1- طريقة التكرار: تبين معادلات الفروق التغير في قيمة المتغير y في نهايتي مدة زمنية او مدتين زمنيتين فاذا علمت y_0 فإن y_3, y_2, y_1 ينتج باضافة الفرق الثابت Δy_t تباعا. ولتبيان هذه الطريقة نفترض المثال الاتي:-

مثال (7.12): حل معادلة الفروق $\Delta y_t = 2$ **مفترضا ان القيمة الاولية** $y_0 = 15$

الحل//

من التعريف الاتي:-

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

نحصل على الاتي:-

$$y_{t+1} = y_t + \Delta y_t$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_0 + 2 \\ y_2 &= y_1 + 2 = y_0 + 2(2) \\ y_3 &= y_2 + 2 = y_0 + 3(2) \\ &. \\ &. \\ &. \\ y_t &= y_0 + t(2) = 15 + 2t \end{aligned}$$

2- الطريقة العامة: ولن ندخل في تفاصيلها .

تطبيقات اقتصادية على معادلات الفروق:

من اهم التطبيقات التي تعالجها معادلات الفروق هي توازن السوق غير ان أنموذج التوازن هذا يعالج الكميات المعروضة Q_S كدالة ليس للسعر الجاري وانما للسعر في مدة زمنية سابقة، فلو افترضنا ان قرار الانتاج في المدة الزمنية t يمثل السعر الجاري P_t. وعادة ما يكون الانتاج غير متاح للعرض او البيع الا في المدة الزمنية القادمة او اللاحقة وهي المدة $t+1$ ، من هذا لايكون السعر الجاري محددا في المدة الزمنية t وانما في المدة الزمنية $t+1$ ايضا.

واعتمادا على ما ذكر تكون دالة العرض كالاتي:-

$$Q_{S_{t+1}} = S_{Pt}$$

$$Q_{S_t} = S_{Pt-1}$$

اما معادلة الطلب فهي كما ياتي:-

$$Q_{d,t} = D(Pt)$$

اما أنموذج توازن السوق فهو:-

$$Q_{d,t} = Q_{S,t}$$

$$Q_{d,t} = \alpha - \beta P_t \qquad \alpha > 0, \ \ \beta > 0$$
$$Q_{S,t} = -\gamma + \delta P_{t-1}$$

وبتعويض كل من معادلة الطلب والعرض بأنموذج التوازن للسوق يتحول النموذج التوازني الى معادلة فروق من الدرجة الاولى كالاتي:-

$$Q_{d,t} = Q_{S,t}$$
$$\alpha - \beta P_t = -\gamma + \delta P_{t-1}$$
$$\alpha + \gamma = \delta P_{t-1} + \beta P_t$$
$$\beta P_t + \delta P_{t-1} = \alpha + \gamma$$
$$\beta P_{t+1} + \delta P_t = \alpha + \gamma$$

بالقسممة على β نحصل على الاتي:-

$$P_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} P_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

من هذا يمكن كتابة الشكل العام للأنموذج كالاتي:-

$$P_t = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right) \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^t + \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right)$$
$$P_t = (P_0 - P^*) \left(-\frac{\delta}{\beta} \right)^t + P^*$$

إذ يمثل P^* سعر التوازن

وتظهر ثلاث حالات من اشكال التذبذب في أنموذج التوازن وهي:-

1- اذا كان ميل منحنى العرض اكبر من ميل منحنى الطلب $(\delta > \beta)$ فإن شكل التذبذب تصاعدي *Explosive* .

2- اذا كان ميل منحنى العرض يتساوى مع ميل منحنى الطلب $(\delta = \beta)$ فان شكل التذبذب منظم *Uniform*.

3- اذا كان ميل منحنى العرض اقل من ميل منحنى الطلب $(\delta < \beta)$ فإن شكل التذبذب يكون تنازليا *Damped*.

مثال (7.13): اذا كانت دوال الطلب والعرض كما يأتي:-

$$Q_{d,t} = 20 - 2P_t$$
$$Q_{S,t} = -10 + 3P_{t-1}$$

المطلوب

1- ايجاد سعر التوازن.

2- تحديد شكل التذبذب.

3- ايجاد السعر بعد مرور 4 فترات زمنية علما ان السعر عند الزمن $(t = 0)$ يساوي 14 وحدة نقدية.

الحل

1- ايجاد سعر التوازن

$$P^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

$$P^* = \frac{20-10}{-2+3} = 10$$

2- تحديد شكل التذبذب: بما ان ميل منحنى العرض اكبر من ميل منحنى الطلب $\beta < \delta$ أي ان $-2 < 3$ لذا فإن شكل الأنموذج هو شكل تصاعدي *Explosive*

3- ايجاد السعر بعد مرور 4 مدد زمنية:

$$P_t = (P_0 - P^*)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + P^*$$

$$P_4 = (14-10)\left(-\frac{3}{-2}\right)^4 + 10$$

$$P_4 = (4)\left(\frac{3}{2}\right)^4 + 10$$

$$P_4 = 30.250$$

اذن السعر بعد مرور 4 مدد زمنية يساوي 30.250 وحدة نقدية

اسئلة الفصل السابع

س1:- لديك دالة الكلفة الحدية لمنشأة :

$$MC = Q^2 + 2Q + 4$$

المطلوب// جد دالة الكلفة الكلية اذا علمت ان الكلفة الثابتة تساوي 100.

س2:- اذا علمت ان دالة الايراد الحدي لمنتج محتكر هي:

$$MR = 10 - 4Q$$

المطلوب// جد دالة الايراد الكلي ثم استنتج دالة الطلب الملائمة.

س3:- استخرج دالة الاستهلاك من معادلة الميل الحدي للاستهلاك الاتي:-

$$MPC = 0.5 + \frac{0.1}{\sqrt{Y}}$$

اذا علمت ان الاستهلاك يساوي 85 عندما الدخل يساوي 100.

س4:- جد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب الملائمة من دوال الايراد الحدي الاتية:-

$$a)\ MR = 20 - 2Q \qquad b)\ MR = \frac{6}{\sqrt{Q}}$$

س5:- جد فائض المستهلك عند $(Q=8)$ من دالة الطلب الاتية:-

$$P = 100 - Q^2$$

س6:- لديك دالة الطلب الاتية: $P = 35 - Q_d^2$ ، ودالة العرض الاتية: $P = 3 + Q_s^2$

المطلوب// استخرج فائض المنتج مفترضا سوق منافسة تامة.

س7:- استخرج فائض المستهلك والمنتج من المعلومات الاتية:

$$P=50-2Q_d$$

$$P=10+2Q_S$$

س8:-اعطيت دالة الطلب الاتية :- $P=-Q_d^2-4Q_d+64$ ،

ودالة العرض الاتية:- $P=Q_S^2-2Q_S+12$

المطلوب// استخرج فائض المستهلك والمنتج مفترضا سوق منافسة تامة

مصادر الفصل السابع

1- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . 1991.

2- حسين علي بخيت - مبادىء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.

3-Akila Weerapana , Models With Difference Equations, Published on line www.google.com.

4- Courtney Brown, An Introduction to First-Order Linear Difference Equations With Constant Coefficients. Published on line www.google.com.

5- Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. 1984.

6- Elaydi, S. and R. Sacker, Global stability of periodic orbits of nonau- tonomous difference equations in population biology and the Cushing- Henson conjectures, Proceedings of the 8th International Conference on Difference Equations, Brno, 2003.

7- Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.

8- Klaus Neusser, Difference Equations for Economists**(**preliminary and incomplete**).** Published on line www.google.com. 2008.

9- Marcel B. Finan, Consumer and Producer Surplus, Published on line www.google.com.

10- Saber Elaydi and Robert J. Sacker, Skew-product dynamical systems: Applications to difference equations.2004.

الفصل الثامن

تحليل المستخدم - المنتج

Input - Output Analysis

يهدف هذا الفصل الى التعرف على :-

- انموذج المستخدم – المنتج
- افتراضات انموذج ليونتيف

انواع نماذج ليونتيف

أ- الانموذج المفتوح

ب-الانموذج المغلق

الفصل الثامن
المستخدم – المنتج
Input - Output

يعتمد انموذج المستخدم – المنتج او انموذج المدخلات – المخرجات في اساسه النظري على شروط التوازن الاقتصادي العام التي حددها الاقتصادي الفرنسي ليون فالراس على شكل

مجموعة من المعادلات الخطية الآنية، ثم قام العالم ليونيتيف فيما بعد بالاستفادة علميا من هذه المعادلات لدراسة بنية القطاع الانتاجي وذلك بتقسيمه لعدد من الفروع. ويعد انموذج المدخلات-المخرجات كغيره من النماذج تبسيطا للواقع الاقتصادي المعقد واداة للتخطيط.

تعد جداول المستخدم- المنتج إحدى أهم الأدوات التي احتلت مكانا" بارزا" في التخطيط والتحليل الاقتصاديين من خلال أيجاد العلاقات التشابكية للقطاعات الإنتاجية مع الأخذ بالاهتمام علاقات التشابك المتبادلة بين خطط الإنتاج والنشاطات في الصناعات المختلفة المكونة للاقتصاد القومي ، وتعالج جداول المستخدم- المنتج علاقات الإنتاج فيما يتعلق بتحديد ما يمكن إنتاجه وكمية السلع الوسيطة التي تستخدم في العملية الإنتاجية بافتراض معرفة الكميات المتاحة من موارد الإنتاج والتكنولوجيا المتبعة في العملية الإنتاجية. وتظهر أهمية تحليل جداول المستخدم - المنتج بوصفه أحد أساليب بناء النماذج الاقتصادية لأغراض التحليل والتركيب الاقتصاديين ، بمعنى استخدامها لأغراض التخطيط القومي الشامل، إذ يمكن ان يستخدم في المجالات الآتية:

1 - تحليل العلاقات الرئيسة المتبادلة بين قطاعات الاقتصاد الوطني وفروعه.

2 - تأمين التوازن بين فروع الاقتصاد الوطني في أثناء عملية أعداد الخطة ، وذلك بتحديد حجم الناتج من كل فرع من فروع الاقتصاد وبالشكل الذي يتناسب مع حجم الطلب النهائي والطلب الوسيط.

3 - تحديد الأثر المتبادل بين الاقتصاد الوطني والعالم الخارجي الأمر الذي يساعد على تخطيط التركيب الهيكلي للتجارة الخارجية بالشكل الذي يخدم الاقتصاد الوطني.

4. مساعدة المخطط على اختيار السياسات الاستثمارية التي تحقق السياسة الاقتصادية والاجتماعية للمجتمع.

5. يستخدم في حل مشاكل التنمية الاقتصادية للدول النامية .

6. يستخدم في حل المشاكل العسكرية.

7. اعطاء صورة مفصلة عن بنية الاقتصاد القومي والتي يستفاد منها في اعداد الحسابات القومية

وبناء على ماتقدم ، نستطيع القول ان ضخامة عمليات التشغيل في مختلف مراحل الانتاج ولا سيما في النظام الاقتصادي المتقدم فانه لا توجد علاقة بسيطة بين الطلب النهائي للمستهلكين والحكومة وبين الانتاج الكلي المنتج بوساطة الصناعات الاصلية ، ولهذا لا بد ان يكون لاغراض التخطيط التعبوي اسلوب يمكن به قياس هذه العلاقات وهذا الاسلوب هو انموذج المستخدم – المنتج (انموذج المدخلات – المخرجات). ويحاول هذا الانموذج ((الذي كان لليونيتيف الفضل الاكبر في اخراجه للعالم[1])) الاجابة عن السؤال الآتي:-

((ما هو حجم الانتاج الكلي المطلوب من كل صناعة لمواجهة مجموعة محددة من الطلب النهائي مع ثبات الاسعار والتطور التقني؟))

الافتراضات التي يقوم عليها انموذج ليونيتيف *Leontief Model*

يقوم انموذج ليونيتيف على مجموعة من الافتراضات هي كالاتي:

1. وجود دالة انتاج خطية متجانسة " اي ان التكاليف المتغيرة تتناسب طرديا مع تغيير حجم الانتاج "
2. يفترض الانموذج الاستقرار اي انه يهمل العرض والطلب ويحل محلها الحاجات ويعالج الاسعار والكميات كل على حدة.

انموذج المستخدم – المنتج

[1] يعتقد بغض الاقتصاديين ان الاقتصادي الفرنسي فرانسوا كيناي هو اول من وضع الجدول الاقتصادي بصورة اولية عام 1758 ثم قام العالم الروسي ليونيتيف بتطوير الجدول المذكور

يمكن وصف جدول المستخدم – المنتج بانه يوضح توزيع مخرجات (منتجات) كل صناعة على الصناعات او القطاعات الاخرى للاقتصاد القومي ، وفي الوقت نفسه يوضح مدخلات (مستخدمات) كل صناعة من الصناعات والقطاعات الاخرى.

يعبر المحتوى الاحصائي والاقتصادي لجدول المستخدم – المنتج ، بصورة عامة بانه هيكل احصائي يترجم العلاقات الاقتصادية القائمة بين مختلف القطاعات الاقتصادية التي تتجسد في مستلزمات الانتاج التي يوفرها كل قطاع الى القطاعات الاخرى، وبالمقابل توفير مستلزماته من القطاعات الاخرى.

يشير الجدول الاتي الصورة العامة لجدول المستخدم – المنتج

جدول المستخدم المنتج

القطاعات	الطلب الوسيط $J=1, 2, \ldots\ldots n$	الطلب الوسيط مجموع الطلب الوسيط	مجموع الطلب النهائي F_i	مجموع الانتاج X_i
$i=1$ 2 3 n	$Z_{11}\ Z_{12}\ Z_{13} \ldots\ldots Z_{1n}$ $Z_{21}\ Z_{22}\ Z_{23} \ldots\ldots Z_{2n}$ $Z_{31}\ Z_{32}\ Z_{33} \ldots\ldots Z_{3n}$ . . . . $Z_{n1}\ Z_{n2}\ Z_{n3} \ldots\ldots Z_{nn}$	$\sum_j^n Z_{1j}$ $\sum_j^n Z_{2j}$ $\sum_j^n Z_{3j}$. $\sum_j^n Z_{nj}$	F_1 F_2 F_3 F_n	X_1 X_2 X_3 X_n
مجموع المستلزمات الوسيطة	$\sum_i^n Z_{in}\ \sum_j^n Z_{nj}\ \sum_i^n Z_{i2}\ \sum_i^n Z_{i1}$	$\sum_i^n \sum_j^n Z_{ij}$	$\sum_i^n F_i$	$\sum_i^n X_i$
مجموع القيمة المضافة	$V_1\ V_2\ V_3\ V_n$	$\sum_j^n V_j$	$\sum_j^n O_j$	
الاستيرادات	$M_1\ M_2\ M_3\ M_n$	$\sum_j^n M_j$		
مجموع المدخلات X_j	$X_1\ X_2\ X_3\ X_n$	$\sum_j^n X_j$		

يمكن التعبير عن محتويات الجدول بالاتي:

1- المصفوفة المربعة $Z_{ij}=$ تمثل التداخلات القطاعية اما محتويات صفوفها واعمدتها :

أ- صفوف المربعة= تمثل الصفوف جزءا من ناتج كل قطاع الذي تحصل عليه القطاعات الاخرى كمستلزمات انتاج.

ب- اعمدة المصفوفة = تمثل مستلزمات الانتاج للقطاعات التي تحصل عليها من القطاعات الاخرى.

2- المتجه العمودي $F_i=$ يشمل المتجه العمودي على الجزء الاخر من ناتج القطاعات والذي يتوزع ويستهلك بشكل سلع نهائية من قبل الافراد (والذي يمثل استهلاكا نهائيا) ، أو الحكومة (ويمثل استهلاكا حكوميا) ، أو يستخدم كسلع استثمارية (تكوين رأس المال) او يصدر ، او يضاف الى المخزون ، وهذه الانواع الخمسة من الاستخدامات بمجموعها يطلق عليها الطلب النهائي F_i ، وعليه يمكن القول ان الناتج المحلي سيكون عبارة عن مجموع الطلب الوسيط والطلب النهائي وتوضحه المعادلة الاتية:-

$$X_i=\sum_j^n Z_{ij}+\sum_i^n F_i ....(1)$$

اذ ان :-

$X_i=$ الناتج المحلي للقطاع i

$Z_{ij}=$ مقدار ما يحتاجه القطاع (j) من القطاع (i) لانتاج ما مقداره X_j من الناتج الاجمالي لذلك القطاع.

$F_i=$ الطلب النهائي على القطاع (i)

تجدر الاشارة الى أن المعادلة (1) تصلح فقط للدول التي بمقدور انتاجها المحلي تغطية الطلب الكلي اي (الطلب الوسيط(الطلب الداخلي) + الطلب النهائي) من دون الحاجة الى فقرة الاستيرادات إلا ان معظم الدول ان لم تكن جميعها ليس بمقدورها تحقيق الاكتفاء الذاتي لسد الطلب الكلي عن طريق الانتاج المحلي فقط. عليه لا بد من الاعتماد على الاستيرادات في تغطية النقص المتوقع حصوله في الانتاج لتغطية الطلب الكلي ، من هنا تصبح الصيغة اعلاه في المعادلة (1) كالاتي:

$$X_i+M_i=\sum_j^n Z_{ij}+\sum_i^n F_i ....(2)$$

اذ ان : $M_i=$ الاستيرادات

ولغرض تبسيط الانموذج سيتم استبعاد الاستيرادات ، واستنادا الى المعادلة (1) ستتكون مجموعة من المتطابقات تعبر كل منها عن توزيع ناتج قطاع معني بين الطلب الوسيط والطلب النهائي وكما ياتي:-

$$
\begin{aligned}
&Z_{11}+Z_{12}+Z_{13}+\dots\dots\dots+Z_{1n}+F_1=X_1\\
&Z_{21}+Z_{22}+Z_{23}+\dots\dots\dots+Z_{2n}+F_2=X_2\\
&Z_{31}+Z_{32}+Z_{33}+\dots\dots\dots+Z_{3n}+F_3=X_3\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)\\
&\vdots\\
&Z_{n1}+Z_{n2}+Z_{n3}+\dots\dots\dots+Z_{nn}+F_n=X_n
\end{aligned}
$$

يفترض الانموذج بشكله المبسط وجود مجموعة من الافتراضات هي:

1- معرفة الطلب النهائي ، بمعنى ان الكميات التي يشتريها المستهلك النهائي من القطاعات الاخرى ينبغي ان تكون معلومة.

2- زيادة الانتاج في قطاع معين بنسبة معينة تؤدي الى زيادة مشترياته من القطاعات الاخرى بالنسبة نفسها.

3- ثبات الاسعار، اذ ان التغير في الاسعار يؤدي الى التغير في المعاملات الفنية والمعبر عنها في صورة نقدية.

خلاصة القول ان وجود مجموعة قطاعات انتاجية عددها (n) في اقتصاد بلد ما ، فإن انتاج كل من هذه القطاعات سيكون مطلوبا من القطاعات الاخرى في الاقتصاد نفسه، ويسمى هذا الطلب الوسيط او الطلب الداخلي ***(Internal Demand)*** ، وكمثال على ذلك تحتاج شركة ما مثل شركة الكهرباء الى الوقود لتشغيل مولدات الكهرباء ، وفي الوقت نفسه تحتاج مصفاة تكرير النفط الى الكهرباء لتشغيل آلاتها التي تعمل على استخراج انواع الوقود المستخدمة. أما النوع الآخر من الطلب فهو الطلب النهائي او الخارجي***(Final (external) Demand)*** ، وهذا الطلب يمثل الانتاج المتبقي بعد اشباع الطلب الداخلي ، ويوفر هذا الطلب حاجات المستهلك الذي قد يكون فردا او عائلة او قطاعا حكوميا او مخصصا للتصدير، اي ان الطلب الكلي او النهائي على اي سلعة هو عبارة عن محموع الطلب الداخلي والطلب النهائي كما سبق القول.

تطبيقات اقتصادية على انموذج المستخدم المنتج (المدخلات – المخرجات)

إن التطبيقات الاقتصادية لهذا الاسلوب من التحليل تحاول الاجابة عن السؤال الاتي:

((ما هو حجم الانتاج اللازم من كل قطاع من قطاعات الاقتصاد المختلفة لاشباع الطلب الكلي للانتاج؟))

سنفترض وجود ثلاثة قطاعات فقط في الاقتصاد ، ولهذا فان انتاج القطاع الواحد يمكن تمثيله حسب المعادلة الاتية:

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + d_i$$

اذ ان:-

$X_i =$ حجم الانتاج الكلي في القطاع i

$a_{ij} =$ المعامل الفني ***(Technical Coefficient)*** والذي يشير الى كمية الطلب على السلعة j اللازمة لانتاج وحدة واحدة من السلعة i ، اذ ان :-

$$i = 1, 2, 3 \quad and \quad j = 1, 2, 3$$

$d_i =$ الطلب النهائي على السلعة i

اذن لتمثيل الطلب الكلي من القطاعات الثلاثة السابقة نستعين بالانموذج الخطي الاتي:-

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + d_1 \\ X_2 &= a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + d_2 \\ X_3 &= a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + d_3 \end{aligned}$$

ويمكن كتابة الانموذج اعلاه باستخدام المصفوفات وكما ياتي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ويمكن التعبير عن الانموذج السابق بشكل معادلة مصفوفية على النحو الاتي:-

$$X = AX + D$$

اذ ان:-

$A =$ مصفوفة المعاملات الفنية ***(Technical Coefficient Matrix)*** وهي من الرتبة $(n \times n)$.

$X =$ مصفوفة قيم الانتاج الكلي وهي من الرتبة $(n \times 1)$.

$D =$ مصفوفة الطلب النهائي وهي من الرتبة $(n \times 1)$.

ويتم الحل باستخدام المعادلة الاتية :-

$$X = (I_n - A)^{-1} D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

وتمثل (I_n) مصفوفة الوحدة من الدرجة n .

يتم الوصول الى المعادلة (4) كما ياتي:-

$$X = AX + D$$
$$X - AX = D$$
$$(I_n - A)X = D$$
$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

اذ ان:-

$(I_n - A) =$ المصفوفة الفنية ***(Technical Matrix)*** أو مصفوفة ليونيتف ***(Leontief's Matrix)***.

يطلق على الانموذج $X = AX + D$ انموذج ليونيتيف المفتوح ***(Open Leontief Model)*** ، بسبب ان هناك منتجات زادت عن حاجة قطاعات الاقتصاد الثلاثة في الانتاج الخاص بها وكانت معدة للاستهلاك او التصدير.

انموذج ليونتيف المغلق ***(Closed Leontief Model)***:- هو الانموذج الذ لا تزيد منتجاته عن حاجات القطاعات الاخرى. وفي هذا الانموذج تكون مصفوفة الطلب النهائي مصفوفة صفرية اي ان $D = 0$ ويصبح النظام على الشكل $X = AX$

مثال (8.1)

اذا كانت مصفوفة المعاملات الفنية هي :

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

وكانت مصفوفة الطلب النهائي لثلاثة قطاعات انتاجية هي:

$$D = \begin{bmatrix} 150 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix}$$

المطلوب // اوجد الانتاج الكلي لكل قطاع من القطاعات الثلاثة

الحل

لنفرض ان مصفوفة الانتاج الكلي هي:

$$X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

وتحسب قيم متغيرات المصفوفة X بالاعتماد على المعادلة الاتية:

$$X=(I_n-A)^{-1}D$$

نحسب اولا المصفوفة (I_n-A) ، ثم نجد مقلوبها ونحقق المعادلة اعلاه وكما يأتي:

$$I_n-A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 & -0.6 \\ -0.4 & 0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

نحسب الان محدد المصفوفة (I_n-A) باستخدام طريقة ارقام الصف الاول وكما ياتي:

$$\begin{aligned}|I_n-A|&=0.4\begin{vmatrix} 0.2 & 0 \\ -0.6 & 0.6 \end{vmatrix}-(-0.2)\begin{vmatrix} -0.4 & 0 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix}+(-0.6)\begin{vmatrix} -0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{vmatrix}\\ &=0.4[(0.2\times0.6)-(-0.6)\times(0)]-(-0.2)[(-0.4\times0.6)-(-0.2\times0)]\\ &\quad+(-0.6)[(-0.4\times-0.6)-(-0.2\times0.2)]\\ |I_n-A|&=0.168\end{aligned}$$

نحسب الان المصفوفة المرافقة $adj(I_n-A)$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}|M_{11}|=(-1)^{2}\begin{vmatrix}0.2 & 0\\ -0.6 & 0.6\end{vmatrix}=0.12$$

$$C_{12}=(-1)^{1+2}|M_{12}|=(-1)^{3}\begin{vmatrix}-0.4 & 0\\ -0.2 & 0.6\end{vmatrix}=0.24$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}|M_{13}|=(-1)^{4}\begin{vmatrix}-0.4 & 0.2\\ -0.2 & -0.6\end{vmatrix}=0.28$$

$$C_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|=(-1)^{3}\begin{vmatrix}-0.2 & -0.6\\ -0.6 & 0.6\end{vmatrix}=0.48$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}|M_{22}|=(-1)^{4}\begin{vmatrix}0.4 & -0.6\\ -0.2 & 0.6\end{vmatrix}=0.12$$

$$C_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=(-1)^{5}\begin{vmatrix}0.4 & -0.2\\ -0.2 & -0.6\end{vmatrix}=0.28$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}|M_{31}|=(-1)^{4}\begin{vmatrix}-0.2 & -0.6\\ 0.2 & 0\end{vmatrix}=0.12$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}|M_{32}|=(-1)^{5}\begin{vmatrix}0.4 & -0.6\\ -0.4 & 0\end{vmatrix}=0.24$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}|M_{33}|=(-1)^{6}\begin{vmatrix}0.4 & -0.2\\ -0.4 & 0.2\end{vmatrix}=1$$

وهكذا مصفوفة المرافقات هي:

$$adj(I_n-A)=\begin{bmatrix}0.12 & 0.24 & 0.28\\ 0.48 & 0.12 & 0.28\\ 0.12 & 0.24 & 1\end{bmatrix}$$

وباخذ منقول المصفوفة:

$$adj(I_n-A)=\begin{bmatrix}0.12 & 0.48 & 0.12\\ 0.24 & 0.12 & 0.24\\ 0.28 & 0.28 & 1\end{bmatrix}'$$

ثم نحسب مقلوب المصفوفة $(I_n-A)^{-1}$ وكما ياتي:

$$(I_n-A)^{-1}=\frac{adj(I_n-A)}{|I_n-A|}=\frac{1}{0.168}\begin{vmatrix}0.12 & 0.48 & 0.12\\ 0.24 & 0.12 & 0.24\\ 0.28 & 0.28 & 1\end{vmatrix}$$

$$(I_n-A)^{-1}=\begin{vmatrix}0.714 & 2.856 & 0.714\\ 1.428 & 0.714 & 1.428\\ 1.666 & 1.666 & 5.95\end{vmatrix}$$

باستخدام المعادلة الاتية نستطيع ايجاد قيم متغيرات المصفوفة X :

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

$$X = (I_n - A)^{-1} D = \begin{bmatrix} 0.714 & 2.856 & 0.714 \\ 1.428 & 0.714 & 1.428 \\ 1.666 & 1.666 & 5.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 700 \\ 800 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 214.2 \\ 999.6 \\ 4760 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني ان قيم X هي كالاتي:

$$X_1 = 214.2 \;, \qquad X_2 = 999.6 \;, \qquad X_3 = 476$$

مثال (8.2)

لديك المعلومات الاتية عن اقتصاد ما:

1- وجود ثلاثة قطاعات رئيسة يتكون منها هذا الاقتصاد وهي قطاع الزراعة وقطاع الصناعة وقطاع الخدمات.

2- يتميز كل قطاع بوجود مدخلات من المستخدمات يشتريها من القطاعات الاخرى ، ومخرجات من المنتجات يبيعها الى القطاعات الاخرى بضمنها القطاع نفسه ، فضلا عن المستهلكين النهائيين.

3- تمثل الارقام في التشابك القطاعي المشار اليه في الجدول الى وحدات نقدية مقدرة بالالاف او الملايين او اي تقدير آخر.

4- ان قيم الانتاج الاجمالي والصافي ومستلزمات الانتاج لكل قطاع من القطاعات الثلاثة هي كما في الجدول الاتي:

المخرجات / المدخلات	الطلب الوسيط				الطلب النهائي	الناتج الكلي
	الزراعة	الصناعة	الخدمات	مجموع الطلب الوسيط		
الزراعة	8	20	0	28	12	40
الصناعة	10	20	10	40	20	60
الخدمات	0	12	4	16	4	20
مجموع المستخدمات الوسيطة	18	52	14	84	36	120
المستلزمات الاولية (القيمة المضافة)	22	8	6	36		
المستخدمات الكلية	40	60	20	120		

يمكن تفسير الجدول اقتصاديا وكما ياتي:

الصف الثاني من الجدول والذي يخص قطاع الصناعة (الجزء المظلل في الجدول):

الناتج الكلي	الطلب النهائي	الطلب الوسيط				المخرجات / المدخلات
		مجموع الطلب الوسيط	الخدمات	الصناعة	الزراعة	
40	12	28	0	20	8	الزراعة
60	20	40	10	20	10	الصناعة

1- (10) وحدات من من القطاع الصناعي تذهب الى قطاع الزراعة (على شكل آلات ومعدات زراعية)

2- (20) وحدة من القطاع الصناعي تذهب الى القطاع الصناعي نفسه كمستخدمات فيه (على شكل آلات او اغراض للاستخدانات الصناعية)

3- (10) وحدات من القطاع الصناعي تذهب الى قطاع الخدمات (على شكل معدات للقيام بخدمة معينة)

4- (20) وحدة منه تباع كاستهلاك نهائي للمستهلكين (على شكل سلع استهلاكية مصنعة)

اذن الناتج النهائي الكلي للقطاع الصناعي= 10+20+10+20=60

اما العمود الثاني من الجدول فهو يبين مقدار المنتجات التي تستعمل كمستخدمات في العملية الانتاجية للقطاع الصناعي وكما ياتي(الجزء المظلل من الجدول):

الصناعة	الزراعة	
20	8	الزراعة
20	10	الصناعة
12	0	الخدمات

1- يستعمل القطاع الصناعي (20) وحدة من القطاع الزراعي (مثل المواد الزراعية التي تستخدم في صناعة الزيوت او الانسجة الصوفية او القطنية).

2- يستعمل القطاع الصناعي (20) وحدة من القطاع الصناعي نفسه (على شكل سلع نصف مصنعة مثلا).

3- يستعمل القطاع الصناعي (12) وحدة من قطاع الخدمات (بصفة مستخدمات في عملياته الانتاجية).

كما نستطيع من خلال الجدول ان نحدد مقدار ما تحتاجه الوحدة الواحدة من انتاج كل قطاع من مستلزمات القطاعات الاخرى وكما يأتي:

من خلال العمود الثاني (عمود مستخدم الصناعة) نجد ان مقدار ما تحتاجه الوحدة الواحدة من ناتج الصناعة (من كل مستخدم) يمكن الحصول عليه بقسمة كل عنصر في العمود على مجموع المستخدمات الصناعية الكلية. فلانتاج وحدة واحدة من الانتاج في قطاع الصناعة يتطلب الاتي:

$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}=0.33$ وحدة (من مستخدمات الزراعة)

$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}=0.33$ وحدة (من مستخدمات الصناعة)

$\frac{12}{60}=\frac{1}{5}=0.20$ وحدة (من مستخدمات الخدمات)

وسنتبع الخطوات نفسها في المثال (1) في حل مثالنا هذا إذ يتم استخراج مصفوفة المعاملات الفنية والتي كانت متوافرة في المثال (1) أما هنا فيتطلب الامر ايجاد هذه المصفوفة وكما يأتي:

$a_{11}=\frac{8}{40}=0.20$	$a_{12}=\frac{20}{60}=0.33$	$a_{113}=\frac{0}{20}=0$
$a_{21}=\frac{10}{40}=0.25$	$a_{22}=\frac{20}{60}=0.33$	$a_{23}=\frac{10}{20}=0.50$
$a_{31}=\frac{0}{40}=0$	$a_{32}=\frac{12}{60}=0.20$	$a_{33}=\frac{4}{20}=0.20$

بعد استخراج مصفوفة المعاملات الفنية يمكن التعبير عن ذلك بالمعادلات الاتية:-

$$
\begin{aligned}
0.2X_1 + 0.33X_2 + 0X_3 + d_1 &= X_1 \\
0.25X_2 + 0.33X_2 + 0.50X_3 + d_2 &= X_2 \\
0X_1 + 0.20X_2 + 0.20X_3 + d_3 &= X_3
\end{aligned}
$$

ويمكن كتابة المعادلات اعلاه بشكل مصفوفة وكما ياتي:-

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.33 & 0 \\ 0.25 & 0.33 & 0.50 \\ 0 & 0.20 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}
$$

وبالاعتماد على المعادلة الاتية:-

$$
X = (I_n - A)^{-1} D
$$

$$
(I_n - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.20 & 0.33 & 0 \\ 0.25 & 0.33 & 0.50 \\ 0 & 0.20 & 0.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.33 & 0 \\ -0.25 & 0.67 & -0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}
$$

ثم نحسب محدد المصفوفة $(I_n - A)$ ونتبع الخطوات نفسها في المثال (1) . والمحدد يساوي هنا $|I_n - A| = 0.2$٤

نحسب المصفوفة المرافقة بايجاد كل من $(C_{33}, C_{32}, C_{31}, C_{23}, C_{22}, C_{21}, C_{13}, C_{12}, C_{11})$ والتي تساوي القيم الاتية:-

$$
C_{13} = 0.05, C_{12} = 0.2, C_{11} = 0.44
$$

$$
C_{23} = 0.16, C_{22} = 0.64, C_{21} = 0.26,
$$

$$
C_{33} = 0.45, C_{32} = 0.4, C_{31} = 0.17,
$$

وهكذا فان المصفوفة المرافقة

$$adj(I_n - A) = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.20 & 0.05 \\ 0.26 & 0.64 & 0.16 \\ 0.17 & 0.40 & 0.45 \end{bmatrix}$$

وباخذ منقول المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0.44 & 0.26 & 0.17 \\ 0.20 & 0.64 & 0.40 \\ 0.05 & 0.16 & 0.45 \end{bmatrix}$$

نستخرج الان مقلوب المصفوفة وكالاتي:

$$(I_n - A)^{-1} = \frac{adj(I_n - A)}{|I_n - A|} = \frac{1}{0.28} \begin{bmatrix} 0.44 & 0.26 & 0.17 \\ 0.20 & 0.64 & 0.40 \\ 0.05 & 0.16 & 0.45 \end{bmatrix}$$

$$(I_n - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5576 & 0.9204 & 0.6018 \\ 0.708 & 2.2656 & 1.416 \\ 0.177 & 0.5664 & 1.593 \end{bmatrix}$$

باستخراج مقلوب المصفوفة نستطيع ايجاد قيم متغيرات المصفوفة الاتية:

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

$$X = (I_n - A)^{-1} D = \begin{bmatrix} 1.5576 & 0.9204 & 0.6018 \\ 0.708 & 2.2656 & 1.416 \\ 0.177 & 0.5664 & 1.593 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 7.2216 \\ 28.32 \\ 6.372 \end{bmatrix}$$

وهكذا تم ايجاد قيم المتغيرات الثلاث وهي:

$X_1 = 7.221$ الانتاج الكلي لقطاع الزراعة

$X_2 = 28.32$ الانتاج الكلي لقطاع الصناعة

$X_3 = 6.372$ الانتاج الكلي لقطاع الخدمات

تمكننا النتائج المستخرجة من تقدير الزيادة المطلوبة في الانتاج عند توقع زيادة الطلب النهائي على منتج قطاع او اكثر بنسبة معينة.

مثال (8.3)

افترض وجود 5 قطاعات لاقتصاد ما.

القطاع الاول :السيارات ، القطاع الثاني:الفولاذ ، القطاع الثالث: الكهرباء

القطاع الرابع: الفحم ، القطاع الخامس: الكيمياويات

وكانت مصفوفة المعاملات الفنية كالاتي:

$$a_{ij}=\begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.10 \\ 0.40 & 0.20 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0.25 & 0.20 & 0.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.15 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0.05 \end{bmatrix}$$

وكانت مصفوفة الطلب النهائي كالاتي:

$$D=\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

الحل//

$$X=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.10 \\ 0.40 & 0.20 & 0.10 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0.25 & 0.20 & 0.10 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.15 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0.05 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}=$$