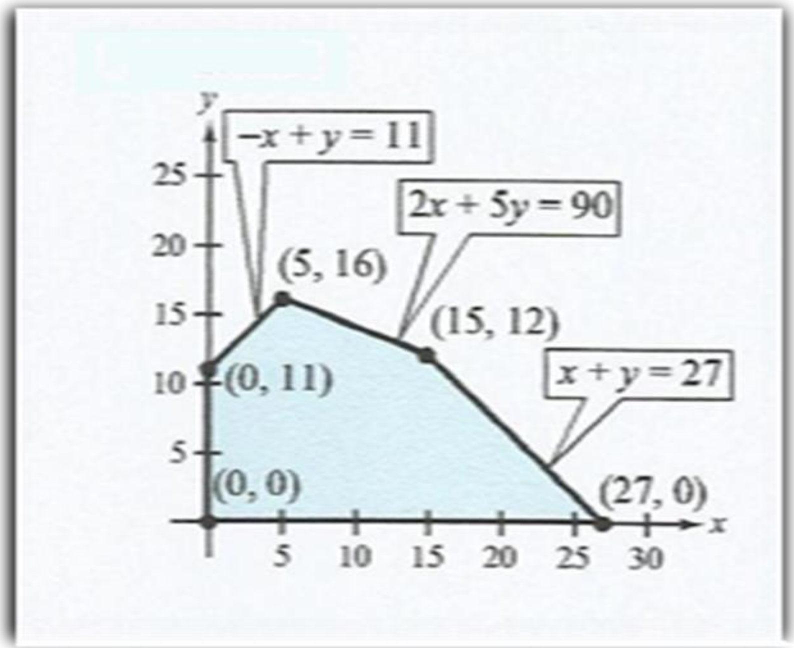


شكل (53) التمثيل البياني للمثال (9-4)

مثال (9-5):

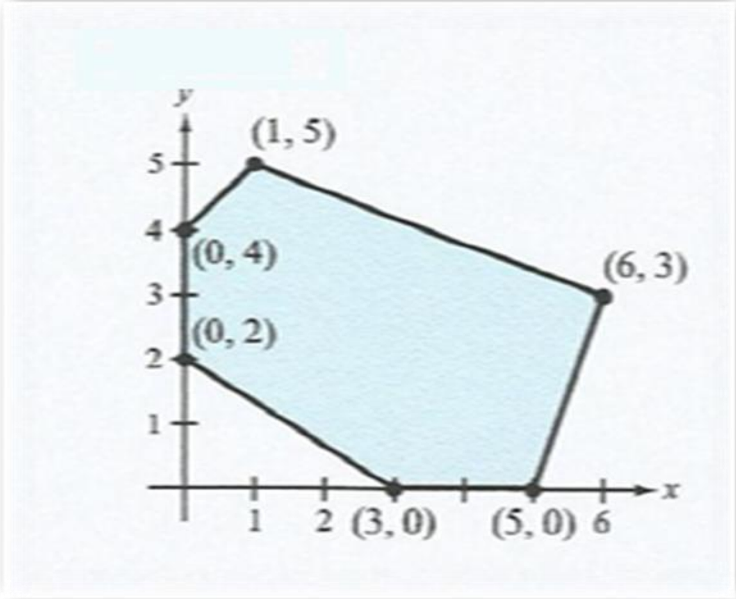
جد القيمة الدنيا لدالة الهدف الاتية:-

$$z=5x+7y \quad \text{Objective function}$$
$$\text{where } x\geq 0 \ \text{ and } y\geq 0, \text{ subject to the constraints}$$
$$2x+3y\geq 6$$
$$3x-y\leq 15$$
$$-x+y\leq 4$$
$$2x+5y\leq 27$$

الحل//

$$At\ (0,2):\ z=5(0)+7(2)=14 \quad \text{Minimum value of } z$$
$$At\ (0,4):\ z=5(0)+7(4)=28$$
$$At\ (1,5):\ z=5(1)+7(5)=40$$
$$At\ (6,3):\ z=5(6)+7(3)=51$$
$$At\ (5,0):\ z=5(5)+7(0)=25$$
$$At\ (3,0):\ z=5(3)+7(0)=15$$

والشكل الاتي يمثل الحل البياني للمشكلة :-



شكل (54) التمثيل البياني للمثال (9-95)

مثال(9-6):
جد القيمة العظمى لدالة الهدف الاتية:

$$Max\ z = 8x_1 + 6x_2$$
$$Subject\ to$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 60$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 48$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل:
نرسم المتباينات كافة الواردة في المسألة بشكل خطوط مستقيمة لان المتباينات من الدرجة الاولى ، ثم يتم تحديد اتجاه كل متباينة بحسب الاشارة الواردة فيها فيما اذا كان اكبر ويساوي او اقل ويساوي.

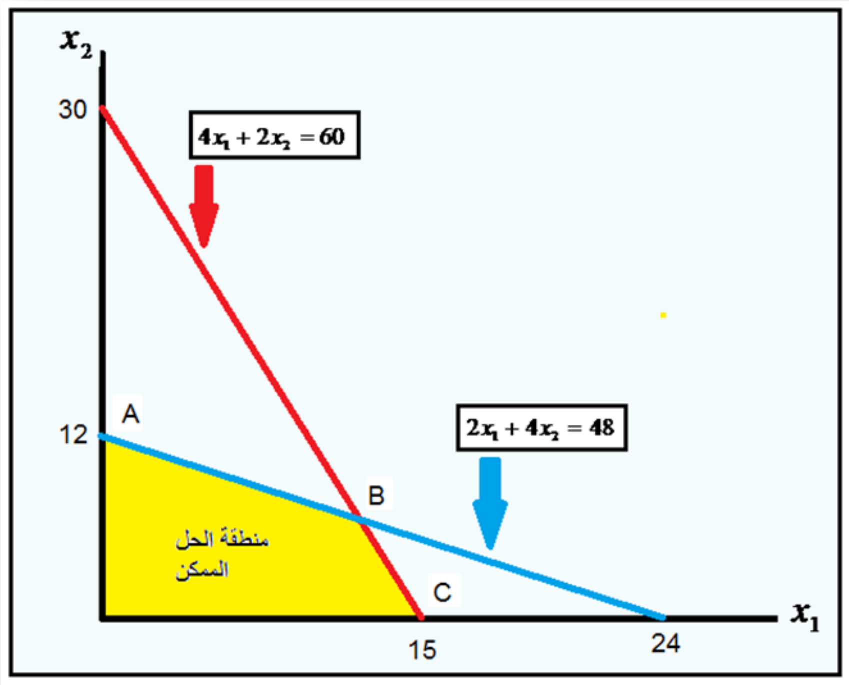
$$4x_1 + 2x_2 = 60$$
$$if\ x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 30 \quad (0, 30)$$
$$if\ x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 15 \quad (15, 0)$$

$$2x_1 + 4x_2 = 48$$
$$if\ x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 12 \quad (0, 12)$$
$$if\ x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 24 \quad (24, 0)$$

نقطة تقاطع المستقيمين :

$$4x_1+2x_2=60$$
$$2x_1+4x_2=48 \quad \times(-2)$$
$$\overline{\hspace{4cm}}$$
$$4x_1+2x_2=60$$
$$-4x_1-8x_2=-96$$
$$\overline{\hspace{5cm}}$$
$$-6x_2=-36$$
$$x_2=6$$
$$\therefore x_1=12$$

والشكل البياني يشير الى منطقة الحل الممكن



شكل (55) التمثيل البياني للمثال(6-9)

بعد تحديد منطقة الحل الممكن نحدد النقاط المتطرفة لتلك المنطقة وهي النقاط (C,B,A) ونختار بعد ذلك النقطة المتطرفة التي تجعل دالة الهدف في قيمتها المثلى (العظمى) وتمثل النقطة B هي النقطة التي تعظم دالة الهدف اي عندما $(x_1=12)$ و $(x_2=6)$

الاحداثيات	قيمة Z $z=8x_1+6x_2$	النقاط

$(x_1,x_2)=(0,12)$	$z=8\times0+6\times12=72$	A
$(x_1,x_2)=(12,6)$	$z=8\times12+6\times6=132$	B
$(x_1,x_2)=(15,0)$	$z=8\times15+6\times0=120$	C

مثال (7-9):

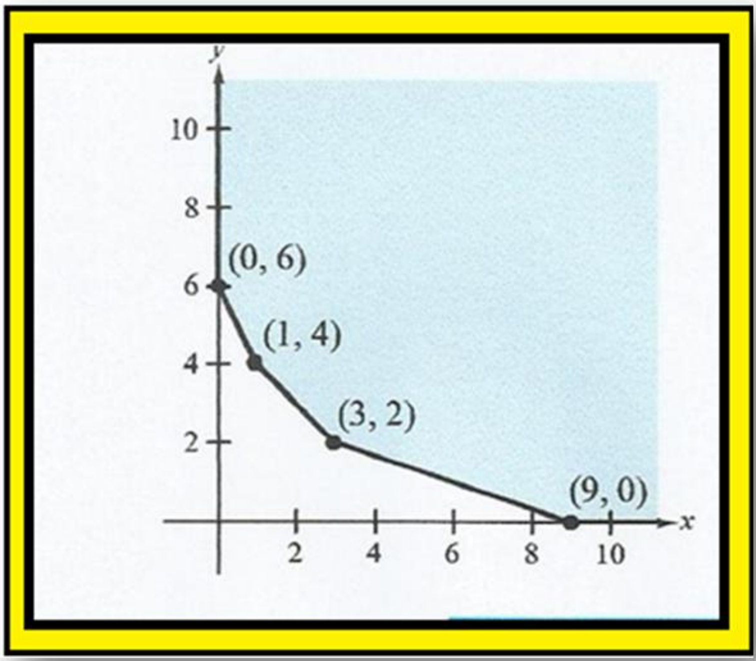
جد القيمة الدنيا لدالة الهدف الاتية:

$$
\begin{aligned}
&C=0.12x+0.15y\\
&\text{Subject to}\\
&60x+60y\geq300\\
&12x+6y\geq36\\
&10x+30y\geq90\\
&x\geq0\\
&y\geq0
\end{aligned}
$$

الحل:

$$
\begin{aligned}
&At\ (0,6):C=0.12(0)+0.15(6)=0.90\\
&At\ (1,4):C=0.12(1)+0.15(4)=0.72\\
&At\ (3,2):C=0.12(3)+0.15(2)=0.66\\
&At\ (9,0):C=0.12(9)+0.15(0)=1.08
\end{aligned}
$$

عليه فان القيمة الدنيا التي تم الحصول عليها عند النقطة $(3,2)$ وتساوي 0.66 اي عند قيمة $(x=3)$ و $(y=2)$, والشكل الاتي يشير الى تمثيل الحل بيانيا.



شكل (56) التمثيل البياني للمثال (7-9)

مثال (8-9) :

مستخدما الرسم البياني اوجد امثلية هذه الدالة:

$$TC = 18x_1 + 3x_2$$
$$Subject\ to$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$9x_1 \geq 6$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الحل:

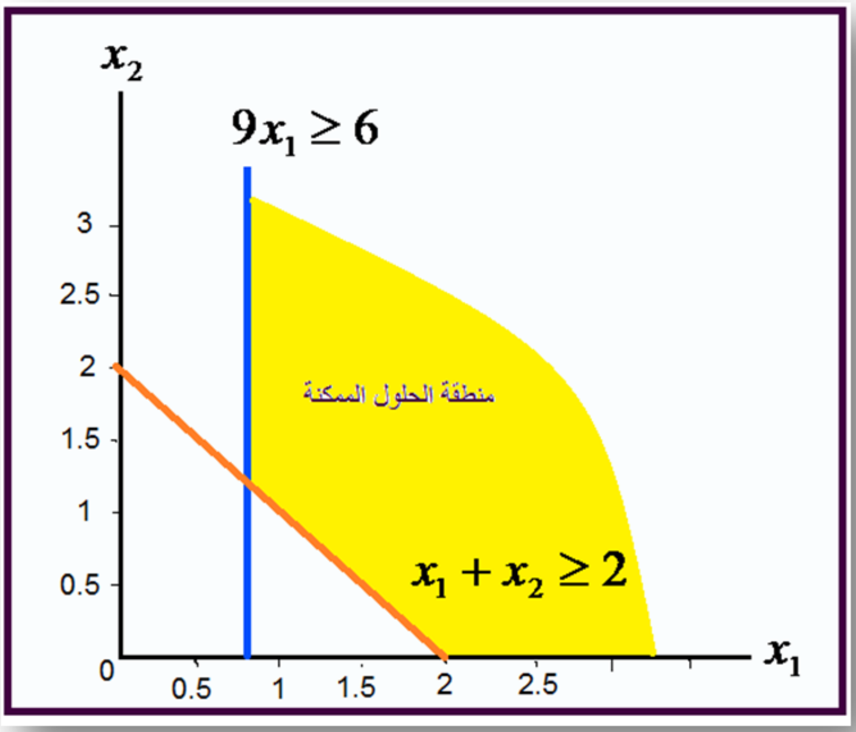
احداثيات القيد الاول:

$(x_1 + x_2 \geq 2)$	
$(2, 2)$	(x_1, x_2)

احداثيات القيد الثاني:

$(9x_1 \geq 6)$	
$(\frac{2}{3}, 0)$	(x_1, x_2)

وبالرسم البياني لاحداثيات القيود نجد



شكل (57) التمثيل البياني للمثال (9-8)

ومن الرسم نستطيع ان نحدد احداثيات نقاط منطقة الحلول الممكنة وهي المنطقة المقعرة الى نقطة الاصل وتتحدد بالاحداثيات :

$$C=(2,0)$$

$$B=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

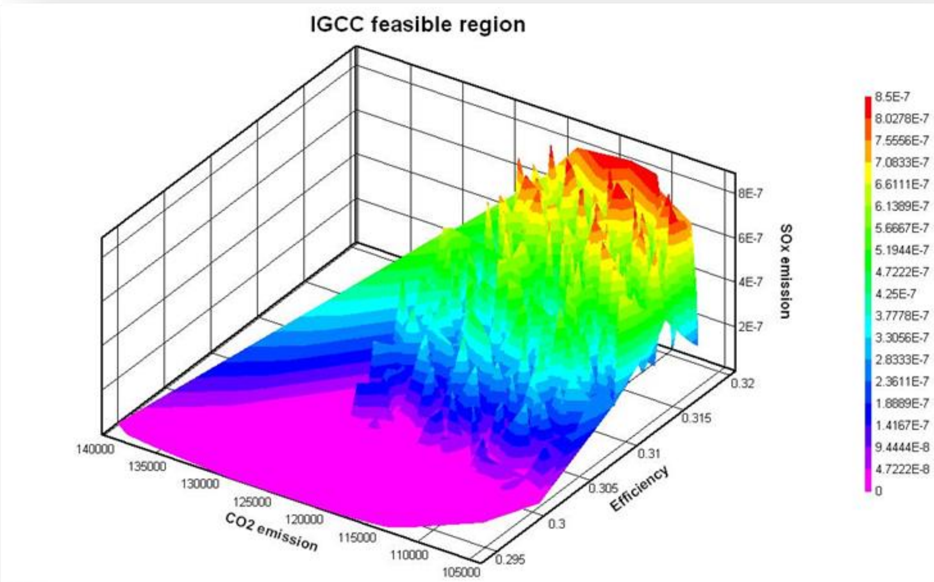
ثم نقوم تحديد الحل الامثل الذي يحقق التدنية لدالة الهدف عن طريق التعويض بنقاط منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف إذ ان النقطة التي تجعل دالة الهدف عند نهايتها الصغرى هي احدى النقاط الركنية لمنطقة الحلول المحتملة وهي اقرب هذه النقاط الى نقطة الاصل.

الاحداثيات	قيمة TC	النقاط
$(x_1, x_2)=(2,0)$	$TC_C=(18\times2)+(3\times0)=36$	النقطة C
$(x_1, x_2)=(2/3, 4/3)$	$TC_B=(18\times 2/3)+(3\times 4/3)=16$	النقطة B

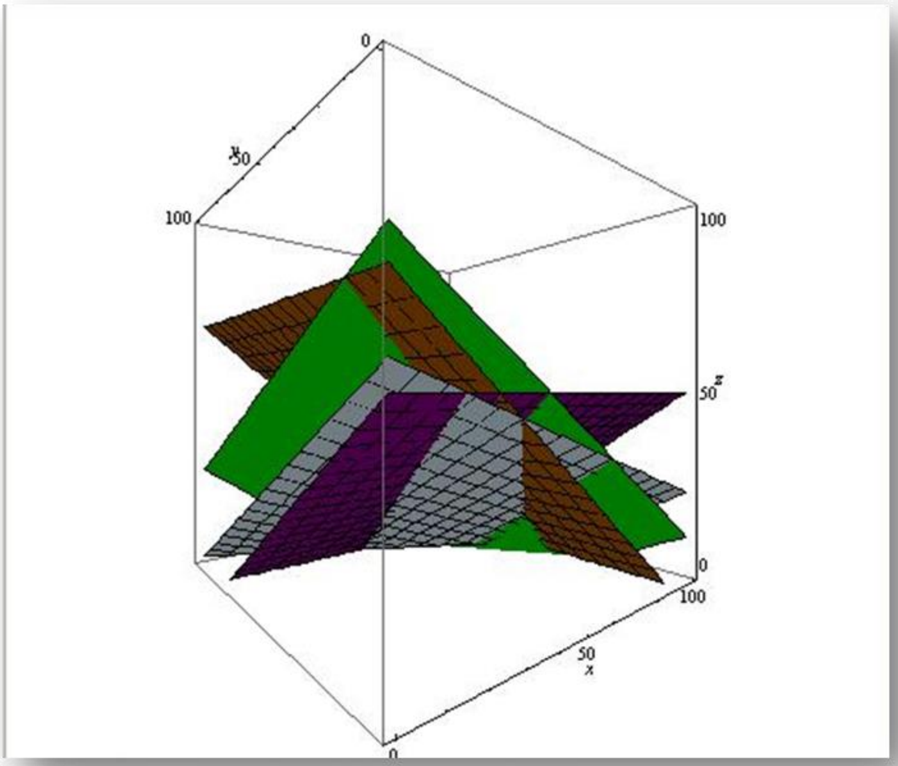
ومن ثم فإن قيمة TC الصغرى تتحقق عند النقطة B و$TC_B = 16$ تصل الى اقل ما يمكن.

مما سبق يتضح ان الشكل البياني او الطريقة البيانية يفتقد الى الدقة احيانا لانه اكثر تعرضا للاخطاء الشخصية ، كما انه يصعب حل المسائل ذات المتغيرات الثلاثة او اكثر بالطريقة البيانية ، الامر الذي تطلب اللجوء الى طريقة اكثر مرونة ودقة واقل جهدا من الطريقة البيانية، وتسمى هذه الطريقة بالطريقة الجبرية.

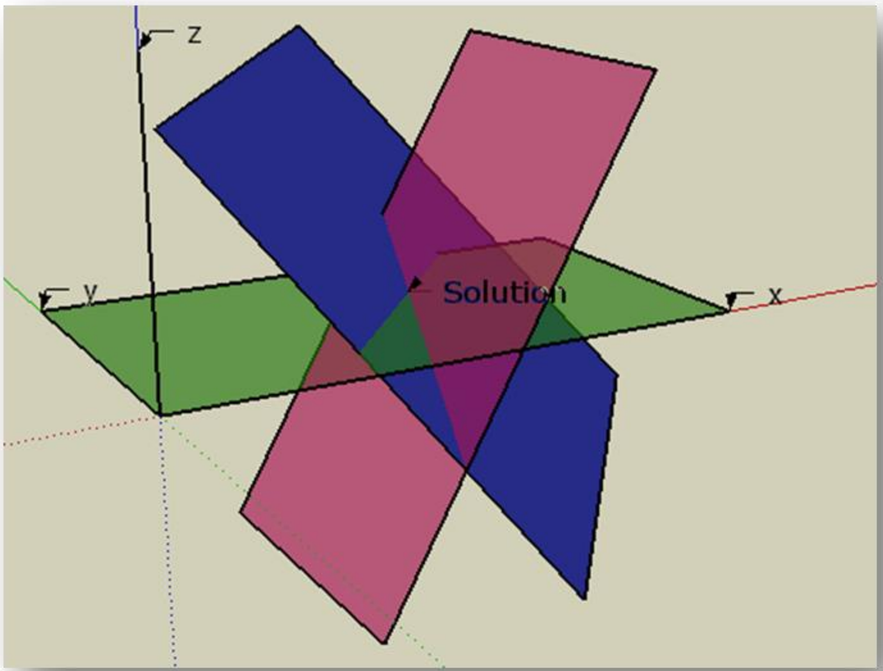
والاشكال البيانية الاتية توضح امكانية الوصول الى الحل في حالة وجود اكثر من متغيرين باستخدام الحل البياني إلا ان هذا الحل يكون صعبا على الكثير ممن يتصدى للحل في هذه الحالة فضلا عن عدم وضوح منطقة الحل الامثل الامر الذي يتطلب اللجوء الى حلول اخرى.



شكل (58) منطقة الحل الامثل في حالة وجود اكثر من متغيرين



شكل (59) التمثيل المجسم لمنطقة الحل الامثل لمشكلة برمجة خطية تحتوي اكثر من متغيرين



شكل (60) التمثيل البياني لمشكلة برمجة خطية ذات ثلاثة متغيرات

2- الطريقة الجبرية *Algebraic Solution*

سنتعرض الى الطريقة الجبرية في حالتين هما:

اولا: تعظيم دالة الهدف *Maximization*

ينبغي اتباع الخطوات الاتية في حالة التعظيم وكما يأتي:

1- تكوين الصيغة الرياضية لمسألة البرمجة الخطية اي تحديد دالة الهدف والقيود رياضيا.

2- تكوين الصيغة المعيارية او القياسية ، اي تحويل المتباينات جميعها (فيما عدا قيد عدم السالبية) الى متساويات (معادلات) مع اضافة متغيرات مساعدة ، بمعنى عندما تكون القيود اصغر من او يساوي تتم اضافة متغيرات مساعدة موجبة الاشارة تسمى بالمتغيرات الوهمية ***Slack Variables*** وتعبر هذه المتغيرات عن الطاقة غير المستغلة، وتتم اضافة متغير لكل قيد. ونلاحظ ان عدد المتغيرات المساعدة (المتغيرات الوهمية) ينبغي ان يساوي عدد القيود او المتباينات وان معامل كل متغير مساعد في دالة الهدف يساوي صفرا.

3- تحديد عدد الحلول الممكنة ***Feasible Solution Number(F.S.N)*** للنظام الخطي باستخدام التوافيق ***Combinations*** اذ ان:

$$F.S.N = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اذ ان:

$F.S.N$ = عدد الحلول الممكنة

n = عدد المتغيرات

r = عدد القيود

4- تكوين جدول بدائل الحل ويمكن ايجاد البدائل بوضع كل متغيرين بصفر ومنها يتم ايجاد باقي المتغيرات في الصف. وعند حساب قيمة المتغيرات لكل حل بديل ينبغي رفض اية قيمة سالبة، اي ان الحل يعد مرفوضا اذا صادفنا قيمة سالبة لاي متغير، ليتفق مع شرط عدم السالبية ، وبالتعويض بقيم المتغيرات في دالة الهدف نحصل على قيم دالة الهدف عند كل حل.

5- تحديد الحل الذي يحقق الامثلية لدالة الهدف ، حيث نختار اكبر قيمة في حالة اذا كانت الامثلية هي تعظيم دالة الهدف.

مثال(9-9)

مستخدما الطريقة الجبرية اوجد حل النظام الخطي الاتي:

$$
\begin{aligned}
&z = 8x_1 + 6x_2 \qquad Objective\ functic \\
&Subject\ to \\
&4x_1 + 2x_2 \le 60 \\
&2x_1 + 4x_2 \le 48 \\
&x_1 , x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل:

1- تحويل المتباينات الى متساويات واضافة متغيرين وهميين موجبي الاشارة لوجود متباينتين كما ان معاملات هذه المتغيرات ستكون اصفارا في دالة الهدف وكما ياتي:-

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 + S_1 &= 60 \\
2x_1 + 4x_2 + S_2 &= 48
\end{aligned}
$$

وتكون دالة الهدف هي:-

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

2- تحديد عدد الحلول الممكنة باستخدام التوافيق ، عدد المتغيرات=4 (x_1, x_2, S_1, S_2) وعدد القيود=2 فنحصل على عدد الحلول الممكنة كالاتي:-

$$
\begin{aligned}
F.S.N &= {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
F.S.N &= {}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6
\end{aligned}
$$

اذن عدد الحلول الممكنة = 6 حلول ممكنة وعلى هذا الاساس يتكون جدول الحل من 4 اعمدة (بعدد المتغيرات) وعمود لدالة الهدف و 6 صفوف (بعدد الحلول الممكنة)

3- تكوين جدول بدائل الحل ، ويمكن ايجاد البدائل بوضع كل متغيرين بصفر ومنها يتم ايجاد باقي المتغيرات في الصف ، ويجب ان نلاحظ عند حساب قيم المتغيرات لكل حل بديل رفض اية قيمة سالبة ، وهذا يعني رفض الحل في حالة وجود قيمة سالبة تماشيا مع شرط عدم السالبية كما تم ذكره سابقا . وبالتعويض بقيم هذه المتغيرات في دالة الهدف نحصل على قيم دالة الهدف عند كل حل، وكما في الجدول الاتي:

جدول الحلول الممكنة

المتغيرات **الحلول البديلة**	x_1	x_2	S_1	S_2	$z=8x_1+6x_2+0S_1+0S_2$
1	0	0	60	48	0
2	0	30	0	سالب	مرفوض
3	0	12	36	0	72
4	15	0	0	18	120
5	24	0	سالب	0	مرفوض
6	6	12	0	0	132

أ: حساب الصف الاول من الجدول (البديل رقم 1)

هنا قيمة كل من x_1 و x_2 = صفر وبالتعويض في المعادلات نحصل على قيم S_1 و S_2 وكما ياتي:-

$$4(0)+2(0)+S_1=60$$
$$2(0)+4(0)+S_2=48$$
$$\therefore S_1=60 \ \& \ S_2=48$$

ثم نعوض القيم في دالة الهدف لايجاد قيمة الربح Z كاحد الحلول الممكنة:

$$z=8(0)+6(0)+0(60)+0(48)=0$$

ب: حساب العمود الثاني :

هنا قيمة x_1 و S_1 =0 ، وبالتعويض في المعادلات نحصل على x_2 و S_2 :

$$4(0)+2(x_2)+0=60 \rightarrow x_2=30$$
$$2(0)+4(x_2)+S_2=48 \rightarrow 4(30)+S_2 \rightarrow S_2=48-120 \rightarrow S_2=-72$$

وطالما حصلنا على قيمة سالبة فإن الحل مرفوض ولاداعي لايجاد بقية المتغيرات لان هذا يتنافى مع قيد عدم السالبية

ج : حساب العمود الثالث:

هنا قيمة هنا قيمة x_1 ، S_2 =0 وبالتعويض في المعادلات نحصل على S_2, x_2 :

$$4x_2=48 \Rightarrow \therefore x_2=12$$
$$S_1=60-24 \Rightarrow \therefore S_1=36$$

ثم نعوض القيم في دالة الهدف فنحصل على الاتي:-

$$z=6\times 12=72$$

د: حساب العمود الرابع :

قيمة كل من $0=S_1, x_2$ وبالتعويض في المعادلات نحصل على الاتي:-

$$x_1=15$$
$$S_2=18$$
$$\therefore z=15\times 8=120$$

هـ : حساب العمود الخامس:

قيمة كل من $0=S_2, x_2$ وبالتعويض في المعادلات نحصل على :

$$x_1=24$$
$$S_1=-36$$

وطالما حصلنا على قيمة سالبة فإن الحل مرفوض

و: حساب العمود السادس : الان باعتبار كل من $0=S_2 \,,\, S_1$ وبالتعويض في المعادلات نحصل على قيمتي $x_2 \,, x_1$:

$$4x_1 + 2x_2 = 60 ....(1) \qquad \times(2)$$
$$2x_1 + 4x_2 = 48 ....(2) \qquad \times(-4)$$

$$8x_1 + 4x_2 = 120$$
$$-8x_1 - 16x_2 = -192$$

$$-12x_2 = -72$$
$$x_2 = 6$$
$$\therefore x_1 = 12$$

ثم نعوض في دالة الهدف للحصول على قيمة الربح كأحد الحلول الممكنة اي ان:-

$$z = 8x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2$$
$$z = 8(12) + 6(6) + 0$$
$$z = 132$$

4- تحديد الحل الذي يحقق الامثلية لدالة الهدف ، ونختار اكبر القيم في حالة اذا كانت الامثلية المطلوبة هي تعظيم دالة الهدف إذ نجد ان الصف السادس يحقق اعلى قيم وبذلك فإن القيم المتحصل عليها لتعظيم دالة الهدف هي:

$$x_1 = 12$$
$$x_2 = 6$$
$$z = 132$$

ثانيا: تدنية دالة الهدف *Minimization*

ينبغي اتباع الخطوات الاتية عند استخدام الحل الجبري في حالة التدنية:

1- تكوين الصيغة الرياضية لمسألة البرمجة الخطية .

2-تكوين الصيغة المعيارية او القياسية ، اي تحويل جميع المتباينات (فيما عدا قيد السالبية) الى معادلات مع اضافة متغيرات مساعدة عندما تكون القيود اكبر من او يساوي تتم اضافة متغيرات مساعدة سالبة الاشارة تسمى بالمتغيرات الفائضة ***(Surplus Variables)*** اذ تتم اضافة متغير لكل قيد ، وعدد المتغيرات المساعدة التي تضاف يساوي عدد المتباينات ومعامل كل متغير مساعد تتم اضافته ليساوي صفرا في دالة الهدف.

3-تحديد عدد الحلول الممكنة ***F.S.N*** للنظام الخطي باستخدام التوافيق.

4-تكوين جداول بدائل الحل، ويمكن ايجاد البدائل بوضع كل متغيرين بصفر ومنها يتم ايجاد باقي المتغيرات في الصف. وينبغي ان نلاحظ عند حساب قيمة المتغيرات لكل حل بديل

رفض اي قيمة سالبة ، وهذا كما ذكرنا سابقا تماشيا مع شرط عدم السالبية ، وبالتعويض بقيم هذه المتغيرات في دالة الهدف نحصل على قيم دالة الهدف عند كل حل.

5-تحديد الحل الذي يحقق الامثلية لدالة الهدف، اذ نختار اصغر قيمة لان الامثلية المطلوبة هنا هي تدنية دالة الهدف.

مثال (9-10)

مستخدما الطريقة الجبرية جد امثلية دالة الهدف الاتية:

$$
\begin{aligned}
&TC = 7x_1 + 4x_2 \quad Objective\ function \\
&Subject\ to \\
&3x_1 + 2x_2 \geq 48 \\
&9x_1 + 4x_2 \geq 108 \\
&3x_1 + 5x_2 \geq 65 \\
&x_1 , x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل:

تحويل المتباينات الى معادلات مع اضافة متغيرات فائضة سالبة الاشارة(عددها ثلاثة) بعدد المتباينات:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 - S_1 &= 48 \\
9x_1 + 4x_2 - S_2 &= 108 \\
3x_1 + 5x_2 - S_3 &= 65
\end{aligned}
$$

وكذلك تصبح دالة الهدف بعد اضافة ثلاثة متغيرات فائضة كالاتي:-

$$TC = 7x_1 + 4x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3$$

نحدد الان عدد الحلول الممكنة ***F.S.N*** للنظام الخطي باستخدام التوافيق :

$$F.S.N = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$F.S.N = {}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

وهذا يعني ان هناك 10 حلول ممكنة اي ان الجدول سيتكون من 5 اعمدة (بعدد المتغيرات) و 10 صفوف (بعدد الحلول الممكنة) وكما ياتي:-

جدول الحلول الممكنة

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	$TC = 7x_1 + 4x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3$
1	**0**	**0**	**سالب**			**مرفوض**
2	**0**	**24**	**0**	**سالب**		**مرفوض**

3	0	27	6	0	70	108
4	0	13	سالب		0	مرفوض
5	16	0	0	36	سالب	مرفوض
6	12	0	سالب	0		مرفوض
7	32.5	0	49.5	189.5	0	مرفوض
8	4	18	0	0	33	100
9	10	9	0	18	0	106
10	7.5	9.9	سالب	0	0	مرفوض

الان سنجري حسابات الصفوف والاعمدة المحددة في الجدول اعلاه:
حساب الصف الاول من الجدول (البديل رقم 1):
من الصف الاول قيمة كل من x_1 و x_2 يساوي صفرا وبالتعويض في المعادلات نحصل على قيم كل من S_1 و S_2 و S_3 وكما ياتي:-

$$3(0)+2(0)-S_1=48 \rightarrow S_1=-48$$
$$9(0)+4(0)-S_2=108$$
$$2(0)+5(0)-S_3=65$$

وطالما قيمة S_1 سالبة فان الحل مرفوض ولاداعي لايجاد باقي قيم المتغيرات .
ويستمر الامر بالنسبة لبقية الصفوف وسنجد في نهاية الحل ان الحل الامثل هو في الصف الثامن إذ ان قيم المتغيرات هي كالاتي:-

$$TC=100$$
$$x_1=4$$
$$x_2=18$$

الانموذج المقابل واسعار الظل *Dual model and Shadow Price*:

لكل مسألة من مسائل البرمجة الخطية التي تبحث في تعظيم الدالة الى حدها الاعلى ***Maximization*** هناك مسالة مقابلة لها تبحث في تصغير الدالة الى حدها الادنى ***Minimization*** ، كذلك فإن لكل مسألة في تدنية الدالة لها مسالة مقابلة لها تبحث في امكانية تعظيم الدالة ، ويمكن التعبير عن ذلك بالاتي:-

الصيغة الاولية ← الصيغة المقابلة
صيغة تعظيم ← صيغة تدنية
صيغة تدنية ← صيغة تعظيم

اهمية دراسة الانموذج المقابل:

1- يمكن حل مسائل التعظيم بصيغة مسائل التدنية والعكس صحيح بمعنى اذا كانت لدينا مسألة تدنية فانه يمكن حلها بالخطوات نفسها لمسألة التعظيم متى ما حصلنا على انموذج التعظيم المقابل و هذا يوفر الجهد لدراسة الطرائق البديلة .

2- اذا كانت دالة الهدف تحتوي على ثلاثة متغيرات وقيدين يحددان طبيعة المسألة إذ ان هذه النوعية من مسائل البرمجة الخطية يصعب حلها بالطرائق البيانية .

قواعد التحويل للحصول على الانموذج المقابل

عند اشتقاق الانموذج المقابل من الانموذج الاصلي يلاحظ الاتي:

1- اذا كانت دالة الهدف تعظيم في المشكلة الاولية فإن دالة الهدف تصبح تدنية في المشكلة المقابلة والعكس صحيح.

2- معاملات دالة الهدف في المشكلة الاولية تصبح ثوابت في المشكلة المقابلة وثوابت القيود في المشكلة الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة المقابلة.

3- مصفوفة معاملات المتغيرات $X's$ في قيود المشكلة الاولية يتم تحويرها اي جعل الصفوف اعمدة والاعمدة صفوف لتصبح معاملات المتغيرات $Y's$ في قيود المشكلة المقابلة.

4- اشارات المتباينات (القيود) تنعكس فإذا كانت اشارات المتباينات في المشكلة الاولية اقل من او يساوي تصبح اكبر من او يساوي والعكس صحيح ، اما قيد السالبية فيبقى كما هو من دون تغيير، وبشكل عام اذا كان لدينا الصيغة الاتية:

$$
\begin{aligned}
&Max\ z = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots\ldots + P_nX_n\\
&Subject\ to\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n \le C_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \le C_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n \le C_m
\end{aligned}
$$

$$X_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$$

يمكن اشتقاق الصيغة المقابلة للصيغة اعلاه وكما ياتي:-

$$
\begin{aligned}
& Min\,TC = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots\ldots + C_mY_m \\
& Subject\ to \\
& a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}y_n \le P_1 \\
& a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}y_n \le P_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}y_m \le P_n \\
& \quad Y_i \ge 0 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, m
\end{aligned}
$$

اسعار الظل في الانموذج المقابل *Shadow Prices in the dual Model*

تعد اسعار الظل عن الكلفة الحدية للموارد النادرة ، ويشير سعر الظل لمورد ما الى زيادة او نقص الارباح نتيجة لزيادة او نقص وحدات هذا المورد بوحدة واحدة. كما يشير عمود الثوابت في الانموذج الثنائي الى سعر الظل (السعر المحاسبي او السعر الدفتري) . واسعار الظل ليست سعرا سوقيا فهي اسعار لموارد موجودة اصلا في المنشأة اي مقيدة دفتريا وليست اسعار السوق الحالية التي ربما تزيد او تنقص ومن ثم فان هذه الاسعار يطلق عليها اسعار ظل لانها لا تحتوي على تكلفة الفرصة البديلة وبذلك فهي تعبر عن الكلفة الحدية للموارد. ونلاحظ ان معاملات دالة الهدف في الانموذج الاولي تصبح اسعار ظل في الانموذج الثنائي(المقابل) إذ نجد ان معاملات دالة الهدف وهي $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, P_n$ هي نفسها اسعار الظل في الانموذج المقابل.

مثال (11-9)

عبر عن البرنامج الخطي الاتي في الصورة الاتية (تدنية)

$$
\begin{aligned}
& TC = 5X_1 + 2X_2 + X_3 \\
& Subject\ to \\
& 2X_1 + 3X_2 + X_3 \ge 20 \\
& 6X_1 + 8X_2 + 5X_3 \ge 30 \\
& 7X_1 + X_2 + 3X_3 \ge 40 \\
& X_1 + 2X_2 + 4X_3 \ge 50 \\
& X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل :

سيتم تحويل صيغة التدنية الى الصيغة المقابلة وكما ياتي:-

الصيغة الاولية	اشتقاق الصيغة المقابلة
الامثلية (تدنية)	تعظيم
الثوابت	تصبح معاملات دالة الهدف
معاملات دالة الهدف	تصبح ثوابت
اشارة المتباينة اكبر او يساوي$\ge$	تصبح اصغر او يساوي $\le$

الاعمدة تصبح صفوف

وبذلك يكون الانموذج المقابل هو :

$$\pi = 20Y_1 + 30Y_2 + 40Y_3 + 50Y_4$$

$$\text{Subject to}$$

$$2Y_1 + 6Y_2 + 7Y_3 + Y_4 \le 5$$

$$3Y_1 + 8Y_2 + Y_3 + 2Y_4 \le 2$$

$$Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 + 4Y_4 \le 1$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \ge 0$$

مثال (9-12)

حول الصيغة الاولية المتمثلة بتدنية دالة الهدف الى الصيغة المقابلة (تعظيم دالة الهدف)

$$Min\ TC = 25X_1 + 32X_2 + 55X_3 \quad \text{Objective function}$$

$$\text{Subject to}$$

$$4X_1 + 6X_2 + 9X_3 \ge 60$$

$$3X_1 + 2X_2 + 5X_3 \ge 45$$

$$X_i \ge 0$$

الحل:

الصيغة الثنائية المقابلة

$$Max\ \pi = 60X_1 + 45X_2 \quad \text{Objective function}$$

$$\text{Subject to}$$

$$4Y_1 + 3Y_2 \le 25$$

$$6Y_1 + 2Y_2 \le 32$$

$$9Y_1 + 5Y_2 \le 55$$

$$Y_i \ge 0$$

4-الطريقة المبسطة ***Simplex Method***

تعد طريقة السمبلكس طريقة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول لمسائل البرمجة الخطية. وقد طورت هذه الطريقة من عالم الرياضيات الامريكي جورج دانتزج عام 1947 ، وتستند هذه الطريقة على اساس الابتداء بحل معين يعد مقبولا ثم تستمر باسلوب تكراري دوري في تطوير هذا الحل الى ان نحصل بعد عدد معين من الخطوات الى الحل الامثل. وينبغي بعد الوصول الى الحل الاساسي اختباره للوصول الى الحل الامثل إذ ان القيام بحل مثال عن البرمجة الخطية تحدده مجموعة خطوات يمكن معرفتها بحل المثال الاتي:

مثال (9-13):

يرغب منتج زراعي بانتاج محصول القمح في الشتاء والذرة الصفراء في الصيف وكانت دالة الربح (دالة الهدف) هي كالاتي:-

$$Max\ Z = 32X_1 + 16X_2$$
$$Subject\ to:$$
$$0.5X_1 + 0X_2 \le 65 \quad \text{ساعة عمل اذار}$$
$$0X_1 + X_2 \le 110 \quad \text{ساعة عمل تموز}$$
$$X_1 + X_2 \le 160 \quad \text{دونم ارض}$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

تمثل الارقام الموجودة في دالة الهدف صافي دخل الدونم الواحد وهي كالاتي:-

32 وحدة نقدية للقمح X_1

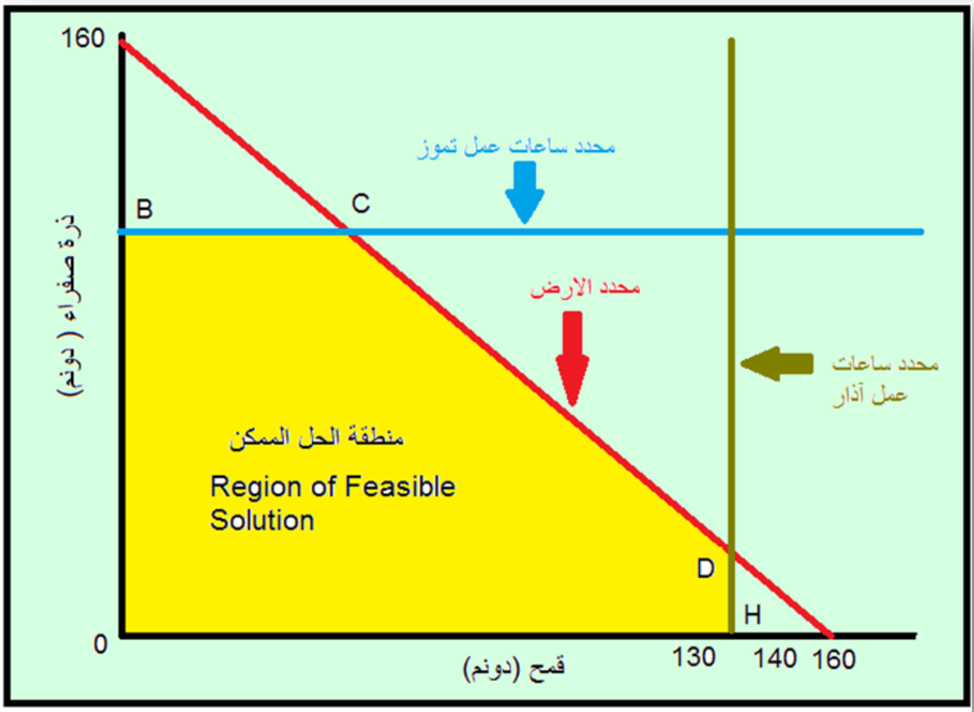
16 وحدة نقدية للذرة الصفراء X_2

اما الموارد المحدودة المتوافرة للمنتج هي كالاتي:-

1- 160 دونما من الارض
2- 65 ساعة عمل في شهر آذار
3- 110 ساعة عمل في شهر تموز

إن متطلبات الدونم الواحد من ساعات عمل آذار لمحصول القمح = 0.5 ساعة عمل ومتطلبات الدونم الواحد من ساعات عمل تموز للذرة الصفراء = ساعة عمل واحدة.

قبل حل السؤال باستعمال طريقة السمبلكس سنحاول تمثيل الحل بيانيا:



شكل (61) التمثيل البياني للمثال (13-9)

إن منطقة الحل الممكن تتحدد بالمساحة $(0BCDH)$ ويبدأ حل المسألة عادة بنقطة الاصل إذ نفترض عدم وجود اي من المحصولين ، حتى تصبح للحل بداية جيدة ، ثم تتم تجربة نتائج الحل عند النقاط الاخرى وهي (BCD) فيستقر الحل الامثل عند نقطة معينة وهي النقطة D اي تتم بزراعة 130 دونم من القمح و30 دونما ذرة صفراء ، وهذا ما سنلاحظه عند حل السؤال بطريقة السمبلكس.

خطوات الحل:

1- تحويل المتباينات الى معادلات بادخال مجموعة من الانشطة الافتراضية (الراكدة)بعدد الموارد المحدودة وكما ياتي:-

S_3 = عدد ساعات عمل شهر اذار(مارس)

S_4 = عدد ساعات عمل شهر تموز(يوليو)

S_5 = عدد وحدات مساحة الارض.

2- ان معامل الانشطة الافتراضية تاخذ مصفوفة وحدة ليكون اثرها حياديا في عملية الضرب في مصفوفة المعاملات الفنية للانشطة الحقيقية. ومن ثم تصبح مسألة البرمجة الخطية على الشكل الاتي:-

$$Max Z = 32X_1 + 16X_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5$$
$$Subject\ to$$
$$0.5X_1 + 0X_2 + 1S_3 + 0S_4 + 0S_4 = 65$$
$$0X_1 + X_2 + 0S_3 + 1S_4 + 0S_4 = 110$$
$$X_1 + X_2 + 0S_3 + 0S_4 + 1S_5 = 160$$
$$X_1, X_2, X_3, S_3, S_4, S_5 \geq 0$$

نلاحظ من المسالة اعلاه ان معاملات الانشطة الافتراضية الثلاث هي مصفوفة وحدة ، فإذا بدأنا الحل بنقطة الاصل اي بافتراض انشطة مستواها صفرا لانتاج القمح والذرة الصفراء فإن الانشطة الافتراضية التي يبدأ بها الحل تكون على النحو الاتي:-

ساعة عمل شهر اذار(مارس) $\longleftarrow 1S_3 = 65$

ساعة عمل شهر تموز (يوليو) $\longleftarrow 1S_4 = 110$

مساحة الارض (دونم) $\longleftarrow 1S_5 = 160$

تبوب المعلومات الواردة اعلاه في جدول السمبلكس وتظهر لنا الخطة الاولى ***(Initial Plan)*** وكما ياتي:-

3-يتم التقاط العمود في الانشطة الحقيقية الذي يعطي اعلى صافي دخل (او اعلى سعر ظلي اذا كانت الارقام تمثل اسعارا ظلية) ويسمى عمود الانتقال (Pivot Column)

4-نقوم بقسمة الارقام التي تمثل الموارد المحدودة على المعاملات الموجودة تحت النشاط الحقيقي الذي حددناه في الخطوة رقم 3 اعلاه ونضع حاصل القسمة تحت عمود خاص بذلك يسمى بعمود النسبة الموضح في جدول السمبلكس ، ويتم التقاط الصف الذي يعطي ادنى رقم وهو 130 في الجدول ويسمة صف الانتقال (Pivot Row). ان هاتين الخطوتين في 3 و 4 تتضمنان فكرة التقاط النشاط الانتاجي الذي يعطي اعلى مردود في نفس الوقت الذي يصاحبه استعمال اقل كمية من الموارد وهي 130 دونما.

جدول السمبلكس (الخطة الاولى)

الخطة الاولى		السعر	32	16	صفر	صفر	صفر	النسبة	
			الانشطة الحقيقية		الانشطة الافتراضية				
السعر		الموارد	X_1	X_2	S_3	S_4	S_5		
0	S_3	65	0.5	0	1	0	0	$65 \div 0.5 = 130$	Pivot Row

$110\div0=\infty$	0	1	0	1	0	110	S_4	0
$160\div1=16$	1	0	0	1	1	160	S_5	0
	0	0	0	0	0	0	Z	
	0	0	0	-16	-32	0	$Z-P$	المعيار
					Pivot Column			

النشاط الداخل

النشاط الخارج

5-الان بعد تحديد العمود (Pivot Column) والصف (Pivot Row) فان نقطة التقائهما هي نقطة الارتكاز وتمثل القيمة (0.5) تحت النشاط الحقيقي X_1 في جدول السمبلكس.

6-نقوم بقسمة الارقام الموجودة في السطر (Pivot Row) الذي تم التقاطه على الرقم الموجود في نقطة الارتكاز (0.5) وحاصل القسمة هو الارقام الجديدة للسطر الجديد والتي تعود للنشاط الحقيقي الاول في الخطة الثانية وهي:-

$0.5\div65$ = 130 دونم قمح (النشاط الحقيقي الاول

$$1=0.5\div0.5$$
$$0=0.5\div0$$
$$2=0.5\div1$$
$$0=0.5\div0$$
$$0=0.5\div0$$

7-اما الانشطة الاخرى في الخطة الاولى وهي S_4 و S_5 فتبقى كما هي وتظهر في الخطة الثانية ، ولكن الارقام التي تعود للصف في كل منها لا تبقى كما هي وذلك لان الموارد المحدودة قد تاثرت وذهب قسم منها لسد حاجة النشاط الانتاجي الحقيقي الذي ظهر في الخطة الثانية وهو القمح X_1 ونحصل على الارقام التي تعود للصف لكل من S_4 و S_5 بالمعادلة الاتية:-

العنصر او الرقم في السطر القديم — [رقم التقاطع في السطر القديم × الرقم المناظر في السطر الجديد] = الرقم الجديد في السطر الجديد

$$= \qquad\qquad \times$$

وبتطبيق هذه المعادلة على الارقام الموجودة في السطر الذي فيه S_4 في الخطة الاولى نحصل على الارقام الاتية التي تعود للسطر نفسه في الخطة الثانية.

$$110-(0\times130)=110$$
$$0-(0\times1)=0$$
$$1-(0\times0)=1$$
$$0-(0\times2)=0$$
$$1-(0\times0)=1$$
$$0-(0\times0)=0$$

أما الارقام التي تظهر مع S_5 في الخطة الثانية فهي:-

$$160-(1\times130)=30$$
$$1-(1\times1)=0$$
$$1-(1\times0)=1$$
$$0-(1\times2)=-2$$
$$0-(1\times0)=0$$
$$1-(1\times0)=1$$

8-ينبغي ان تحتسب قيمة دالة الهدف Z في كل خطة، ففي جدول الخطة الثانية مثلا اصبحت قيمة دالة الهدف (4160) وحدة نقدية ، ولاجل الحصول على هذا الرقم نقوم بضرب عمود السعر المذكور في اقصى يمين الجدول (الارقام 32، 0،0) في الارقام الموجودة في متن الجدول ولكل عمود على انفراد بحيث تجمع نتيجة الضرب لكل عمود وتوضع مقابل Z ، فقيمة دالة الهدف للخطة الثانية هي :

$$(32\times130)+(0\times110)+(0\times30)=4160$$

وهكذا في بقية الاعمدة. والجدول الاتي يبين الخطة الثانية

جدول السمبلكس (الخطة الثانية)

النسبة	صفر	صفر	صفر	16	32	السعر	الخطة الثانية	
	الانشطة الافتراضية			الانشطة الحقيقية				
	S_5	S_4	S_3	X_2	X_1	الموارد		السعر
130÷0=∞	0	0	2	0	1	130	X_1	32
110÷1=110	0	1	0	1	0	110	S_4	0
30÷1=30	1	0	-2	1	0	30	S_5	0
	0	0	64	0	32	4160	Z	
	0	0	64	-16	0	4160	$Z-P$	
				Pivot Column				

Pivot Row

النشاط الداخل

النشاط الخارج

9-إن جدول الخطة الثالثة وهي النهائية والمثلى في الوقت نفسه هي تكرار للخطوات اعلاه ولكن ينبغي ان تسبقها خطوة مهمة هي ملاحظة السطر الاخير $Z-P$ في الجدول الثاني ، إذ يسمى $Z-P$ بالمعيار ***Criterion*** لانه يؤشر كيفية التقاط النشاط الحقيقي الثاني الذي يأتي بعد ان تمت معرفة النشاط الحقيقي الاول وهو القمح.

إن الارقام المذكورة مقابل $Z-P$ هي حاصل طرح الارقام مقابل Z من الاسعار المذكورة في اعلى الجدول، وهذه الاخيرة هي (32، 16، 0،0،0) على الترتيب ، ويتم عادة التقاط اكبر رقم بالسالب وهو (16-) حيث ان كل وحدة مساحة من X_2 (الذرة الصفراء) سوف تضيف لقيمة دالة الهدف (16) وحدة نقدية لكل دونم من هذا المحصول.
اما اذا ظهر الرقم موجبا تحت النشاط الحقيقي فانه يمثل كلفة حدية ، اي ان كل وحدة مساحة تستعمل تسبب نقصانا لقيمة دالة الهدف بهذا المقدار (ولكن هذا المعيار ينعكس اذا كانت المسألة تدنية للتكاليف)، اما الارقام الموجبة الموجودة تحت الانشطة الافتراضية الفائضة فانها تمثل قيمة الناتج الحدي ، بمعنى ان استعمال كل وحدة منها سوف تضيف لقيمة دالة الهدف.
ويلاحظ في آخر جدول (الخطة المثلى) ان الارقام الموجودة في المعيار وللانشطة الحقيقية X_1 و X_2 اصبحت صفرا بمعنى اننا وصلنا الى الحل الامثل لهما لان استعمال وحدة مساحة اضافية من احدهما سوف لن يضيف الى قيمة دالة الهدف وبهذا نعرف اننا وصلنا الى نهاية الحل وكما في الجدول الاتي:

جدول السمبلكس (الخطة الثالثة المثلى)

الخطة المثلى		السعر 32 16 الانشطة الحقيقية			صفر صفر صفر الانشطة الافتراضية			النسبة
السعر		الموارد	X_1	X_2	S_3	S_4	S_5	
32	X_1	130	1	0	2	0	0	
0	S_4	80	0	0	2	1	-1	
16	X_2	30	0	1	20	0	1	
	Z	4640	32	16	32	0	16	
المعيار	$Z-P$	4640	0	0	32	0	16	

اسئلة الفصل التاسع:
س1: جد بيانيا منطقة الحل الممكن لمسائل البرمجة الخطية الاتية:

$$
\begin{aligned}
&1-Objective\ function\\
&Z=3x_1+2y\\
&Constraints:\\
&x\geq 0\\
&y\geq 0\\
&x+3y\leq 15\\
&4x+y\leq 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2-Z=8x_1+6x_2\\
&Subject\ to\\
&4x_1+2x_2\leq 60\\
&2x_1+4x_2\leq 48
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3-Min\ C=10x_1+25x_2\\
&Subject\ to\\
&x_1+x_2\geq 50\\
&x_1\geq 20\\
&x_2\leq 40
\end{aligned}
$$

س2: حول الصيغة الاولية المتمثلة بتدنية دالة الهدف الى الصيغة المقابلة (تعظيم دالة الهدف)

$$
\begin{aligned}
&Min\ TC=3x_1+7x_2\\
&Subject\ to\\
&4x_1+2x_2\geq 3\\
&2x_1+4x_2\geq 7\\
&x_1,x_2\geq 0
\end{aligned}
$$

س3: كون الصيغة الرياضية للمسالة الاتية مع الرسم موضحا منطقة الحلول الممكنة؟

المنتجات	X_1	X_2	الطاقة القصوى للالة

العمليات			
العملية الاولى	3	5	109
العملية الثانية	4	2	80
الربح	10	8	

س4: جد حل الانموذج الاتي بطريقة السمبلكس

$$
\begin{aligned}
&Max\ \pi = 0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.5x_3 + 0.8x_4 \\
&Subject\ to \\
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24000 \\
&6x_1 + 3x_2 + x_4 \le 3000 \\
&3x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12000 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

مصادر الفصل التاسع

1- الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على الشبكة العالمية الدولية.
2- حسين علي بخيت - مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.
3- عبد الفتاح صالح القاضي و احمد شكري الريماوي. مباديء في الادارة الزراعية. مكتبة الفلاح. عمان. الاردن. 1997.
4- عدنان شمحي جابر. الرياضيات للاقتصاديين.دار الكتب للطباعة والنشر . جامعة الموصل. العراق.1988.
5- هاشم علوان السامرائي. ادارة الاعمال المزرعية .مطابع دار السياسة – الكويت –