- الفرق بين الرياضيات الاقتصادية والاقتصاد الرياضي
- اسباب استخدام الاقتصاد الرياضي
- محاذير استخدام الاسلوب الرياضي
- الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي
- النماذج الاقتصادية
- العلاقات في الانموذج الاقتصادي
- خطوات بناء الانموذج الاقتصادي
- أنواع الدوال

الفصل الاول
الرياضيات وعلاقته بالاقتصاد

يتباهى علم الاقتصاد أو ربما يندب حظه لوجود علاقة واسعة وحميمة، ليست مثمرة دوما، بينه وبين علم الرياضيات ، فالباحثون في علم الاقتصاد يستخدمون على نحو روتيني الرياضيات بدءا من عبارات جبرية بسيطة إلى مفاهيم معقدة في الطبولوجيا التفاضلية بغية التعبير عن نظرياتهم ، ويشهد على ذلك كرّاسة كتبها في القرن الثامن عشر بإيطاليا (بيكاريا) استند فيها الى علم الجبر كي يبين اخطار تهريب البضائع وفوائده، غير أن السنوات الاخيرة شهدت اقبالا واضحا من الاقتصاديين على نشر بحوثهم ذات التوجه الرياضي المتقدم تخطى الى حد بعيد البحوث في النظرية الاقتصادية الاساسية ، الامر الذي يؤكد وجود شغف كبير في الرياضيات وان الوقت حان لترسيخ مجموعة من المبادئ الاقتصادية الرصينة.

شهد الاهتمام بالاقتصاد الرياضي حماسا متزايدا ولاسيما بعد الحرب العالمية الثانية ، فقد وجد علماء الاجتماع ومنهم علماء الاقتصاد ان الرياضيات تمدهم بفائدتين مهمتين، أولهما ان الرياضيات يزودهم بنظام دقيق يساعدهم على صياغة نظرياتهم بشكل دقيق ، وثانيهما انه أداة لاستخراج مفاهيم عميقة من أكوام هائلة من البيانات الخام.

إن استخدام الرياضيات في المساعدة على طرح الاسئلة الصحيحة مهد الطريق لبناء نماذج تنطوي على براعة رياضية بالغة التعقيد، وفي الوقت نفسه توفر اعترافا بالمبادئ الاقتصادية الاساسية إلا ان هذا الحماس الزائد للرياضيات في معالجة المشاكل الاقتصادية قابله تذمر حتى من الاقتصاديين انفسهم ، اذ يقول العالم (ليونتيف) الحائز على جائزة نوبل عام 1972 في هذا الشأن ((إن الحماسة المطلقة تجاه الصياغة الرياضية عملت في الأغلب على إخفاء المحتوى الجوهري للموضوع خلف جبهة هائلة من الإشارات الجبرية))، كما اشار هذا العالم الى ان الرياضيات قد خرجت من مهمتها في مساعدة الاقتصاد الى اثبات النظريات الرياضية فحسب ويتجلى هذا بقوله ((الرياضيات تتصدى لمشكلات خاصة لأنها مدفوعة نحو إثبات النظريات المهمة رياضيا أكثر من أهميتها الاقتصادية)).

واليوم لا يمكن أن يدعي أي فرد أنه عالم اقتصاد أو عالم نفساني أو عالم اجتماع إذا ما كان جاهلا بعلم الإحصاء أوبحساب الاحتمالات، فقط لأنهما أصبحا من أهم الأدوات التي بفضلهما يمكن للمختص أن يعالج مختلف المعلومات ومن ثم فهم مدلولات نتائج تجاربه و أبحاثه، و في هذا المجال نصح كورنو Cournot في سنة 1838 باستعمال حساب الاحتمالات في ميدان الاقتصاد، وهذا العالم الذي هو من جهة أخرى صاحب الأعمال التي تطورت أكثر بفضل تدعيمها ببحوث أخرى لعالم الاقتصاد الشهير Walras و بأعمال متنوعة للعالم Pareto .

و في السنوات الأخيرة بيّن علم القياس الاقتصادي أو مايسمى الاقتصاد القياسي (Econometrics) أن ما تسمى بنظرية الالعاب (Game theory) قد تحولت إلى

نظرية رياضية يمكن استعمالها في دراسة السلوكيات الاقتصادية، وبذلك و بعد تأخر كبير، فرض علم الاحتمالات نفسه في برامج معاهد الاقتصاد السياسي.
أما أعمال (*كونودكرات*) عن سبر آراء الناخبين و التي أهملت لمدة تقارب القرن و النصف، فقد أكدت للجميع اليوم حتمية التوجه لعلمي الإحصاء و الاحتمالات لمعرفة الاتجاه العام للناخبين إثر سبر لآراء عينة منهم تُختار بشكل علمي و دقيق، إذ يمكن التكهن وفي إطار محدود ومدروس بمختلف النسب التي سيتحصل عليها لحظات قليلة بعد الانتهاء من الاقتراع، و فيما يتعلق بالسياسة و بطرائق التسيير و بحسن اتخاذ القرارات فيها، فإن علم الاحتمالات قد فرضت قواعدها على أصحاب القرار في مختلف الديمقراطيات الغربية ولاسيما إذا ما كان التحضير للقرار مرتبطا بشكل طردي مع عامل الزمن، وعندئذ يكون النجاح متعلقا بحسن تصور التغيرات المستقبلية للوضعيات الحاضرة، فالاقتصادي و السياسي والاستراتيجي في مختلف الميادين يجد نفسه مضطرا للاختيار بين عدة سبل للتحرك و هذا أمام أكثر من موضوعة تكون عموما متغيرة و بشكل مستمر مع الزمن مما يجعله غير متيقن بالقدر الكافي من مقدار تغير الموضوعات حيث تبدأ نتائج قراراته بالظهور، و لهذا يتفق العلماء المعاصرون على أن كل نجاح لأية طريقة أو اسلوب لابد أن يُركَّز فيه على التثمين الحقيقي و الفعال للرياضيات و لعلم الاحتمالات خصوصا.
وخلاصة القول أن حل مسألة قرار يكمن في المخاطرة باختيار حل من الحلول المتاحة كما يفعل لاعب الشطرنج الذي يعلم ضمنيا أن كل قرار يتخذه لابد أن يغيّر مصير المقابلة و هو المصير الذي يتوقف بدوره على قرارات الخصم التي تبقى في أغلب الأحيان مفترضة.
و في هذا المجال طور العلماء منذ عهد قريب جدا أدوات رياضية مهمة للتحكم في الأحداث نذكر منها بحوث العمليات (Operation research) الذي ارتبط أساسا بالحرب العالمية الثانية و الذي من خلاله تمّ اخضاع العوامل الأساسية التي تدخل في مسائل التنظيم العسكري و الاقتصادي و الصناعي للرياضيات، ويوظف البحث العملياتي علم الاحتمالات فضلا عن عدة مفاهيم رياضية حديثة كنظرية البيانات إذ تمثل المدن أو المصانع أو مراحل الإنتاج بالنقط كما تمثل العلاقات بينها بقطع المستقيمات أو بالأسهم.
و تعد الطريقة المسماة بعملية التقويم واستعراض المهام Process Evaluation and Review Tasks و اختصارا - P.E.R.T - من أهم الطرائق التنظيمية في برمجة مختلف الوظائف التي يحتاجها كل مشروع ذي أهمية حيث تتم عملية مراقبة الإنجاز منهجيا، فمثلا بطريقةP.E.R.T يمكن للمختصين أن يتابعوا و أن يسيّروا المخزون إذ يهتم في هذا الميدان بالطلب على السلعة و التموين بها و إعادة التموين و كذلك ثمن تخزينها و مدة تسويقها وفقدانها في السوق،فضلا عن الدقة الأكيدة في مراقبة مختلف الأجهزة من حيث فقدان القيمة و التآكل و التجديد ومن ثم تحديد قيمة الاستثمارات الملائمة ويتم كل هذا بطرائق رياضية تفرضها باستمرار الظاهرة الاقتصادية.

الفرق بين الرياضيات الاقتصادية والاقتصاد الرياضي

على الرغم من ان الارتباط بين المفهومين هو ارتباط وثيق غير ان كلا منهما يتميز عن الآخر في مجموعة من المفاهيم والاهداف وطريقة التناول، إذ تتناول الرياضيات الاقتصادية (والتي ينبغي ان تعطى في المراحل الأولية لطلبة الاقتصاد) مختلف الطرائق الرياضية التي تساعد الطالب في فهم السلوك الاقتصادي للمتغيرات الاقتصادية من دون الدخول في تعقيدات الطرائق الرياضية وتشابكاتها إذ ان المرحلة الاولى تتطلب مستوى معينا من التحليل الاقتصادي يتناسب ومستوى مادة الاقتصاد التي تعطى في هذه المرحلة ، فضلا عن ان التوسع في الطرائق الرياضية بما يخدم الاقتصاد قد يخرج المادة من اهدافها عليه تبقى الرياضيات أساسا يعتمد عليه في وضع الطالب على الطريق الصحيح في تفسير السلوك الاقتصادي للظواهر الاقتصادية أيا كانت.

أما فيما يتعلق بالاقتصاد الرياضي فهو الطريقة التي يقوم الاقتصادي بها ببناء أنموذج اقتصادي نظري مبتدئين بالفروض ثم العلاقات الرياضية ثم المعالجة الرياضية التي توصلنا الى النتائج النظرية المتوخاة، ومن الطبيعي ان تكون النتائج النظرية التي نحصل عليها من المعالجة الرياضية معتمدة على مدى واقعية الفروض التي ترتكز عليها العلاقات الرئيسة للأنموذج. وتجدر الاشارة الى ان الفرق الجوهري بين الرياضيات الاقتصادية والاقتصاد الرياضي يكمن في ان الثاني يتناول دراسة ظواهر اقتصادية معقدة ونماذج متقدمة يصعب على المبتدئين في الاقتصاد تناولها، لذا ينبغي للمتصدين للنماذج المعقدة ان يتسلحوا بمقدار وافي من المعرفة الرياضية فضلا عن المعرفة الاقتصادية والتي سوف يتعرف عليها الطالب في المراحل المتقدمة من الدراسة ونعني بها المراحل الثالثة والرابعة.

اسباب استخدام الاقتصاد الرياضي

إن استخدام الاسلوب الرياضي في التحليل الاقتصادي له مايبرره فهو يتمتع بمزايا مهمة تجعله مهيئا لمعالجة المشاكل الاقتصادية المعقدة ووضعها بصيغ رياضية تسهل الحل ، ومن اهم هذه المزايا :-

1. له امكانية كبيرة في تحليل النتائج المتحصل عليها بسبب تحديده للفروض التي يتم اعتمادها في بناء الأنموذج.
2. يساعدنا في التعامل مع عدد كبير من المتغيرات الاقتصادية التي تتضمنها بعض الظواهر الاقتصادية ، وبذلك يكون متفوقا على الطرائق الاخرى كالبيانية والوصفية في التحليل التي تقتصر في تحليلها احيانا على متغيرين او ثلاثة واحيانا على متغير واحد فقط، وهو بهذه الميزة سوف يقلل الجهد والوقت اللازمين لحل المشكلات الاقتصادية فضلا عن الدقة في التحليل.
3. الدقة والوضوح والايجاز في التعبير عن النظريات الاقتصادية وعرض العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية.
4. تجنب الافتراضات الضمنية التي يصعب اكتشافها وجعلها اكثر صراحة والمساهمة في تطبيق علم الاقتصاد القياسي الذي يتطلب تطبيقه صياغة النظريات والعلاقات الاقتصادية باسلوب رياضي.
5. التقدم المذهل في الحاسبات الالكترونية الذي يسهل عملية المعالجة والتحليل بصرف النظر عن عدد المتغيرات او تعدد العلاقات وغيرها.
6. تعدد وتنوع وتوافر برامج الحاسوب الرياضية منها والاحصائية.

محاذير استخدام الاسلوب الرياضي

على الرغم من المزايا التي يتمتع بها الاسلوب الرياضي في التحليل ، إلا ان استخدامه يشوبه نوع من الحذر ، فقد اشترط الاقتصاديون الرياضيون توافر شرطين اساسيين لاستخدام الرياضيات في الاقتصاد هما:-

1. قابلية الظواهر الاقتصادية للقياس الامر الذي يمكن معه التعبير عن تلك الظواهر بارقام أو برموز رياضية.
2. قابلية العلاقات بين الظواهر الاقتصادية الكمية للصياغة الرياضية بشكل يمكن معه استخدام المعادلات والعلاقات الرياضية المختلفة.

واختلفت الاراء بين دعاة استخدام الرياضيات في الاقتصاد ومن خالفوها وذلك لاسباب عدة ، فقد اكد المخالفون ان استخدام الرياضيات قد اسهم في تقدم العلوم الطبيعية في حين ان الاقتصاد علم

انساني وان تضمن عوامل كمية فانه يتضمن عوامل اخرى يصعب قياسها او تقديرها كميا كما اعترضوا على استخدام لغة الرموز المستخدمة في النماذج الرياضية واشاروا الى ان لغة الرموز فقيرة لانها دقيقة جدا ، في حين ان اللغة الوصفية الادبية وان كانت غامضة وغير صريحة احيانا لكنها واسعة وغنية جدا، ومن الممكن ايجاز الانتقادات الموجهة للاقتصاد الرياضي بشكل خاص ولاستخدام الرياضيات في التحليل الاقتصادي على النحو الاتي:-

1. وجود فجوة بين الاقتصاديين الرياضيين وقدماء الاقتصاديين الوصفيين بسبب عدم تمكن الوصفيين او اطلاعهم على الاساليب الرياضية الكافية حتى مع تحول علم الاقتصاد وبشكل واسع الى الاسلوب الرياضي والكمي.
2. وقوع بعض الاقتصاديين تحت تأثير الطابع الرياضي والاغراق في الاسلوب الرياضي بينما الاساليب الرياضية لا تستخدم إلا وسيلة وليست غاية.
3. هناك بعض المتغيرات والظواهر الاقتصادية غير قابلة للقياس الكمي مما يصعب صياغتها في شكل رياضي.
4. لا يفرق الاقتصاد الرياضي بين الحل الرياضي الناتج عن الصياغة الرياضية للنظرية الاقتصادية والحل الممكن تحقيقه اقتصاديا وسياسيا واجتماعيا وانسانيا.

وعلى الرغم من هذه الانتقادات الموجهة للاقتصاد الرياضي إلا أن معظم الاقتصاديين يؤمن باهميته الكبيرة وان له دوراً بارزاً في فهم النظرية الاقتصادية واثبات اسسها وافتراضاتها ومدلولاتها فضلا عن استخدامها في التحليل.

الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي

Mathematical Economics & Econometrics

يقول الاقتصادي (*Johnston*) ((ان الدور الاساس للاقتصاد القياسي هو التقدير والاختبار الاحصائي للنماذج الاقتصادية)) ، ويتمثل هذا الدور ، أولاً في تحديد او توصيف الأنموذج الاقتصادي بشكل رياضي، وثانياً في تجميع البيانات الاحصائية ذات العلاقة بالمتغيرات التي تظهر في ذلك الأنموذج ، وثالثاً في استخدام البيانات التي تم تجميعها لتقدير معالم او ثوابت الأنموذج الاقتصادي بعد تحويله الى شكل قابل للتقدير الاحصائي بادخال المتغيرات العشوائية الى العلاقات الرياضية للأنموذج (من غير المتطابقات)، واخيرا اخضاع العلاقات التي تم تقديرها احصائيا والتي تكون الأنموذج الاقتصادي المقدر الى مجموعة من الاختبارات الاحصائية والاقتصادية لمعرفة ما اذا كان الأنموذج المقدر احصائيا يعطي صورة قريبة للواقع أم لا.

بناءً على ذلك يمكن القول ان الاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي يتفاعلان ، أي يؤثر احدهما في الاخر وبشكل متبادل، فالاقتصاد الرياضي يعد الاقتصاد القياسي أنموذجاً اقتصاديا نظريا دليلاً للعمل القياسي يوضع من قبل الاخير، ومن الناحية المبدئية على الاقل، موضع الاختبار العملي لمعرفة ما اذا كانت نتائج ذلك الأنموذج تتفق او تتعارض مع الواقع ، وفي ضوء تلك النتائج يتم قبول او تعديل او رفض الأنموذج النظري الذي وضع موضع الاختبار العملي. ومع كل ماسبق فإن الاقتصاد القياسي والاقتصاد الرياضي شيئان مختلفان وكلاهما يختلف عن الرياضيات الاقتصادية.

إن الحديث عن الرياضيات والاقتصاد الرياضي والاقتصاد القياسي لابد له ان ينحرف بنا قليلا الى الحديث عن الأنموذج ومفهومه ولاسيما وان كلمة الأنموذج تدخل في شتى العلوم سواء الكمية أوغير الكمية وحري بنا ان نوضح هذه الكلمة بشيء من التفصيل.

النماذج الاقتصادية: *Economic Models*

يعكس الأنموذج الاقتصادي العلاقات الاقتصادية التي يتم صياغتها عادة بصيغ رياضية لتوضيح اتجاه هذه العلاقات ، وغالبا مايشار لهذه العلاقات بالمعادلات الهيكلية، ويتضح من التعريف المذكور ان النماذج الاقتصادية تسهل عملية وضع صورة مبسطة وسهلة الفهم والتحليل لكيفية عمل الانشطة ضمن اقتصاد معين أو نشاط اقتصادي محدد خلال مدة زمنية معينة في صورة تجريد محدد او رموز او قيم عددية.

مكونات الأنموذج الاقتصادي: *Economic Model Components*

يتكون الأنموذج الاقتصادي في ضوء النظرية الاقتصادية من مجموعة من العناصر والعلاقات الاقتصادية والصيغ الهيكلية التي توضح الهيكل الاساس للأنموذج المراد بناؤه.

عناصر الأنموذج الاقتصادي: *Economic model Elements*

يتكون الأنموذج الاقتصادي من العناصر الاتية:-

اولا: المتغيرات *Variables*
ثانيا: الثوابت *Constants*
ثالثا: المعلمات *Parameters*

اولا: المتغيرات *Variables*

تمثل متغيرات الانموذج الاقتصادي أي شيء يتغير مقداره (قيمته) مثل السعر P ، والتكاليف C ، والانتاج Y ، والاستثمار I، والربح π، والصادرات X، والواردات M، وغيرها من المتغيرات الاقتصادية المعروفة، ويمكن تصنيف المتغيرات التي يتضمنها الأنموذج الاقتصادي الى عدة انواع وكما يأتي:-

أ- **متغيرات خارجية *Exogenous Variables***: وهي المتغيرات التي يتم تحديد قيمتها من خارج الانموذج بوساطة عوامل لم تتم مناقشتها داخل الأنموذج ، وفي بعض الاحيان يتم تحديد قيمتها بوساطة أنموذج آخر مختلف عن الأنموذج الحالي، او بوساطة آليات خارجية قد تكون سياسية او اجتماعية وغيرها وتسمى احيانا بالمتغيرات التحكمية عندما يكون بالامكان التحكم بها *Variables Control*. وتنقسم المتغيرات الخارجية بحسب درجة تاثيرها في الأنموذج الاقتصادي الى الاتي:-

- **متغيرات خارجية أداتية تحكمية** : وهي متغيرات خارجية تستخدم أدوات للتحكم او التأثير في المتغيرات الداخلية المستهدفة مثل مستوى الضرائب T أو مستوى الانفاق الحكومي G أو مستوى سعر الفائدة r وغيرها.
- **متغيرات خارجية غير اداتية** : وهي متغيرات خارجية لا تستخدم أدوات للتحكم في او التاثير في المتغيرات الداخلية المستهدفة ، وقد تكون ذات ابعاد غير اقتصادية كأن تكون بيئية او اجتماعية او سكانية او غير ذلك.

ب- **متغيرات داخلية *Endogenous Variables***: وهي المتغيرات التي يتم تحديد قيمتها ضمن الانموذج الاقتصادي نفسه عن طريق المعاملات *Coefficients* ، وقيم المتغيرات الخارجية للانموذج، وتنقسم المتغيرات الداخلية الى الاتي:-

- **متغيرات هدفية** : وهي متغيرات يراد استهدافها او التاثير فيها.
- **متغيرات غير هدفية**: لا يراد التحكم بها او التاثير فيها.

وكمثال على المتغيرات الخارجية والداخلية ناخذ الأنموذج الآتي:-

$$Y=C+I_0+G_0+X_o-M$$

نجد هنا ان كلا من الاستهلاك C، والدخل القومي Y، و الواردات M ، هي متغيرات داخلية يمكن تقديرها او تقييمها من خلال معرفتنا للمتغيرات الخارجية، في حين يعد الاستثمار I_o ، والانفاق الحكومي G_o، والصادرات X_o ، متغيرات خارجية تحدد بفعل قوى وآليات من خارج الأنموذج، ويلاحظ ان المتغيرات الخارجية تؤثر في المتغيرات الداخلية ولا تتاثر بها، بينما المتغيرات الداخلية تتأثر ببعضها وبالمتغيرات الخارجية.

كما ان هناك انواعا اخرى من المتغيرات قد يحتويها النموذج الاقتصادي يمكن تصنيفها على النحو الاتي:-

1. **المتغيرات المتباطئة زمنيا(المتخلفة زمنيا) *Lagged variables*** : وهي المتغيرات التي تنتمي الى مدة زمنية سابقة ، وكمثال على ذلك الانفاق الشخصي الحالي الذي قد لايعتمد على الدخل الشخصي المتاح للانفاق في السنة الحالية فقط ، ولكن ايضا يعتمد على الدخل الشخصي المتاح للانفاق في سنوات سابقة (مدة الابطاء) ، ويمكن توضيح ذلك من خلال معادلة الفروق الاتية:-

$$C_t=c_o+c_1Y_t+c_2Y_{t-1}+c_3Y_{t-2}+c_mY_{t-n}+U_t.....$$

ويطلق على هذه المعادلة بأنموذج مراحل الابطاء(التخلف) الموزعة ، وهنا تعتمد القيمة الحالية للمتغير التابع C_t الحالي على المجموع المرجح لمتغيرات القيمة الحالية والقيم السابقة للمتغيرات المستقلة (Y_{t-2},Y_{t-1},Y_t) فضلا عن المتغيرات العشوائية (U_t).

2. **المتغيرات العشوائية *Random variables*** :وهي المتغيرات التي تتولد قيمتها بفعل عملية عشوائية وبذلك يحكمها قانون احتمالي إذ ان المتغير العشوائي عبارة عن حد الخطأ Error term والذي يمثل المتغيرات التي تؤثر في الانفاق الاستهلاكي (كما في مثالنا السابق) والتي يصعب اخذها في الاعتبار بوضوح.

ثانيا: الثوابت *Constants*

يعرف الثابت بانه كمية او مقدار او رمز جبري لا تتغير قيمته مثل 7 ، 9 ، 6 ، c ،b ، وهو عكس المتغير ويسمى احيانا بثابت التقاطع *Intercept* ، وتظهر هذه الثوابت منفردة في الانموذج الاقتصادي ويسمى بالحد المطلق *Absolute term*، او انها تظهر بصورة مقترنة بالمتغيرات، فإذا ظهرت مقترنة بالمتغيرات تسمى معاملات *Coefficients* او بالميل *Slope* فمثلا $7P$ في هذه الحالة يسمى 7 بمعامل او بميل المتغير P. فمثلا معادلة الخط المستقيم $y=a+bx$ وهي دالة خطية من الدرجة الاولى ، بمعنى انها تطبق على أي خط مستقيم مثل $y=\frac{1}{2}+4x$ او $y=5+6x$ ، أي ان b,a تكون معلمات ثابتة وهذه الثوابت او المعلمات تكتب بالرموز الانجليزية او اللاتينية وهي معلمات الأنموذج الاقتصادي *Parameters* ، أما قيم هذه المعلمات والتي هي $\left(4,\frac{1}{2}\right)$ و $(6,5)$ فيطلق عليها معاملات*(Coefficients)* وهذه المعلمات تشكل الجزء الثالث من عناصر الأنموذج الاقتصادي.

العلاقات في الانموذج الاقتصادي:

تعرف العلاقات في الانموذج الاقتصادي بانها مجموعة من الاليات يمكن استخدامها في تحديد حجم التاثير المتبادل بين عناصر الانموذج الاقتصادي ، وتسمى العلاقات بسلوك الأنموذج

الاقتصادي او ديناميكية المتغيرات الاقتصادية مع بعضها ، وتندرج تحت هذا العنوان بعض العلاقات الاقتصادية منها:-

1. **العلاقات الاقتصادية السلوكية *Behavioral Relationships*** : تستخدم العلاقات السلوكية لوصف سلوك الوحدات الاقتصادية كسلوك المستهلكين وسلوك المنتجين وغيرها من سلوك الوحدات الاقتصادية محل الدراسة، فمثلا لمعرفة متوسط نصيب الفرد من الناتج المحلي Y نجد ان:

$$Y=\frac{GDI}{N}$$

إذ ان ، GDI : الناتج المحلي الاجمالي ، و N عدد السكان .

2. **العلاقات الاقتصادية الفنية *Technical Relationships*** :هي العلاقات التي تشرح او تصف الارتباط الفني لمتغير بمتغير آخر ، مثل العلاقة بين مستوى الانتاج من منتج ما والمدخلات اللازمة لانتاج هذا المنتج، كالعلاقة التي توضحها دالة كوب دوكلاص للانتاج.

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

اذ ان:-

Q = حجم الانتاج A = معلمة الكفاءة

K = راس المال المستخدم α = مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر راس المال

L = العمل β = مرونة الانتاج بالنسبة لعنصر العمل

3. **العلاقات الاقتصادية الجزئية والكلية *Micro & Macro Relationships***: تمثل العلاقات الجزئية ***Micro Relationships*** العلاقة التي تتعلق بالوحدات الاقتصادية وتتناول السلوك الاقتصادي لتلك الوحدات، وهي قد تكون جزئية سلوكية ، كعلاقة العرض والطلب على سلعة معينة ، أي علاقة طلب المستهلك على سلعة ما واسعار تلك السلعة واسعار السلعة البديلة ودخل المستهلك وكما موضحة بالصيغة الاتية:-

$$Q_d=a+b_1P_1+b_2P_2+b_3Y$$

اذ ان:-

Q_d = الكمية المطلوبة ، P_1 =سعر السلعة المطلوبة ، P_2 = سعر السلعة البديلة

Y = دخل المستهلك ، (b_3,b_2,b_1,α) = معلمات

أما العلاقات الكلية *Macro Relationships*: فهي تلك العلاقات التي تربط بين متغيرات اقتصادية تتصل بسلوك المتغيرات الاقتصادية العامة والبنية العامة للاقتصاد ، بمعنى ان العلاقات الكلية تشمل قطاعات كاملة في الاقتصاد مثل العلاقة الكلية للاستهلاك الكلي(القومي ويسمى احيانا الوطني) والاستثمار العام والدخل القومي (الوطني) وغيرها من العلاقات والتي منها المعادلة الهيكلية للدخل القومي:-

$$Y=C+I+G_o$$
$$C=C_o+c_1Y$$
$$I=I_o-ir$$

وبدورها قد تكون العلاقات الكلية فنية او سلوكية وهكذا.

4. **العلاقات الاقتصادية الساكنة *Static Relationships*** : هي العلاقات التي لا يكون الزمن احد متغيراتها او مؤثرا في تغيير قيم احد المتغيرات الداخلة فيها (أي من دون مدد إبطاء زمني) مثل انموذج ساكن لتعظيم منفعة المستهلك والعلاقات الساكنة مختلفة

، فقد تكون جزئية سلوكية او قد تكون كلية سلوكية وقد تكون جزئية فنية او كلية فنية وما الى ذلك.

5. **العلاقات الاقتصادية الحركية *Dynamic Relationships*** : وهي تلك العلاقات التي يكون الزمن احد متغيراتها او مؤثرا في احد متغيراتها، فالعلاقات المتحركة توضح كيفية تاثير الزمن في المتغيرات الاقتصادية ، وتعد هذه العلاقات اكثر واقعية وقد تكون هذه العلاقات متحركة مستمرة او متصلة *Continuous* ويمكن التعبير عنها بمعادلات تفاضلية ، او قد تكون علاقات متحركة منفصلة او متقطعة *Discrete* ويمكن التعبير عنها بمعادلات فروق وكمثال على العلاقات الحركية التي يمكن التعبير عنها وفق الدالة الاتية:

$$C=c_o+c_1Y+c_2Y_{t-1}$$

إذ تشير C الى متوسط استهلاك الفرد من السلع المنتجة في السنة الجارية ، في حين تمثل Y الدخل النقدي الحقيقي الفردي في السنة الجارية ، بينما تشير Y_{t-1} الدخل النقدي في السنة السابقة ، اما كلا من c_2,c_1,c_o فتمثل معلمات الأنموذج الاقتصادي، وتعد هذه العلاقة سلوكية كلية حركية فمن حيث كونها سلوكية فلأنها تصف سلوك متوسط استهلاك الفرد عندما يتغير الدخل، اما كونها علاقة كلية فلانها تصف سلوك المستهلكين في المتوسط ككل وليست وصفاً لمستهلك واحد، اما كونها علاقة حركية لأن المستهلكين لا يتاثرون بالدخل في المرحلة الحالية فحسب بل بالمراحل السابقة ايضا.

6. **العلاقات الاقتصادية التعريفية *Definitional Relationships* :** وهي العلاقات التي تعبر عن علاقة اقتصادية ناتجة عن تعاريف متفق عليها ، او هي العلاقات التي تعرف احد المتغيرات تعريفا غير مشروط ، أي انها معادلات محاسبية ، فإذا عرفنا الدخل(Y) بأنه يساوي الاستهلاك(C) والادخار(S) فإنه يمكننا القول ان الادخار يساوي الدخل ناقصا الاستهلاك:-

$$Y=C+S \rightarrow S=Y-C$$
$$S=I \quad \rightarrow I=Y-C$$

7. **العلاقات الاقتصادية التنظيمية *Organizational Relationships*** : وتسمى تنظيمية او تشريعية لان المجتمع هو الذي ينظمها ، وهي تستخدم لوضع متغيرات تحدد مسبقا من خلال التشريعات والقوانين التنظيمية في المجتمع ، وكمثال على ذلك العلاقة بين الحصيلة الضريبية والمبيعات من سلعة معينة ، إذ ان الحصيلة الضريبية تساوي المعامل الضريبي مضروبا في قيمة المبيعات أي ان:

$$T_x=t.S$$

إذ يمثل t المعامل الضريبي بينما تمثل S قيمة المبيعات وهذه العلاقة تعد تنظيمية تعريفية كلية.

8. **العلاقات الخطية وغير الخطية *Linear & Non Linear Relationships*:**

أ- **العلاقات الخطية *Linear Relationships***: تعرف العلاقة الخطية بانها تلك التي تتخذ معادلتها الصيغة الخطية ، وتظهر متغيرات هذه العلاقات في صورة معادلات من الدرجة الاولى والتي يعبر عنها بيانيا في صورة خط مستقيم، وهنا يمكن التمييز بين نوعين من العلاقات الخطية هما:

- **العلاقات الخطية البسيطة *Simple Linear Relationships***: وهي تلك العلاقة التي تتكون من معادلة واحدة معالمها خطية وتحتوي على متغيرين فقط ، مثل دالة الاستهلاك $C=c_o+c_1Y$ ، وكذلك دالة الطلب $Q_d=a-bP$ ، ودالة العرض $Q_s=-c+dP$.
- **العلاقات الخطية العامة *General Linear Relationships*** : وتسمى بالأنموذج الخطي العام وتتكون من متغيرين مستقلين او اكثر ، وكلما ازداد عدد المتغيرات كلما اصبحت العلاقة اكثر تعقيدا مما يجعل من الضروري استخدام المصفوفات لحلها ، وتسمى ايضا العلاقات الخطية متعددة المتغيرات وكمثال على ذلك معادلة الطلب على سلعة معينة والتي تعتمد الكمية المطلوبة فيها على سعر السلعة موضوع الدراسة ودخل المستهلك كما يمكن اضافة عوامل اخرى وسنقتصر هنا على متغيرين مستقلين فقط:-

$$Q_d=a-b_1P+b_2Y$$

ب- **العلاقات غير الخطية *Non Linear Relations***: هنا تكون متغيرات العلاقة الاقتصادية او بعضها تحمل أسا اعلى من الدرجة الاولى ، ولا تشكل هذه العلاقة خطا مستقيما ، واي علاقة مرفوعة لأس غير الواحد تعد علاقة غير خطية ولا تمثل خطا مستقيما ، وكمثال على ذلك دالة انتاج كوب – دوكلاص

$$Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$$

خطوات بناء الأنموذج الاقتصادي

Steps of Building Economic Model

تمثل هذه الخطوات امكانية تحويل الانموذج الاقتصادي الوصفي *Descriptive Economic Model* الى انموذج اقتصادي رياضي *Mathematical Economic Model* وتسمى هذه الخطوات بخطوات توصيف الانموذج *Specification of the model* :

1. **تحديد متغيرات الأنموذج *Variables Determination*** : وهنا يتم تحديد المتغيرات الخارجية والداخلية للظاهرة محل البحث.
2. **وضع الفروض الاقتصادية *Economic Assumptions*** : تعد هذه الخطوة مهمة جدا وتعتمد على الفروض والمعطيات والنظريات الاقتصادية المعروفة لتحديد نوع العلاقة واتجاه وطبيعة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ، فمثلا نقول ان شرط التوازن يحدث عندما تتساوى الكمية المعروضة مع الكمية المطلوبة ، او نقول مثلا ان الكمية المطلوبة دالة متناقصة في السعر (*Decreasing Function*) وهكذا.
3. **تحديد الشكل الرياضي للانموذج الاقتصادي *Mathematical form Determination*** وهنا يتم تحديد المتغيرات ونوع العلاقات بين هذه المتغيرات والمعادلات ودرجتها ومدى تجانسها واتساقها وارتباطها مع بعضها ومع هدف الأنموذج الرياضي.
4. **الحل الرياضي للانموذج *Mathematical Solution*** : ونعني بالحل الرياضي ايجاد القيم التي تحقق توازن الأنموذج الاقتصادي ، وهذا يعتمد على عدد معادلات الأنموذج

وعدد متغيراتها ودرجتها ويتم هذا باستخدام الطرائق الرياضية البسيطة او الجبر الخطي او غيرها من الاساليب الرياضية.

5. **التمثيل البياني للأنموذج الاقتصادي *Graphical Presentation*** : وهو العرض البياني للأنموذج الاقتصادي أي تمثيل العلاقة بين اهم متغيرين او ثلاثة في اقصى حد مما يساعد في تبسيط فهم تركيب الأنموذج.

انواع الدوال *Types of Functions*:

يعبر عن الدالة بشكل عام بانها علاقة بين متغيرين واكثر. وعلى وفق ذلك يمكن تقسيم الدوال الى مجموعتين رئيستين هما:-

1. **الدوال ذات المتغير الواحد Functions of one variable** :- وهنا يكون المتغير التابع دالة لمتغير مستقل واحد فقط مثل الصيغة الاتية: $y=f(x)$. وتندرج تحت هذا النوع الدوال الاتية:-
   - الدالة الخطية *Linear Function* وتأخذ الصيغة الاتية $y=a_0+a_1x$
   - الدوال غير الخطية *Non Linear Functions*: و هي دوال الدرجة الثانية او الدرجة الثالثة او اكثر وتاخذ الصيغ الآتية:-

     أ- الدالة التربيعية *Quadratic Function*: ويعبر عنها بالصيغة الاتية: $y=a_0+a_1x+a_2x^2$.

     ب- الدالة التكعيبية *Cubic Function*: وتاخذ الصيغة الآتية: $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$
   - الدوال اللوغاريتمية *Logarithmic Functions* : يمكن كتابة صيغتها $y=\log x$:
   - الدوال الاسية *Exponential Functions*: يعبر عنها يالصيغة الاتية: $y=b^x$

2- الدوال ذات متغيرين او اكثر *Functions of two or more variables* : تجدر الاشارة الى ان معظم الدوال الاقتصادية تكون ذات متغيرين او اكثر كدوال الطلب والعرض إذ يتاثر المتغير التابع بمجموعة من العوامل وليس بعامل واحد ، وبشكل عام يمكن كتابة الصيغة العامة لهذه الدوال بالشكل الآتي:

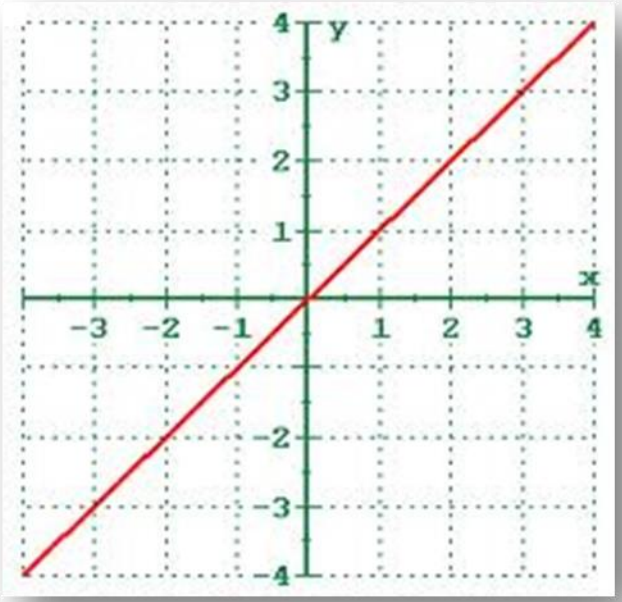
$$y=f(x,z,w)$$

ولو عبرنا عن دالة الطلب متعددة المتغيرات فيمكن كتابتها كما يأتي:-

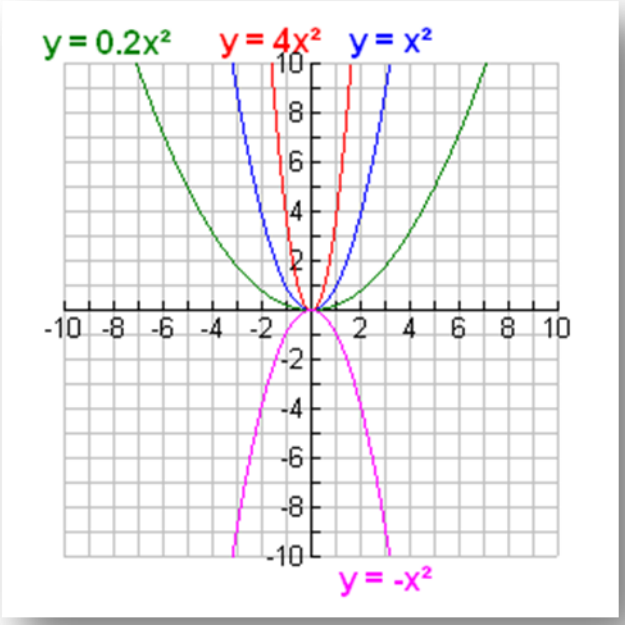
$$Q_d=f(P_x,P_y,I,T)$$

فيعبر عن سعر السلعة بالمتغير P_x ، وعن اسعار السلع الاخرى P_y ، وعن الدخل I ، وعن الاذواق T.

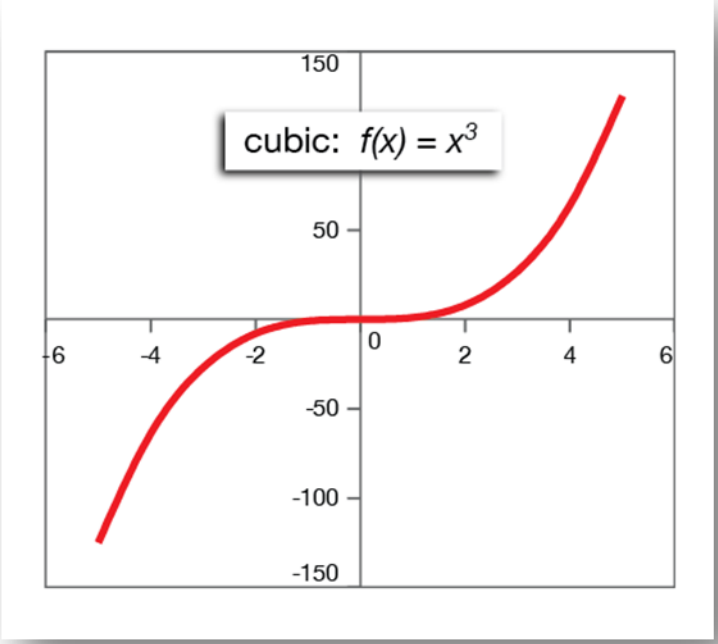
يشير الشكل البياني الآتي إلى اشكال الدوال المختلفة :



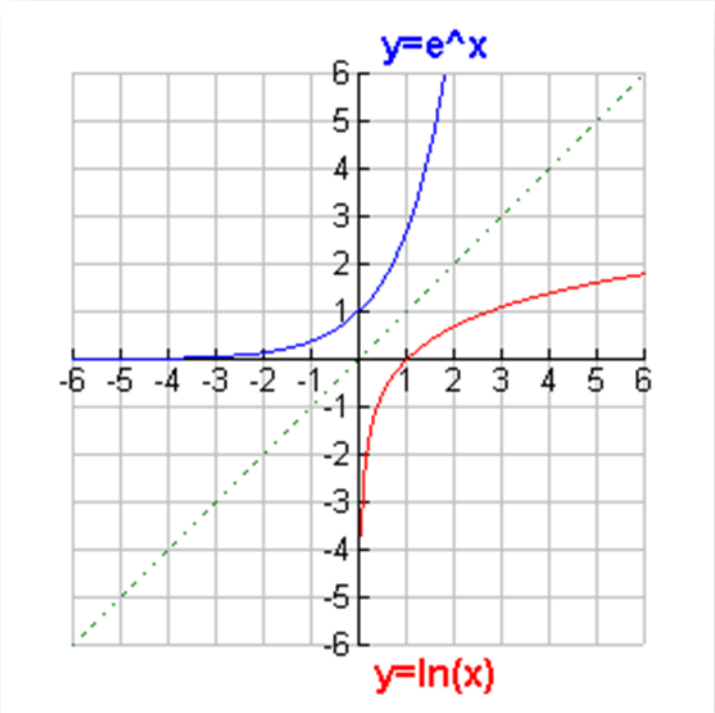
الدالة الخطية



الدالة التربيعية



الدالة التكعيبية



الدالة الاسية والدالة اللوغاريتمية

شكل (1) التمثيل البياني لاشكال الدوال المختلفة

مصادر الفصل الاول//

1. ابي محمد صبري الوتار و اثيل عبد الجبار الجومرد – مدخل الى الاقتصاد الرياضي – دار الكتب للطباعة والنشر – جامعة الموصل- العراق- 1993.
2. اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات.
3. حسين علي بخيت - مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.
4. الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور على شبكة المعلومات.
5. شمعون شمعون – الرياضيات الاقتصادية – ديوان المطبوعات الجامعية – الساحة المركزية – الجزائر- منشور على شبكة المعلومات.
6. مجلة العلوم – 1997- مؤسسة الكويت للتقدم العلمي – منشور على الموقع الالكتروني www.google.com
7- Chiang.C Alpha. Fundamental Methods of Mathematical Economics.3rd edition.McGraw-Hill,Inc.1984

الفصل الثاني

تحليل التوازن في الاقتصاد

Equilibrium Analysis in Economic

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على:

- مفهوم وأنواع التوازن
- التوازن الجزئي والتوازن الكلي
- تأثير الضرائب والاعانات الانتاجية في التوازن
- التوازن في سوق ذي سلعتين واكثر
- التوازن في النماذج غير الخطية
- استخدام المصفوفات في التوازن