\sum X_i^6$$

ويستخدم هذا النموذج في دراسة الكلفة الكلية والمتغيرة والعرض والطلب وغيرها.

13.6 : النموذج الآسي (نصف لوغارتمي) Exponential or Semi-Logarithmic Models :

وهو من نوع ا لنماذج متعدد الحدود والأؤس (Exponent).

ويعني مؤشر القوة تلك الدرجة التي نرفع لها متغير ما، مثل X^3، X^5 حيث (3، 5) هي القوة التي يرفع لها المتغير (X) وهي عادة ما تكون ثوابت.

ولكن المتغير المستقل يمكن أن يتحول إلى أُس أو قوة تُرفع لها المعلمات ذاتها مثل (3^x) و (5^t) حيث يرفع لها العدد (3) أو (5) إلى قوة متغيرة وليست ثابتة، حيث أن (x أو t) هي متغيرات وليست ثوابت.

وتسمى الدالة التي يلعب المتغير المستقل دور القوة أو الأس الذي ترفع له المعلمات بالدالة الأسية أو نصف لوغارتمية أو النموذج الأسي أو نصف لوغارتيمي.

ويمكن لهذه النماذج أن تكون بسيطة مثل:

$$Y = f(x) = b^x \qquad \text{أو} \qquad Z = f(t) = b^t$$

حيث أن: $b > 1$

b = الأساس الثابت للأُس.

t, x = المتغير المستقل وهو يأخذ أي عدد موجب أو سالب.

Y = المتغير التابع.

والفرض أن تكون (b) موجبة أو أكبر من (1) هو فرض رياضي مهم لأن أخذ جذر الأساس السالب غير ممكن رياضياً.

وإذا ما كانت ($b = 1$) فإن النتيجة ستكون (1) $Y = 1^t = 1$ وسوف لن تكون دالة أسية في هذه الحالة.

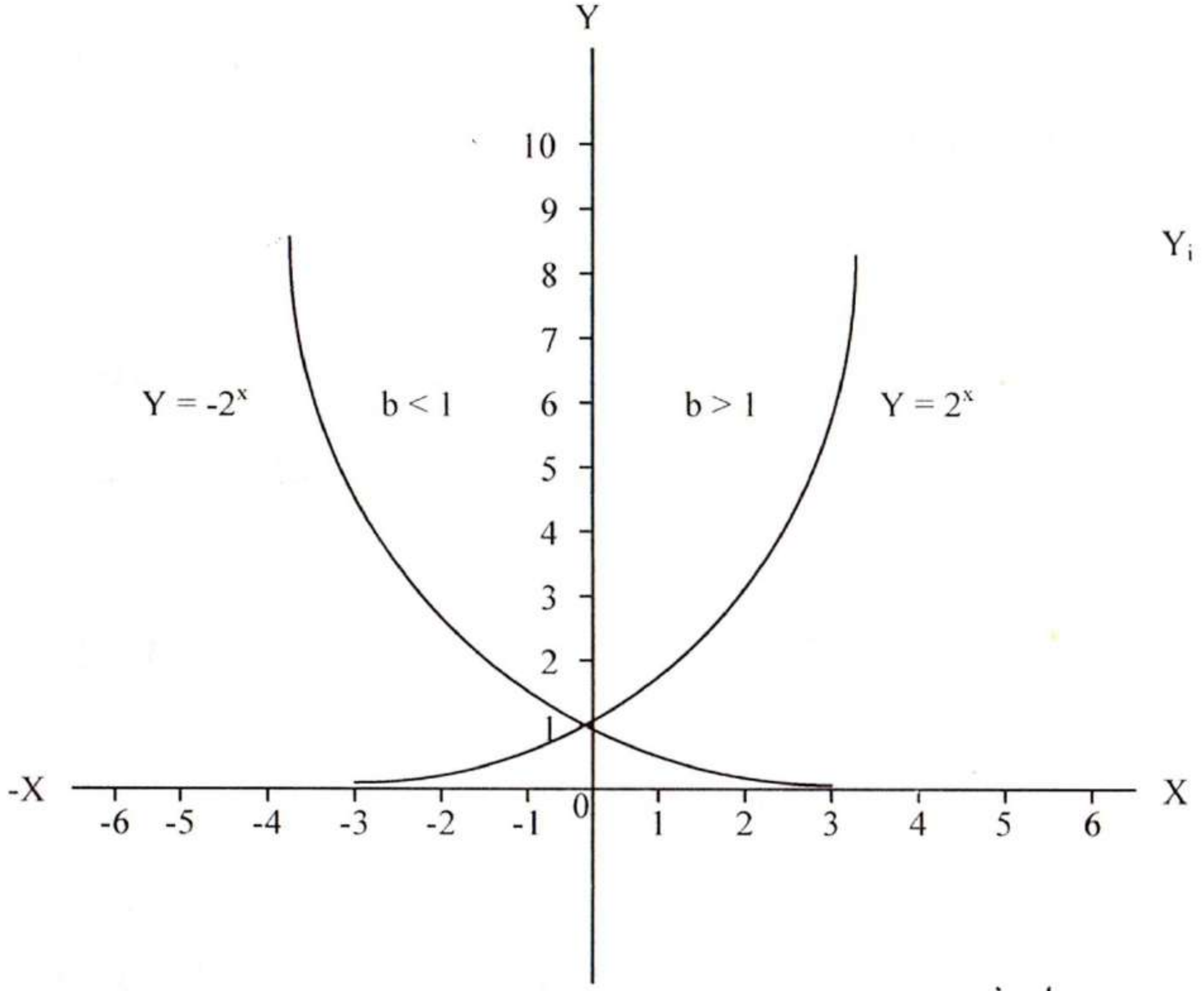
وإذا ما كانت ($0 < b < 1$) فإننا يمكن أن نحولها إلى صيغة كالآتي:

بفرض أن: $b = \dfrac{1}{2}$

عند ذاك ستكون قيمة $Y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x} = 2^{-x}$ ويكون شكلها العام كالآتي عندما يكون ($b = 2$) مثلاً (شكل 38).

شكل (38)

يبين الشكل العام للنموذج الأسي



وهي على نوعين:

أسية متزايدة – عندما يكون b > 1 كما في الشكل (38) (الجانب الأيمن من الإحداثي Y).

أسية متناقصة عندما يكون b < 1 كما في الشكل (38) أيضاً (الجانب الأيسر من الإحداثي Y).

ويمكن لهذه الدالة أن تأخذ رياضياً الصيغ الآتية:

$$b^{x+y} = b^x b^y$$

$$b^{xy} = (b^x)^y$$

$(ab)^x = a^x.b^x$

$ab^x = a.b^x$

عندما يكون:

$b_x > 1$ لـ $b > 1$ فإن (x) حقيقي وأكبر من صفر $(x > 0)$.

$b_x = 1$ لـ $b = 1$ فإن (x) حقيقي وأكبر من صفر $(x > 0)$.

$b^x < 1$ لـ $0 < b < 1$ فإن (x) حقيقي وأكبر من صفر $(x > 0)$.

وكذلك تكون $a > 0$

ويعني هذا أيضاً الآتي:

1- أن المتغير المستقل (X) يظهر كقوة أو أس للمعلمة (b) أو أية معلمة أخرى تعبر عنها مثل (a^x) أو أي رمز آخر.

2- إن قيم (Y_i) في هذا النموذج تزداد باستمرار ما دام (b) أكبر من الواحد عدد صحيح $(b < 1)$ شكل رقم (38).

3- إن قيم (Y_i) في هذا النموذج ستنخفض باستمرار ما دام (b) أصغر من (1) عدد صحيح $(b < 1)$ شكل رقم (38).

4- إن قيم المتغير التابع (Y_i) ستكون دائماً موجبة بغض النظر عن إشارة المتغير المستقل (X).

5- أن معكوس هذه الدالة (Inverse function) يعطينا الدالة اللوغارتمية.

6- أن الشكل العام للنموذج القياسي يمكن أن يعطى كما يأتي:

$Y = ab^xe^u$

$Y = ab^{ex}$

$Y = ab^{ex}$

$Y = ab^t$

حيث (t) هو الزمن ويحل بدل (x) و (a) هي المعلمة التقاطعية.

$$\text{Log } Y = a + bX + U$$

$$Y = a + b \log X + U$$

7- عندما يكون الفرق بين (b) والواحد عدد صحيح موجباً أي (b-1) موجباً فإن هذه القيمة (b-1) مضروبة في (100) تعطي النسبة المئوية لزيادة (Y_i) لكل وحدة زيادة في (X_i).

8- عندما يكون (b-1) سالباً فإن هذه القيمة مضروبة في (100) تعطي النسبة المئوية لانخفاض (Y_i) لكل وحدة زيادة في (X_i).

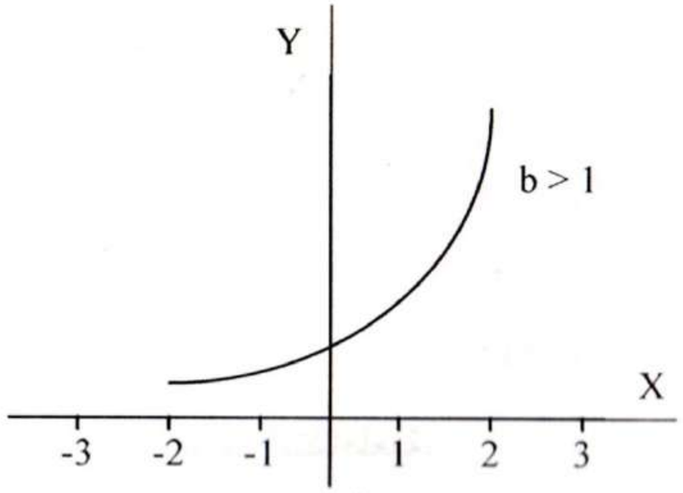
9- عندما يكون $1-b$ فإن المنحنى سيأخذ شكل خط مستقيم ويساوي ($Y = a$) دائماً.

10- عندما يكون (b) أكبر من الصفر وأصغر من (1) عدد صحيح ($0 < b < 1$) ستأخذ قيم (Y_i) شكلاً متزايداً لكن بوتيرة متناقصة.

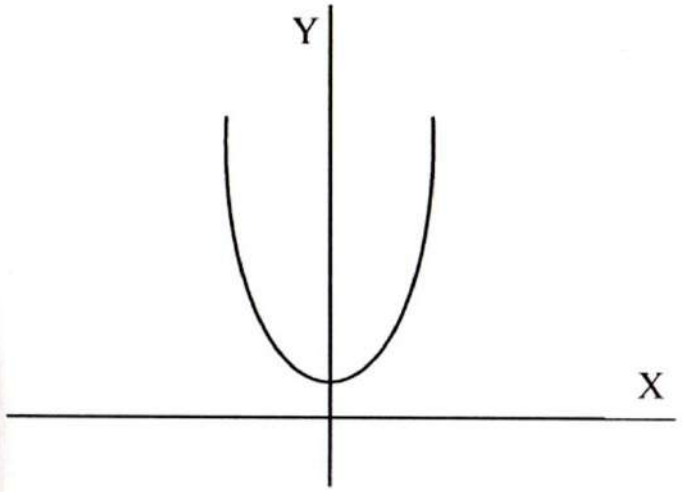
11- أن (Y_i) ستزداد (بمتوالية هندسية) عندما يكون $b > 1$.

12- أن المتغير التابع (Y_i) ينمو بوتائر ثابتة (نسبة مئوية ثابتة) قياساً للنمو في المتغير المستقل لفترة زمنية معينة. ولهذا فهي تستخدم لقياس نمو الدخل القومي وعدد السكان وإنتاجية العمل والفائدة المركبة ووتائر النمو الاقتصادي المركبة والإيداعات الثابتة والعرض والطلب انظر الجدول (3).

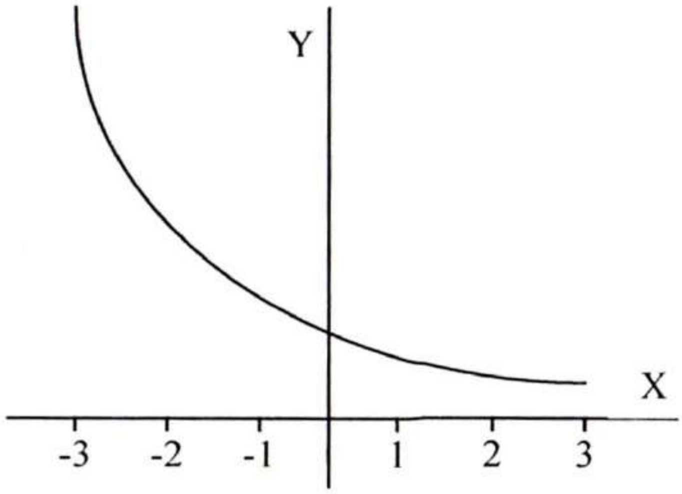
شكل (39): دالة أسية متزايدة



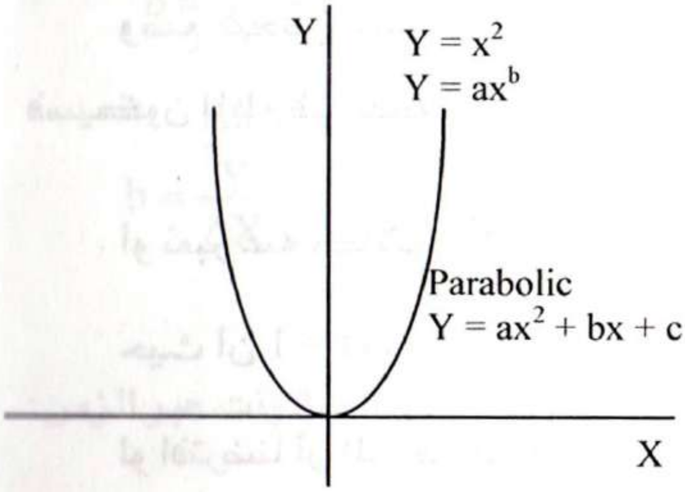
شكل (40): دالة قطع زائد



شكل (41): دالة أسية متناقصة



شكل (42): دالة قطع مكافئ من الدرجة الثانية



ويمثل (a) في النموذج نقطة تقاطع منحنى الدالة بالإحداثي العمودي (Y) و b = معامل النمو.

(X) أو (t) عدد السنين أو أي متغير ستقل آخر. ويمكن تحديد (b) كالآتي:

$$b = \frac{\hat{Y}_t}{Y_{t-1}} = \frac{Y_i}{Y_{i-1}}$$

حيث أن (i) أو (t) هي قيم (Y_i) في النقطة (i) أو (t).

$$b = \frac{\hat{Y}_t}{\hat{Y}_{t-1}} = \frac{\hat{Y}_{t-1} + \Delta\hat{Y}_{t-1}}{\hat{Y}_{t-1}} = 1 + \frac{\Delta\hat{Y}_{t-1}}{\hat{Y}_{t-1}}$$

وإذا ما عبرنا عن $\frac{\Delta Y_{t-1}}{Y_{t-1}}$ بأي حرف مثل (r) أو (k) أو (c) عند ذاك سيكون لدينا مثلاً:

$$\hat{Y} = 1 + r$$

أو

$$\hat{Y} = 1 + b$$

تطبيق (**2**):

وضع شخص مبلغ (100) دينار في بداية سنة معينة في مصرف بفائدة 6٪ فسيكون المبلغ في نهاية المدة كالآتي:

$$100 + 6 = 106$$

أو نعبر عنه كالآتي: $100\ (1 + 0.06)^1$

حيث أن $t = 1$] و (t) تمثل عدد السنوات [.

لو افترضنا أن المدة كانت (5) سنوات $(x = 5)$ أو $(t = 5)$ عند ذاك سيكون المبلغ:

$$Y = 100\ (1 + 006)^5$$

$$Y = a\ b^t$$

$$Y = a\ b^x$$

حيث أن:

a = المبلغ في بداية المدة = 100

$b = 0.06$ وتساوي وتيرة النمو أو $\left(\frac{\Delta Y_{t-1}}{Y_{t-1}}\right)$ (Rate of Growth).

x أو t = تساوي عدد السنوات.

و b = في هذه الحالة هي الزيادة بنسبة ثابتة.

وبصورة رياضية يمكن أن تحولها إلى صيغة نصف لوغارتمية كالآتي:

$$Y = ab^x$$

$$\text{Log } Y = a + bX$$

$$Y = a + b \log X$$

وباستخدام التفاضل نحصل على (b) كالآتي:

$$b = \frac{d \log Y}{dX} = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{1}{Y}$$

$$b = \frac{dY}{Y} \div dX = \frac{\text{التغير النسبي في } Y}{\text{التغير المطلق في } X} = \text{(Constant) ثابت}$$

$$b = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\Delta X}$$

تطبيق (**3**):

يوضح الجدول رقم (3) نمو الدخل مع الاستهلاك، ونمو الصادرات عبر الزمن: (ويضم جدول (4) مقارنات نسب النمو هذه).

ويمكن حل الدالة الأسية بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة الأسية وكالآتي:

$Y = ab^x e^u$ أو $Y = ab^t$

$$\log Y = \log a + X \log b + \log u_i$$

$$\log Y = \log a + t \log b + \log u_i$$

وتحول بهذا إلى دالة خطية وكالآتي:

جدول (3)

يبين نمو الدخل القومي والصادرات

الدخل X_i	الاستهلاك Y_i	$b = \frac{\Delta X}{X}$ $b = \%$	ΔY مليون د.ل	الزمن t	الصادرات Y	نسبة النمو الثابتة للصادرات $b = \%$
80	85	20 %	-	1	8	-
96	95	20 %	10	2	12	50 %
115	105	20 %	10	3	18	50 %
138	115	20 %	10	4	27	50 %
156	125	20 %	10	5	40.5	50 %
$\sum X_i =$ 525	$\sum Y_i =$ 585					

ومن هذا المثال يمكن أن نوجد العلاقة الرياضية بين نسبة النمو الثابتة (b) ونمو (Y_i) بالتوافق مع الزمن (t) إن كان ذلك لسلسلة زمنية معينة وكالآتي:

جدول (4)

يبين مقارنات نسبة النمو

T	$Y_t = ab^t$	النمو النسبي أو وتيرة النمو المركبة $b = \%$
0	a	-
1	ab	$ab - a = b$
2	ab^2	$ab^2 - ab = b$
3	ab^3	$ab^3 - ab^2 = b$
.	ab^{n-2}	$ab^{n-2} - ab^2 = b$
.	ab^{n-1}	$ab^{n-1} - ab^{n-2} = b$
N	ab^n	$ab^n - ab^{n-1} = b$

$$\log Y_t = Y_t^*$$
$$\log a = A$$
$$\log b = B$$
$$\log u_t = u_t^*$$
$$\log U_t = U_t^*$$
$$Y_t^* = A + B(t) + u_t^* \qquad \ldots \qquad (1)$$

أو

$$Y_i^* = A + B(X_i) + u_i^*$$

ويسمى هذا بالتحويل شبه اللوغاريتمي (Semi-log Transformation) حيث يمكن أن يقتصر التحويل على قيم متغير واحد فقط.

ويتم تقدير المعلمات (A) و (B) بطريقة المربعات الصغرى وكالآتي:

$$\sum \log Y_t = na + b\sum t \qquad \ldots \qquad (3)$$
$$\sum \log Y_t = a\sum t + b\sum t^2 \qquad \ldots \qquad (4)$$

أو

جدول (5)

يبين وتائر النمو النماذج البسيطة الخطية وغير الخطية

السنة	t	النموذج الخطي البسيط		النموذج اللاخطي البسيط (القطع المكافئ)			النصف لوغارتمية (الأسية)	
		$Y_t = a + bt$	$Y_t - \hat{Y}_{t-1}$	$\hat{Y}_t = a + bt + ct^2$	$\hat{Y}_t - \hat{Y}_t - 1 = u_t$	$\lvert\hat{Y}_t - \hat{Y}_t - 1\rvert - \lvert\hat{Y}_{t-1} - \hat{Y}_{t-2} - 1\rvert$	$Y_t = a \cdot b^t$	النمو النسبي b %
-	0	a	-	-	-	-		-
1989	1	a + b	b	a + b + c	b + c	(b + 3c) – (b + c) = 2c	a	-
1990	2	a + 2b	b	a + 2c + 4c	b + 3c	(b + 5c) – (b + 3c) = 2c	ab	b
1991	3	a + 3b	b	a + 3b + 9c	b + 5c	= 2c	ab^2	b
1992	4	a + 4b	b	a = 4b + 16c	b + 7c	= 2c	ab^3	b
1993	5	a + 5b	b	a + 5b + 25c	b + 9c	.	.	.
1994	6	.	.	.	.	.	.	.
1995	7	.	.	.	.	.	.	b
1996	8	.	.	.	.	.	.	b
1997	9	a + (n-1) b	b	a + ab + 81 c	b + 17c	(b + 17c) – (b + 15c) = 2c	Ab^{n-1}	b
1998	10	a + nb	b	a + 10b + 100c	b + 19c	(b + 19c) – (b + 17c) = 2c	Ab^n	b

المصدر: د. عصام عزيز شريف: القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجزائرية، الجزائر، 1981.

$$\sum \log Y_i = na + b\sum X_i$$

$$\sum \log Y_t X_i = a\sum X_i + b\sum X_i^2$$

حيث تكون: a = قيم المعالم التقديرية لـ (A).

b = قيم المعالم التقديرية لـ (B).

بعد ذلك نأخذ الأعداد المقابلة للوغاريتمات (anti log) لقيم ($\hat{a}$) و ($\hat{b}$) لنحصل على القيم المطلقة لها.

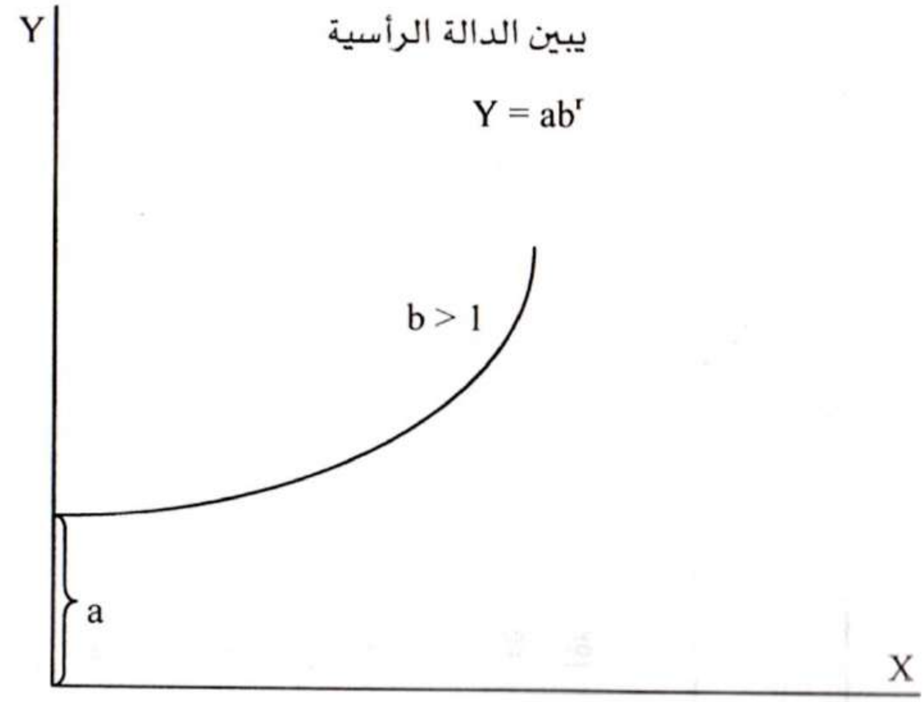
تطبيق (**4**):

يبين الجدول (6) قيمة الدخل القومي السنوي (X_i) وقيمة الصادرات السنوية Y_i. أوجد نموذج انحدار (Y_i) على (X_i)؟ .

الحل:

نرسم الشكل الانتشاري (شكل 43) ومنه يتبين أنه شكل قريب جداً من المنحنى شبه اللوغاريتمي ومنه فإن النموذج ستمثله المعادلة الآتية:

شكل (43)



جدول (6)

يبين العلاقة النصف لوغاريتمية بين الصادرات والدخل القومي

السنة	الدخل القومي مليار دينار X_i	الصادرات مليون دينار Y_i	$\log Y_i$	$X_i \log Y_i$	X_i^2	$\log \hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i$	$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$	$e_i^2 = (Y_i - \hat{Y}_i)^2$
1990	2	4	0.6021	1.2042	4	0.6440	4.406	- 0.406	0.1648
1991	3	8	0.9031	2.7093	9	0.8347	6.834	1.166	1.3595
1992	5	14	1.1461	5.7305	25	1.2161	16.44	- 2.44	5.9536
1993	6	30	1.4771	8.8626	36	1.4068	25.52	4.48	20.0704
1994	8	55	1.7404	13.9232	64	1.7882	61.41	- 6.41	41.0881
1995	9	100	2.000	8.000	81	1.9789	95.2	4.74	22.4676
N = 6	$\sum X_i = 33$	$\sum Y_i = 211$	$X_i \log Y_i = 7.8688$	$\sum \log Y_i = 50.4298$	$\sum X_i^2 = 219$	$\sum \log \hat{Y} = 7.8688$	$\sum \hat{Y}_i = 211$	$\sum e_i = 0$	$\sum e_i^2 = 91.1046$

$$Y = ab^{x} e^{ui} \qquad \ldots \qquad (1)$$

ويمكن حله باستخدام المعادلتين الطبيعيتين:

$$\sum \log Y - n \log a + \sum X \log b \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$\sum X \log Y = \sum X \log a + \sum X^2 \log b \qquad \ldots \qquad (3)$$

وبالتعويض من معلومات جدول (6) نحصل على:

$$7.8688 = 6 \log a + 33 \log b \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$50.4298 = 33 \log a + 219 \log b \qquad \ldots \qquad (3)$$

نضرب معادلة (2) في (11) والمعادلة (3) في (2) ونحصل على:

$$86.5568 = 66 \log a + 363 \log b$$

$$100.8596 = 66 \log a + 438 \log b$$

وبالطرح نحصل على:

$$75 \log b = 14.3028$$

$$\therefore \log b = 0.1907$$

$$\hat{b} = \text{anti} \log (0.1907) = 1.552$$

وبتعويض قيمة (log b) في إحدى المعادلتين نحصل على:

$$6 \log a = 7.8688 - 6.2931$$

$$\hat{a} = \text{anti} \log a = 1.831$$

وتأخذ المعادلة شكلها اللوغاريتم كالآتي:

$$\text{Log } Y_i = 0.2626 + 0.1907 X$$

أو

$$\hat{Y} = (1.831)(1.552)^{X}$$

ونجد بواسطتها قيمة $\hat{Y}_i$:

ونحصل على الانحراف المعياري كالآتي:

$$S_{\log yx} = \sqrt{\frac{91.140}{6}} = 3.89$$

ومن أعلاه نجد $1.552 - 1 = 0.552 = b-1$

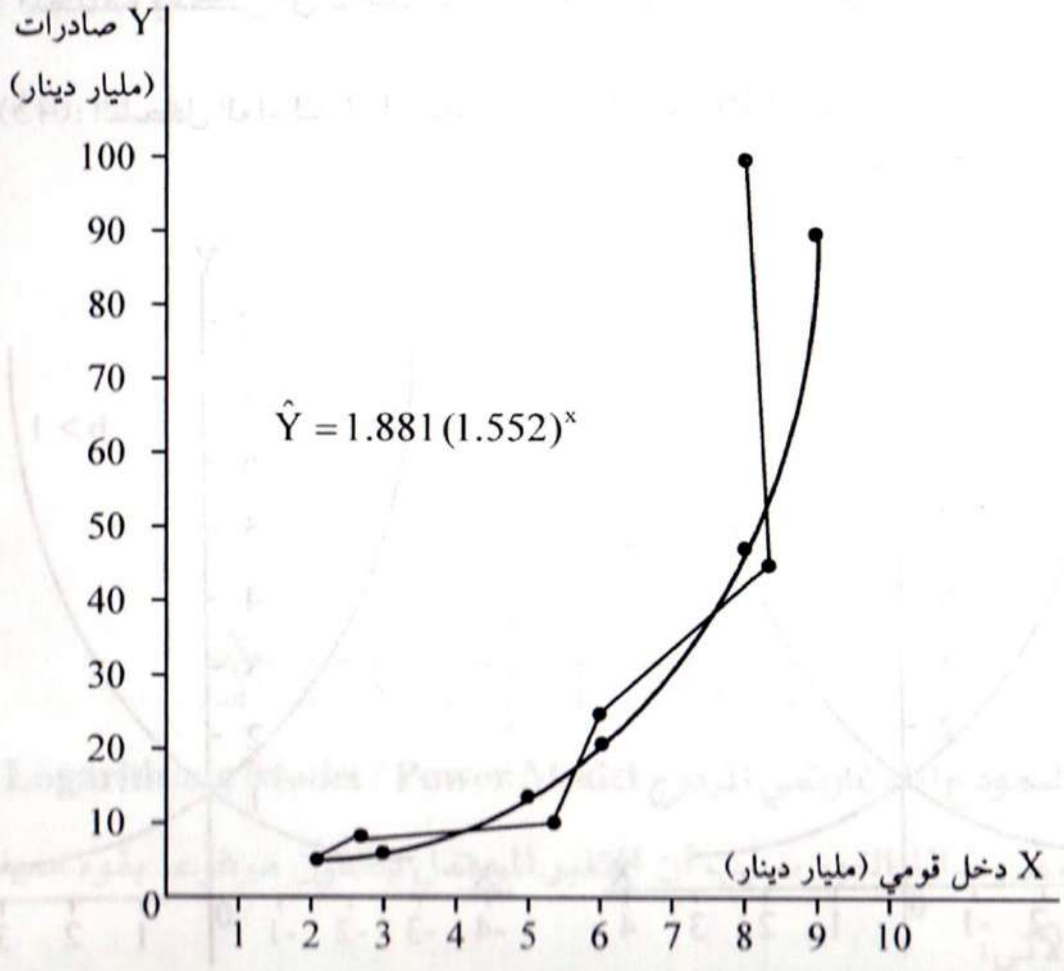
وإذا ما ضربت بـ (100) نحصل على (55.2) وهذا يعني أن كل زيادة في (X) بنسبة وحدة واحدة يزداد (Y) بنسبة 55.2٪ وهي وتيرة نمو عالية جداً.

ويمكن للقارئ إجراء الاختبارات للتحقق من معنوية التقديرات كما جاء في هذا الموضوع آنفاً وبنفس الطريقة.

ومن هذا العرض نجد أن (Y_i) يزداد بمتوالية هندسية قياساً إلى الزيادة في (X) (انظر الشكل 44).

شكل (44)

يبين منحى النموذج نصف لوغاريتمي للصادرات والدخل القومي



وعادةً ما يفضل الاقتصاديون والرياضيون استخدام الأساس (e) كأساس مفضل في مثل هذه الدوال والنماذج، مثل:

$$Y = e^{x} \qquad Y = \exp^{x}$$

$$Y = ae^{rx} \qquad Y = e^{3X}$$

حيث أن: EXP = e (exponential):

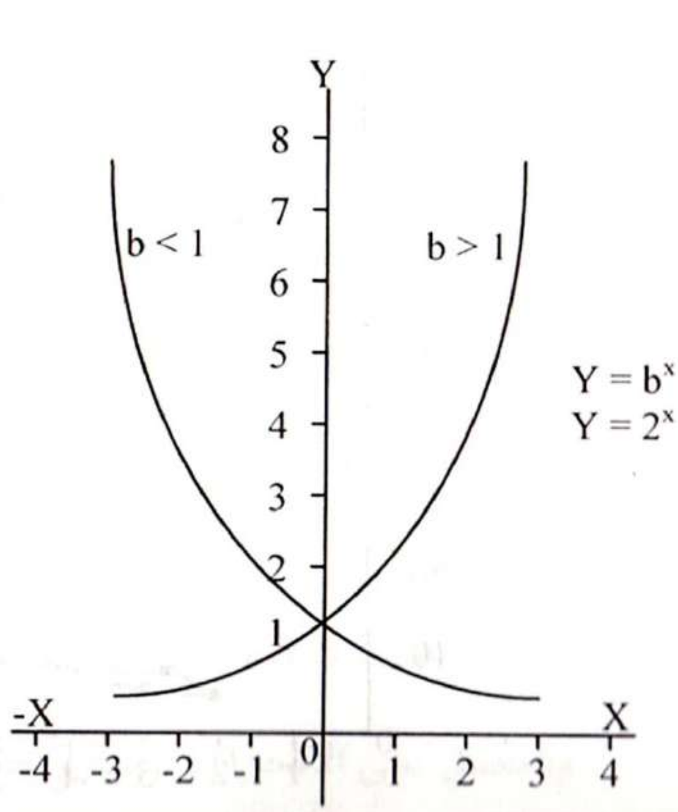
وتسمى مثل هذه الدوال (الدالة الأسية الطبيعية). وشيوع استخدام هذه الدالة وتفضيلها هو أن مشتقتها هي نفسها أي:

$$\frac{d}{dX} \cdot e^{X} = e^{X} \qquad \text{و} \qquad \frac{d}{d} e^{t} = e^{t}$$

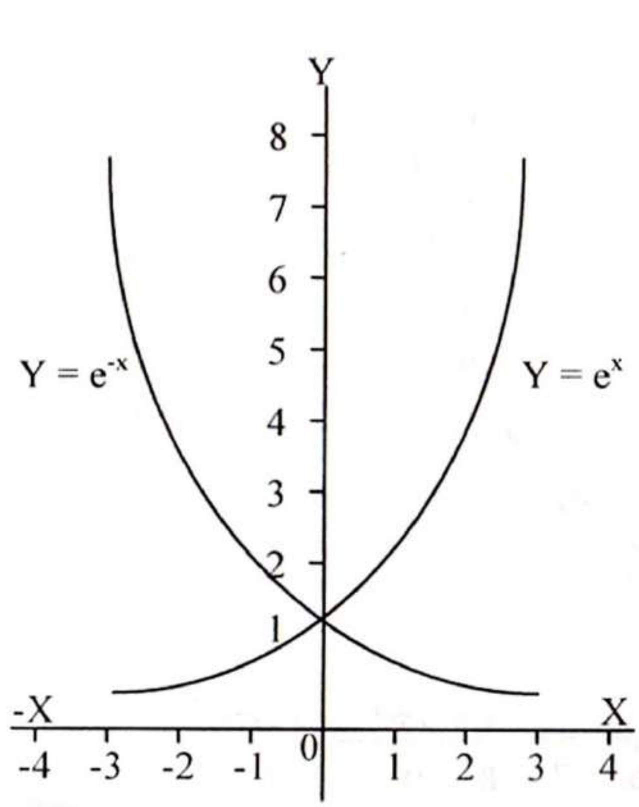
$$e = 2.7128$$

وعند تحويل الدوال الأسية إلى لوغارتمية ستأخذ شكل خط مستقيم كما أن منحنياتها المختلفة يمكن أن تأخذ الأشكال المبينة في الرسوم (45–49).

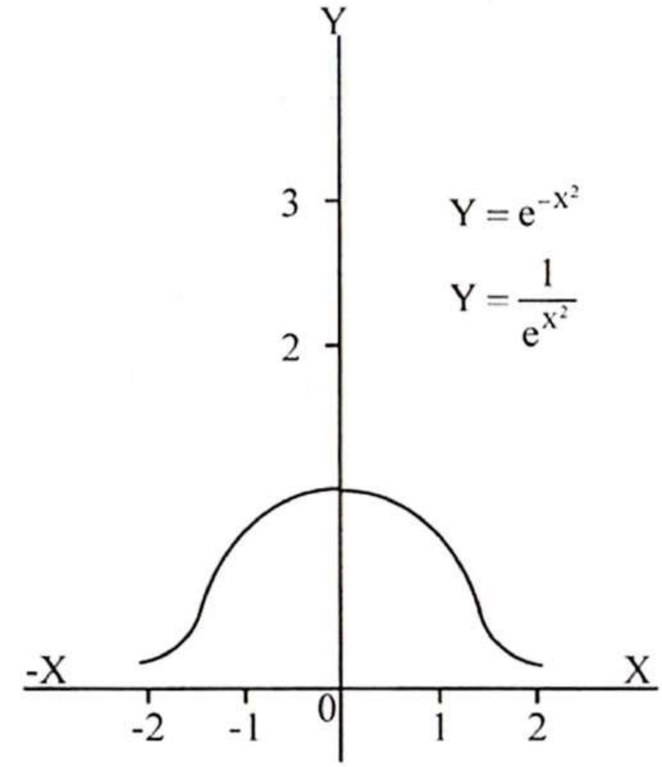
شكل (45): الشكل العام للدالة الأسية



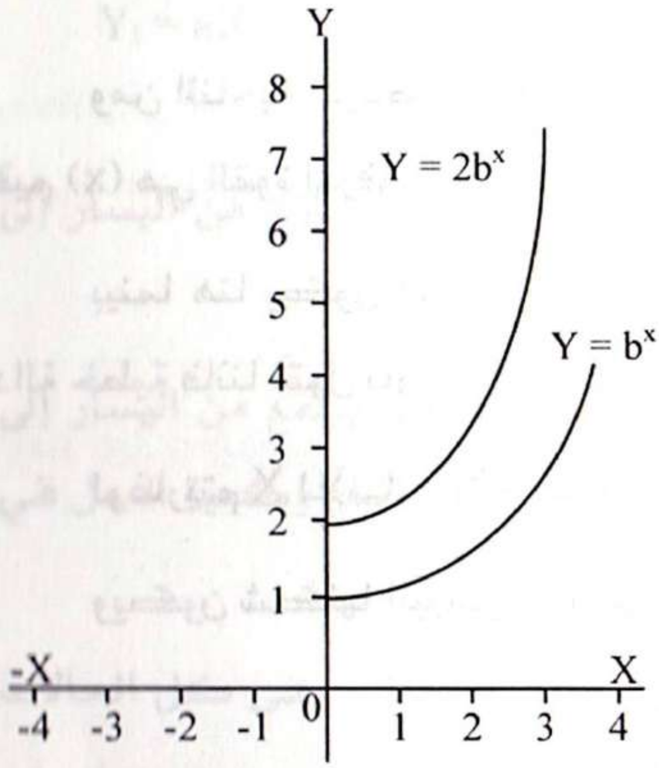
شكل (46): الشكل العام للدالة الأسية للأساس e



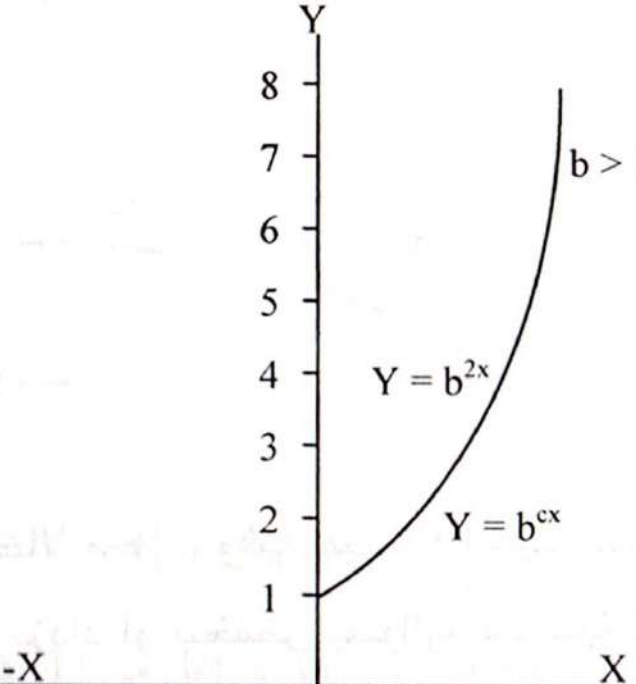
شكل (47): دالة أسية (الشكل الناقوسي)
Exponential Model



شكل (48): دالة أسية
Exponential Model



شكل (49) نموذج أسي
Exponential Model



13.7 : النموذج اللوغارتمي المزدوج Double Logarithmic Model / Power Model:

ويسمى بدالة القوة بسبب أن المتغير المستقل يكون مرفوعاً بقوة معينة هي قوة (b) وكالآتي:

$$Y = X^b$$

$$Y = aX^b$$

ومن الناحية الرياضية كما قلنا فهي دالة معكوسة للدالة الأسية التي كانت قيم (x) هي القوة المرفوعة لها (b).

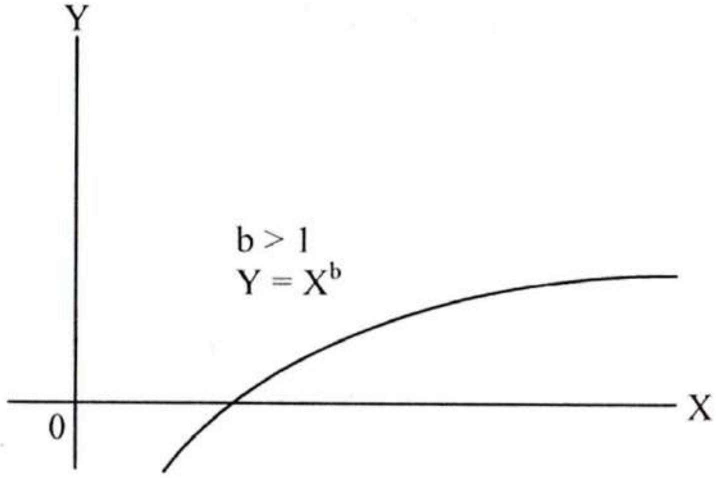
بينما هنا يكون (X) مرفوعة لقوة (b)، وعندما يؤخذ لوغاريتمها تحول إلى دالة خطية فإننا نقول بأن (Y) هي دالة في لوغاريتم (bx) ومنها:

لوغاريتم X للأساس $Y = \log_b^x = b$

ويكون شكلها البياني كالآتي:

شكل (50)

يبين الشكل البياني لدالة القوة



وهي تأخذ أشكالاً مختلفة وفقاً لقيمة (b) حيث تمثل قوة الرفع، ومنها نجد أن المتغير التابع (Y_i) يزداد أو ينخفض بمتوالية هندسية نتيجة لزيادة أو انخفاض المتغير المستقل (X_i) بمتوالية هندسية أيضاً (X^b) مضروبة في (a). بهذا فإن التغير في المتغيرات يكون ذو طابع واحد. فالزيادة والانخفاض لكليهما يكون بمتوالية هندسية. بعبارة أخرى فإن زيادة بنسبة مئوية ثابتة في (X) تتبعها زيادة بنسبة مئوية ثابتة أيضاً في قيمة (Y) ويكون شكلها القياسي العام كالآتي:

$$Y_i = aX^b e^u$$

وبافتراض أن الحد العشوائي صفراً فسيكون النموذج كالآتي:

$$Y_i = aX^b$$

ويأخذ منحناها شكلاً هندسياً مختلفاً وفقاً لقيمة (b).

فعندما تكون (b) سالبة ($b < 0$) فإن المنحنى يكون متنازلاً من اليسار إلى اليمين (شكل 9) ومثاله مرونة الطلب السعرية.

وعندما تكون (b) موجبة أي $0 < b < 1$ فإن المنحنى يرتفع من اليسار إلى اليمين أو يأخذ شكلاً متصاعداً ومثاله العلاقة بين قيمة الإنتاج وكمية العمل في حالة تناقص الغلة (شكل 11).

وتمثل (b) في هذه الحالة مرونة الإنتاج بالقياس للعمل، وفي كل الحالات فإن المنحنى سيتصاعد أو يتنازل بصورة مطردة.

وعندما يكون ($b = 1$) فإن النموذج يختصر إلى $Y_i = aX_i$ وفي هذه الحالة يكون المنحنى خطياً $Y_i = aX_i$.

وعندما يكون ($b = -1$) فإن النموذج سيختصر إلى:

$$Y_i = \frac{a}{X_i} \qquad \text{أو} \qquad Y_i = \frac{1}{x_i}a \qquad \ldots \qquad (3)$$

ومنه:

$$Y_i X_i = a$$

والنموذج (4) هو نموذج القطع الزائد Hyperbola .

وعندما تكون (b) موجبة ($0 < b < 1$) أي اقل من (1) فإن (b) سيدل على أن وتيرة نمو (Y) أبطأ من وتيرة نمو (X).

وعندما يكون $b = 2$ فإن وتيرة نمو (Y) ستكون ضعف وتيرة نمو (X) وسيكون شكله الرياضي $Y_i = aX^2$.

ومنه سيتحول إلى قطع زائد أيضاً:

ولأجل حل النموذج وإيجاد تقديرات المعاملات (b,a) الضرورية، فإن النموذج يمكن أن يحل من خلال تحويله إلى الشكل الخطي باستخدام اللوغاريتمات بحيث يتحول النموذج إلى:

$$\text{Log } Y = \log a + b \log X$$

وبذلك يمكننا استخدام طريقة المربعات الصغرى في الحل من خلال المعادلتين الطبيعيتين الآتيتين:

$$\sum \log Y - n \log a + b \sum \log X$$

$$\sum \log X \log Y = \sum \log X \log a + b \sum (\log X)^2$$

ويستخدم هذا النموذج في حل النماذج اللاخطية ذات المتغير الواحد مثل: P

1 - دالة الإنتاج لعنصر إنتاج واحد:

وتأخذ الصيغة الرياضية الآتية:

$$Y = AL^{\beta} \quad \ldots \quad (9)$$

$$Y = AK^{\alpha} \quad \ldots \quad (10)$$

حيث أن: Y = الكمية المنتجة من السلع باستخدام عامل إنتاجي واحد.

L = كمية العمل (ساعة / شخص - ساعة).

K = كمية عنصر رأس المال (كمية رأس المال / قيمته - ساعة مكائنية).

2 - دالة التكاليف المتغيرة والكلية في حالة تزايد التكاليف للفترة الطويلة:

$$Y = a X^{b}$$

حيث أن: Y = تكاليف الإنتاج المتغيرة الكلية.

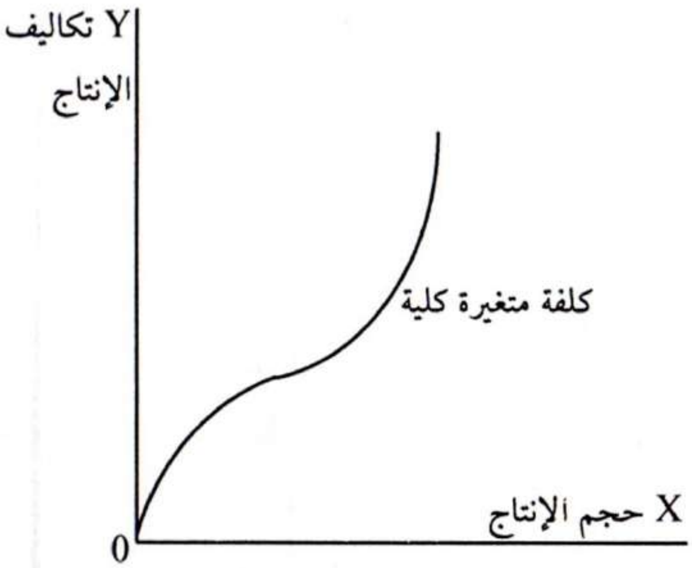
a = التكاليف الثابتة.

b = مرونة تكاليف الإنتاج المتغيرة بالنسبة للإنتاج.

X = حجم الإنتاج.

شكل (51)

يبين دالة التكاليف المتغيرة والكلية



تطبيق (**5**):

في الجدول (6) بيانات عن حجم الإنتاج (X) والتكاليف المتغيرة الكلية (Y) وفق النموذج القياسي لهذه الحالة واختبر المقدرات.

الحل:

نرسم الشكل الانتشاري رقم (52) وسنجد أنه يوافق النموذج اللوغاريتمي الذي تكون صيغته العامة كالآتي:

$$Y_i = aX_i^b e^{ui} \qquad \dots \qquad (1)$$

وباعتبار أن $\sum u_i = 0$ سيكون النموذج كالآتي:

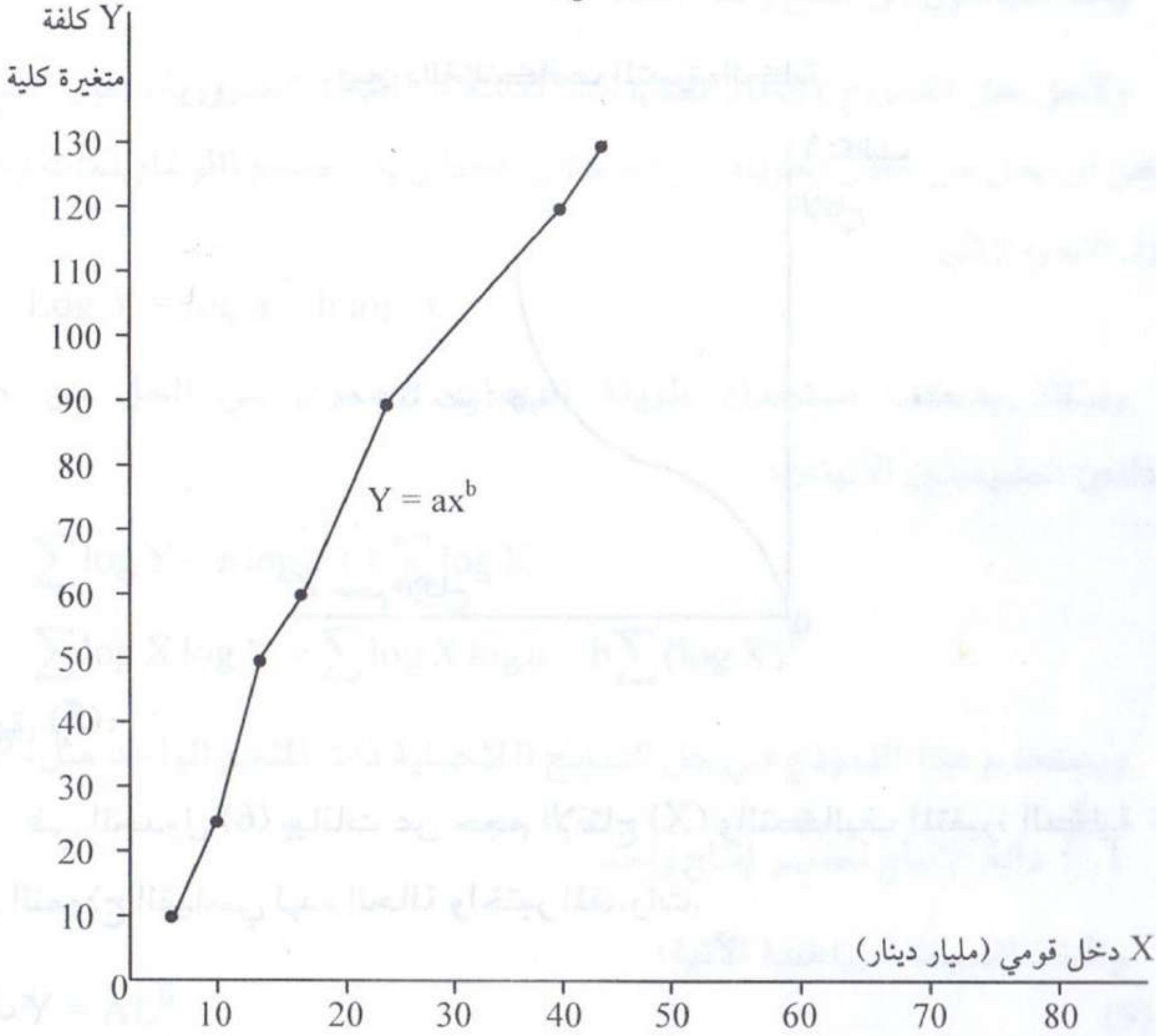
$$Y_i = aX^b \qquad \dots \qquad (2)$$

وباستخدام اللوغاريتمات في الحل سيكون شكله اللوغاريتمي كالآتي:

$$\text{Log } Y_i = \log a + b \log X \qquad \dots \qquad (3)$$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى نستخدم المعادلتين الطبيعيتين:

شكل (52)



$$\sum \log X \log Y = n \log a + b \sum \log Y$$

$$\sum \log xY = \sum \log X \log a + b \sum (\log X)^2$$

وبالتعويض في المعادلتين الأخيرتين نحصل على:

$$9.9365 = 6 \log a + 7.0465\, b \qquad \dots \qquad (1)$$

$$12.4999 = 7.0465 \log a + 9.1498\, b \qquad \dots \qquad (2)$$

نضرب المعادلة (1) في (7.0465) والمعادلة (2) في (6) ونحصل على:

$$70.0175 = 42.2790 \log a + 49.6531\, b \qquad \dots \qquad (3)$$

$$74.9994 = 42.2790 \log a + 54.9994\, b \qquad \dots \qquad (4)$$

جدول (6)

يبين حسابات النموذج اللوغارتمي لعلاقة الكلفة المتغيرة الكلية وحجم الإنتاج

التكاليف المتغيرة الكلية $TVC = Y_i$	حجم الإنتاج X_i	$\text{Log } X_i$	$\text{Log } Y_i$	$\text{Log } X_i \log Y_i$	$(\log X_i)^2$	$\log \hat{Y}_i$	$\log Y_i - \log \hat{Y}_i$	$(\log Y_i - \log \hat{Y}_i)^2$	Anti $\log \hat{Y}_{ii} = \hat{Y}_i$
10	3	0.4771	1.0000	0.4771	0.2276	0.9938	+ 0.0062	0.00003844	9.86
25	8	0.9031	1.3979	1.2624	0.8155	1.3983	- 0.0004	0.00000016	25.02
50	17	1.1204	1.6990	2.0904	1.5138	1.7092	- 0.0102	0.00010404	51.20
64	22	1.3424	1.8062	2.4246	1.8020	1.8155	- 0.0093	0.00008649	65.39
90	31	1.4914	1.9542	2.9144	2.2242	1.9570	- 0.0028	0.00000784	90.59
120	40	1.6021	2.0792	3.3310	2.5667	2.0622	+ 0.0170	0.00028900	115.40
$\sum Y_i = 359$	$\sum X_i = 121$	$\sum \log X_i =$ 7.0465	$\sum \log Y_i =$ 9.9365	$\sum \log X_i \log Y_i =$ 12.4999	$\sum (\log X_i) =$ 9.1498	$\sum \log \hat{Y} =$ 9.9365	$\sum (\log Y_i - \log \hat{Y}_i)^2 =$ 0	$\sum (\log Y_i - \log \hat{Y}_i)^2 =$ 0.00052597	$\sum \hat{Y}_i = 359$

نطرح الواحد من الأخرى ونحصل على: $(4.9819 = 5.2457\ b)$

ومنها:

$$\hat{b} = 0.9497$$

نعوض عن قيمة (b) في إحدى المعادلتين (1) أو (2) ونحصل على:

$$9.9365 = 6 \log a + (7.0465)(0.9497)$$

ومنها:

$$\text{Log } \hat{a} = 0.5407 \qquad \text{anti log } \hat{a} = 3.473$$

وسيأخذ النموذج التقديري اللوغاريتمي الصيغة الآتية:

$$\text{Log } \hat{Y}_i = 0.5407 + 0.9497 \log X_i$$

وإذا ما أردنا كتابتها بالأرقام الطبيعية نأخذ عكس اللوغاريتمات أو الأعداد المقابلة للوغاريتمات anti log وتساوي:

$$Y_i = 3.473\ X0.9497$$

وسيساوي الخطأ المعياري للتقدير كما تم حسابه من الجدول (11) كما يأتي:

$$S_{\log Y \cdot \log X} = \sqrt{\frac{\sum(\log Y_i - \log \hat{Y}_i)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{0.00052597}{6}}$$

$$= \sqrt{0.00008766}$$

$$= 0.0093$$

ويمكن إجراء الاختبارات كما هو معلوم.

تطبيق (7):

في الجدول (7) البيانات الخاصة بدالة الإنتاج لشركة المعمورة وعدد العاملين فيها، وفق النموذج القياسي واختبر القدرة التفسيرية للنموذج.

جدول (7)

يبين حسابات النموذج اللوغارتمي للعلاقة بين الإنتاج والعمل

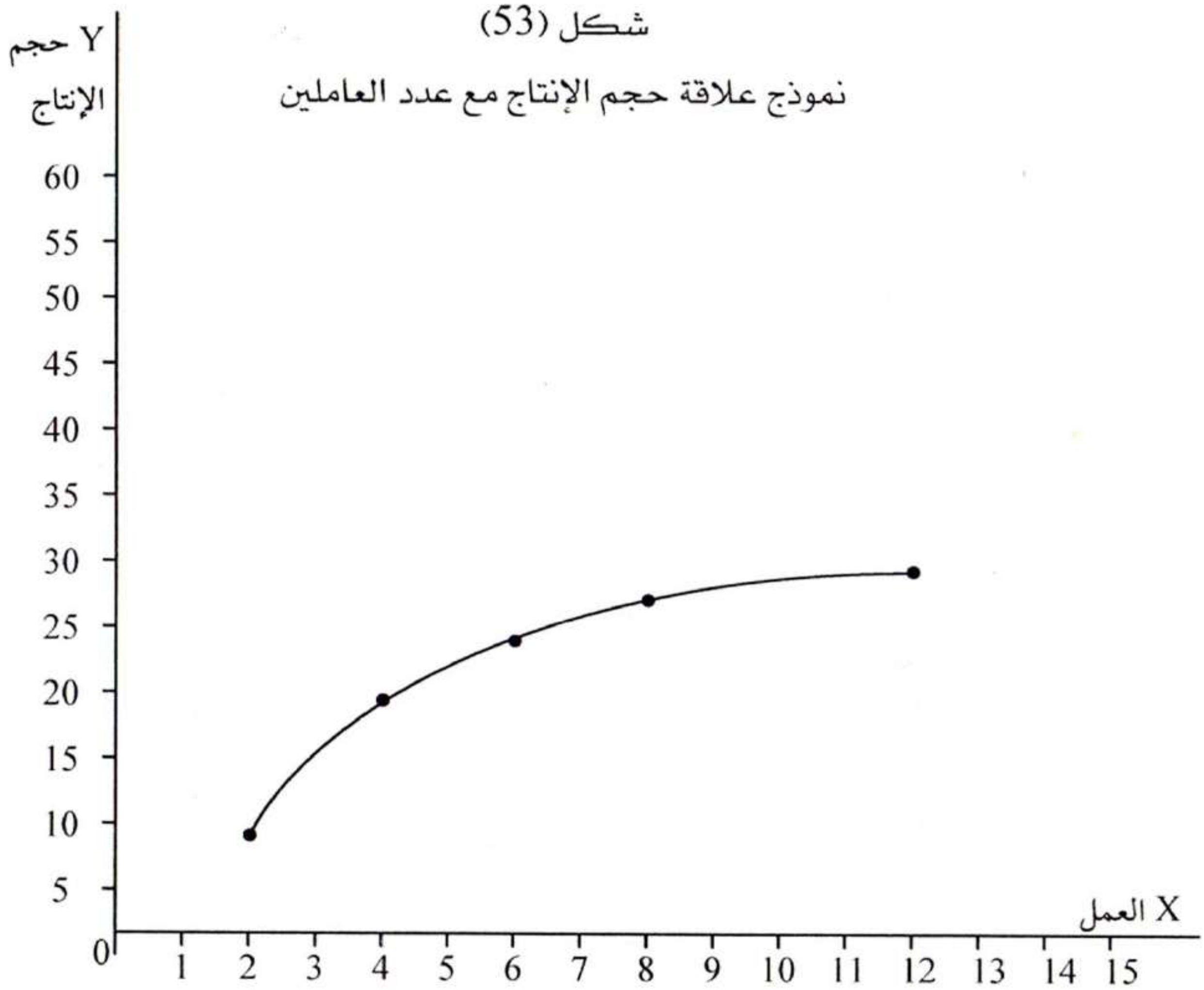
السنة	كمية الإنتاج مليون صندوق Y_i	عدد العاملين ألف X_i	$\ln Y_i = Y_i^*$	$\ln X_i = X_i^*$	$Y_i^* - \bar{Y}^* = y^*$	$X_i^* - \bar{X}^* = x^*$	$y^* x^*$	x^{*2}	y_i^{*2}
1992	10	2	2.3	0.7	-0.8	-1.1	0.88	1.21	0.64
1993	18	4	2.9	1.4	-0.2	-0.4	0.08	0.16	0.04
1994	24	6	3.2	1.8	+0.1	0	0	0	0.01
1995	28	8	3.3	2.1	+0.2	+0.3	0.06	0.09	0.04
1996	30	10	3.4	2.3	+0.3	0.5	0.15	0.25	0.09
1997	30	12	3.4	2.5	0.3	0.7	0.21	0.49	0.09
n = 5	$\sum Y_i = 140$	$\sum X_i = 42$	$Y^* = 18.5$	$X^* = 10.8$			$\sum y_i^* x_i^* = 1.38$	$\sum x_i^{*2} = 2.2$	$\sum y_i^{*2} = 0.91$

الحل:

نرسم الشكل الانتشاري (53) ويدل على وجود علاقة لوغاريتمية بين الإنتاج وحجم العمالة ومنها نستخدم النموذج الأول:

شكل (53)

نموذج علاقة حجم الإنتاج مع عدد العاملين



$$Yi = aX^{b} e^{u} \qquad \dots \qquad (1)$$

وبعد تحويلها إلى صيغة لوغاريتمية نحصل على:

$$\ln Y = \ln a + b \ln X = u \qquad \dots \qquad (2)$$

$$Y^{*} = a^{*} + b^{*} X + u$$

حيث أن: $\ln Y = Y^{*}$

$\ln a = a^{*}$

$\ln X = X^{*}$

ومن حسابات الجدول نجد الآتي:

$$b^* = \frac{\sum y^* x^*}{\sum x^{*2}} = \frac{1.38}{2.2} = 0.63$$

$$a^* = \frac{\sum Y^*}{n} - b\frac{\sum X^*}{n}$$

$$= 3.1 = 0.63 * 1.8 = 1.97$$

وبما أن:

$a^* = e^{a^*} = (2.718)^{a^*}$ أي أنها مقابل $\ln a^*$

$$\overline{Y}^* = \frac{18.5}{6} 3.1$$

$$\overline{X}^* = \frac{10.8}{6} = 1.8$$

لهذا فإن:

$$\hat{a} = e^{a^*} = (2.718)^{1.97} = 7.2$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 7.2\, X^{0.63} e^{u}$$

وهذا يعني أن:

مرونة الإنتاج هي 0.63 مما يعني أن كل زيادة في عدد العاملين بنسبة 10٪ يزداد الإنتاج بنسبة 6.3٪ .

معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{(\sum x_i^* y_i^*)}{\sum x_i^{*2} \sum y_i^{*2}} = \frac{1.38}{(0.91)\,(2.3)} = 0.69$$

وتعني أن القدرة التفسيرية للمتغير (X) هي 69٪ للتغيير في لوغاريتم (Y) قياساً للتغير في لوغاريتم (X)، وهي مقدرة تفسيرية جيدة، هذا وتوضح الأشكال (54–58) المنحنيات اللوغارتمية والمنحنيات الأسية المعاكسة لها.

13.8 : النموذج النسبي (النموذج المقلوب) Reciprocal curve :

النموذج المعكوس، هو نموذج تكون فيه العلاقة بين المتغير المستقل والمتغير التابع معكوسة أو تأخذ علاقة نسبية وكالآتي:

$$\frac{1}{Y_i} = a + bX_i + u_i \qquad \dots \qquad (1)$$

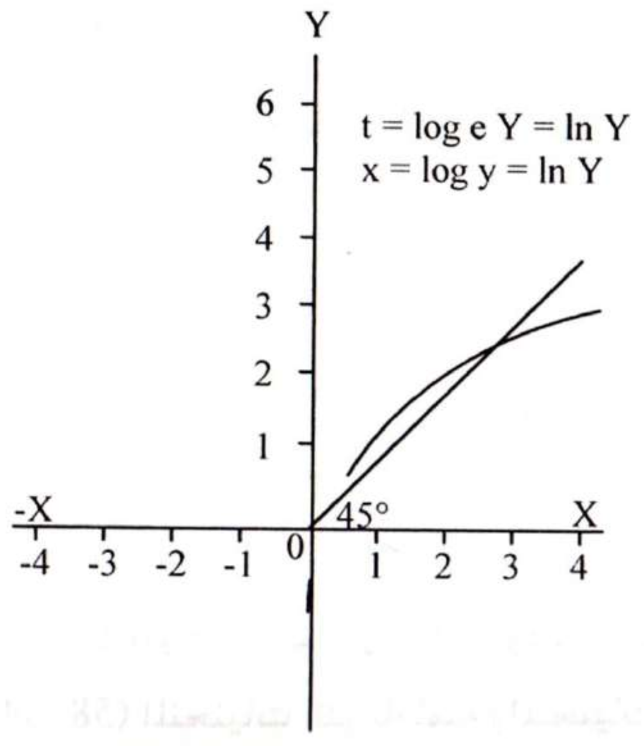
$$Y_i = a + b\frac{1}{X_i} + u_i \qquad \dots \qquad (2)$$

$$Y_i = \frac{1}{a + bX_i} + u_i \qquad \dots \qquad (3)$$

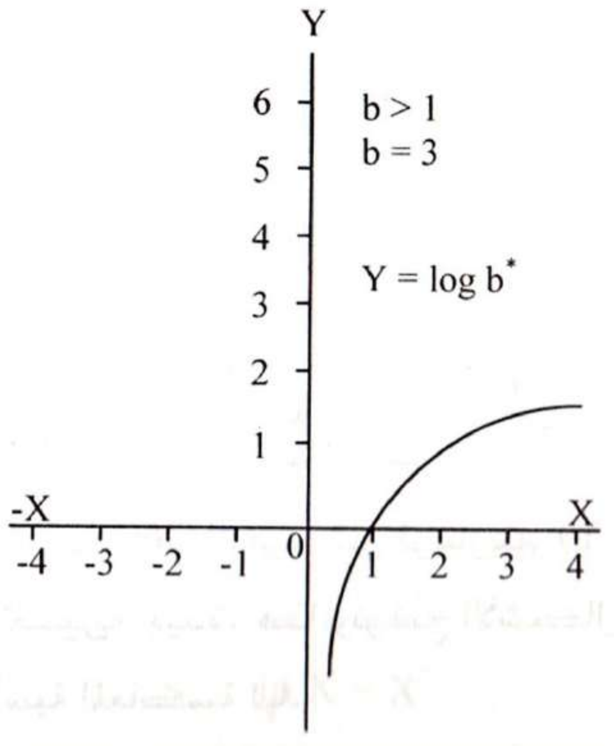
وهو حالة خاصة من القطع الزائد .

ويؤلف علاقة خطية عندما تكون $\frac{1}{Y_i} = a + bX_i$

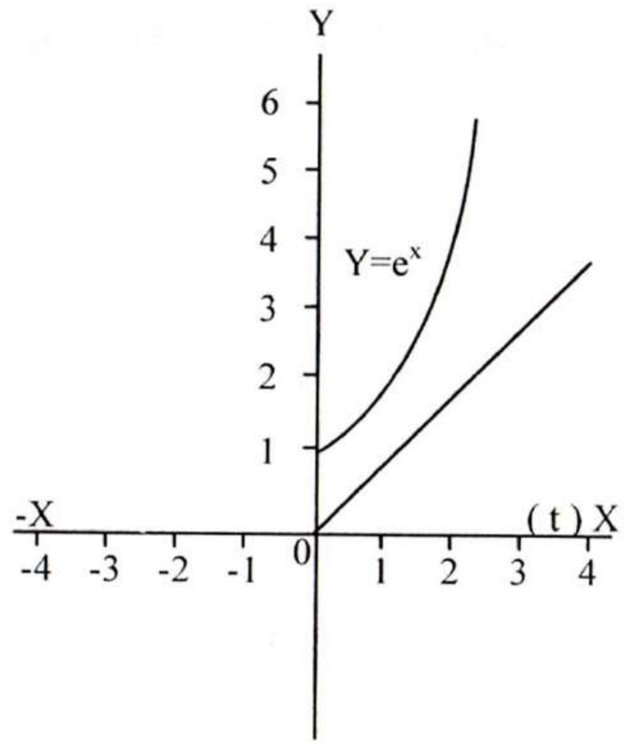
شكل (55): دالة لوغاريتمية (عكس الأسية)



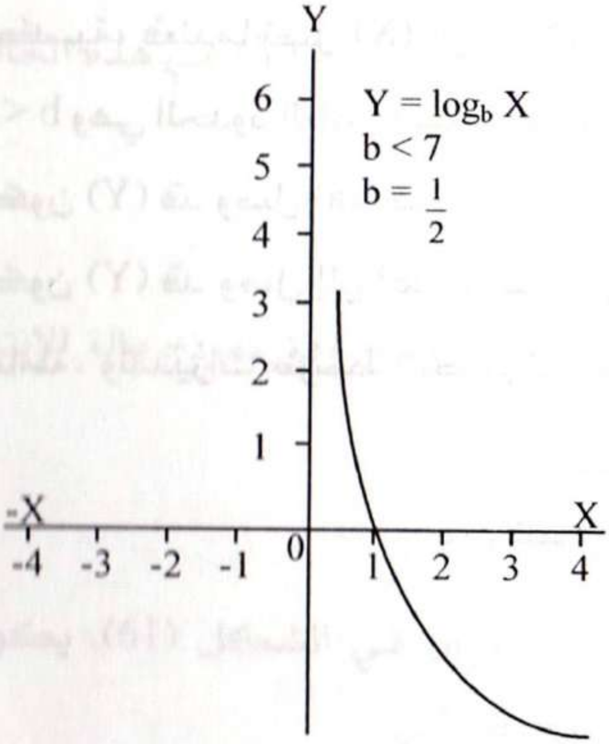
شكل (54): نموذج لوغاريتمي



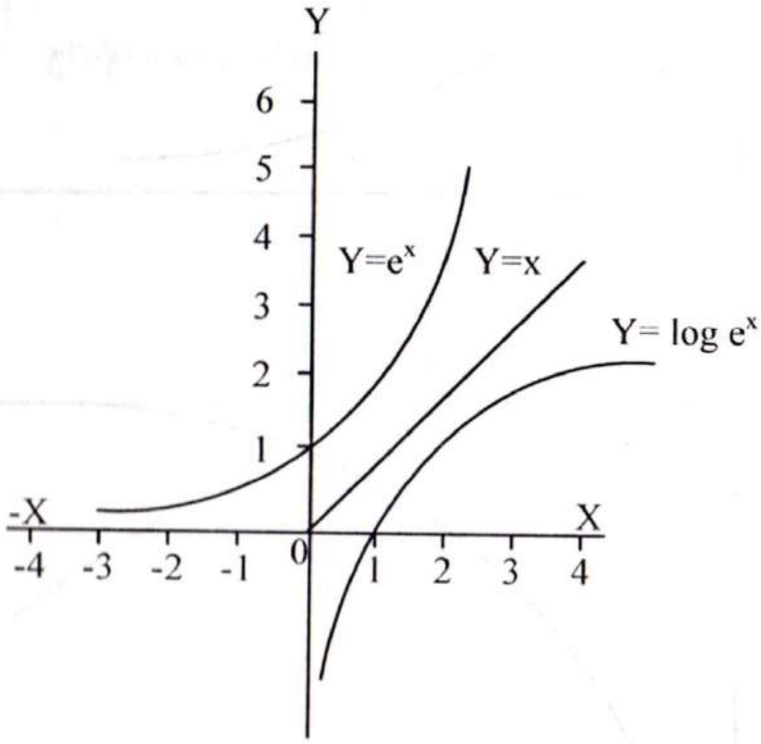
شكل (56): دالة أسية (عكس اللوغاريتمية)



شكل (57): نموذج لوغاريتمي



شكل (58): مقارنة الدالة الأسية واللوغاريتمية

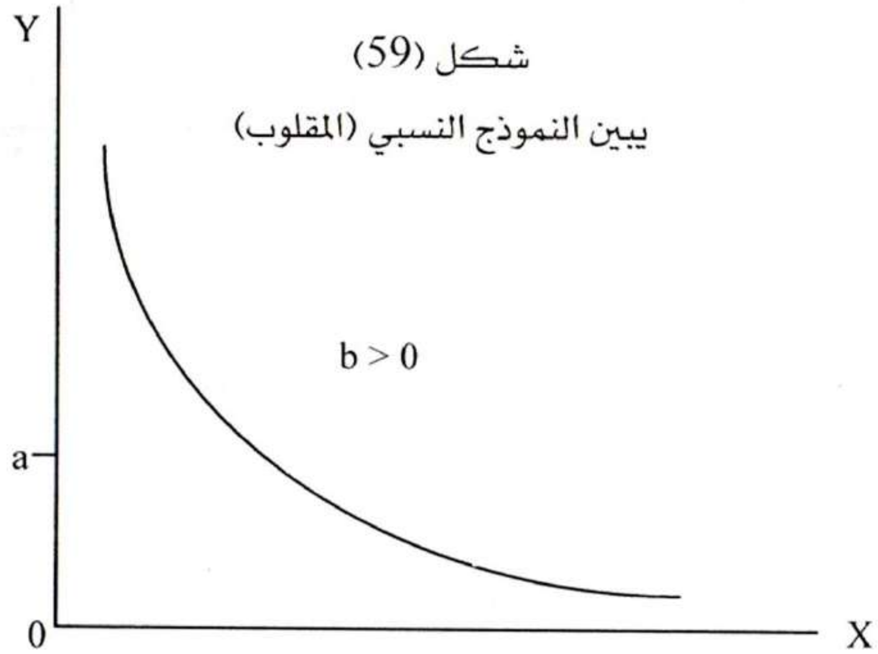


لكن عندما نضعها على ورق خطوط بيانية فإن (a) ستؤلف المقطع على المحور (Y)، أما انحدار المنحنى فسيكون معاكساً لإشارة (b) فهو موجب عندما تكون (b) سالبة أي (0 > b) وسالب عندما تكون (0 < b) أي موجبة (انظر الشكلين 59 و 60).

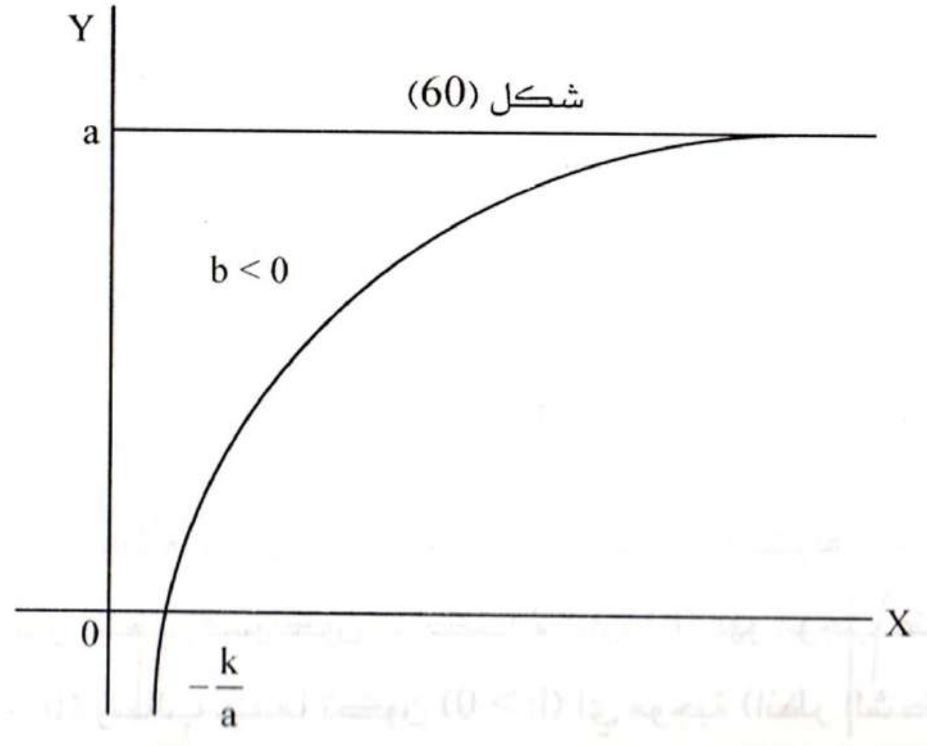
وهي تصف تلك الحالات إلى يزداد فيها المتغير التابع بصورة سريعة. فالعلاقة هنا عكسية، فعندما تصل (X) إلى ما لا نهاية يكون (Y) قد وصل إلى (a) عندما تكون $b < 0$ وهي الحدود العليا له عندما تكون $b > 0$. وعندما يكون (X) في أدنى نقطة له يكون (Y) قد وصل (a) وهي الحدود الدنيا له. وعندما يكون (X) في أدنى نقطة له يكون (Y) قد وصل إلى أعلى نقطة له ومثالها نموذج (فلبس) لتقدير الطلب على اليد العاملة، وتقديرات متوسط التكاليف الثابتة التي تكون أشكالها كالآتي:

شكل (59)

يبين النموذج النسبي (المقلوب)



شكل (60)



فإذا ما كانت $(b < 0)$ و $(a > 0)$ فالعلاقة بين X و Y ستكون طردية، وهذا يعني أن يزداد (Y) بمعدل متناقص مع زيادة (X) وتقترب قيمة (Y) في هذه الحالة من (a) التي هي الحد الأعظم.

تطبيق (**8**):

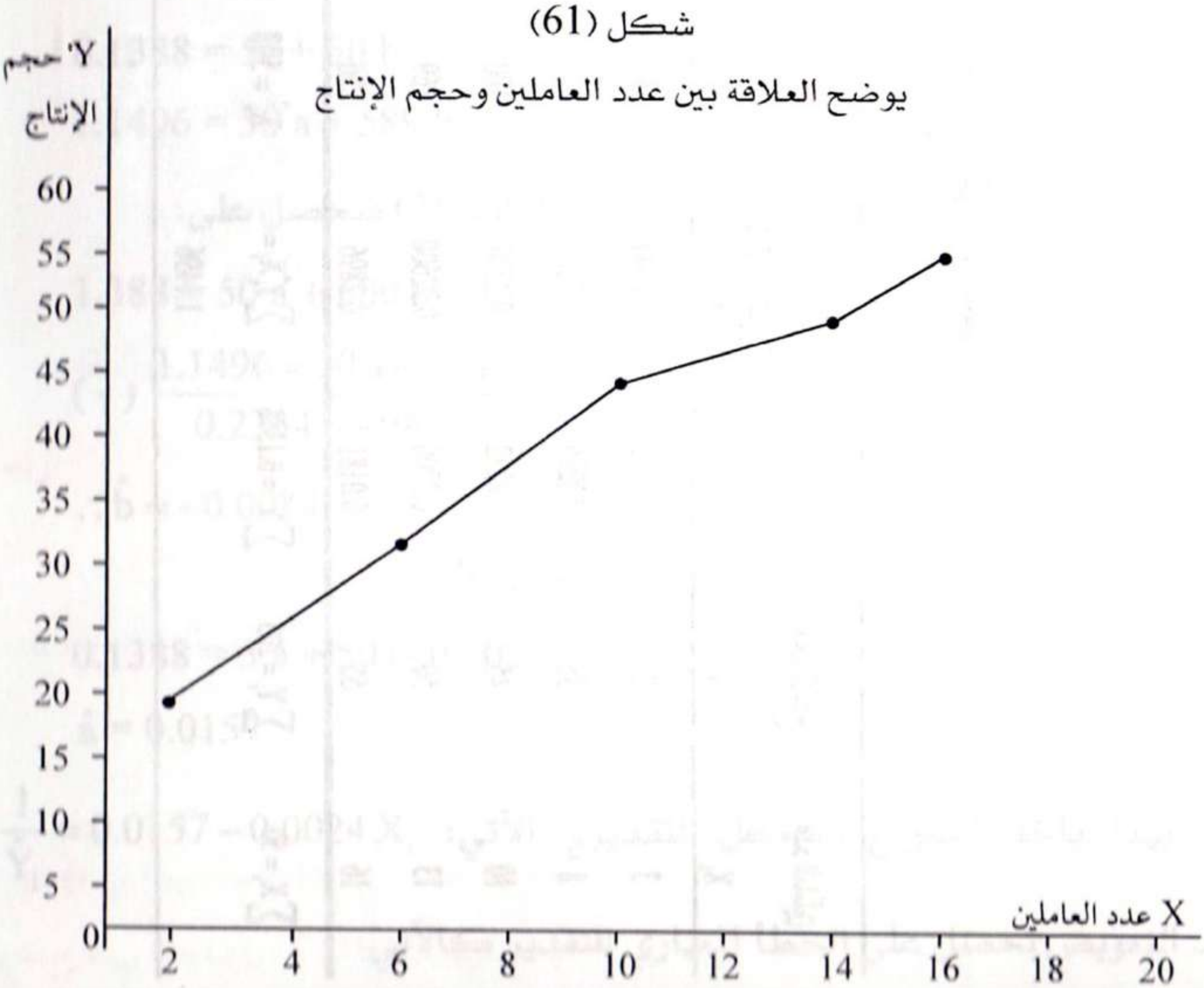
الجدول (8) يبين حجم الإنتاج الكلي وعدد العاملين وفق نموذج دالة الإنتاج للفترة القصيرة واختبر تقديراتك.

الحل:

نرسم الشكل الانتشاري ونجده كما هو مبين في الشكل (61). يكون النموذج المناسب لهذا النوع من الأشكال النموذج كالآتي:

شكل (61)

يوضح العلاقة بين عدد العاملين وحجم الإنتاج



جدول (8)

بيين حسابات معادلة انحدار حجم الإنتاج الكلي مع عدد العاملين

عدد العاملين X_i	حجم الإنتاج Y_i	$\frac{1}{Y} = Y^*$	$X\frac{1}{Y} = Y^*X$	X^2	$\hat{Y}^* = \frac{1}{\hat{Y}}$	$Y^* - \hat{Y}^*$	$(Y^* - Y^*)^2$	$\hat{Y}$
3	20	0.0500	0.1500	9	0.0445	+0.0055	0.00003025	22.5
8	35	0.0285	0.2280	64	0.0325	-0.0040	0.00001600	30.8
10	45	0.0222	0.2220	100	0.0277	-0.0055	0.00003025	36.1
13	50	0.0200	0.22600	169	0.0205	-0.0005	0.00000025	48.8
16	55	0.0181	0.2896	256	0.0133	+0.0048	0.00002304	75.2
$\sum X_i = 50$	$\sum Y_i = 205$	$\sum Y^* = 0.1388$	$\sum Y_i^* X_i =$ 1.1496	$X_i^2 = 598$			$\sum (Y^* - \hat{Y}^*)^2 =$ 0.0009979	$\sum \hat{Y}_i = 205$

$$\frac{1}{Y}=a+bX+u_i$$

وباعتبار أن: $u_i = 0$ فإن النموذج سيكون:

$$\frac{1}{Y}=a+bX$$

وإذا ما اعتبرنا $Y^*=\frac{1}{Y}$ عند ذاك يكون استخدام طريقة المربعات الصغرى للحل كالآتي:

$$\sum Y^* = na + b\sum X \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\sum XY^* = a\sum X + b\sum X^2 \qquad \ldots \qquad (2)$$

ونعوض بالقيم الواردة في الجدول (8) فنحصل على:

$$0.1388 = 5a + 50\ b \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$1.1496 = 50\ a + 589\ b \qquad \ldots \qquad (2)$$

نضرب المعادلة (1) في 10 ونطرحها من المعادلة (2) فنحصل على:

$$1.388 = 50\ a + 500\ b$$

$$(-)\ \frac{1.1496 = 50\ a + 598}{0.2384 = -98\ b}$$

$$\therefore \hat{b} = -0.0024$$

ونعوض بإحدى المعادلتين (1) أو (2) فنحصل على:

$$0.1388 = 5\ a + 50\ (-\ 0.0024)$$

$$\hat{a} = 0.0157$$

بهذا يأخذ النموذج الشكل التقديري الآتي: $\frac{1}{\hat{Y}_i} = 0.0157 - 0.0024\ X_i$.

وبعد التعويض نحصل على الخطأ المعياري للتقدير كالآتي:

$$S^2_{\frac{1}{Y}*} = \frac{\sum\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\hat{Y}}\right)\right]^2}{n} = \frac{0.00009975}{5} = 0.000019$$

$$S_{\frac{1}{Y}*} = \sqrt{0.000019} = 0.004$$

تطبيق (**9**):

حصل باحث على بيانات خاصة بمعدلات التضخم (X) ومعدلات البطالة (Y) في دولة ما وكانت كالآتي:

جدول (9)

يبين معدل البطالة والتضخم

السنة	معدل التضخم ٪	معدل البطالة ٪
1992	1	35
1993	2	30
1994	4	25
1995	10	15
1996	20	10

والمطلوب أن نقدر نموذج فلبس لعلاقة معدل التضخم من معدل البطالة:

الحل:

نرسم الشكل الانتشاري كما هو موضح في الشكل (62)، ومنها نجد أنها تأخذ العلاقة الآتية:

$$Y = a + b\frac{1}{X} + u$$

ومن البيانات المعطاة نحسب معادلة نجد انحدار (Y) على (X) وكما هو موضح في الجدول (10) كالآتي:

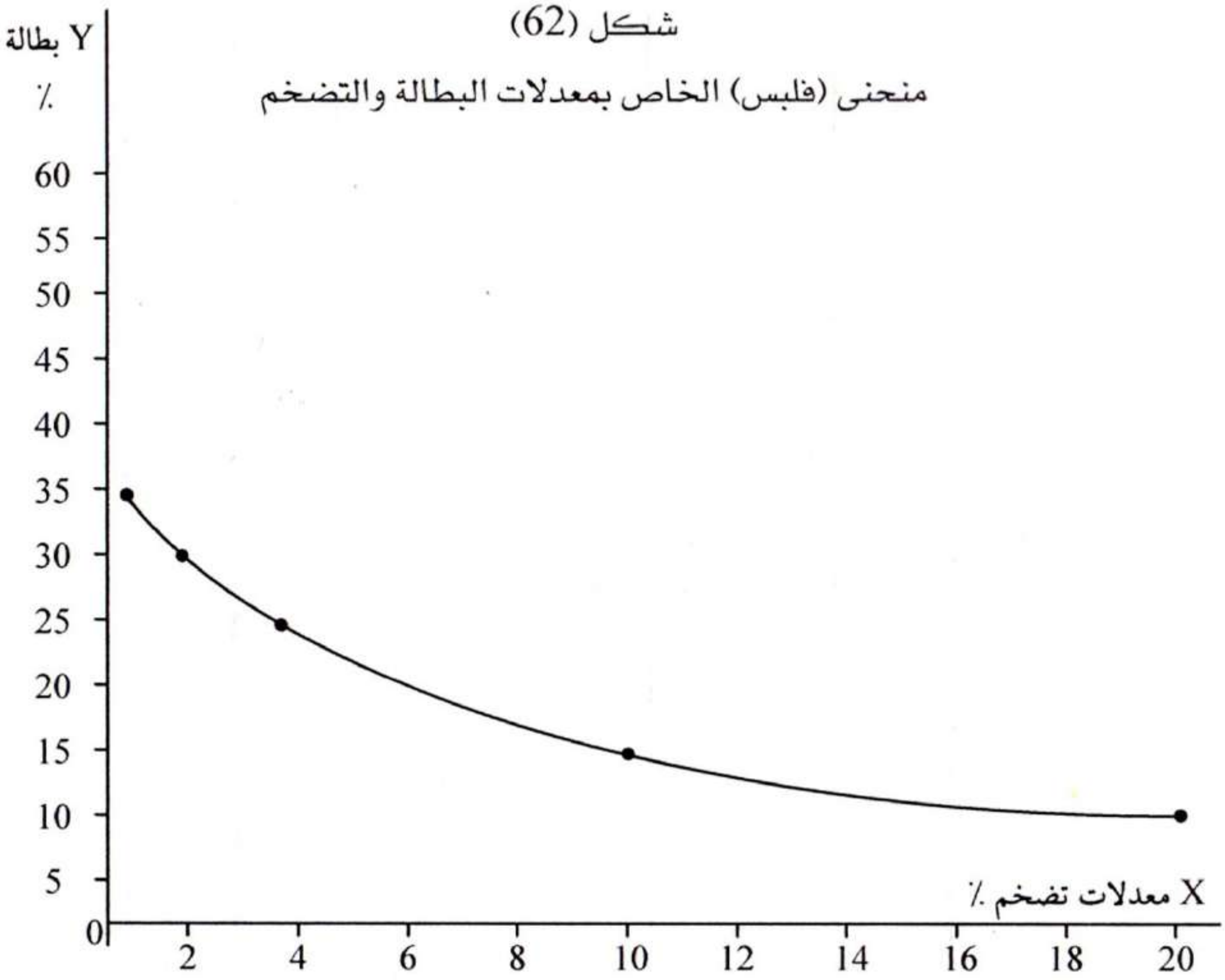
جدول (**10**)

يبين علاقات معدل التضخم بمعدل البطالة

السنة	Y_i معدلات البطالة ٪	X_i معدلات التضخم ٪	$X' = \frac{1}{X}$	$y = Y_i - \overline{Y}$	$x'_i = X'_i - \overline{X}'$	$y_i x_i^x$	$x_i'^2$
1	35	1	1	12	0.62	7.44	0.38
2	30	2	0.5	7	0.12	0.84	0.01
3	25	4	0.25	2	- 0.13	- 0.26	0.02
4	15	10	0.10	- 8	- 0.28	2.24	0.08
5	10	20	0.05	- 13	- 0.33	4.29	0.11
$N = 5$	$\sum Y_i = 115$	$\sum X_i = 37$	$\sum X'_i = 1.9$			$\sum y_i x'_i = 14.55$	$\sum x_i'^2 = 0.6$

شكل (62)

منحنى (فلبس) الخاص بمعدلات البطالة والتضخم



$$\overline{Y} = \frac{115}{5} = 23$$

$$\overline{X} = \frac{37}{5} = 7.4$$

$$\overline{X}^{*} = \frac{\sum X_i^{*}}{n} = \frac{1.9}{5} = 0.38$$

$$\hat{b} = \frac{\sum x^{*} y_i}{\sum x^{*2}} = \frac{14.55}{0.6} = 24.3$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{X}^{*} = 23 - 24.3\,(0.38) = 13.8$$

$$\hat{Y} = 13.8 + 24.3\left(\frac{1}{X}\right) + u_i$$

ومن معادلة الانحدار المحسوبة يتبين لنا أن 13.8٪ هو الحد الأدنى للبطالة الذي لا ينخفض دونه مهما ارتفع معدل التضخم (â) أما مرونة البطالة فتحسب كالآتي:

$$\frac{\partial Y}{\partial X}=\frac{b}{X^2}=-\frac{b}{\overline{X}^2}=\frac{24.3}{(7.4)^2}=0.44$$

ويعني أن كل زيادة في معدل التضخم بنقطة واحدة يصاحبها انخفاض في معدل البطالة بمقدار (0.44) نقطة.

13.9 : الارتباط اللاخطي :

يمكن حساب الارتباط غير الخطي البسيط كالآتي وذلك استناداً إلى معادلة القطع المكافئ من الدرجة الثانية وبيانات الجدول (1):

$$r_{Y\cdot XX^2}=\sqrt{1-\frac{S^2_{y\cdot xx^2}}{S^2_y}}$$

$$S_Y=\sqrt{\frac{\sum Y^2}{N}-\left(\frac{\sum Y}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{267}{5}-\left(\frac{37}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{6.5544}=2.56$$

$$S^2_Y=6.5544$$

من النتائج السابقة تحصّلنا على:

$$S^2_{Y\cdot XX^2}=\frac{6.27}{6}=1.045$$

$$r_{Y\cdot XX^2}=\sqrt{1-\frac{1.045}{6.5544}}=\sqrt{0.8403}=0.9167$$

أما عند استخدامنا في الحل لنموذج خط مستقيم حينئذ سيكون معامل الارتباط ضعيفاً ويساوي $r = 0.45$.

وفـي العلاقة اللوغاريتمية سنحصل على:

$$S_{\log y} = \sqrt{\frac{(\sum \log Y)^2}{N} - \left(\frac{\sum \log Y}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{17.243}{6} - \left(\frac{9.9565}{6}\right)^2}$$

$$S_{\log Y} = 0.1315$$

$$r_{\log Y \cdot \log x} = \sqrt{1 - \frac{S^2 \log y \cdot \log x}{S^2 \log Y}} = \sqrt{1 - \frac{0.000087}{0.1315}}$$

$$r^2 = 0.9993$$

$$r = \sqrt{0.9993}$$

$$= 0.99$$

13.10 : النموذج اللوجستي (Logistic Model) :

ويستخدم هذا النموذج فـي تحليل السلاسل الزمنية وخاصة عند تحديد الاتجاه العام لبعض الظواهر بارتباطها بالزمن مثل السكان ووصولهم إلى حد أعظم حسب نظرية مالثوس (عند غياب الطعام الكافي والمجاعات). فهناك على الأرض سيكون عدد سكان قابل للتحمل على الأرض Carrying capacity أوحد أعظم (حد) حجم للسكان لمحدودية الموارد المتاحة ويأخذ شكل النموذج المبين في الشكل (63). ويسمى شكل (ζ) Sigmoloid أو Logistic .

وتستخدم للظواهر التي تبدأ عند نقطة معينة (a) وتصل إلى حد أعلى وتتوقف عند ذلك الحد مثل سرعة الطائرات والمقذوفات تحت أبحاث السرع لأنه لا يمكن الوصول إلا إلى حد معين في السرعة وذلك عند التنبؤ بالتقدم العلمي والتكنولوجي وكذلك دورة حياة السلع أو عدد السكان على أرض وموارد محدودة، والطلب على

سلع يحدث فيها إشباع (Point of saturation) مثل السلع الكمالية والسيارات لكل شخص وعائلة وأجهزة الراديو ونموذجها العام الآتي:

$$Y_t = \frac{a}{1 + be^{-ct}} \qquad \ldots \qquad (1)$$

وسرعة النمو تقاس إلى الزمن وكالآتي:

$$r = \frac{dY}{dt} = \frac{c}{a} Y (a - Y) \qquad \ldots \qquad (2)$$

وإذا ما اعتبرنا $\frac{c}{a}$ تساوي (k) وإذا ما كانت $k = \frac{c}{a} > 0$ عند ذاك يمكن كتابة معادلة (2) كالآتي:

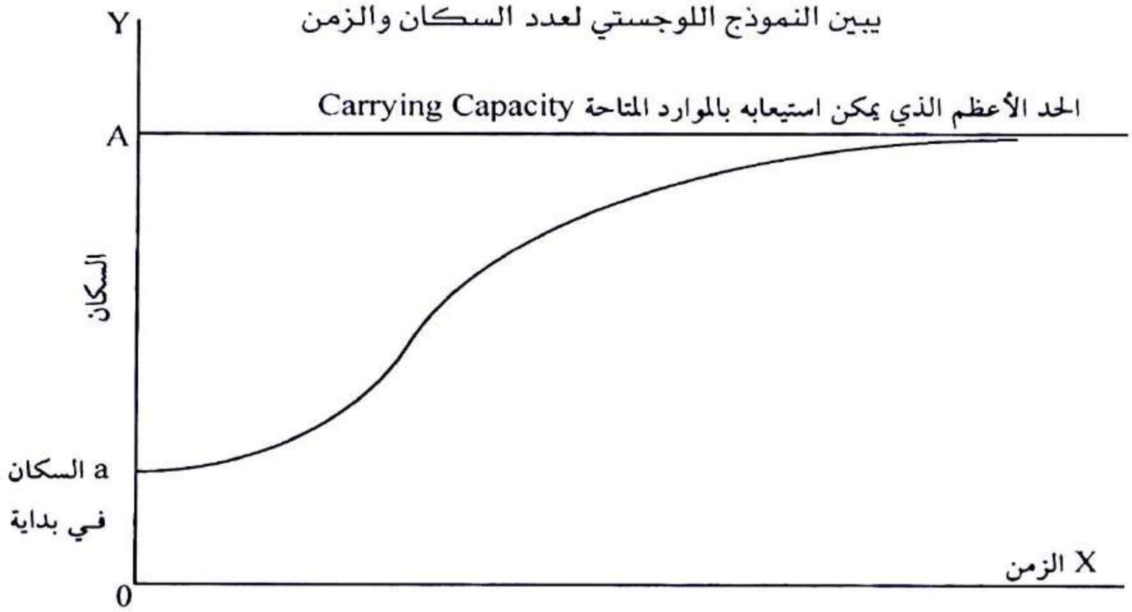
$$R = k.Y (a - Y) \qquad \ldots \qquad (3)$$

وتشتق كالآتي:

$$Y = \frac{a}{1 - be^{-ct}} = a(1 + be^{-ct})^{-1}$$

شكل (63)

يبين النموذج اللوجستي لعدد السكان والزمن



$$\frac{dY}{dt} = -1\left[a + be^{-ct}\right]^{-2}\left(-cbe^{-ct}\right)$$

$$= a\left(cbe^{-ct}\right)\left(1 + be^{-ct}\right)$$

$$= \frac{Y^2}{a} cbe^{-t}$$

$$= -\frac{cY}{a}\left(Ybe^{-et}\right)a - Y$$

$$= Ybe^{-et}$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{c}{a} Y\,(a - Y)$$

وتسمى المعادلة (3) قانون روبرتسون للنمو (Rebertson's law of Growth). ومن هذا العرض يتبين بأن سرعة النمو تتناسب تناسباً طردياً مع قيمة (Y) من جهة وعكسياً مع قيمة (a-Y) من جهة أخرى.

وتسمى (a-y) عامل التعويق Retarding Factor [1].

فانخفاض قيمة (a-Y) تسبب في خفض سرعة النمو أو عرقلته. وتنخفض قيمة عامل التعويض بزيادة (Y) إلى أن تقترب من (a) بتقدم الزمن. عند ذاك يقترب فيه معامل التعويق من الصفر، مسبباً بذلك عرقلة النمو وتوقفه.

ويمكن أن نكتب هذه المعادلة كالآتي:

$$Y = \frac{A - a}{a + (A - a)\, e^{kx}} \qquad \ldots \qquad (6)$$

وتقدر وتيرة النمو كالآتي:

---

١) د. عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981، ص59.

$$r = c - kY + ut$$

وتقاس (b) كالآتي:

$$\ln b = c\left(\frac{n+1}{2}\right) + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{a}{Y}+1\right)$$

تطبيق (**10**):

إذا ما افترضنا عدد سكان دولة ما (1982) كان (511115000) وكان معدل الولادات (25.8) ومعدل الوفيات (10.3). وبفرض أن الحد الأعظم للسكان الممكن تواجده على أرض البلاد هو (750) مليون فرد، فكم سيكون عدد سكان هذه الدولة عام (2000).

الحل:

هنا سيكون:

$$a = 511115000$$

$$A = 750000000$$ و

k = معدل الولادات ناقصاً معدل الوفيات

$$k = 0.0258 - 0.0103 = 0.0155$$

وباستخدام هذه المعلومات نحصل على:

$$Y = \frac{750000000 - 511115000}{511115000 + (750000000 - 511115000)\, e^{-0.0155x}}$$

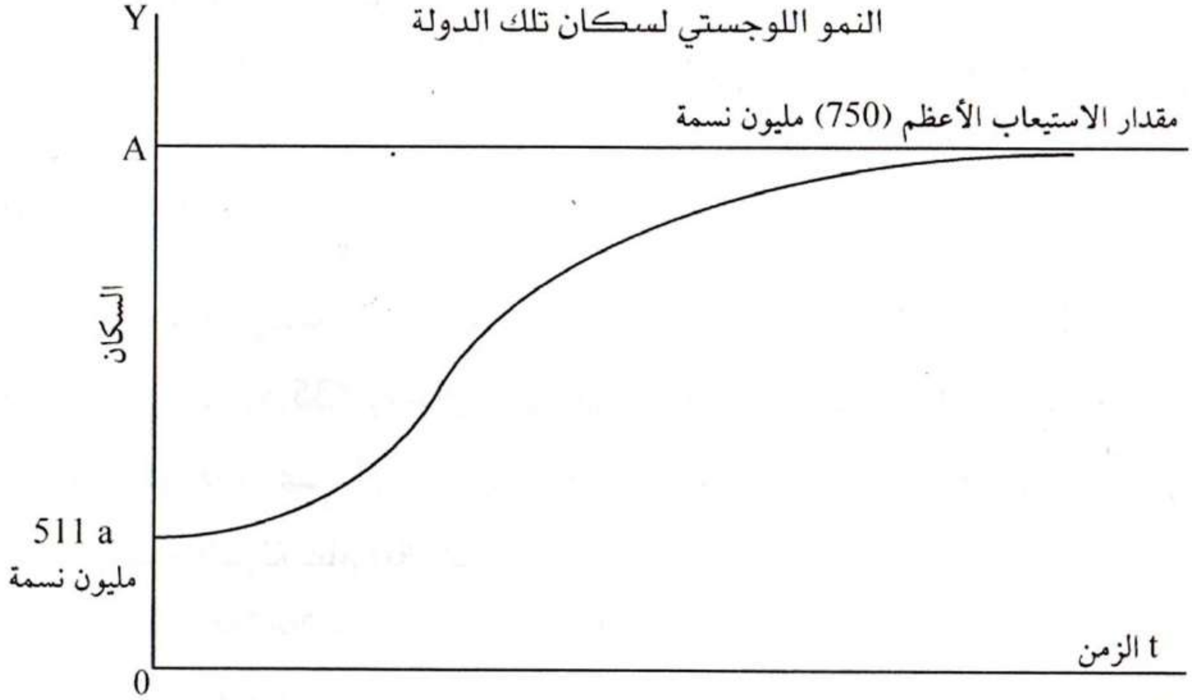
وبقسمتها على (511115000) أي بعد تحويلها من البسط إلى المقام نحصل على:

$$Y = \frac{750000000}{1 + \left[\frac{750000000}{511115000} --1\right]\, e^{-0.0!55x}}$$

$$= \frac{750000000}{1 + [0.4674]\, e^{-0.0155x}}$$

شكل (64)

النمو اللوجستي لسكان تلك الدولة



وبما أن X = 0 عام 1982 هو صفر عند ذاك سيكون (x) عام 2000 هو 18 = x

ومنه نحصل على:

$$Y = \frac{750000000}{1 + 0.4674\ e^{-0.279}}$$

$$= \frac{750000000}{1 + 0.4674\ e^{-0.279}} = \frac{750000000}{1.3536}$$

حيث أن: $-0.279 = (18)\ 0.0155 -$

∴ لا يجوز أن يزيد عدد السكان عام (2000) في تلك الدولة عن (Y) المحسوبة لعدم وجود إمكانية لاستيعاب أعداد أكبر ضمن هذه الفترة والرقعة.

كما تستخدم هذه الدالة في تحليل (دورة حياة المنتوج) بدأ من اختراعها وإنتاجها بشكل تجاري حتى ضمور طلبها لوصوله الحد الأعظم ليحل محله إنتاج آخر. وكذا الحال مع طلب بعض السلع التي فيها إشباع أو نقطة إشباع عظمى مثل (الدقيق والخبز والسكر والملح وبعض السلع الغذائية الأخرى) وذلك مع زيادة دخل الفرد.

كما يمكن أن تستخدم في تحليل الطلب على بعض السلع المعمرة ذات الاستخدام التقليدي كجهاز الإذاعة المسموعة والمرئية مهما تطورت إمكاناته وكذلك سوق السيارات في الدول الصناعية المتطورة وإنتاج الحديد والصلب للاستهلاك المحلي.

13.10 : تطبيقات وتمارين:

لقد تم ذكر عشرة تطبيقات في متن الفصل (13)، وأما التمارين فانظر إلى تطبيقات وتمارين الفصل الرابع عشر.

النماذج المتعددة اللاخطية

14

Non Linear Multiple Models

14.1 : مفهوم النماذج المتعددة اللاخطية.

14.2 : النماذج ذات المرونات الثابتة.

14.3 : النموذج متعدد الحدود (المسترسلات).

14.4 : تطبيقات وتمارين.

النماذج المتعددة اللاخطية

Non Linear Multiple Models

14.1 : مفهوم النموذج المتعدد اللاخطي وأنواعه:

في كثير من الأحيان يأخذ شكل النموذج أو العلاقة بين المتغيرات شكلاً لاخطياً أي أن التغير في المتغير المستقل يسير بوتيرة مختلفة عن وتيرة التغير في المتغير التابع، مما يجعل الشكل الانتشاري والمنحنى لا يأخذ صيغة خطية بل لاخطية (تم شرحه في الفصل الثالث عشر).

وتكون العلاقة ذاتها عندما يكون التغير في المتغير التابع مختلفاً عن التغير لأكثر من متغير مستقل (متغيرين أو أكثر). وهذا ما ينطبق على النموذج المتعدد غير الخطي. وهناك العديد من هذه النماذج إلا أن الشائع منها في الاستخدام الاقتصادي والإداري هو نوعين وهما:

1- الدوال ذات المرونات الثابتة Functions with constant elasticities .

2- متعدد الحدود Poly nomials .

وهي من نوع الدوال اللوغاريتمية المزدوجة بأكثر من متغير مستقل مرفوعة لقوة معينة.

14.2 : النماذج ذات المرونات الثابتة :

وتأخذ عادة الصيغ الجبرية الآتية:

$$D = aP^{b}Y^{c}e_{i}^{u} \qquad \ldots \qquad (1)$$

حيث أن: D = كمية الطلب على سلعة معينة.

a = كمية الطلب المستقل.

P = سعر السلعة.

Y = دخل المستهلك.

c,b = ثوابت تشير إلى معاملات المرونة.

e^{ui} = المتغير العشوائي.

أو الشكل الجبري الآتي:

$$Q = AL^{\alpha} K^{\beta} e^{ui} \qquad \ldots \qquad (2)$$

حيث أن: Q = حجم الإنتاج.

A = ثابت الدالة ويبين أسلوب المزج بين عنصري الإنتاج وهي مؤشر للكفاءة الإنتاجية لعنصري الإنتاج.

L = كمية العمل المستخدمة في الإنتاج.

K = كمية رأس المال المستخدمة في الإنتاج.

β,α = ثوابت النموذج التي تشير إلى معاملات مرونة الإنتاج لعنصري الإنتاج.

e^{ui} = المتغير العشوائي.

ويمكن تقدير النموذج اللوغاريتمي المزدوج كثير الحدود باستخدام طريقة المربعات الصغرى بعد تحويل الدالة الأصلية إلى دالة خطية باستخدام اللوغاريتمات وكالآتي:

$$\text{Log } D = a + b \log P + c \log Y + u_i \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$\text{Log } Q = A + \alpha \log L + \beta \log K + u_i \qquad \ldots \qquad (4)$$

وفيما يأتي عرض لهذين النموذجين:

(a) دالة الطلب اللوغارتمية المزدوجة:

كما ذكرنا مسبقاً بأن هذه الدالة تأخذ الشكل الرياضي الآتي: $D = a\,P^{b}\,Y^{c}\,e^{u}$ والذي يمكن تحويلها إلى الصيغة الخطية الآتية:

$$\log D = a + b \log P + c \log Y + u_i \qquad \ldots \qquad (1)$$

أو بالصيغة المختصرة الآتية:

$$D^* = \hat{a} + \hat{b}P^* + \hat{c}Y^* + v \qquad \ldots \qquad (2)$$

حيث:

$$D^* = \log D$$
$$P^* = \log P$$
$$Y^* = \log Y$$

وتحل بطريقة المربعات الصغرى باستخدام منظومة المعادلات الآنية الآتية لاستخراج المعلمات $\hat{c}, \hat{b}, \hat{a}$:

$$\left.\begin{array}{l} \sum D^* = na + b\sum P^* + c\sum Y^* \\ \sum P^*D^* = a\sum P^* + b\sum P^{*2} + c\sum Y^*P^* \\ \sum Y^*D^* = a\sum P^*Y^* + c\sum Y^{*2} \end{array}\right\} \qquad \ldots \qquad (3)$$

حيث أن: D^* = الشكل المحول للكمية المطلوبة.

P^* = الشكل المحول للسعر.

Y^* = الشكل المحول للدخل.

V = لوغاريتم المتغير العشوائي.

وتساوي (b) معامل المرونة السعرية والتي تحدد رياضياً كالآتي:

$$E_P = \frac{dD}{dp} \cdot \frac{P}{D}$$

وأما عن قيمة c فهي تعبر عن معامل المرونة الداخلية وتتحدد رياضياً كالآتي:

$$E_Y = \frac{dD}{dY} \cdot \frac{Y}{D} = c$$

$$\frac{dD}{dp} = b\left(\frac{D}{p}\right) \qquad\qquad \frac{dD}{dY} = c\left(\frac{D}{Y}\right)$$

تطبيق (**1**):

في الجدول (1) كميات الطلب على سلعة ما (D) وأسعارها ومتوسط دخل المستهلك. وفق النموذج اللوغاريتمي المزدوج مستخدماً المتغيرين المستقلين (السعر والدخل).

الحل:

باستعمال البيانات المتحصّل عليها من الجدول (1) يمكن الحصول على النتائج الآتية:

$$25.6132 = 15\ a + 11.2744\ b + 45.02812\ c$$
$$20.38716 = 11.2744\ a + 10.468\ b + 33.7798\ c$$
$$83.03114 = 45.02813\ a + 33.7798\ b + 125.13098\ c$$

وبحل المعادلات الثلاثة السابقة نحصل على القيم التالية:

$$\hat{a} = 1.96$$
$$\hat{b} = -0.26$$
$$\hat{c} = 0.39$$

بهذا يأخذ النموذج التقديري الصيغة الأصلية التالية:

$$Y=1.96\ P^{-0.26}\ Y^{0.39}$$

أو الصيغة اللوغاريتمية :

$$\ln Y = 1.96 - 0.26 \ln P + 0.39 \ln Y$$

$(t_b = -\ 3.54)$ $\qquad$ $(t_c = 6.64)$

$$R^2 = 0.97$$

جدول (1)

يبين حسابات الطلب وسعر السلع ومتوسط دخل الفرد

السنة	كمية السلعة المطلوبة D	سعر السلعة P	متوسط دخل الفرد Y	Log D = D^*	Log P = P^*	Log Y = Y^*	P^*D^*	Y^*D^*	P^{*2}	Y^{*2}	Y^*P^*
1982	40	9	400	1.602	0.95424	2.6026	1.52869	4.1694	0.91057	6.7735	2.4835
1983	45	8	500	1.652	0.90309	2.69897	1.4919	4.4587	0.81557	7.2844	2.4374
1984	50	9	600	1.69897	0.95424	2.77815	1.6212	4.72000	0.91057	7.7181	2.6502
1985	55	8	700	1.7404	0.90308	2.84509	1.5717	4.9516	0.81553	8.0945	2.5693
1986	60	7	800	1.7782	0.8451	2.90308	1.5027	5.1622	0.71419	8.4279	2.4534
1987	70	6	900	1.8451	0.7782	2.95424	1.4359	5.4509	0.60559	8.7167	2.2976
1988	65	6	1000	1.81291	0.7782	3.000	1.4108	5.4387	0.60559	9.0000	2.3346
1989	65	8	1100	1.81291	0.90309	3.04139	1.6372	5.51377	0.81557	9.2500	2.7466
1990	75	5	1200	1.87506	0.69891	3.07918	1.3105	5.7736	0.48847	9.4813	2.1521
1991	75	5	1300	1.87506	0.69899	3.11394	1.3105	5.8388	0.48858	9.6966	2.1766
1992	80	5	1400	1.9031	0.69891	3.146428	1.3301	5.9874	0.488476	9.8981	2.1989
1993	100	3	1500	2.0000	0.4771	3.17609	0.9542	6.6352	0.22762	10.0875	1.5153
1994	90	4	1600	1.9542	0.60205	3.20411	1.1765	6.2612	0.36246	10.2663	1.9290
1995	95	3	1700	1.9778	0.47712	3.23045	0.9436	6.38918	0.22764	10.4358	1.5413
1996	85	4	1800	1.9294	0.6020	3.25527	1.1615	6.2807	0.3624	10.5468	1.9597
n = 15				$\sum D^*$ = 25.6132	$\sum P^*$ = 11.2744	$\sum Y^*$ = 45.028189	$\sum P^*D^*$ = 20.38715	$\sum Y^*D^*$ = 83.03143	$\sum P^{*2}$ = 10.46798	$\sum Y^{*2}$ = 125.13098	$\sum Y^*P^*$ = 33.7798

ويعني أن المتغيرين يفسران 97٪ من التغير في (D) الطلب.

(يقوم الطلبة باختبار الفروض وتقدير ($\hat{Y}$) ورسم خط الانحدار).

(2) دالة الإنتاج كوب – دوغلاس:

وهي نموذج لوغاريتمي مزدوج متعدد الحدود يأخذ الصيغة الجبرية الآتية:

$$Q = AL^{\alpha} K^{\beta} e^{ui}$$

ويمكن أن يتحول إلى الصيغة الخطية كالآتي بعد فرض $U = 0$.

$$\text{Log}\, Q = A + \alpha \log L + \beta \log K \qquad \ldots \qquad (1)$$

أو:

$$Q^* = A + \alpha L^* + \beta K^* + V_i \qquad \ldots \qquad (2)$$

Q^* = لوغارتيم كمية الإنتاج.

L^* = لوغارتيم كمية العمل المستخدم.

K^* = لوغارتيم كمية رأس المال المستخدم.

V_i = لوغارتيم المتغير العشوائي.

ويمكن حل النموذج بطريقة المربعات الصغرى كالآتي:

$$\begin{aligned}
\sum Q^* &= AN + \alpha \sum L^* + \beta \sum K^* \\
\sum L^* Q^* &= A \sum L^* + \alpha \sum L^{*2} + \beta \sum K^* L^* \qquad \ldots \qquad (3) \\
\sum K^* Q^* &= A \sum K^* + \alpha \sum L^* K^* + \beta \sum K^{*2}
\end{aligned}$$

تطبيق (**2**):

أدناه كمية الإنتاج (Q) ورأس المال (الاستثمارات) (K) وعدد العمال المستخدمين (L) في عينات من شركات تنتج عصير الفواكه، وفق النموذج القياسي لهذه العلاقة واختبر معنوية المقدرات.

جدول (2)

يبين كمية الإنتاج وعناصر الإنتاج

1742	288	374	2053	5410	17074	15804	Q
434	229	132	579	571	2416	2320	L
928	2	711	143	2314	1952	977	K

الحل:

1- نقوم بحساب الجدول (2) أعلاه وكما هو مذكور في الجدول (3).

2- نحسب المتوسطات الآتية:

$$\overline{Q}^* = \frac{\sum Q_i^*}{n} = \frac{54.686}{7} = 7.8123$$

$$\overline{L}^* = \frac{\sum L_i^*}{n} = \frac{44.6329}{7} = 6.376$$

$$\overline{K}^* = \frac{\sum K_i}{n} = \frac{41.2607}{7} = 5.8944$$

وبتعويض القيم نحصل على:

$$54.686 = 7\,A + 44.6329\,\alpha + 41.2607\,\beta$$

$$270.3915 = 44.6329\,A + 29.6881\,\alpha + 358.902\,\beta$$

$$338.635 = 41.2607\,A + 358.902\,\alpha + 279.70899\,\beta$$

ومنها يمكن أن نجد المعلمتين (α ، β) كالآتي:

$$\alpha = \frac{\left(\sum l^* q^*\right)\left(\sum k^{*2}\right) - \left(k^* q^*\right)\left(\sum l^* k^*\right)}{\left(\sum l^{*2}\right)\left(\sum k^{*2}\right) - \left(\sum l^* k^*\right)^2}$$

حيث آن:

$$l^* = L^* - \overline{L}^*$$

$$q^* = Q^* - \overline{Q}^*$$

$$k^* = K^* - \overline{K}^*$$

جدول (3)

يبين حسابات دالة (كوب – دوغلاس) لإنتاج عصير الفواكه

$\ln Q = Q^*$	$\ln L = L^*$	$\ln K = K^*$	Q^{*2}	L^{*2}	K^{*2}	L^*K^*	Q^*L^*	Q^*K^*
9.668	7.7490	6.8840	93.47020	60.0470	47.38946	74.917	53.34400	66.5545
9.745	7.7899	7.5770	94.96503	60.6830	57.41093	75.913	59.02410	73.8380
8.596	6.3470	7.7467	73.89122	40.2844	60.01136	54.5593	49.16830	66.5906
7.627	6.3600	4.9600	58.17113	40.4496	24.60160	48.508	31.54560	37.8299
5.927	4.8800	6.5670	35.09380	23.8144	43.12549	28.909	32.04696	38.9029
5.663	5.4340	0.6930	32.06957	29.5284	0.48025	30.773	3.76576	3.9245
7.463	6.0730	6.8330	55.69637	36.8813	46.48990	45.323	41.49681	50.9947
$\sum Q^* =$ 54.686	$\sum L^* =$ 4.6329 41.6329	$\sum K^* =$ 41.2607	$\sum Q^{*2} =$ 443.35372	$\sum L^{*2} =$ 291.6881	$\sum K^{*2} =$ 279.70899	$\sum L^*K^* =$ 358.902	$\sum Q^*L^* =$ 270.3915	$\sum Q^*K^* =$ 338.635

$$\beta = \frac{(\sum k^* q^*)(\sum l^{*2}) - (\sum L^* q^*)(\sum l^* k^*)}{(\sum l^{*2})(\sum k^{*2}) - (\sum l^* k^*)^2} = 0.1995$$

$$A = \overline{Q}^* - d\overline{L}^* - \beta \overline{K}^* = -1.226$$

وبهذا يكون النموذج التقديري كالآتي:

$$\hat{Q}^* = -1.226 + 1.233\, L^* + 0.1995\, K^*$$

أما عن معامل التحديد المتعدد فيمكن حسابه كالآتي:

$$R^{*2} = \frac{\alpha \sum l^* q^* + \beta \sum k^* q^*}{\sum q^{*2}} = 0.982$$

ويمكن إيجاد الخطأ المعياري للمعلمتين α و β وكالآتي:

$$S_\alpha^2 = \frac{(1-R^2)\sum q^{*2}}{n-k-1} \cdot \frac{\sum k^{*2}}{(\sum l^{*2})(\sum l^{*2}) - (\sum l^* k^*)^2} = 0.0128$$

$$S_\beta^2 = \frac{(1-R^2)\sum q^{*2}}{n-k-1} \cdot \frac{1}{(\sum l^{*2})(\sum k^{*2}) - (\sum l k^*)^2} = 0.002505$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_\alpha = 0.1346 & t_\alpha = 10.876 \\ S_\beta = 0.05005 & t_\beta = 3.99 \end{array}\right\} \text{٪5}$$ بمستوى معنوية

حيث أن:

$$\sum q^{*2} = 16.1346 = \sum (Q^* - \overline{Q}^*)^2$$

$$\sum l^{*2} = 7.10299 = \sum (L^* - \overline{L}^*)^2$$

$$\sum l^* k^* = 7.308 \quad = \Sigma(L^* - \overline{L}^*)(K^* - \overline{K}^*)$$

$$\sum k^{*2} = 36.50251 = \sum (K^* - \overline{K}^*)^2$$

$$\sum l^* q^* = 10.217$$

$$\sum k^* q^* = 16.2946$$

ويمكن أيضاً حساب معاملات الارتباط الجزئية الآتية:

1- معامل الارتباط الجزئي بين الناتج مع عنصر العمل $r_{ql.k} = 0.954$

2- معامل الارتباط الجزئي بين الناتج وعنصر رأس المال $r_{qk.l} = 0.671$

3- معامل الارتباط الجزئي بين عنصري العمل ورأس المال $r_{kl} = 0.45385$

وبهذا تكون كتابة النموذج التقديري القياس كالآتي:

$$\hat{Q}^* = 1.226 + \underset{(10.867)}{1.233\,L^*} + \underset{(3.99)}{0.1995\,K^*}$$

حيث الأرقام بين القواس تمثل قيم (t) المحسوبة.

α = مرونة الناتج الصناعي بالنسبة للعمال ويعني أن العمل لو تغير بنسبة 10٪ (مع ثبات رأس المال) فإن الناتج الكلي سيتغير بنسبة 12.3٪ .

β = مرونة الناتج الصناعي بالنسبة رأس المال ويعني لو أن الرأسمال تغير بنسبة 10٪ فإن الناتج سيتغير بنسبة 1.99٪ (مع ثبات العمل).

$\alpha + \beta$ = مرونة الناتج الصناعي مجتمعة لكلا العاملين العمل ورأس المالك وتعني أن الناتج الصناعي سيتغير بنسبة 14.33٪ عند زيادة العمل ورأس المال سوية بنسبة 10٪ .

$$\alpha + \beta = 1.233 + 0.1995 = 1.433$$

وهي بهذا دالة متزايدة لأن $(\alpha + \beta) > 1$.

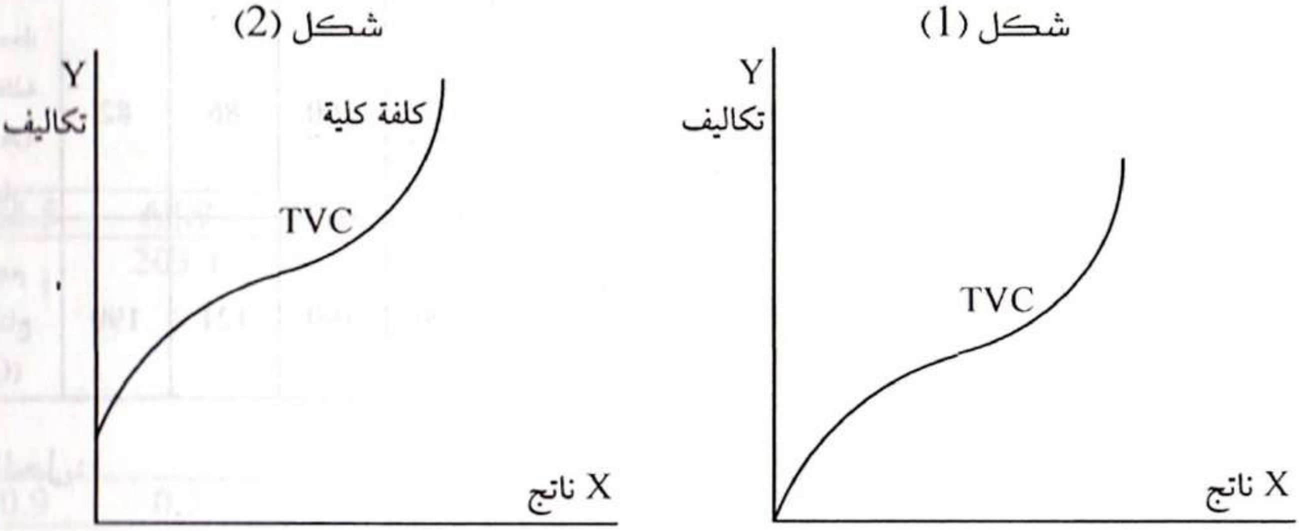
وأن الناتج الحدي للعمل أكبر من الناتج الحدي لرأس المال بدليل ارتفاع نسبة مرونة الناتج للعمل قياساً لمرونة الناتج لرأس المال.

ورغم أن معاملي (t) المحسوبة لكلا العاملين هو أكبر من (t) الجدولية لكن معنوية عنصر العمل ومساهمته في الناتج أكبر من عنصر رأس المال.

بدليل آخر هو نسبة ارتفاع معامل الارتباط بين العمل والناتج (0.954) قياساً إلى معامل ارتباط الرأسمال مع الناتج (0.671) كما أن العاملين مجتمعين يفسران 98.2٪ في تغير الناتج.

14.3 : النموذج متعدد الحدود Polynomials (المسترسلات) :

وتستخدم عادة في دراسة بعض المتغيرات ذات الاتجاه المتغير مثل متوسط الكلفة الكلية والكلفة الكلية والتي تأخذ الأشكال الآتية:



وهما دوال تكعيبية وتأخذ المعلمات الإشارات التفسيرات الآتية:

a = الكلفة الكلية.

a = التكاليف الثابتة.

d > 0 معلمة المتغير المستقل في الحالة الأولى.

d > 0 معلمة المتغير المستقل في الحالة الثانية أي المرحلة التربيعية.

d > 0 معلمة المتغير المستقل في المرحلة التكعيبية.

X = حجم الإنتاج.

وتكون الدالة تربيعية لمتوسط التكاليف الكلي ويمكن أن تحول إلى دالة لوغاريتمية ونجد حلها بطريقة المربعات الصغرى.

تطبيق (**3**):

أدناه متوسط كلفة إنتاج القنطار الواحد للبرتقال (قصير الأجل) لبيانات (12) شركة من شركات إنتاج العصير المركّز في ليبيا وحجم الإنتاج فيها، وفق النموذج المسترسل واختبر مقدراته.

جدول (4)

يبين كلفة الإنتاج وحجم الإنتاج

متوسط الكلفة (AC) دينار	82	86	100	100	95	85	110	88	86	108	87	87
حجم الإنتاج (Q)	199	121	190	100	109	138	209	170	158	201	130	181

الحل:

حيث أن نظرية الاقتصاد الجزئي تفترض منحنى تكاليف للأجل القصير على شكل U فإننا نعمل على توفيق متوسط التكاليف على حجم الإنتاج ومربع حجم الإنتاج، أي معادلة من الدرجة الثانية وكانت النتائج كالتالي:

$$\hat{A}C = 244.86 - \underset{(-9.84)}{2.2\,Q} + \underset{(10.41)}{0.01\,Q^2}$$

$$R = 0.94$$

حيث تشير الأرقام بين الأقواس إلى قيم t المحسوبة. والذي يمكن ملاحظته من التقديرات أن المعاملات جميعها مقبولة إحصائياً عند مستوى 5٪ وبإجراء

التفاضل على هذه المعادلة نحصل على $\left(\dfrac{dAC}{dQ} = -2.2 + 0.02\,q\right)$ وهي معادلة تبين معدل التغير عند كل قيمة من قيم الإنتاج (Q) أي كم تتغير التكلفة المتوسطة نتيجة تغيير حجم الإنتاج بوحدة واحدة؟ وبذلك لو افترضنا عند إنتاج (500) وحدة تكون التكلفة المتوسطة 1644.86 ويكون معدل التغير في هذه التكلفة المتوسطة (7.8 –2.2 + 0.02) .500 = 500.

تطبيق **(4)**:

الجدول التالي يوضح الكلفة الكلية لإنتاج معجون الطماطم وحجم الإنتاج بالطن، وفق النموذج المسترسل التكعيبي.

جدول (5)

يبين تكلفة إنتاج معجون الطماطم وحجم الإنتاج

التكلفة الكلية TC ألف دينار	10	28.6	19.5	32.9	52.4	42.4	62.9	86.5
	74.1	100	133.9	115.7	154.8	178.7	203.1	
حجم الإنتاج (Q) ألف طن	0.1	0.3	0.2	0.4	0.6	0.5	0.7	0.9
	0.8	1.0	1.2	1.1	1.3	1.4	1.5	

من النظرية الاقتصادية يتبين لنا أن منحنى التكاليف الكلية يكون له شكل مسترسلة تكعيبية.

الحل:

في هذه الحالة نوفق الكلفة الكلية مع كمية الإنتاج (Q) ومربع كمية الإنتاج ومكعب كمية الإنتاج وتحصلنا على النتائج التالية:

$$\hat{T}C = 2.434 + 0.0857\, x + 0.00003\, X^2 + 0.0000004\, X^3$$

$$(\quad) \qquad (\quad) \qquad (\quad)$$

حيث تشير الأرقام بين الأقواس إلى قيم t المحسوبة (راجع جدول t) لاستخراج القيم الجدولية.

14.4 : تطبيقات وتمارين :

لقد تم ذكر أربعة تطبيقات في متن هذا الفصل وهي بمثابة مراجعة عامة لكل ما ذكر في الفصل الثالث عشر والرابع عشر. وتشمل التمارين في هذا الفصل تمارين عن الفصل الثالث عشر والرابع عشر.

التمارين:

1- اشرح مفهوم النموذج اللاخطي والفوارق بينه وبين النموذج الخطي.

2- عدد أنواع النماذج اللاخطية وارسم منحنياتها العامة.

3- اشرح أهمية استخدام النموذج اللاخطي بدلاً من الخطي وما هي نتائج استخدام أحدهما بدل الآخر.

4- اشرح مفهوم النموذج القياسي اللاخطي البسيط وما هي أنواعه الرئيسية.

5- اشرح مفهوم نموذج القطع المكافئ من الدرجة الثانية وصيغته الرياضية وعلاقة (X) و (Y).

6- أدناه قيمة الناتج الكلي وعدد العاملين. وفق النموذج المناسب لهذه العلاقة واختبر معنوية المقدرات والدالة الكلية بمستوى معنوية 5٪ و 1٪ .

قيمة الإنتاج	10	12	14	18	20	25	25	21	19	17
عدد العاملين	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7- اشرح مفهوم نموذج القطع المكافئ من الدرجة الثالثة وصيغته الرياضية وعلاقة (X) و (Y).

8- أدناه الكلفة الكلية وحجم الإنتاج وفق النموذج القياسي المناسب واختبر مقدراته بمستوى معنوية 5٪ و 1٪ .

حجم الإنتاج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الكلفة الكلية	10	12	14	20	18	16	24	30	36	44

9- اشرح مفهوم النموذج الأسي (نصف لوغارتمي) وعلاقة (X) و (Y) بالمعلمة (b).

10-أدناه تطور قيمة المضافة في الصناعة الاستخراجية والتحويلية الأردنية، وفق النموذج المناسب لذلك واختبر مقدراته.

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
القيمة المضافة مليار دينار:	10.6	10.5	11.0	11.1	11.9	13.4	13.9	15.8	17.2	18.8	20.3	24.2

11-اشرح مفهوم النموذج اللوغاريتمي وحدد علاقة (X) و (Y) بالمعلمة (b).

12-أدناه أسعار قنطار الشعير في السوق الحرة للعراق وكميات المعروض منها بالطن وفق النموذج المناسب واختبر مقدراته بمستوى معنوية 5٪ و 1٪ .

السعر / دينار	1.5	4	8.5	11	15.3	20
المعروض / ألف قنطار	5	12.9	25	32	45	60

13-اشرح مفهوم النموذج المقلوب وحدد علاقة a , b بـ (X) و (Y) واكتب أهم صيغه القياسية؟

14-أدناه أسعار قنطار القمح في السوق الحرة للأردن والكميات المعروضة منها بالطن وفق النموذج المناسب واختبر مقدراته بمستوى معنوية 5٪ و 1٪ .

السعر / دينار	1.5	4	3	6.5	8
المعروض / ألف قنطار	10	14.5	25.5	25	27.5

15- اشرح مفهوم النموذج اللوجستي، وحدد علاقة (A) و (a) بـ (Y) و (X).

16- كان حجم الإنتاج المتراكم للجهاز المسموع ليبيا عام (1988) هو (1) مليون جهاز وقد وضعت الشركة خطة لإيصال الإنتاج إلى ذلك المستوى، بحيث يحصل كل مواطن عام (2005) على جهاز خاصة به، فإذا ما عملت بأن عدد السكان في ليبيا عام (1998) هو (4.5) مليون نسمة وبمعدل نمو 3.2٪ سنوياً، فكم سيصل عدد الأجهزة المسموعة عام (2005) وما هي وتيرة نمو الإنتاج المطلوبة.

17- بماذا تتميز النماذج اللاخطية المتعددة؟ وما هي أنواعها؟

18- أدناه كمية الطلب على زيتون المائدة (بالألف طن) وسعر الطن ألف دينار (P) ومعدل دخل الفرد السنوي (Y) وفق النموذج القياسي على الوجه الآتي:

$$Y = aP^{b}\,Y^{c}\,e^{u}$$

الكمية المطلوبة (Q)	9	12	16	18	22	24
سعر الطن (P) ألف دينار	9	8	7	6	5	4
معدل دخل الفرد (Y) ألف دينار	1.5	2	2.7	3.9	5	6.5

تنبيـه

- ملاحق الجداول الإحصائية الخاصة باختبار: t ، z ، x^2 ، F واختبار داربن – واطسون راجع الكتاب الثاني والذي هو بمثابة الجزء الثاني من كتاب أساسيات الاقتصاد القياسي التحليلي (مشاكل الاقتصاد القياسي واختبارات الدرجة الثانية).
- قائمة المصطلحات القياسية يراجع الجزء الثاني.
- قائمة المصادر باللغة العربية والإنكليزية أيضاً يراجع فيها الجزء الثاني.

تم بعون الله تعالى

أساسيات

الإقتصاد القياسي التحليلي

FUNDAMENTALS OF
ANALYTICAL ECONOMETRICS

نظرية الإقتصاد القياسي والإختبارات القياسية
من الدرجة الأولى

الأهلية للنشر والتوزيع

المملكة الأردنية - عمان
وسط البلد - خلف مطعم القدس
هاتف ٤٦٣٨٦٨٨ - فاكس ٤٦٥٧٤٤٥
ص.ب: ٧٧٧٢ عمان ١١١١٨ الأردن
E-mail: alahlia@nets.jo

تصميم الغلاف: دار الفن للتصميم

منشورات
200