$$\begin{bmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.05 & -0.05 & -0.10 \\ -0.40 & 0.80 & -0.10 & -0.10 & -0.10 \\ -0.10 & -0.25 & 0.80 & -0.10 & -0.20 \\ -0.10 & -0.20 & -0.30 & 0.85 & -0.10 \\ -0.05 & -0.10 & -0.05 & -0.02 & 0.95 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.37 & 0.30 & 0.19 & 0.14 & 0.23 \\ 0.85 & 1.60 & 0.39 & 0.29 & 0.37 \\ 0.56 & 0.68 & 1.51 & 0.30 & 0.48 \\ 0.58 & 0.68 & 0.66 & 1.38 & 0.42 \\ 0.20 & 0.23 & 0.14 & 0.08 & 1.14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 425.23 \\ 821.74 \\ 1007.23 \\ 1153.28 \\ 712.49 \end{bmatrix}$$

اذن قيم X_i هي كالاتي:

X_1 قطاع السيارات= 425.23

X_2 قطاع الفولاذ = 821.74

X_3 قطاع الكهرباء= 1007.23

X_4 قطاع الفحم= 1153.28

X_5 قطاع الكيمياويات= 712.49

مثال (8.4)

لتكن x تشير الى قيمة الانتاج النهائي لقطاع الزراعة بالمليون دولار ، و y تشير الى قيمة الانتاج النهائي لقطاع الطاقة بالمليون دولار ايضا. ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلات الاتية:

$$0.4x + 0.2y$$
$$0.2x + 0.1y$$

وقيم الطلب النهائي يمكن تمثيلهما بالاتي:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

وباضافة قيم الطلب النهائي يمكن التعبير عن المعادلات السابقة بما ياتي:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

وكما تعلمنا سابقا يمكن حل المصفوفة اعلاه باستخدام الصيغة الاتية:

$$X = (I_n - A)^{-1} D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة $(I_n - A)$ هي

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

ثم تضرب قيمة معكوس المصفوفة $(I_n - A)$ في مصفوفة الطلب النهائي وكما ياتي:

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 156 \end{bmatrix}$$

اذن قيمة الانتاج النهائي لقطاع الزراعة = 25.2 مليون دولار

قيمة الانتاج النهائي لقطاع الطاقة = 15.6 مليون دولار

اسئلة الفصل الثامن

س1:- افرض بان هناك اقتصادا بسيطا مكون من ثلاثة قطاعات ومصفوفة المعاملات الفنية هي كالاتي:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

المطلوب // جد انتاج القطاعات الثلاثة اذا تغير الطلب النهائي عن القطاعات 10 مليون دولار و 5 مليون دولار و 6 مليون دولار على الترتيب.

س2:- لديك البيانات الاتية :-

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.25 & 0.34 \\ 0.33 & 0.10 & 0.12 \\ 0.19 & 0.38 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}$$

المطلوب // جد الانتاج للقطاعات الثلاثة

س3:-جد الانتاج النهائي الذي يقابل الطلب لـ 500 وحدة من القمح و 1000 وحدة من الزيت ، اذا توفرت لديك المعلومات الاتية:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.08 \\ 0.33 & 0.11 \end{bmatrix}$$

س4:- افترض ان طلب المستهلك يتغير من 12 مليون دولار لقطاع الزراعة الى 8 مليون دولار ، وطلب المستهلكللطاقة من 9 مليون الى 5 مليون دولار. جد الانتاج النهائي لكل قطاع الذي يستوفي حاجة الطلب النهائي لهؤلاء المستهلكين من القطاعين. وكانت مصفوفة المعاملات الفنية هي كالاتي:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

س5:- اعطيت جدول المستخدم – المنتج ولثلاثة قطاعات اقتصادية (زراعة وصناعة وخدمات)

المخرجات / المدخلات	الطلب الوسيط: الزراعة	الطلب الوسيط: الصناعة	الطلب الوسيط: الخدمات	مجموع الطلب الوسيط	الطلب النهائي	الناتج الكلي
الزراعة	4.62	2.25	7.45	14.32	8	23.14
الصناعة	2.31	7.56	4.96	14.83	10	25.21
الخدمات	4.62	5.04	2.84	12.50	12	24.84

المطلوب //

ايجاد الانتاج الكلي لقطاع الزراعة والصناعة والخدمات .

مصادر الفصل الثامن

1- حسين علي بخيت - مبادىء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.

2- عبد الله الثنيان . تحليل المستخدم – المنتج. منشور على الشبكة العالمية الدولية www.google.com

3-مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان.2010

4- Chiang,Alpha C, Fundamental Methods of Mathematical Economics. 3rd edition. McGraw-Hill, Inc.1984.

5- Harris.Tom , Doeksen.G.A. Input –Output Model Basic. Published on line www.google.com.

6- Hendrickson, Chris , and others . Economic Input – Output Models for Environmental Life-Cycle Assessment. Published on line www.google.com. 1998.

7- Jacques,Jan. Mathematics for Economics and Business.5th edition. Prentice Hall. 2006.

8- Jensen, Iris. The Leontief Production Model or Input-Output Analysis. Published on line www.google.com.2001.

9- Leontief,Wassily. Input-Output Economics, Second Edition. Oxford University Press,1986.

10- Sargento, Ana Lucia Marto . Introducing Input – Output Analysis at the Regional Level: Basic Notions and Specific Issues . Published on line , www.real.illinois.edu. 2009.

الفصل التاسع

البرمجة الخطية

Linear Programing

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- البرمجة الرياضية
- البرمجة الخطية
- الخطوات الاساسية للبرمجة الخطية
- طرائق حل البرمجة الخطية

الفصل التاسع
البرمجة الخطية

مقدمة

الفصل التاسع
البرمجة الخطية

مقدمة

تعد البرمجة الخطية من اكبر انجازات منتصف القرن العشرين ،ويعود الفضل في استخدامها الى العالم الروسي كانتروفتش ***Kantorovich*** في عام 1939 إذ تمت في ذلك الوقت اول صياغة للبرمجة الخطية من دون ايجاد حلول لها وبحلول عام 1947 استطاع العالم الامريكي الدكتور جورج دانتزج ***(G.Dantzig)*** في حل هذه المسائل والتي وفرت الملايين من الاموال ومن ساعات العمل لعدد من الشركات والمنشآت الانتاجية المستخدمة لهذا الفرع من فروع بحوث العمليات، وتعالج البرمجة الخطية مشاكل توزيع الموارد المحدودة على الانشطة المتنافسة داخل المنشأة ، وتبرز هذه المشاكل بصورة جلية في شركات الانتاج والنقل بانواعها المختلفة.

قبل الدخول الى موضوع الفصل الحالي سنتناول وبشيء مختصر بعض التعاريف ذات العلاقة بموضوع الفصل ومن اهمها الاتي:

البرمجة الرياضية *(Mathematical Programming)* : تنقسم البرمجة الرياضية الى اقسام عدة وهي:

1- **البرمجة الخطية *(Linear Programming LP)*** :- تعد من اهم اساليب البرمجة الرياضية واكثرها تطبيقا في الحياة العملية لضمان الاستخدام الامثل للموارد في ظل امكانيات وموارد محدودة ، مثل ايجاد المزيج الامثل من بين المنتجات التي ينتجها مصنع معين لتحقيق اكبر ربح طبقا للمتاح من العمل والمواد الخام. ومن امثلة البرمجة الخطية هي نقل منتجات معينة من مناطق انتاج الى مراكز استهلاك بحيث تقوم كل منطقة انتاجية بتوزيع منتجاتها الى مراكز الاستهلاك بحيث يشبع كل مركز استهلاكي احتياجه بأقل كلفة ممكنة.

2- **برمجة الاهداف *(Goal Programming GP)*** :- في هذه النوع من البرمجة يوجد اكثر من هدف ويعبر عن كل هدف بقيد في صورة معادلة يعرف بقيد الهدف ***(Goal Constraint)*** يحتوي على متغيرين انحرافيين ***(Deviation Variables)*** ويتم صياغة دالة الهدف في صورة تصغير مجموع متغيرات الانحرافات غير المرغوب فيها. ويمكن تقدير معامل لكل هدف يسمى معامل اولوية ***(Priority Factor)*** يعكس درجة تفضيل متخذ القرار ويمكن تقدير وزن نسبي لكل هدف، ويتم حل برنامج الاهداف باستخدام طريقة السمبلكس وذلك بعد تعديلها حتى يهتم بها في معاملات الاولوية.

3- البرمجة الصحيحة *(Integer Programming)* :- تستخدم هذه الطريقة عندما لا يكون من المناسب ان تكون اعداد المشروعات في صورة كسرية، ففي كثير من المواقف الادارية تكون قيم متغيرات القرار اعدادا صحيحة ، فمثلا عند اختيار التوليفة الاقل كلفة من الطائرات المطلوب شراؤها طبقا للسعر ووفق الصيانة والطاقة الاستيعابية فانه في هذه الحالة ليس من المعقول ان تكون اعداد الطائرات في صورة كسرية. وكذلك عند اختيار التوليفة الاكثر ربحا من بين المشروعات المطلوب انشاؤها طبقا للموارد المالية المتاحة .ويمكن التفرقة بين ثلاثة انواع من البرمجة الصحيحة بحسب نوع متغيرات القرار التي يتضمنها البرنامج وهي:

أ- البرمجة الصحيحة العامة *General Integer Programming :-* وهي التي تكون جميع متغيرات القرار فيها في صورة صحيحة.

ب- البرمجة الصحيحة الثنائية *Binary Integer Programming :-*وهي التي يمكن ان تكون يها متغيرات القرار اما صفرا او واحد.

ت- البرمجة الصحيحة المختلطة *:- Mixed Integer Programming :-*وهي التي تحتوي على خليط من المتغيرات ذات الطبيعة الصحيحة والكسرية

4- **البرمجة غير الخطية *Non –Linear Programming*:**- يعد البرنامج غير خطي اذا تمت صياغة علاقة او اكثر من العلاقات في صورة غير خطية ويمكن حله باستخدام حساب التفاضل للحصول على قيم متغيرات القرار التي تعظم او تخفض دالة الهدف

باستخدام مضاعفات لاكرانج وذلك اذا كانت القيود الهيكلية في صورة معادلات و باستخدام شروط كون توكر ***Khun Tucker*** ومضاعفات لاكرانج اذا كانت القيود الهيكلية في صورة متباينات.

5- **البرمجة التربيعية *Quadratic Programming* :-** هنا تكون دالة الهدف في صورة تربيعية والقيود الهيكلية في صورة خطية وهي حالة خاصة من البرمجة غير الخطية . ومن الطرائق المستخدمة في الحل هي طريقة السمبلكس لـ وولف ***Wolfe's Simplex Methods for QP*** وهي تعتمد على اساس مضاعفات لاكرانج وشرروط كون تكر فضلا عن طريقة السمبلكس.

6- **البررمجة العشوائية او الاحتمالية *Stochastic Programming SP***:- وهنا يتم وصف مؤشر او اكثر من مؤشرات الانموذج باستخدام متغيرات عشوائية – احتمالية . ومن الطرائق المعروفة للحل طرقة البرمجة العشوائية المقيدة ***Chance Continues Programming*** إذ تقدر القيم المتوقعة لدالة الهدف ومعاملات متغيرات القرار من القيود الهيكلية او الطرف الايمن لها او كليهما كمتغيرات عشوائية ذات توزيعات احتمالية معينة.

7- **البرمجة الديناميكية *Dynamic Programming DP* :-** تستخدم هذه الطريقة عندما يكون الهدف هو التوصل الى حلول متعلقة ببعضها البعض وفي فترات متغيررة ومتعاقبة وبكون الغرض من دالة الهدف هو امثلية هذه الاهداف على الفترات المختلفة باكملها.

البرمجة الخطية *Linear Programming*

تعود الجذور التاريخية لهذا العلم المتخصص الى الحرب العالمية الثانية عندما كانت القوات البريطانية تواجه العديد من المشاكل الامر الذي ادى بها الى استخدام الاساليب الرياضية في بحوث العمليات لحل العديد من المشاكل التي تواجه ادارتها للعمليات الحربية فضلا عن عمليات ادارة الاعمال والادارة الحكومية وذلك لتحقيق الاستخدام الامثل للموارد البشرية والمادية المتاحة.

بعد النجاح الذي حققه استخدام هذا الفرع من فروع المعرفة في المجالات الحربية تحول استخدامه الى حقول المعرفة الاخرى ولاسيما في حقول المعضلات الادارية. وقد اسهمت مجموعة من العوامل في استخدام هذا العلم في الحقول الاخرى كالصناعة مثلا وتتمثل هذه العوامل في اتساع حجم السوق المحلية والاقليمية والدولية وشدة المنافسة بين المنشآت الصناعية وتعقد وتنوع المشاكل التي تواجه المشاريع.

الخطوات الاساسية لدراسة البرمجة الخطية

1- **تعريف المشكلة قيد الدرس**:- اي تحديد كل مما ياتي:

أ- الهدف: يتمثل في زيادة الارباح او زيادة الطاقة الانتاجية او تقليل التكاليف

ب- البدائل: تحديد طرائق العمل المختلفة والتي تستخدم في التقييم اذ يمكن قياس الكفاءة بالربح او بالكلفة او عدد الوحدات او الوقت

ت- القيود: المقصود بها المحددات مثل الاموال والايدي العاملة والمعدات والوقت وغيرها.

2- **بناء الانموذج :-** إن بناء الانموذج هو عملية تمثيل المكونات والمشكلة والعوامل المؤثر فضلا عن الظروف المحيطة بها بحيث تساعد في فهم المشكلة ومن ثم التوصل الى قرار صائب.

3- **حل الانموذج:-** والغرض من حل الانموذج هو استخراج مجموعة قيم المتغيرات وذلك باتباع اساليب البرمجة الخطية.
4- **اختبار الانموذج:-** والغرض من اختبار الانموذج إظهار قدرته على تمثيل المسألة ، ويتم ذلك باستعمال بيانات تاريخية وقد يتطلب الانر تحوير الانموذج واعادة اختباره الى ان تزول كافة النواقص الموجودة فيه.
5- **وضع الحل موضع التطبيق العملي:-** بعد التاكد من صلاحية الانموذج وملاءمته للبيانات يتم وضع الحل موضع التطبيق العملي ووضعه بايدي اصحاب القرار.

شروط و فروض البرمجة الخطية

يستند انموذج البرمجة الخطية على عدة شروط هي:
1- التحديد الجيد لدالة الهدف.
2- ان تكون العلاقة التي تربط دالة الهدف والقيود علاقة خطية وان تكون معادلات الانموذج معادلات من الدرجة الاولى وخطية ايضا.
3- محدودية الموارد : ينبغي ان تتصف الموارد بالمحدودية كي يتسنى تطبيق انموذج البرمجة الخطية.

فروض البرمجة الخطية

1- التناسبية : ينبغي ان يكون هناك تناسب خطي بين المخرجات والمدخلات فعندما يزداد عنصر العمل مثلا بنسبة 8% فانه ينبغي ان تزداد المخرجات بالنسبة نفسها.
2- عدم السالبية: اي ان تكون جميع متغيرات الانموذج غير سالبة .
3- الانقسامية: اي ان تكون جميغ وحدات الانموذج قابلة للانقسام الى وحدات كسرية.
4- التراكمية : يقصد بها ان المشاركة في الربح الاجمالي هو حصيلة جمع مشاركة جميع الوحدات الداخلة في أنموذج البرمجة الخطية.

الصيغة العامة لانموذج البرمجة الخطية

يمكن توضيح الانموذج العام لاسلوب البرمجة الخطية وكما ياتي:-
1- دالة الهدف:

$$Min\ or\ Max\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_nX_n$$

2 - **القيود الهيكلية :**

$$
\begin{aligned}
& subject\ to \\
& a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots + a_{1n}X_n \le, =, \ge b_1 \\
& a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots + a_{2n}X_n \le, =, \ge b_2 \\
& \quad . \quad\; . \qquad\qquad\quad . \qquad\qquad . \\
& \quad . \quad\; . \qquad\qquad\quad . \qquad\qquad . \\
& a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots\dots + a_{mn}X_n \le, =, \ge b_m
\end{aligned}
$$

3-**قيد عدم السالبية**

$$X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, X_n \ge 0$$

اي ان الانموذج يشمل ثلاثة عناصر اساسية هي دالة الهدف والقيود الهيكلية وقيد عدم السالبية ، اذ ان:-

Z = قيمة دالة الهدف (تعظيم او تدنية)

C = معاملات دالة الهدف (ربح او كلفة الوحدة الواحدة ....الخ)

X = متغيرات القرار

a = احتياجات كل وحدة واحدة من الموارد سواء كانت موارد اولية او الزمن او عدد العاملين ....الخ.

n = عدد المتغيرات

m = عدد القيود

b = الموارد المتاحة

بعد التعرف على الشكل الرياضي لمكونات انموذج البرمجة الخطية يمكن اعادة كتابة الصيغة الرياضية للانموذج بالشكل العام:-

1- دالة الهدف :

$$Min\ or\ Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad j = 1, 2, 3, \dots\dots n$$

2- القيود الهيكلية :

$$Subject\ to:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ (\le, =, \ge)\ b_i \qquad i = 1, 2, \dots\dots n$$

3- قيد عدم السالبية :

$$X_j \ge 0$$

كما يمكن كتابة الانموذج بطريقة المصفوفات وكما ياتي:-

1- دالة الهدف

$$Min\ or\ Max\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots\ldots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

2- القيود الهيكلية

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} \le, =, \ge \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

3- قيد عدم السالبية: $(X_1\ , X_2 , \ldots\ldots\ldots , X_n) \ge 0$

اذ ان :-

A = **مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود.**

X = **متجه عمودي يمثل متغيرات القرار.**

b = **متجه عمودي يمثل الموارد المتاحة.**

C = **متجه افقي يمثل معاملات دالة الهدف.**

طرائق حل انموذج البرمجة الخطية

للتوصل الى حل مشكلة البرمجة الخطية توجد طرائق عدة هي:-

1- الطريقة البيانية ***Graphical Method***

2- الطريقة الجبرية ***Algebrian Method***

3- طريقة الانموذج المقابل ***The Dual Method***

4- الطريقة المبسطة ***Simplex Method***

1- **الطريقة البيانية** ***Graphical Method***

تعد هذه الطريقة من ابسط الطرائق المستخدمة لحل مشكلة البرمجة الخطية كونها تعالج المشاكل ذات متغيرين اثنين فقط ، وتتركز فائدتها في توضيح الحلول الممكنة وكيفية الحصول على الحل الامثل. وتعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة في اطار الاحداثيات الافقية والعمودية لتحديد منطقة الحل الممكن ***Feasible Solution*** (وهي منطقة مغلقة بكافة القيود الواردة في المسألة)، ومن بعدها يتم تحديد النقاط المتطرفة ***Extreme Points*** (وهي النقاط التي تكون على حدود مساحة الحل الممكن) التي تعظم او تدني دالة الهدف، ويمكن توضيح الخطوات الرئيسة للحل بموجب هذه الطريقة بالاتي:

أ- الصيغة الرياضية ***Mathematical Form*** لمسالة البرمجة الخطية ، اي تحويل مسالة البرمجة الخطية من الصياغة اللفظية الى الشكل الرياضي وتحديد دالة الهدف والقيود وتعد هذه الخطوة اساسية لكل طرائق الحل الممكنة.

ب- الصيغة المعيارية او القياسية ***Standard Form*** اي تحويل جميع القيود (ما عدا قيد عدم السالبية) الى متساويات (معادلات).

ت- تحديد نقاط الحل للمعادلات ***Solution Points*** وذلك من خلال معرفة حل كل منهما بالنسبة للمتغير الاول بدلالة المتغير الثاني.

ث- التمثيل البياني لنقاط الحل ***Graphical Presentation*** ، إذ يتم تمثيل نقاط حل كل معادلة بخط مستقيم واصل بين نقطتي الحل.

ج- تحديد نقاط منطقة الحلول الممكنة ***Feasible Solution Region*** ، وتختلف منطقة الحلول الممكنة حسب الامثلية المطلوبة لدالة الهدف.

ح- تحديد الحل الامثل ***Optimal Solution*** الذي يحقق الامثلية المطلوبة عن طريق التعويض بنقاط منطقة الحلول في دالة الهدف.

تجدر الاشارة الى ان هذه الطريقة واجهت انتقادات عدة منها انه في حالة احتواء المشكلة المراد حلها على ثلاثة متغيرات او اكثر فيصعب تمثيلها بيانيا لانها تستلزم الاستعانة بنظريات هندسية خاصة ، كما تستلزم الدقة في الرسم للحصول على نتائج دقيقة ، الامر الذي عد هذه الطريقة محدودة الفائدة ، مما يستلزم اللجوء الى طرائق اخرى كالطريقة المبسطة وغيرها.

مثال (1-9): مشروع اقتصادي يصنع فراش نوم وخيام ، كل فراش نوم يستلزم 2 ساعة للقطع و 5 ساعات للخياطة ، و ساعة واحدة للطلاء ضد الماء ، وكل خيمة تتطلب ساعة واحدة للقطع ، و 5 ساعات للخياطة ، و 3 ساعات للطلاء ضد الماء. وكانت موارد الشركة 14 ساعة للقطع ، و 40ساعة للخياطة ، و 18 ساعة للطلاء ضد الماء في اليوم ، وان هامش الربح 30 وحدة نقدية من الخيمة الواحدة ، و 50 وحدة نقدية من الفراش.

المطلوب: اوجد الحل الامثل لهذا الانموذج الخطي؟

الحل

نطبق خطوات الحل السابقة :

1- ايجاد الصيغة الرياضية وكما ياتي:

نرمز لفراش النوم بالرمز x_1 وللخيمة بالرمز x_2 ثم نكون الجدول الاتي:-

المنتج ساعات العمل	x_1	x_2	طاقة المصنع القصوى
قطع	2	1	14
خياطة	5	5	40
طلاء	1	3	18
الربح	50	30	

بعد وضع الجدول اعلاه تكون الصياغة الرياضية لمسالة البرمجة الخطية هي:-

دالة الهدف $Max z = 50x_1 + 30x_2$

$$Subject to:$$

قيد القطع: $2x_1 + x_2 \leq 14$

قيد الخياطة: $5x_1 + 5x_2 \leq 40$

قيد الطلاء: $x_1 + 3x_2 \leq 18$

قيد عدم السالبية : $x_1, x_2 \geq 0$

2- ايجاد الصيغة المعيارية او القياسية وكما ياتي:-

من قيد القطع: $2x_1 + x_2 = 14$

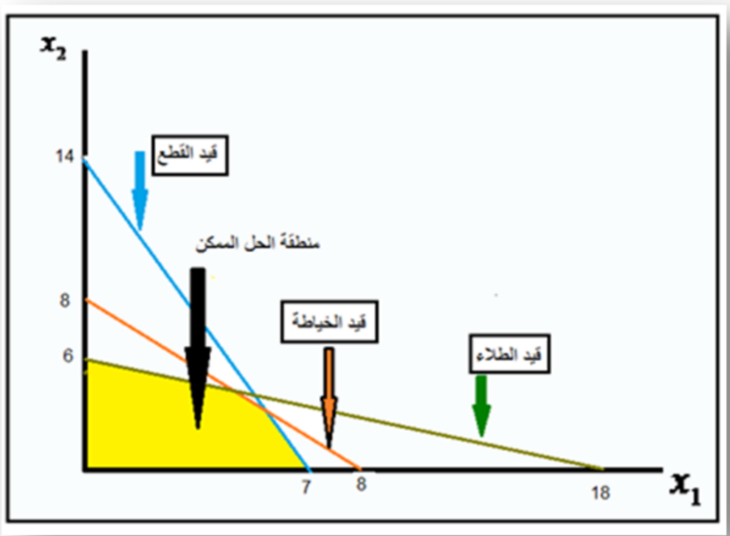
من قيد الخياطة: $5x_1 + 5x_2 = 40$

من قيد الطلاء: $x_1 + 3x_2 = 18$

3- تحديد نقاط الحل للمعادلات من خلال معرفة حل كل منهما بالنسبة لـ X_2 بدلالة X_1 ونفرض ان X_2 تساوي صفرا لايجاد X_1 ، ثم نفرض X_1 تساوي صفرا لايجاد X_2 ، او باسلوب اسهل ومختصر وذلك بقسمة الثوابت على معاملات المتغيرات لايجاد نقطة كل متغير ، اي ان:

	الاحداثي X_1	الاحداثي X_2	نقاط الاحداثيات
قيد القطع	$14/2=7$	$14/1=14$	$(7, 14)$
قيد الخياطة	$40/5=8$	$40/5=8$	$(8, 8)$
قيد الطلاء	$18/1=18$	$18/3=6$	$(18, 6)$

4- التمثيل البياني لنقاط الحل، إذ يتم تمثيل نقاط حل كل معادلة بخط مستقيم واصل بين احداثيات كل قيد ، وتمثل هذه ما يسمى بمنحنيات الربح المتساوي الميل ***Isoprofit Curves*** ويتكون الشكل البياني الاتي:



شكل (48) التمثيل البياني للمثال (9-1)

5- تحديد نقاط منطقة الحلول الممكنة : وهي المنطقة المحدبة الى نقطة الاصل والمحددة بنقاط احداثية ناتجة من تقاطع منحنيات الارباح الممثلة لكل قيد . وتختلف منطقة الحلول حسب الامثلية المطلوبة لدالة الهدف، اذ نجد ان الامثلية المطلوبة هي تعظيم دالة الهدف

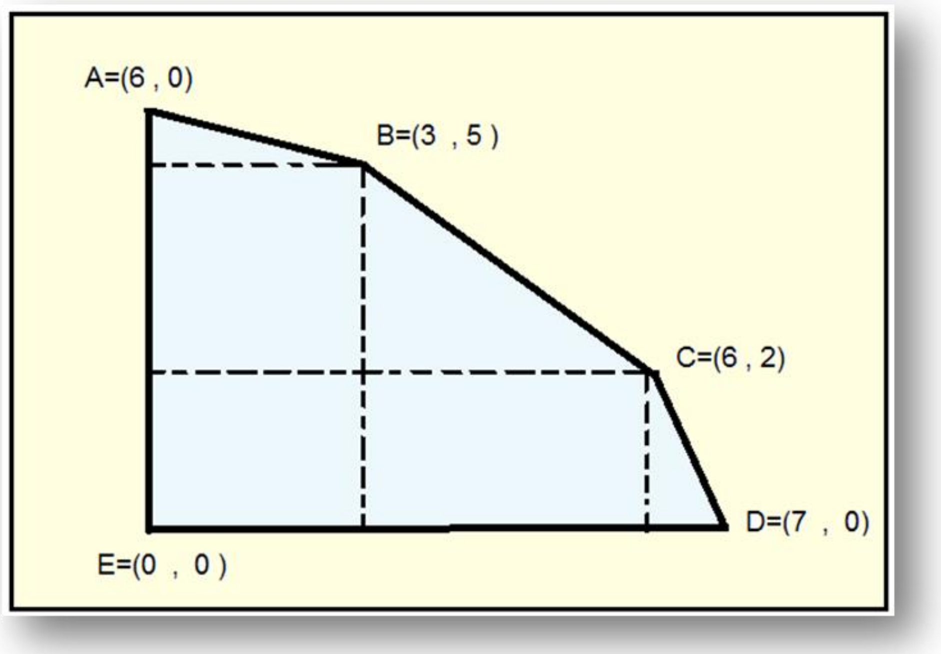
وبالتالي فمنطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المظللة باللون الاصفر اعلاه وبايجاد احداثيات النقاط الركنية ***Corner Points*** لمنطقة الحلول المقبولة، علما انه يوجد اكثر من طريقة لايجاد احداثيات النقاط وكما ياتي:

أ- طريقة الحساب البياني ***Graphical Calculating***

ب- طريقة الحساب الجبري ***Algebra Calculating***

أ- طريقة الحساب البياني ***Graphical Calculating***:

تتلخص هذه الطريقة بايجاد نقاط الاحداثيات من الرسم البياني مباشرة ، اذ عند تقاطع اي مستقيمين نسقط سهمين ، الاول على محور X_1 ونحدد الرقم على هذا المحور وهذا الرقم هو قيمة X_1 ، وبالمثل مع X_2 اذ ان:



شكل (49) طريقة الحساب البياني للمثال (1-9)

ب- طريقة الحساب الجبري:

نظرا لان تحديد احداثيات النقاط مباشرة من الرسم البياني قد تكون احيانا غير دقيقة ، وبالتالي من المجدي استخدام طريقة اكثر دقة في تحديد احداثيات نقاط التقاطع ، وتتلخص الطريقة الجبرية في حل معادلتي المستقيمين المتقاطعين ، فمثلا لايجاد النقطة B التي يتقاطع عندها معادلتان هما قيد الطلاء وقيد الخياطة:

قيد الخياطة: $5x_1 + 5x_2 = 40$

قيد الطلاء : $x_1+3x_2=18$

بحل المعادلتين نجد ان النقطة B تساوي:

$$B=(3,5)$$

وكذلك الحال بالنسبة لبقية النقاط اي ان:

$$A=(6,0)$$
$$D=(7,0)$$
$$E=(0,0)$$
$$C=(6,2)$$

6- تحديد الحل الامثل الذي يحقق التعظيم عن طريق التعويض بنقاط منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف، اذ ان النقطة التي تجعل دالة الهدف عند نهايتها العظمى هي احدى النقاط الركنية لمنطقة الحلول المحتملة وهي ابعد هذه النقاط عن نقطة الاصل وتسمى بالنقطة المتطرفة ***Extreme Point*** وبما ان دالة الهدف هي :

$$z=50x_1+30x_2$$

فان:

الاحداثيات	قيمة Z	النقاط الركنية
$(x_1,x_2)=(6,0)$	$z_A=50\times6+30\times0=300$	A
$(x_1,x_2)=(3,5)$	$z_B=50\times3+30\times5=300$	B
$(x_1,x_2)=(6,2)$	$z_C=50\times6+30\times2=360$	C
$(x_1,x_2)=(7,0)$	$z_D=50\times7+30\times0=350$	D
$(x_1,x_2)=(0,0)$	$z_E=50\times0+30\times0=0$	E

وبهذه الطريقة نحدد النقطة التي تجعل قيمة دالة الهدف اكبر القيم وهي النقطة C (المستطيل المظلل) ، وان قيمة الارباح عندها تساوي 360 ، وللحصول على اكبر ربح ممكن ينتج المشروع 6 وحدات من الفراش ووحدتين من الخيام .

مثال (9-2)

اذا توافر لديك البرنامج الخطي الاتي:

$$Max\ z = 4x_1 + 8x_2 \quad Objective\ functio$$

$$Subject\ to:$$

$$8x_1 + 10x_2 \leq 120$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 90$$

$$10x_1 + 7x_2 \leq 140$$

$$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$$

حدد قمة كل من X_1 و X_2 اللذين بحققان النهاية العظمى لدالة الهدف بيانيا؟

الحل

احداثيات القيد الاول :

$8x_1 + 10x_2 \leq 120$	
$(15,12)$	(x_1,x_2)

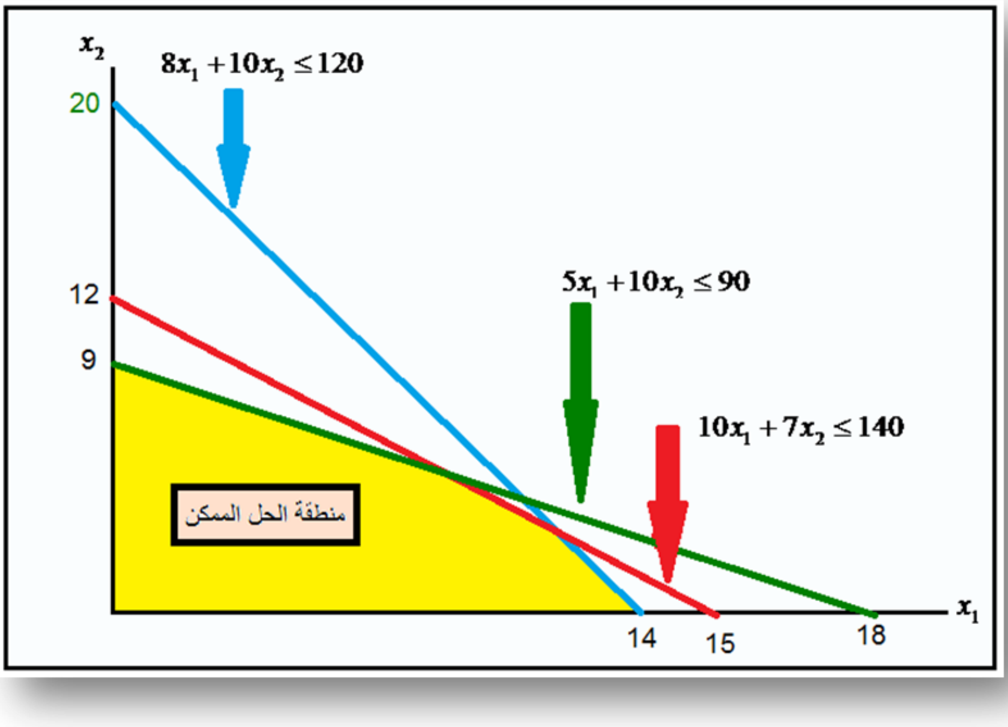
احداثيات القيد الثاني:

$5x_1 + 10x_2 \leq 90$	
$(18,9)$	(x_1,x_2)

احداثيات القيد الثالث:

$10x_1 + 7x_2 \leq 140$	
$(14,20)$	(x_1,x_2)

وفيما يتعلق بالتمثيل البياني لاحداثيات القيود:



شكل (50) التمثيل البياني لقيود المثال (2-9)

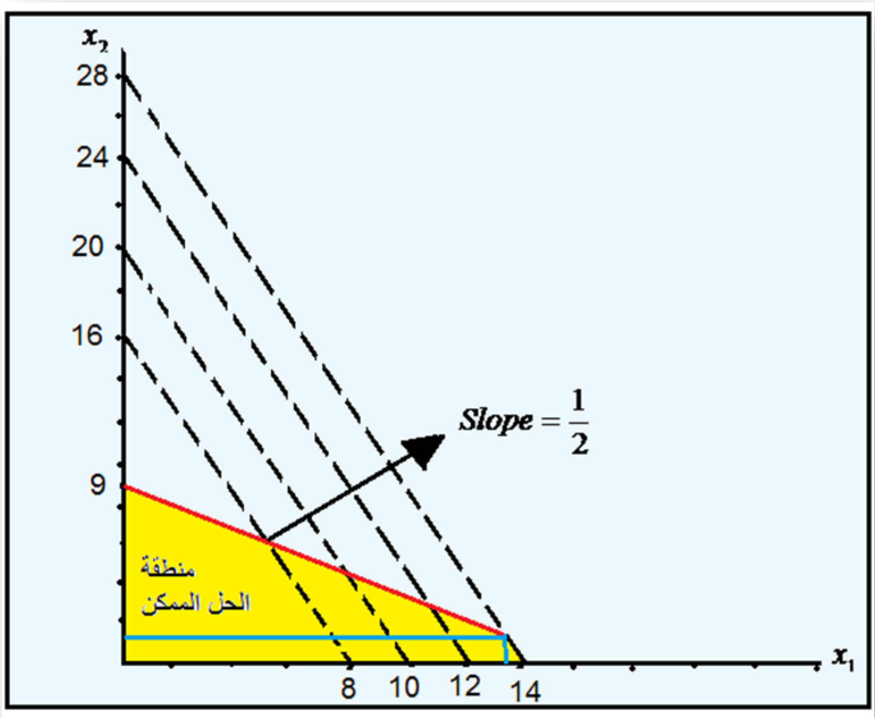
ثم ايجاد ميل دالة الهدف:

لايجاد الحل الامثل في نطاق منطقة الحلول الممكنة ، نرسم دالة الهدف كسلسلة من منحنيات الربح المتساوية (المتوازية) إذ ان ميل دالة الهدف هو عبارة عن حاصل قسمة معامل X_1 على معامل X_2 . وبما ان دالة الهدف هي:-

$$z = 4x_1 + 8x_2$$

فهذا يعني ان الميل ***Slope*** هو $\frac{1}{2}$

ويتم رسم هذه الخطوط او المنحنيات ذات الميل $\frac{1}{2}$ بدءا من نقطة الاصل والابتعاد تدريجيا الى الخارج (بالميل نفسه) عن نقطة الاصل الى ان نصل الى الخط الذي يلامس ابعد نقطة ركنية من نقطة الاصل بشرط ان تكون من بين النقاط الركنية لمنطقة الحلول الممكنة. بمعنى اوضح نختار معاملين لـ X_1 و X_2 الذي يكون حاصل قسمتهما يساوي $\frac{1}{2}$ ثم نصل هذين الرقمين بمستقيم حتى نصل للمستقيم الذي يلامس ابعد نقطة ركنية في منطقة الحلول الممكنة. فمثلا ارقام احداثي X_1 هي 1 و 2 و 4 و 6 وهكذا ، بينما ارقام X_2 هي 2 و 4 و 8 و 12 وهكذا ، إذ لو قسمنا اي رقم من X_1 على نفس تسلسل رقم من X_2 نحصل على الميل نفسه وكما هو موضح في الشكل البياني الاتي:-



شكل (51) ايجاد ميل دالة الهدف

مثال(3-9)

جد القيمة العظمى لمشكلة البرمجة الخطية الاتية:

Z=3x+2y
Subject to
$x+2y \leq 4$
$x-y \geq 1$
$x,y \geq 0$

الحل//

عند النقطة $(0,0)$ فان .... $z=3(0)+2(0)=0$

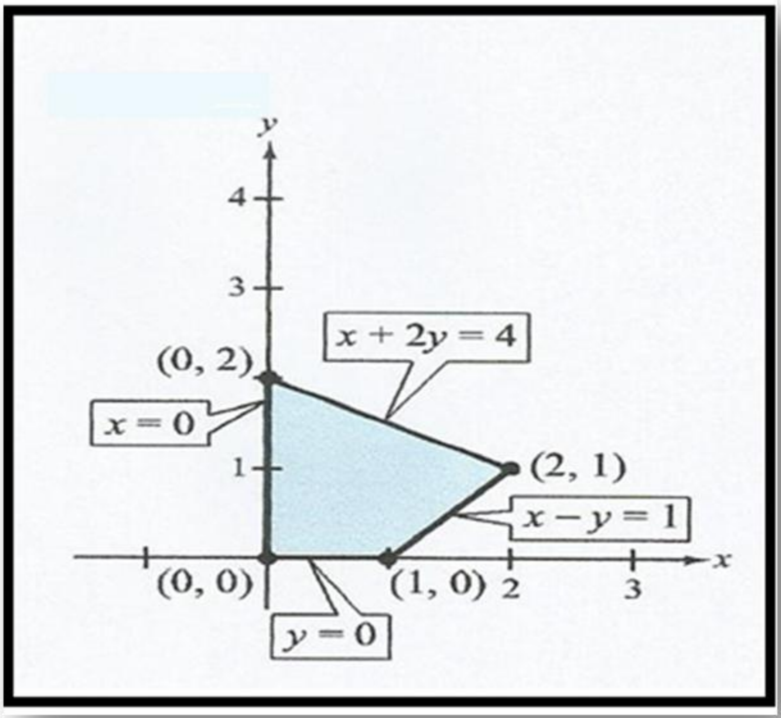
عند النقطة $(1,0)$ فإن .... $z=3(1)+2(0)=3$

عند النقطة $(2,1)$ فإن .... $z=3(2)+2(1)=8$

عند النقطة $(0,2)$ فإن .... $z=3(0)+2(2)=4$

عليه فان القيمة العظمى لـ z هو 8 وهذا يتحقق عندما $x=2$ و $y=1$

ويشير الشكل الاتي الى التمثيل البياني للمشكلة اعلاه:-



شكل (52) التمثيل البياني للمثال (9-3)

مثال (9-4):

جد القيمة العظمى لدالة الهدف الاتية:-

$$z = 4x + 6y \quad Objective\ function$$
$$where\ x \geq 0\ \ and\ y \geq 0,\ subject\ to\ the\ constraints$$
$$-x + y \leq 11$$
$$x + y \leq 27$$
$$2x + 5y \leq 90$$

الحل//

$$At\ (0,0):\ z = 4(0) + 6(0) = 0$$
$$At\ (0,11):\ z = 4(0) + (6(11)) = 66$$
$$At\ (5,16):\ z = 4(5) + 6(16) = 116$$
$$At\ (15,12):\ z = 4(15) + 6(12) = 132 \quad (Maximum\ value\ of\ z)$$
$$At\ (27,0):\ z = 4(27) + 6(0) = 108$$

يشير الشكل البياني الاتي الى التمثيل البياني للمشكلة