أي ان السعر التوازني للسلعة x يساوي $P_x = 3.657$

وبالتعويض عن قيمة P_x في أي من المعادلات 1 او 2 نحصل على قيمة P_y :

$$-3P_x + \frac{1}{2}P_y = -9$$

$$-3(3.657) + \frac{1}{2}P_y = -9$$

$$-10.971 + 9 = -\frac{1}{2}P_y$$

$$-1.971 = -0.5P_y$$

$$P_y = 3.942$$

أي ان السعر التوازني للسلعة y *يساوي* $P_y = 3.942$

وبالتعويض عن الاسعار التوازنية في معادلتي الطلب والعرض نحصل على الكميات التوازنية من السلعتين وكما ياتي:

$$Q_{dx} = 5 - (3.657) + 0.5(3.942)$$

$$Q_{dx} = 3.314$$

$$Q_{sx} = -4 + 2(3.657)$$

$$Q_{sx} = 3.314$$

$$\therefore Q_{dx} = Q_{sx} = 3.314$$

الكمية المطلوبة للسلعة x = الكمية المعروضة للسلعة x = 3.314

كذلك الحال مع السلعة y

$$Q_{dy} = 10 + 0.5(3.657) - (3.942)$$

$$Q_{dy} = 7.886$$

$$Q_{sy} = 2(3.942)$$

$$Q_{sy} = 7.88$$

$$\therefore Q_{dy} = Q_{sy} = 7.88$$

الكمية المطلوبة للسلعة y = الكمية المعروضة للسلعة y = 7.88

مثال (2.10): توافرت المعلومات عن دالتي الطلب والعرض لسوق سلعتين، جد الاسعار والكميات التوازنية.

$$Q_{d1} = 10 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_{d2} = 5 + 2P_1 - 2P_2$$

$$Q_{S1} = -3 + 2P_1$$

$$Q_{S2} = -2 + 3P_2$$

الحل

بالاعتماد على معادلة التوازن الاتية:-

$$Q_{d1} = Q_{S1} \quad , \quad Q_{d2} = Q_{S2}$$

ومن معادلة التوازن الاولى:-

$$10-2P_1+P_2=-3+2P_1$$
$$10-2P_1+P_2+3-2P_1=0$$
$$-4P_1+P_2=-13.....(1)$$

ومن معادلة التوازن الثانية:-

$$5+2P_1-2P_2=-2+3P_2$$
$$7+2P_1-5P_2=0$$
$$2P_1-5P_2=-7.....(2)$$

وبحل المعادلتين (1) و(2) آنيا نحصل على الاتي:-

$$-4P_1+P_2=-13$$
$$2P_1-5P_2=-7.....\times(2)$$

$$-4P_1+P_2=-13$$
$$4P_1-10P_2=-14$$

$$-9P_2=-27$$
$$P_2=\frac{-27}{-9}\Rightarrow P_2=3$$

وبتعويض قيمة P_2 في أي من المعادلتين (1) او (2) نحصل على قيمة P_1 وتساوي (4)
وبتعويض قيم الاسعار التوازنية في معادلات الطلب والعرض نحصل على القيم الاتية:-

$$Q_{d1}=Q_{s1}=5$$
$$Q_{d2}=Q_{s2}=7$$

اذن حصلنا على الاسعار التوازنية والكميات التوازنية وهي كالاتي:-

$$P_1=4\ ,\ P_2=3\ ,\ Q_1=5\ ,\ Q_2=7$$

التوازن في سوق لثلاث سلع

يمكن استخراج قيم الكميات والاسعار التوازنية لسلع ثلاث وبالطرائق الرياضية نفسها

مثال (2.11): بافتراض وجود ثلاث سلع في السوق وان معادلات الطلب والعرض لها هي كالاتي:-

$$Q_{d1}=16-2P_1+2P_2-P_3$$
$$Q_{s1}=-5+P_1$$
$$Q_{d2}=8+2P_1-P_2+2P_3$$
$$Q_{s2}=-2+2P_2$$
$$Q_{d3}=4-P_1+P_2-P_3$$
$$Q_{s3}=-1+P_3$$

الحل// يتساوى الطلب والعرض في حالة التوازن ولكل سلعة :

$$Q_{d1}=Q_{s1}=Q_1$$

السلعة الاولى:

$$16-2P_1+2P_2-P_3=-5+P_1$$
$$3P_1-2P_2+P_3=21.....(1)$$

السلعة الثانية:

$$Q_{d2} = Q_{s2} = Q_2$$
$$8 + 2P_1 - P_2 + 2P_3 = -2 + 2P_2$$
$$-2P_1 + 3P_2 - 2P_3 = 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

السلعة الثالثة :

$$Q_{d3} = Q_{s3} = Q_3$$
$$4 - P_1 + P_2 - P_3 = -1 + P_3$$
$$P_1 - P_2 + 2P_3 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

الحل

تجدر الاشارة الى انه يمكن حل هذه المعادلات بطريقة الحذف والتعويض وطريقة المصفوفات، وسيتم الحل بالطريقة الاولى. وبوضع المعادلات التي تم تكوينها من عملية التوازن للسلع الثلاثة نحصل على:

$$3P_1 - 2P_2 + P_3 = 21 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$-2P_1 + 3P_2 - 2P_3 = 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$P_1 - P_2 + 2P_3 = 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

وبحل المعادلات آنيا:

تضرب المعادلة (1) بالمقدار (2) فنحصل على المعادلة (4)

$$6P_1 - 4P_2 + 2P_3 = 42 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

وبجمع المعادلتين (4) و (2) نحصل على المعادلة (5)

$$4P_1 - P_2 = 52 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وبجمع المعادلتين (2) و (3) نحصل على المعادلة (6)

$$-P_1 + 2P_2 = 15 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

وبضرب المعادلة (5) بالمقدار (2) نحصل على المعادلة (7)

$$8P_1 - 2P_2 = 104 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

وبجمع المعادلتين (6) و (7) نحصل على:

$$7P_1 = 119$$
$$P_1 = 17$$

وبالتعويض بقيمة P_1 في المعادلة (6) نحصل على:

$$-17 + 2P_2 = 15$$
$$P_2 = 16$$

وبالتعويض بقيم P_2, P_1 في المعادلة (4) نحصل على:

$$6(17) - 4(16) + 2P_3 = 42$$
$$102 - 64 + 2P_3 = 42$$
$$P_3 = 2$$

وبالتعويض في معادلة الطلب ومعادلة العرض للسلعة الاولى نحصل على:

$$Q_{d1} = 16 - 2(17) + 2(16) - 2 = 12$$
$$Q_{s1} = -5 + (17) = 12$$
$$\therefore Q_{d1} = Q_{s1} = Q_1 = 12$$

وكذلك الحال للسلعة الثانية:

$$Q_{d2} = 8 + 2(17) - 16 + 2(2) = 30$$
$$Q_{s2} = -2 + 2(16) = 30$$
$$\therefore Q_{d2} = Q_{s2} = Q_2 = 30$$

وللسلعة الثالثة :

$$Q_{d3} = 4 - 17 + 16 - 2 = 1$$
$$Q_{s3} = -1 + 2 = 1$$
$$\therefore Q_{d3} = Q_{s3} = Q_3 = 1$$

3.النماذج اللاخطية *Non linear models* :

يتم اعتماد النماذج الخطية في التحليل لغرض التبسيط في التحليل غير ان معظم دوال الطلب والعرض هي دوال لاخطية ، ولايجاد التوازن في نموذج السوق غير الخطي الذي تتمثل فيه نماذج العرض والطلب بمعادلات من الدرجة الثانية ، وسيتم اعتماد اساليب جديدة في التحليل هي:

1. **الطريقة البيانية *Graphical method*** : يتقاطع منحنيا العرض والطلب في هذه الحالة في نقطتين وتهمل القيم السالبة للكميات والاسعار وتعتمد القيم الموجبة فقط لمنطقيتها.
2. **طريقة التحليل الى العوامل *Factorization method* :** ويسعى هذا التحليل الى ايجاد قيمتين للكمية Q تحقق كل منهما المعادلة التربيعية ، أي ايجاد جذري المعادلة ، وتهمل القيم السالبة ايضا.
3. **طريقة المعادلة التربيعية العامة (الدستور) *The General Quadratic Formula*:** في بعض الاحيان يكون من الصعب تنفيذ طريقة التحليل الى العوامل بسبب الكسور في معاملات المعادلة فيتم اللجوء الى هذه الطريقة.

1. **الطريقة البيانية *Graphical Method***: حتى نفهم الطريقة البيانية في حل النماذج غير الخطية ناخذ المثال الاتي:

مثال (2.12): اذا كان أنموذج السوق غير الخطي على الشكل الاتي:

$$Q_d = 3 - P^2$$
$$Q_s = 6P - 4$$

جد السعر والكمية التوازنية باستخدام الرسم البياني

الحل//

$$\because Q_d = Q_s$$
$$3 - P^2 = 6P - 4$$
$$P^2 + 6P - 7 = 0$$

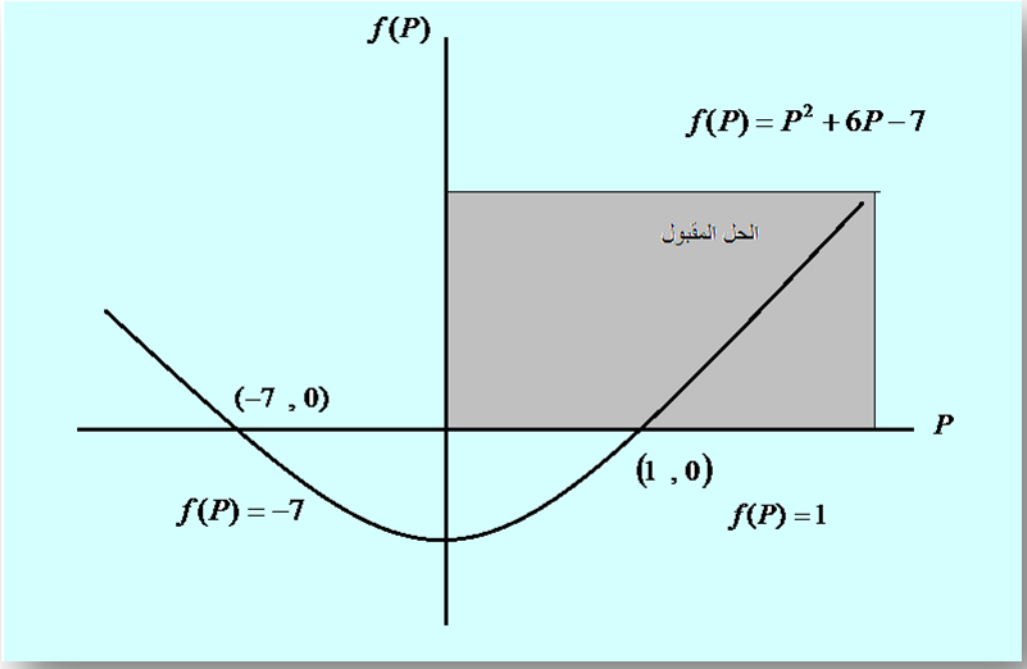
يتم وضع المعادلة التربيعية الاخيرة على شكل دالة تربيعية في السعر كما يأتي:

$$f(P) = P^2 + 6P - 7$$

وتوضح الدالة ان قيم P التي تجعل الدالة اعلاه تساوي صفرا ، أي ان قيم P التي تجعل الدالة تتقاطع مع الاحداثي السيني تمثل مجموعة جذور المعادلة الحقيقية مع اهمال القيم السالبة للسعر لتعارضها مع منطق النظرية الاقتصادية.

P	....	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...

$f(P)$	...	9	0	-7	-12	-15	-16	-15	-12	-7	0	9	...



شكل (7) نقطة التوازن لأنموذج سوق غير خطي مثال (2.12)

ويتضح من المثال ان هناك قيمتين للسعر هما $P=1$ و $P=-7$ تجعلان الدالة $f(P)$ تساوي الصفر وعند اهمال القيمة السالبة لتعارضها مع المنطق الاقتصادي فإن السعر التوازني هو $P=1$ وهو ما سنلاحظه عند اعتماد الطرائق الاخرى.

2. **طريقة التحليل الى العوامل *Factorization:*** باعتماد البيانات نفسها في المثال (11) وبما ان المعادلة P^2+6P-7 هي معادلة من الدرجة الثانية حدها الاول P^2 وحدها الاوسط $6P$ وحدها المطلق Absolute term هو 7- ويمكن حل هذه المعادلة بطريقة التحليل وكما ياتي:

$$\because P^2+6P-7=0$$
$$(P+7)(P-1)=0$$

اما
$$(P+7)=0$$
$$\therefore P=-7$$

وهذا الحل مرفوض وغير مقبول اقتصاديا لانه لا يوجد سعر سالب

أو ان السعر التوازني هو
$$\because (P-1)=0$$
$$\therefore P=1$$

اما الكمية التوازنية فنحصل عليها بالتعويض عن قيمة السعر التوازني في احدى معادلتي الطلب او العرض وكما ياتي:

$$\because Q=Q_d=3-P^2$$
$$Q=3-1$$
$$Q=2$$

3. **طريقة المعادلة التربيعية العامة (الدستور):**

$$\because P^2+6P-7=0$$

$$P_1,P_2=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$P_1,P_2=\frac{-(6)\pm\sqrt{36-4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$P_1,P_2=\frac{-(6)\pm\sqrt{64}}{2}$$

$$P_1,P_2=\frac{-(6)\pm8}{2}$$

$$\therefore P_1=\frac{-(6)-(8)}{2}=\frac{-14}{2}=-7$$

وهذا الحل مرفوض وغير مقبول اقتصاديا لان السعر دائما اكبر من الصفر أي موجب او:

$$P_2=\frac{-(6)+8}{2}=1$$

وهذا يعني ان السعر التوازني = 1 وهو الحل نفسه الذي تم الحصول عليه بالطريقتين السابقتين.

مثال (2.13): اعطيت دالتي العرض والطلب الاتيتين:-

$$P=Q_S^2+14Q_S+22$$

$$P=Q_d^2-10Q_d+15($$

المطلوب: احسب السعر والكمية التوازنيتين.

الحل

$$Q_d=Q_S$$

وبما ان المعادلتين تساويان السعر نحصل على:-

$$Q^2+14Q+22=-Q^2-10Q+15($$

$$2Q^2+24Q-128=0 \qquad \div 2$$

$$Q^2+12Q-64=0$$

وبتطبيق القانون العام

$$Q=\frac{-12\mp\sqrt{(12)^2-4(1)-(64)}}{2(1)}$$

$$Q=\frac{-12\mp\sqrt{400}}{2}\Rightarrow Q=\frac{-12\mp20}{2}$$

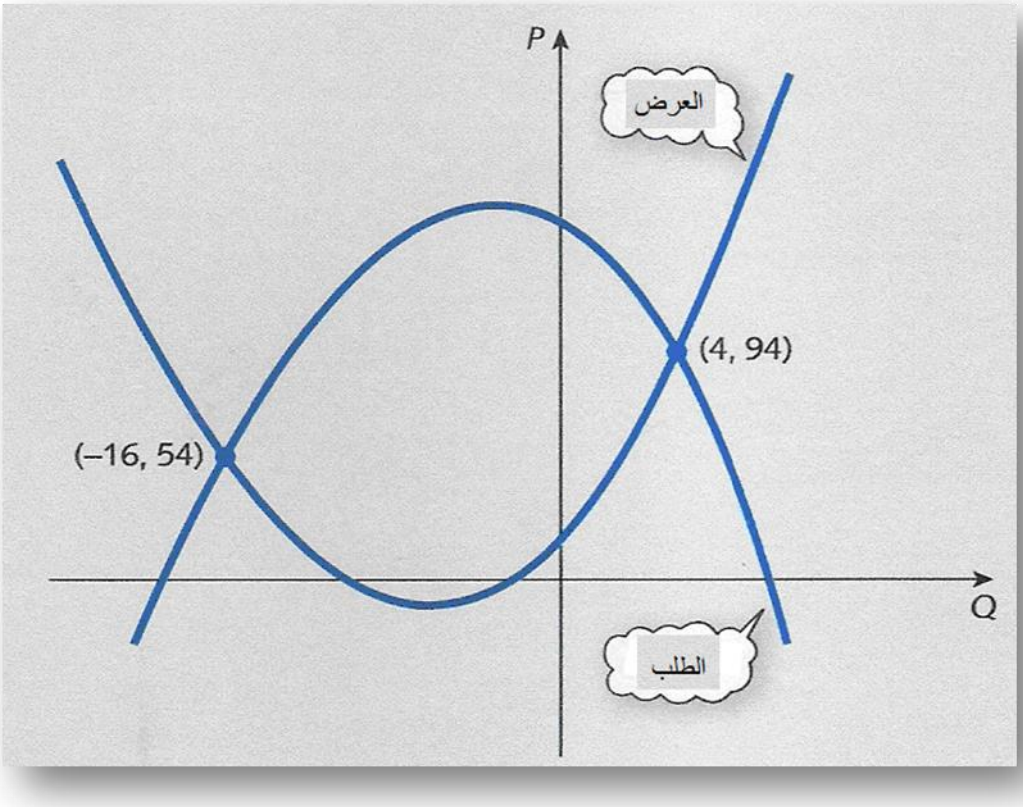
$$Q=-16 \quad or \quad Q=4$$

وتهمل القيمة السالبة بطبيعة الحال ، وعليه نحصل على قيمة السعر كما ياتي:-

$$P=4^2+14(4)+22=94$$

$$P=-(4)^2-10(4)+150=94$$

وبيانيا يمكن تمثيل السؤال بالشكل الآتي:-



شكل (8) التمثيل البياني للمثال (2.13)

4.استخدام المصفوفات في تحليل التوازن

يعد جبر المصفوفات من الاساليب التي يمكن من خلالها عرض المشاكل الاقتصادية ومعالجتها بطرائق منتظمة، وقد برزت الحاجة للمصفوفات التي تمثل مدخلاتها قيما لكثير من المتغيرات والتي تعكس تاثير هذه القيم على قيم متغيرات اخرى محل الدراسة في الأنموذج الاقتصادي، وتأتي اهمية المصفوفات في العلوم الاقتصادية من قدرتها على التحليل الشامل للنماذج الاقتصادية واكتشاف طبيعة العلاقات بين المتغيرات المؤثرة في الظاهرة المدروسة وذلك للوصول الى نتائج نهائية تعين على اتخاذ القرارات المثلى التي تزيد من قيمة المنشأة السوقية من خلال الاستفادة من الموارد الاقتصادية المتاحة.

ان الطرائق السابقة في حل النظام الخطي قد تكون قابلة للحل في حال وجود مجهول او مجهولين اوثلاثة ، غير ان وجود عدد n من المعادلات وعدد n من المجاهيل فاننا نستخدم الجبر الخطي والمعبر عنه بالمصفوفات والمحددات، وسنتطرق هنا لبعض التطبيقات الاقتصادية على المستوى الجزئي فضلا عن استخداماتها على المستوى الكلي.

أنموذج التوازن الجزئي باستخدام المصفوفات:

انموذج توازن سلعة واحدة: يمكن حل انموذج توازن السوق الخطي لسوق سلعة واحدة باستخدام قوانين الجبر الخطي وكما ياتي:

$$Q_d = a - bP \qquad (a,b>o)$$

$$Q_s = -c + dP \qquad (c,d>o)$$

ينبغي اولا تكوين المنظومة المصفوفية للانموذج الخطي وبمعنى آخر نضع المعادلات في شكل مصفوفة.

$$Q_d = Q_s$$
$$Q_d - (0)Q_s + bP = a$$
$$(0)Q_d + Q_s - dP = -c$$
$$Q_d - Q_s - (0)P = 0$$

وبذلك تكون منظومة المصفوفة بالشكل الاتي:

مصفوفة الثوابت = (مصفوفة المجاهيل)(مصفوفة المعلمات)

$$AX = D$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويمكن حل الأنموذج اعلاه باحدى الطرائق المعروفة

1. طريقة معكوس المصفوفة *Inverse Matrix Method*
2. طريقة كرامر *Grammar Rule*

مثال (2.14): في أنموذج السوق الاتي:

$$Q_d = Q_s$$
$$Q_d = 27 - 4P$$
$$Q_s = -3 + 2P$$

جد السعر التوازني والكمية التوازنية باستخدام طريقة معكوس المصفوفة.

الحل//

تعاد كتابة الدوال السابقة بالشكل الاتي:-

$$Q_d - Q_s = 0$$
$$Q_d + 4P = 27$$
$$Q_s - 2P = -3$$

وباستخدام نظام المصفوفات تعاد كتابة المعادلات وكما ياتي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \\ -3 \end{bmatrix}$$

وعلى وفق الطريقة يكون معكوس المصفوفة:

$$X_i = A^{-1} D$$

إذ ان :

$$\begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} [adjA][D]$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -4 + (-2) + 0$$

$$|A| = -6 \quad \Rightarrow |A| \neq 0$$

وبالامكان ايجاد المصفوفة المرافقة من خلال مصفوفة العوامل المتممة *Cofactors Matrix* وكما ياتي:-

$$C = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & |C_{13}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & |C_{23}| \\ |C_{31}| & |C_{32}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

ثم نجد مبدلة مصفوفة العوامل المتممة *Transpose* والتي من خلالها نحصل على المصفوفة المرافقة:

$$adjA = C' = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$$

$$|C_{11}| = \alpha_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|C_{12}| = \alpha_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$|C_{13}| = \alpha_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|C_{21}| = \alpha_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|C_{22}| = \alpha_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|C_{23}| = \alpha_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$|C_{31}| = \alpha_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$|C_{32}| = \alpha_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$|C_{33}| = \alpha_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$adjA=\begin{bmatrix}-4 & -2 & -4\\ 2 & -2 & -4\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}Q_d\\ Q_s\\ P\end{bmatrix}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix}-4 & -2 & -4\\ 2 & -2 & -4\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 27\\ -3\end{bmatrix}$$

$$Q_d=\frac{(-4)(0)+(-2)(27)+(-4)(-3)}{-6}=\frac{-42}{-6}=7$$

$$Q_s=\frac{(2)(0)+(-2)(27)+(-4)(-3)}{-6}=\frac{-42}{-6}=7$$

$$P=\frac{(1)(0)+(-1)(27)+(1)(-3)}{-6}=\frac{-30}{-6}=5$$

∴ الكمية التوازنية = $Q_d=Q_s=Q=7$

والسعر التوازني = $P=P=5$

مثال (2.15): اذا كانت معادلة الطلب على محصول القطن في بلد ما هي $Q_d=14-2P$، ومعادلة عرضه هي $Q_s=-16+3P$. جد السعر والكمية التوازنية باستخدام طريقة كرامر.

الحل:

$$Q_d+2P=14$$
$$Q_s-3P=-16$$
$$Q_d-Q_s=0$$

لاستخراج الكميات التوازنية ينبغي اجراء الخطوات الاتية حسب ماتقتضيه طريقة كرامر:

1. استخراج المحدد العام للمصفوفة: باستخدام عناصر الصف الاول وكما ياتي:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_d\\ Q_s\\ p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\ -16\\ 0\end{bmatrix}$$

$$|A|=1\begin{vmatrix}1 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}+(2)\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$|A|=1\{(1)(0)-(-3)(-1)\}-(0)+2\{(0)(-1)-(1)(1)\}$$

$$|A|=1(-3)-(0)+2(-1)$$

$$|A|=-3-2=-5$$

2. استخراج المحدد الاول $|A_1|$ وذلك بوضع عمود الثوابت مكان العمود الاول من المصفوفة وبنفس الطريقة في الخطوة الاولى نستخرج المحدد الاول $|A_1|$ ويساوي =10-
3. استخراج المحدد الثاني $|A_2|$ وهنا يساوي (10-)
4. استخراج المحدد الثالث $|A_3|$ ويساوي (30-)

$$Q_d = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$Q_s = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$Q_d = Q_s = \bar{Q} = 2$$

$$P = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-30}{-5} = 6$$

∴ الكمية التوازنية $\bar{Q} = 2$ ، والسعر التوازني $\bar{P} = 6$.

وباستخدام الطريقة الاعتيادية للتوازن نستطيع استخراج الكمية والسعر التوازنيتين:

$$Q_d = Q_s$$
$$14 - 2P = -16 + 3P$$
$$14 + 16 = 2P + 3P$$
$$30 = 5P$$
$$P = \frac{30}{5} = 6$$
$$\bar{Q} = 14 - 2(6) = 14 - 12 = 2$$
$$\therefore \bar{Q}, \bar{P} = (2,6)$$

ثانيا: التوازن الكلي

تناولنا في الصفحات السابقة كيفية حل نماذج التوازن الجزئي بمختلف الطرائق الرياضية سواء التوازن بطريقة الحذف والتعويض او بطريقة المصفوفات ، والامر نفسه سيتم تناول حلول نماذج التوازن الكلي بالطرائق ذاتها ، تاركين الاطار النظري الذي يتعلق بها لمراجعة الطالب نفسه على اعتبار ان الاطار النظري قد تم تناوله في السنوات السابقة من دراسة الطالب ولاسيما في المرحلة الثالثة في مادة النظرية الاقتصادية الكلية.

مثال(2.16): اذا كان أنموذج الدخل القومي على الشكل الاتي:-

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = 58 + 0.8Y_d$$
$$I_0 = 25 \quad , \quad G_0 = 15 \quad T = 0.3Y$$

المطلوب//

احسب الدخل القومي التوازني $\bar{Y}$ والاستهلاك التوازني $\bar{C}$ والضرائب التوازنية

الحل//

$$\because C = 58 + 0.8Y_d$$
$$\because C = 58 + 0.8(Y - T)$$
$$C = 58 + 0.8(Y - 0.3Y)$$
$$C = 58 + 0.8Y - 0.24Y$$
$$\therefore C = 58 + 0.56Y$$

ولايجاد الدخل التوازني نعوض بمعادلة الاستهلاك التي حصلنا عليها في معادلة الدخل

$$\because Y = C + I_0 + G_0$$
$$Y = (58 + 0.56Y) + 25 + 15$$
$$(Y - 0.56Y) = 98$$
$$0.44Y = 98$$
$$Y = \frac{98}{0.44} = 222.73$$

وبالتعويض في دالة الاستهلاك نحصل على الاستهلاك التوازني:

$$\because C = 58 + 0.56Y$$
$$C = 58 + 0.56(222.73)$$
$$\therefore C = 58 + 124.73$$
$$\therefore C = 128.73$$

وتحسب الضرائب التوازنية :

$$\because T = 0.3(Y)$$
$$\therefore T = 0.3(222.73)$$
$$\therefore T = 66.82$$

مثال (2.17): توافرت المعلومات الاتية عن أنموذج الدخل القومي :

$$Y = C + I_0 + G_0 + (X_0 - M)$$
$$C = C_0 + c_1 Y$$
$$M = M_0 + mY$$
$$X_0 = 40\ ,\quad G_0 = 32,\quad I_0 = 45\ ,\ c_1 = 0.8\quad m = 0.15$$
$$M_0 = 20,\quad C_0 = 35$$

المطلوب: استخرج القيم التوازنية لكل من $M,\ C,\ Y$

الحل

نعوض بالقيم المعطاة في السؤال في معادلة الدخل القومي وكما ياتي:

$$\because Y = C_0 + c_1 Y + I_0 + G_0 + (X_0 - (M_0 + mY))$$
$$Y = 35 + 0.8Y + 45 + 32 + (40 - (20 + 0.15Y))$$
$$Y = 35 + 0.8Y + 45 + 32 + 40 - 20 - 0.15Y$$
$$Y = 35 + 45 + 32 + 40 - 20 + 0.8Y - 0.15Y$$
$$Y = 132 + 0.65Y$$
$$Y - 0.65Y = 132$$
$$Y(1 - 0.65) = 132$$
$$0.35Y = 132$$
$$Y = \frac{132}{0.35} = 377.143$$

$\therefore$ الدخل التوازني = 377.143

ولايجاد الاستهلاك التوازني نعوض بقيمة Y في دالة الاستهلاك وكما ياتي:

$$\because C = 35 + 0.8Y$$
$$C = 35 + 0.8(377.143)$$
$$C = 35 + 301.71$$

∴ الاستهلاك التوازني = 336.71

ثم نعوض قيمة Y في دالة الواردات لايجاد الواردات التوازنية:

$$\because M = M_0 + mY$$
$$M = 20 + 0.15Y$$
$$M = 20 + 0.15(377.143)$$
$$M = 20 + 56.57$$
$$M = 76.57$$

أي ان حجم الواردات التوازني = 76.57

كما يمكن ايجاد حجم الادخار باستخدام المعادلة الاتية:

$$\because S = -C_0 + (1 - c_1)Y_d$$
$$S = -35 + 0.2Y$$
$$S = -35 + 75.43$$
$$\therefore S = 40.43$$

مثال (2.18): توفرت المعلومات الاتية عن اقتصاد مغلق كان فيه أنموذج الدخل القومي على الشكل الاتي:

$$Y = C + I_0 + G_0$$
$$C = 58 + 0.8Y$$
$$I_0 = 25 \qquad G_0 = 15$$

المطلوب 1- ايجاد الدخل القومي التوازني Y والاستهلاك التوازني C

2- استخرج المضاعف مع تفسير معناه الاقتصادي

الحل

1- نعوض معادلة الاستهلاك في معادلة الدخل القومي

$$Y = 58 + 0.8Y + 25 + 15$$
$$Y - 0.8Y = 98$$
$$0.2Y = 98$$
$$\therefore Y = 490$$

وبتعويض قيمة الدخل التوازني Y المستخرجة اعلاه في دالة الاستهلاك نحصل على الاستهلاك التوازني:

$$C = 58 + 0.8(490)$$
$$\therefore C = 450$$

2- يتم استخراج مضاعف الاستثمار *The Investment Multiplier* وكما ياتي:-

$$Multiplier = \frac{1}{1-c} = \frac{1}{1-0.8} = 5$$

يمثل المضاعف عدد المرات التي يتضاعف فيها الدخل القومي نتيجة مضاعفة الانفاق الاستثماري مرة واحدة ، وتفسير النتيجة التي حصلنا عليها بانه عند زيادة الاستثمار مرة واحدة فإن ذلك يؤدي الى مضاعفة الدخل القومي بمقدار خمس مرات.

مثال (2.19) : اذا كانت دالة الاستهلاك لسلعة ما في بلد ما هي

$$C=12+0.8Y$$

احسب الدخل التوازني Y والاستهلاك التوازني C اذا علمت ان الاستثمار كان $I_0=4$

الحل

$$Y-C=I_0$$
$$Y-C=4$$
$$-0.8Y+C=12$$
$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -0.8 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y\\ C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 12\end{bmatrix}$$

باستخدام قانون كرامر نستخرج القيم التوازنية لـ Y و C

المحدد العام $|A|=0.2$ المحدد الاول $|A_1|=16$ المحدد الثاني $|A_2|=15.2$

$$Y=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{16}{0.2}=80$$

$$C=\frac{|A_2|}{|A_1|}=\frac{15.2}{0.2}=76$$

مثال (2.20): ليكن الأنموذج الخطي الاتي:

$$Y=C+I+G$$
$$C=10+0.75y$$
$$I=40$$
$$G=10$$

المطلوب

جد Y,C بالطريقة العادية وبطريقة المصفوفات

الحل

الطريقة الاولى:

$$Y=10+0.75Y+40+10$$
$$0.25Y=60$$
$$Y=\frac{60}{0.25}=240$$
$$C=10+0.75(240)=10+180=190$$

الطريقة الثانية:

$$Y=C+40+10$$
$$C=10+0.75Y$$
$$Y-C=50$$
$$-0.75Y+C=10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{60}{1-0.75} = \frac{60}{0.25} = 240$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ -0.75 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10+37.5}{0.25} = 190$$

مثال (2.21): لو اعطيت المعلومات الاتية:

$G=20\ ,\ I=35,\ C=0.9Y_d+70\ ,\ T=0.2Y+25$

المطلوب: أوجد المستوى التوازني للدخل القومي.

الحل

$$Y=C+I+G$$
$$Y=C+35+20=C+55$$
$$Y_d=Y-(0.2Y+25)$$
$$Y_d=Y-0.2Y-25$$
$$Y_d=0.8Y-25$$
$$C=0.9(0.8Y-25)+70$$
$$C=0.72Y-22.5+70$$
$$C=0.72Y+47.5$$
$$Y=C+55$$
$$Y=0.72Y+47.5+55$$
$$Y=0.72Y+102.5$$
$$Y-0.72Y=102.5$$
$$0.28Y=102.5$$
$$Y=\frac{102.5}{0.28}=366$$

اذن المستوى التوازني للدخل القومي=366

اسئلة الفصل الثاني

س1:-اذا كانت معادلة الطلب والعرض على سلعة ما هي كما يأتي:

$$Q_d=-1.5P+14$$
$$Q_s=4P-5$$

جد سعر وكمية التوازن لهذه السلعة

س2:- اعطيت أنموذج السوق الاتي:-

$$Q_d = 24 - 2P$$
$$Q_s = -5 + 7P$$

المطلوب

1- جد سعر وكمية التوازن بطريق الحذف او الاختزال

2- جد سعر وكمية التوازن بالطريقة المباشرة

س3:- احسب كمية وسعر التوازن لأنموذج السوق الاتي:

$$Q_s + 32 - 7P = 0$$
$$Q_d - 128 - 9P = 0$$

س4:- في أنموذج السوق الاتي:-

$$Q_d = 27 - 4P$$
$$Q_s = -3 + 2P$$

احسب كلا من سعر التوازن وكمية التوازن بعد فرض ضريبة مقدارها (3) وبين مقدار الارتفاع في السعر وهل هو اقل من مقدار الضريبة او لا.

س5: لديك أنموذج السوق الاتي:

$$Q_d = 4 - P^2$$
$$Q_s = 4P - 1$$

جد سعر وكمية التوازن بيانيا.

س6:- جد سعري وكميتي التوازن في سوقي سلعتين اذا كانت دالتا العرض والطلب للسلعتين هما كالاتي:

$$Q_{d1} = -2P_1 + P_2 + 10$$
$$Q_{s1} = 3P_1 - 2$$

$$Q_{d2} = P_1 - P_2 + 15$$
$$Q_{s2} = 2P_1 - 1$$

س7: جد الحل التوازني لكل من النماذج الاتية:

$$a)\ Q_d = 3 - P^2 \qquad b)\ Q_d = 8 - P^2$$
$$Q_s = 6P - 4 \qquad Q_s = P^2 - 2$$

س8:- اذا كانت دالة طلب السوق : $P + Q^2 + Q = 11$ **ودالة عرض السوق :** $2P - 2Q^2 - Q - 4 = 0$. احسب السعر والكمية التوازنيتين في ذلك السوق.

س9:-اذا تحددت دوال الطلب والعرض لثلاث سلع ، احسب الاسعار والكميات التوازنية لهذا الأنموذج لسوق السلع الثلاث.

$$Q_{d1} = 45 - 2P_1 + 2P_2 - 2P_3$$
$$Q_{d2} = 16 + 2P_1 - P_2 + 2P_3$$
$$Q_{d3} = 30 - P_1 + 2P_2 - P_3$$
$$Q_{s1} = -5 + 2P_1$$
$$Q_{s2} = -4 + 2P_2$$
$$Q_{s3} = -5 + P_3$$

س10:- اذا توفرت لديك المعلومات الاتية حول اقتصاد مغلق:

$$C = 100 + 0.8Y$$
$$I = 1200 - 30r$$

إذ يمثل r سعر الفائدة

ومعادلة الطلب على النقود لاغراض المعاملات والحيطة: $M_{d1} = 0.25Y$

والطلب على النقود لاغراض المضاربة: $M_{d2} = 1375 - 25r$

وعرض النقود: $M_s = 250$

المطلوب// جد القيم التوازنية لكل من Y و r

س11:- اذا علمت ان دالة الطلب والعرض لاحدى السلع كما ياتي:-

$$Q_d = 100 - 0.6P$$
$$Q_s = -30 + 2P$$

المطلوب

1- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين.
2- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين بعد فرض ضريبة نوعية على الانتاج مقدارها 2 وحدة على كل وحدة منتجة.
3- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين بعد منح اعانة على الانتاج بواقع وحدتين نقديتين على كل وحدة.
4- ايجاد السعر والكمية التوازنيتين بعد فرض ضريبة قيمية على الانتاج بنسبة 5% من سعر البيع P

س12:- توفرت دوال الطلب والعرض لسلعتين مستقلتين:

$$Q_{d1} = 40 - 5P_1 - P_2$$
$$Q_{d2} = 50 - 2P_1 - 4P_2$$
$$Q_{S1} = -3 + 4P_1$$
$$Q_{S2} = -7 + 3P_2$$

المطلوب

1- جد P, Q
2- بين العلاقة بين السلعتين هل هي تكاملية أم تبادلية؟

س13:- لديك دالة الطلب والعرض لسلعة معينة:

$$P = -5Q_d + 80$$
$$P = 2Q_s + 10$$

المطلوب

احسب سعر وكمية التوازن:

1- بيانيا

2- جبريا

س14:- توافرت المعلومات عن دوال الطلب والعرض لثلاث سلع

$$Q_{d1} = 15 - P_1 + 2P_2 + P_3$$
$$Q_{d2} = 9 + P_1 - P_2 - P_3$$
$$Q_{d3} = 8 + 2P_1 - P_2 - 4P_3$$
$$Q_{S1} = -7 + P_1$$
$$Q_{S2} = -4 + 4P_2$$
$$Q_{S3} = -5 + 2P_3$$

مصادر الفصل الثاني

1- اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

2- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة الدكتور اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . 1991.

3- حسين علي بخيت- مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.

4- الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.

5- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. 2010.

6- Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. 1984.

7- Henderson James M & Quandt Richard E, Microeconomc theory A mathematical approach , 3rd ed, 1980.

8- Samuelson P.A , Foundation of economic analysis , Cambridge Mass, Harvard university Press.1948.