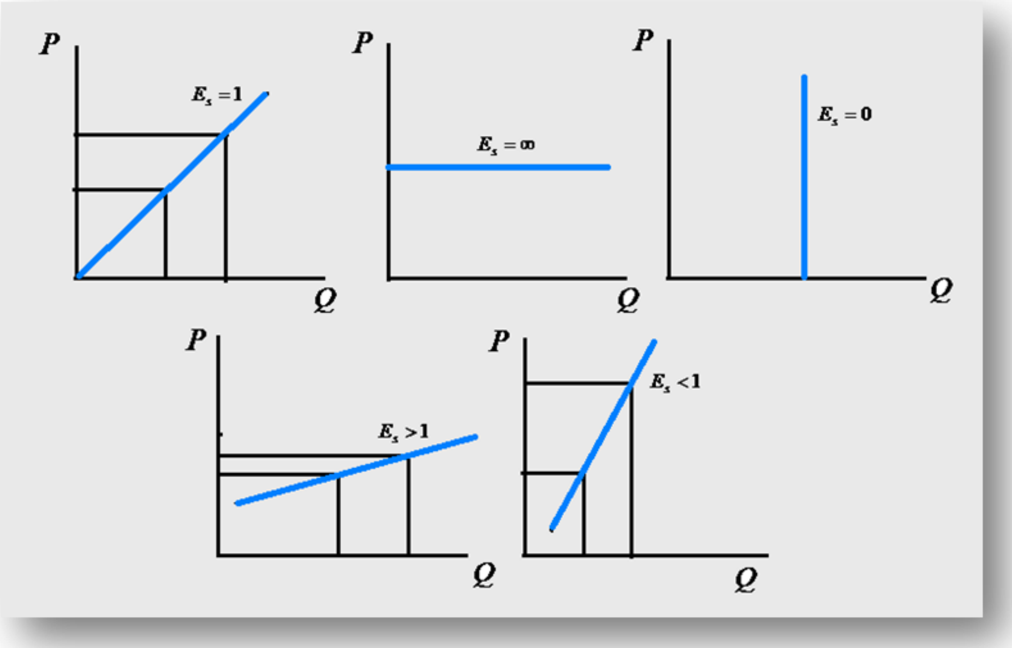


شكل (21) الحالات المختلفة لمرونة العرض

مثال(3.9): اعطيت دالة العرض الاتية:-

$$P = 10 + \sqrt{Q}$$

المطلوب

احسب مرونة العرض السعرية في الحالات الاتية:

1- بين القيمتين $Q = 100$ **و** $Q = 105$

2- عند النقطة $Q = 100$

الحل

عند القيمتين $Q = 100$ **و** $Q = 105$ **نحسب قيمتين للسعر وكما ياتي:-**

$$P_1 = 10 + \sqrt{100} = 20 \ and \ P_2 = 10 + \sqrt{105} = 20.247$$

وعليه:-

$$\Delta P = 20.247 - 20 = 0.247, \qquad \Delta Q = 105 - 100 = 5$$

$$P = \frac{1}{2}(20 + 20.247) = 20.123, \quad Q = \frac{1}{2}(100 + 105) = 102.5$$

اذن قيمة المرونة هي:-

$$E = \frac{P}{Q} \times \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{20.123}{102.5} \times \frac{5}{0.247} = 3.97$$

2- المرونة عند النقطة $Q = 100$

الحل

$$P = 10 + Q^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{2} Q^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{Q}}$$

$$\therefore \frac{dQ}{dP} = 2\sqrt{Q}$$

وعند النقطة ($Q=100$) نحصل على:-

$$\frac{dQ}{dP} = 2\sqrt{100} = 20$$

اذن المرونة عند ($Q=100$)

$$E = \frac{P}{Q} \times \frac{dQ}{dP} = \frac{20}{100} \times 20 = 4$$

نلاحظ من الحل ان قيمة المرونة في الحالتين قريبة جدا.

3- مرونة الطلب الدخلية *Income Elasticity of Demand*

تقيس مرونة الطلب الدخلية درجة استجابة الكميات المطلوبة او الانفاق لتغيرات الدخل ، ورياضيا يمكن التعبير عنها بالاتي:-

مرونة الطلب الدخلية = التغير النسبي في الكميات المطلوبة/ التغير النسبي في الدخل

$$E_y = \frac{\%\Delta Q}{\%\Delta Y}$$

$$E_y = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta Y / Y} = \frac{\Delta Q}{\Delta Y} * \frac{Y}{Q}$$

وكما هو الحال بمرونة الطلب والعرض ، أي بافتراض ثبات العومل الاخرى المؤثرة في الطلب فيمكن كتابة معادلة مرونة الطلب الدخلية كما ياتي:-

$$E_y = \frac{\partial Q}{\partial Y} * \frac{Y}{Q}$$

وتكون مرونة الطلب الدخلية موجبة في اكثر الاحوال لان قيمة الميل موجبة وهذا في حالة السلع الاعتيادية ، في حين تكون سالبة في حالة سلع جيفن.

4- مرونة الطلب التقاطعية *Cross Elasticity of Demand*

يعبر عنها بانها الاستجابة النسبية للكميات المطلوبة من سلعة ما للتغيرات في اسعار السلع الاخرى سواء البديلة او المكملة ، أي :

مرونة الطلب التقاطعية= التغير النسبي في الكمية المطلوبة/ التغير النسبي في اسعار السلع

$$E_{cross} = \frac{\%\Delta Q_x}{\%P_r}$$

$$E_{cross} = \frac{\Delta Q_x / Q_x}{\Delta P_r / P_r} \Rightarrow \frac{\Delta Q_x}{\Delta P_r} * \frac{P_r}{Q_x}$$

فاذا كانت السلعة r سلعة بديلة للسلعة x فان الميل $\frac{\Delta Q_x}{\Delta P_r}$ يكون موجبا ومن ثم تكون اشارة المرونة موجبة.

اما اذا كانت السلعة r سلعة مكملة للسلعة x فان الميل $\frac{\Delta Q_x}{\Delta P_r}$ يكون سالبا وبالتاي تكون اشارة المرونة سالبة.

مثال (3.10): توفرت لديك المعلومات عن دالة الطلب على سلعة الدهن النباتي إذ اتخذت دالة الطلب الشكل الاتي:-

$$Q_{doil} = 10 - 0.5P_1 + 0.8P_2 + 0.1Y$$

إذ أن:-

$P_1 =$ **سعر سلعة الدهن النباتي**

$P_2 =$ **سعر سلعة الدهن الحيواني(كسلعة بديلة)**

$Y =$ **الدخل**

المطلوب

1- احسب مرونة الطلب السعرية عندما يكون:

أ- $P_1 = 6$ ‏ ‏ $P_2 = 15$ ‏ ‏ $Y = 100$

2- احسب مرونة الطلب التقاطعية عندما يكون :

أ- $P_1 = 4$ ‏ ‏ $P_2 = 10$ ‏ ‏ $Y = 120$

3- احسب مرونة الطلب الدخلية عندما يكون:

أ- $P_1 = 3$ ‏ ‏ $P_2 = 6$ ‏ ‏ $Y = 200$

الحل

1- حساب مرونة الطلب السعرية : وهنا يتم التعويض في دالة الطلب بقيم $P_2 = 15$ و $Y = 100$ دون قيمة P_1 وكما ياتي:-

$$Q_d = 10 - 0.5P_1 + 0.8(15) + 0.1(100)$$

$$Q_d = 10 - 0.5P_1 + 12 + 10$$

$$Q_d = (10 + 12 + 10) - 0.5P_1$$

$$Q_d = 32 - 0.5P_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وباخذ المشتقة الاولى للدالة نستخرج الميل :

$$\frac{\partial Q_d}{\partial P_1} = -0.5$$

وبالتعويض عن قيمة $P_1 = 6$ في دالة الطلب في معادلة (1) نحصل على ما ياتي:-

$$Q_d = 32 - 0.5(6)$$

$$Q_d = 29$$

وبتطبيق قانون مرونة الطلب السعرية :

$$E_d = \frac{\partial Q_d}{\partial P_1} * \frac{P_1}{Q_d}$$
$$= -0.5\left(\frac{6}{29}\right) = -0.1$$

∴ مرونة الطلب السعرية = **-0.1**

2- حساب مرونة الطلب التقاطعية: هنا سيتم التعويض عن قيمتي $P_1 = 4$ و $Y = 120$ في دالة الطلب دون قيمة P_2 وكما ياتي:-

$$Q_d = 10 - 0.5(4) + 0.8P_2 + 0.1(120)$$
$$Q_d = (10 - 2 + 12) + 0.8P_2$$
$$Q_d = 20 + 0.8P_2$$
$$\frac{\partial Q_d}{\partial P_2} = 0.8$$
$$Q_d = 20 + 0.8(10) = 28$$
$$E_{cross} = \frac{\partial Q_d}{\partial P_2} * \frac{P_2}{Q_d} \Rightarrow 0.8\left(\frac{10}{28}\right)$$
$$E_{cross} = 0.29$$

∴ مرونة الطلب التقاطعية = **0.29**

3- حساب مرونة الطلب الدخلية : هنا يتم التعويض بقيمتي $P_1 = 3$ و $P_2 = 6$ في دالة الطلب من دون قيمة Y وكما ياتي:

$$Q_d = 10 - 0.5(3) + 0.8(6) + 0.1Y$$
$$Q_d = (10 - 1.5 + 4.8) + 0.1Y$$
$$Q_d = 13.3 + 0.1Y$$
$$Q_d = 13.3 + 0.1(200)$$
$$Q_d = 13.3 + 20 = 33.3$$
$$\frac{\partial Q_d}{\partial Y} = 0.1$$
$$E_y = \frac{\partial Q_d}{\partial Y} * \frac{Y}{Q_d} = 0.1\left(\frac{200}{33.3}\right)$$
$$E_y = 0.6$$

∴ مرونة الطلب الدخلية = **0.6**

اذن قيم المرونات الثلاث هي كالاتي:-

1- مرونة الطلب السعرية E_d = -0.1

2- مرونة الطلب التقاطعية E_{cross} = 0.29

3- مرونة الطلب الدخلية E_y = 0.6

اسئلة الفصل الثالث

س1:- اثبت ان مرونة الطلب السعرية للدالة الاتية $= b$

$$Q_d = aP^b$$

س2:- احسب مرونة الطلب و العرض السعرية للدوال الاتية عندما $P=8$ **و** $P=6$

-1 $P = 40 - 0.5Q$

-2 $Q = -4 + 0.75P$

-3 $Q - P + 2 = 0$

-4 $2P + 0.25Q = 40$

-5 $P = 20 - 2Q$

-6 $4Q + 4P = 64$

س3:-اذا امكن تمثيل جدول الطلب لسلعة ما بالمعادلة :

$$Q_1 = 20 - 2P_1 - 0.5P_2 + 0.01Y$$

إذ أن :- $Q_1 =$ **كمية السلعة ،** $P_1 =$ **سعر السلعة ،** $P_2 =$ **سعر سلعة اخرى ،** $Y =$ **الدخل**

عبر عن :

-1 $Q_1 = f(P_1)$ **عندما** $P_2 = 10$ **و** $Y = 500$ **، ثم احسب المرونة السعرية عندما** $P_1 = 5$

-2 $Q_1 = f(P_2)$ **عندما** $P_1 = 10$ **و** $Y = 200$ **، ثم احسب المرونة التقاطعية عندما** $P_2 = 10$

-3 $Q_1 = f(Y)$ **عندما** $P_1 = 5$ **و** $P_2 = 10$ **، ثم احسب المرونة الدخلية عندما** $Y = 100$

س4:- اذا كانت دالة الطلب والعرض على سلعة زراعية كالاتي:-

$$Q_d = 50 - 0.4P$$

$$Q_s = -16 + 0.6P$$

استخرج مرونة الطلب والعرض عند نقطتي التوازن.

س5:-اذا كانت دالة الطلب :

$$P = 100Q^{-\frac{1}{2}}$$

المطلوب

1- مرونة الطلب السعرية عندما يكون السعر = 25

2- مقدار الطلب الاستهلاكي عندما يكون السعر =25

س6:- اذا كانت دالة الاستهلاك تعطى حسب المعادلة:

$$C=0.06Y^2-Y+100$$

المطلوب

احسب MPC **و** MPS **عندما** $Y=15$

س7:- اذا كانت دالة الاستهلاك تعطى بالمعادلة الاتية:

$$C=25+6\sqrt{Y}$$

المطلوب

احسب MPC **و** MPS **عندما** $Y=16$

س8:- اذا كانت دالة الطلب على البضائع المصدرة من بلد ما الى بلد اجنبي تعطى كالاتي:-

$$Q=\sqrt{Y_f}+\frac{20}{P^2}$$

إذ أن : Y_f **: دخل المستهلك في البلد الاجنبي**

P **: سعر السلعة المصدرة للبلد الاجنبي**

المطلوب

احسب المرونة السعرية والمرونة الدخلية عندما $Y_f=360$ **و** $P=4$

س9:-اذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة A **تعطى بالشكل الاتي:**

$$Q_A=1200-200P_A+300P_B+0.4Y$$

اذا كانت : $P_A=8$ **و** $P_B=10$ **و** $Y=120$

المطلوب//

1- مرونة الطلب السعرية E_A

2- مرونة الطلب التقاطعية $E_{crossAB}$

3- مرونة الطلب الدخلية E_Y

س10:-اذا كانت دالة العرض هي:-

$$Q=150-5P+0.1P^2$$

احسب مرونة العرض السعرية في الحالات الاتية:-

1- بين النقطتين $P=9$ **و** $P=11$

2- عند النقطة $P=10$

س11:- اعطيت دالة الطلب الاتية:-

$$P=-Q^2-10Q+150$$

1-احسب مرونة الطلب السعرية عندما $Q=4$

2- احسب التغير النسبي في السعر لزيادة الكمية المطلوبة بنسبة 10%

مصادر الفصل الثالث

1- اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على الشبكة الدولية المعلوماتية.
2 - ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة الدكتور اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . 1991.
3- حسين علي بخيت - مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.
4- الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور الشبكة الدولية المعلوماتية.
5- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. 2010.
6- الوتار، ابي محمد صبري واثيل عبد الجبار الجومرد ، مدخل الى الاقتصاد الرياضي، دار الكتب للطباعة والنشر ، الموصل، 1993.

7-Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. 1984.
8-G.Tian. Mathematical Economics (lecture notes). Published on line www.google.com.
9-Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.

الفصل الرابع

الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد

Optimization of Functions of One variable

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:-

- **الدوال المتزايدة والمتناقصة**

- القيم القصوى
- تطبيقات الامثلية الاقتصادية
- مبدا تساوي التكاليف الحدية والايرادات الحدية لتحقيق الامثلية

الفصل الرابع
الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد
Optimization of Functions of One variable

إن الهدف الاساس في بناء أي أنموذج اقتصادي هو تحديد الحلول المثلى للأنموذج المدروس ، إذ ان تحقيق الهدف الرئيس للمنشأة وهو رفع القيمة السوقية للمنشأة في السوق لا يتحقق الا عن طريق تعظيم الارباح وخفض التكاليف، وتقسم الامثلية الى حالتين هما ، التعظيم *Maximization* ، والتدنية *Minimization*. وسنتناول في هذا الفصل طريقة الوصول الى الامثلية في النماذج الاقتصادية عن طريق تحديد القيم القصوى بشقيها (العظمى والدنيا) للدوال موضوع الأنموذج ، مثل دالة التكاليف الكلية والارباح الكلية ودالة الانتاج وغيرها.

وقبل الدخول في تفاصيل الامثلية لابد من استعراض بعض المفاهيم الرياضية ذات العلاقة بموضوع الامثلية والتي تساعد على فهم الموضوع.

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة ***Increasing and Decreasing functions***

نقول ان الدالة $y=f(x)$ هي دالة متزايدة في مدة محددة من الاعداد اذا كانت قيم الدالة y تتزايد مع تزايد قيم x التي تنتمي الى هذه الفترة ، أي ان:-

$$f(x_1)\leq f(x_2)$$

وذلك لجميع قيم x ضمن المدة بحيث ان $x_1 \leq x_2$.

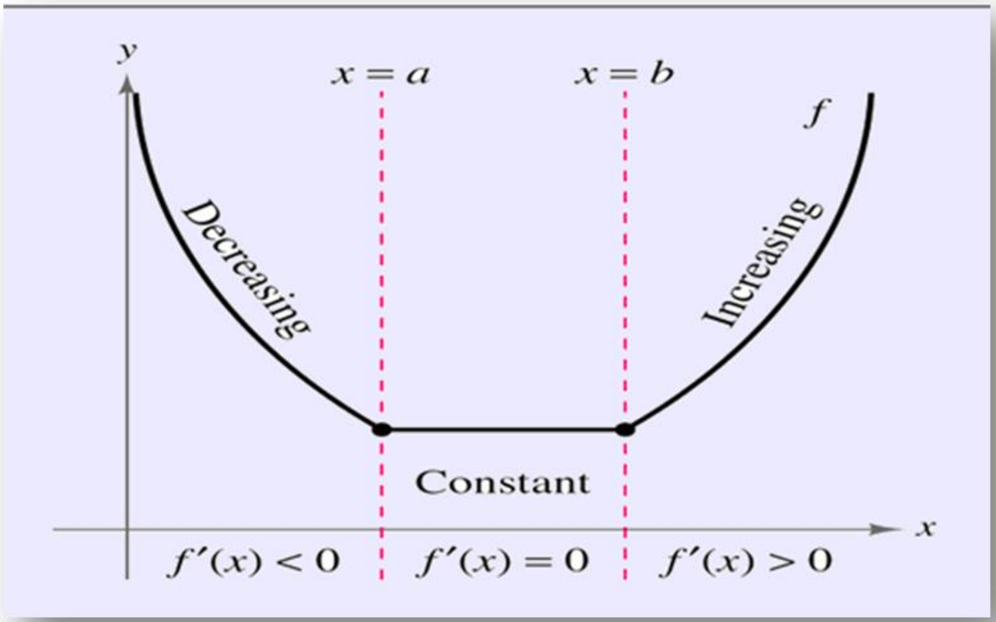
تجدر الاشارة الى ان خير مثال على الدوال المتزايدة هي دالة العرض اذ ان الكمية المعروضة تزداد بزيادة السعر كما هو معلوم.

نقول ان الدالة $y=f(x)$ هي دالة متناقصة في مدة محددة من الاعداد اذا كانت قيم الدالة y تتناقص مع تزايد قيم x التي تنتمي الى هذه المدة ، أي ان:-

$$f(x_1)\geq f(x_2)$$

وذلك لجميع قيم x ضمن المدة بحيث ان $x_1 \leq x_2$. وتمثل دالة الطلب واحدة من الدوال المتناقصة حيث تتناقص الكمية المطلوبة بزيادة السعر.

والشكل البياني الاتي يوضح الدوال المتناقصة والمتزايدة :



شكل (22) الدوال المتناقصة والمتزايدة والثابتة

مثال(4.1):اختبر الدوال الاتية من حيث التزايد والتناقص

$$1)Q_s = 40 + 2P \quad 2)Q_d = 25 - 3P$$

الحل

نعوض مجموعة من الاعداد العشوائية في الدالتين ونرى كيف تتجه قيم الدالتين :

1) $Q_s = 40 + 2P$

P	$Q_s = 40 + 2P$
1	$Q_s = 40 + 2(1) = 42$
2	$Q_s = 40 + 2(2) = 44$
3	$Q_s = 40 + 2(3) = 46$

من ملاحظة قيم الجدول نجد انه بزيادة بقيم P زادت قيم Q_s وهذا يعني ان الدالة متزايدة

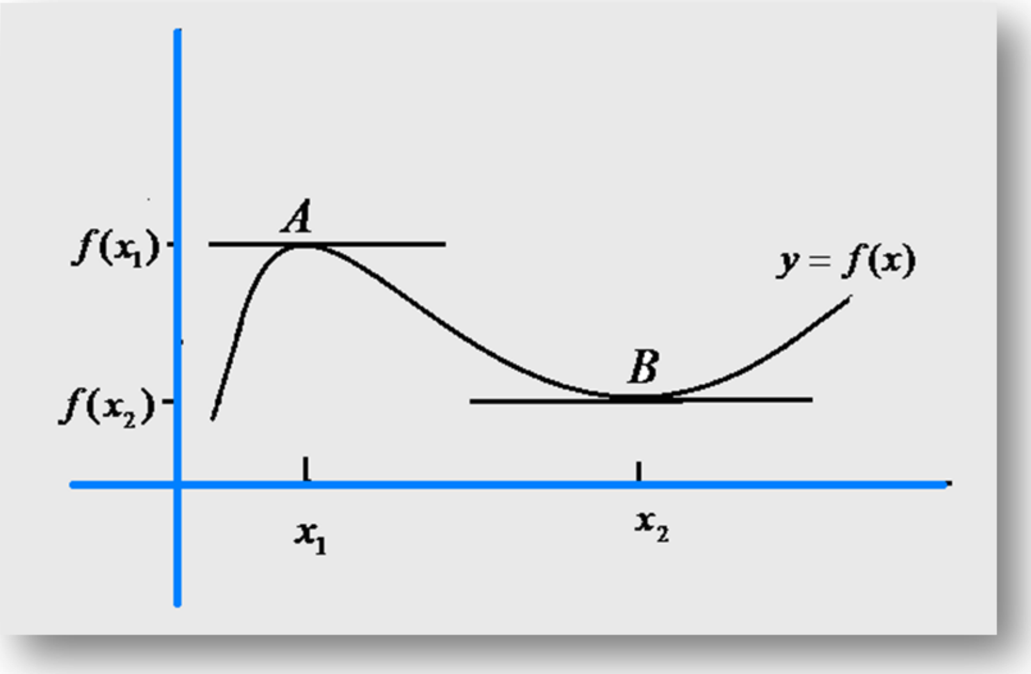
2) $Q_d = 25 - 3P$

P	$Q_d = 25 - 3P$
1	$Q_d = 25 - 3(1) = 22$
2	$Q_d = 25 - 3(2) = 19$
3	$Q_d = 25 - 3(3) = 16$

من ملاحظة قيم الجدول نجد انه بزيادة قيم P نقصت قيم Q_d و هذا يعني ان الدالة متناقصة

القيم القصوى Extreme Values:

تشير القيم القصوى والتي تشمل القيم العظمى والصغرى الى الاعداد التي تمثل اكبر قيمة تحققها الدالة وكذلك اصغر قيمة ضمن المدة المدروسة ، ويمكن تمثيل القيم القصوى للدالة بالشكل الاتي:-

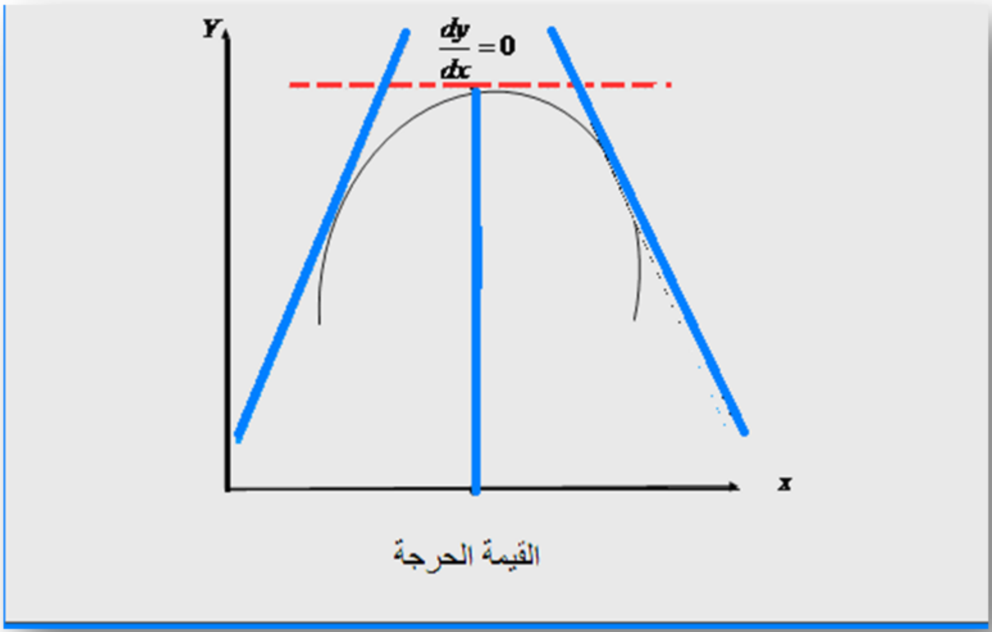


شكل (23) القيم القصوى للدالة $y=f(x)$

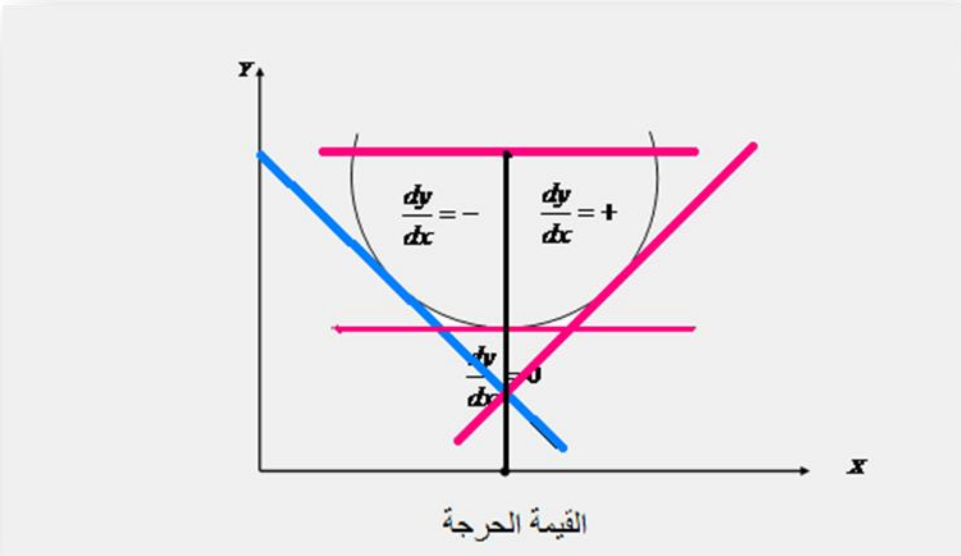
نلاحظ من الشكل (23) ان النقطة A تمثل قيمة عظمى للدالة $f(x)$ اذا ماقورنت بقيم الدالة التي حولها ، كما نلاحظ ان منحنى الدالة يبقى متجها الى الاعلى الى ان يصل الى النقطة A ثم بعد ذلك يتجه منحدرا الى الاسفل ، وتسمى النقطة A بالعظمى المحلية *Local maximum* او العظمى النسبية *Relative maximum* ، وان الدالة $y=f(x)$ تحقق قيمة نسبية عند $x=x_1$ وهذه القيمة العظمى هي $f(x_1)$

اما فيما يتعلق بالنقطة B فتمثل قيمة صغرى للدالة $f(x)$ اذا ماقورنت بقيم الدالة التي حولها ، إذ نلاحظ ان منحنى الدالة ينحدر الى الاسفل الى ان يصل الى النقطة B ثم يتجه صعودا بعد ذلك. وتسمى النقطة B بالصغرى المحلية *Local Minimum* او الصغرى النسبية *Relative Minimum* ، ونقول ان الدالة $y=f(x)$ تحقق قيمة صغرى نسبية عند $x=x_2$ و هذه القيمة هي $f(x_2)$.

وبالرجوع الى الشكل (23) نلاحظ ان المماس الذي يمر بالنقطة A و B مواز للمحور الافقي والذي يعني ان ميل المماسين هو صفر ، وحيث ان قيمة المشتقة الاولى عند نقطة تشير الى ميل المماس عند تلك النقطة فإن $f'(x_1)=0$ او $\frac{\partial y}{\partial x_1}=0$ ، وكذلك الحال بالنسبة الى $f'(x_2)=0$ او $\frac{\partial y}{\partial x_2}=0$ ، ويطلق على هذه النقاط بالنقاط الحرجة *Critical Points* وكما موضحة بالشكلين البيانيين الاتيين (24) و (25).



شكل (24) القيمة الحرجة في حالة التعظيم



شكل (25) القيمة الحرجة في حالة التدنية

وخلاصة القول انه للحصول على القيم القصوى ينبغي اولا ان نجد جذور المشتقة الاولى ثم نحدد فيما اذا كانت القيم عظمى ام صغرى ، ويتم اختبار فيما اذا كانت النقطة صغرى او عظمى بالاعتماد على الاختبار الاتي:

ليكن $x=a$ هو احد جذور المشتقة الاولى للدلة $y=f(x)$ فانه:-

- اذا كانت $f''(a)<0$ او $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}<0$ فتوجد قيمة عظمى عند $x=a$

- اذا كانت $f''(a)>0$ او $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}>0$ فتوجد قيمة صغرى عند $x=a$

ويمكن تلخيص خطوات ايجاد القيم القصوى للدالة $y = f(x)$ بما يأتي:-

1. نجد المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ ثم نجد جذورها.
2. نجد المشتقة الثانية للدالة ونعوض جذور المشتقة الاولى التي تم ايجادها بالخطوة السابقة وإذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند التعويض سالبة فتكون هنالك قيمة عظمى، في حين اذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند التعويض موجبة فتكون هناك قيمة صغرى. أما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية عند التعويض صفرا فيكون الاختبار قد فشل في اعطاء معلومات عن القيم القصوى. ويسمى هذا الاختبار باختبار المشتقة الثانية *Second Derivative test*

مثال (4.2): اوجد القيم القصوى للدالة :

$$y = f(x) = -3x^2 + 6x + 4$$

الحل

نطبق المشتقة الاولى للدالة ثم نجد جذورها كما ياتي:-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

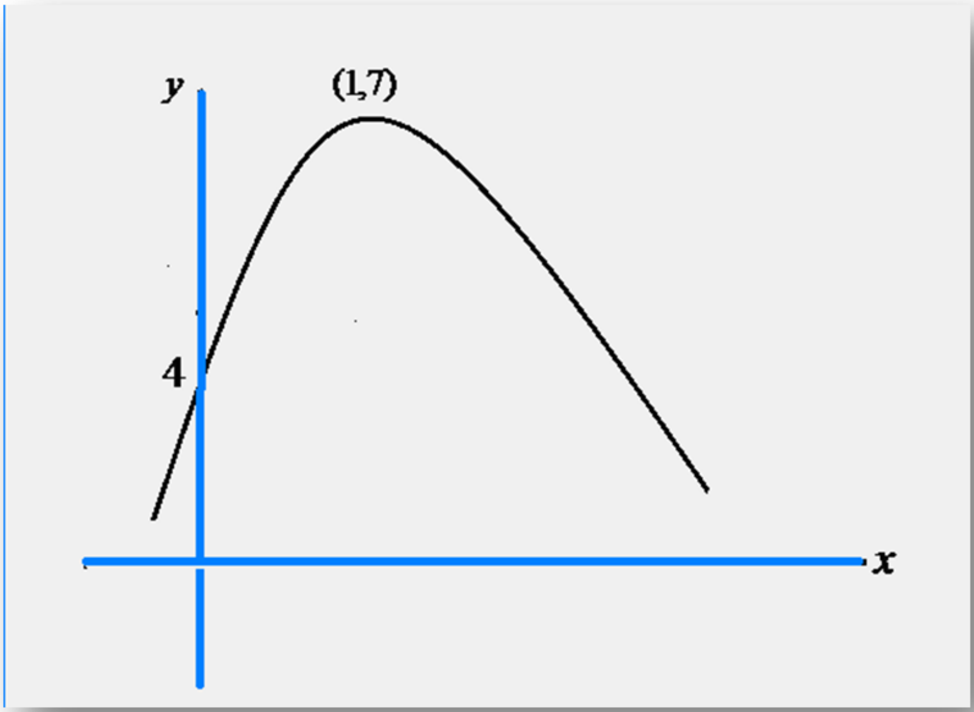
نطبق اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى كما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -6 < 0$$

هنا نجد ان المشتقة الثانية سالبة وهذا يعني وجود قيمة عظمى عند $x = 1$ وهذه القيمة هي:

$$y = f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 4 = 7$$

وهذا يعني ان اكبر قيمة ستحققها الدالة هي 7 وكما في الشكل الاتي:-



شكل (26) القيمة العظمى للدالة $y = f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

مثال(4.3): اوجد القيم القصوى للدالة :

$$y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5$$

الحل

نجد المشتقة الاولى للدالة ثم نجد جذورها كما ياتي:-

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 3x - 18 = 0$$

والدالة المذكورة دالة تربيعية نجد جذورها عن طريق القانون العام إذ أن :-

$$c = -18 \ , \quad b = -3 \quad , \quad a = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(3)(-18)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{3 \pm 15}{6}$$

$$x = 3 \ \ or \ x = -2$$

نطبق الان اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى وكما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x) = 6x - 3$$

نعوض الان $x = 3$ **في دالة المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى كما ياتي:-**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(3) = 6(3) - 3 = 15 > 0$$

وهذا يعني وجود قيمة صغرى عند $x = 3$ **وهذه القيمة هي :-**

$$y = f(3) = (3)^3 - \frac{3}{2}(3)^2 - 18(3) + 5 = -35.5$$

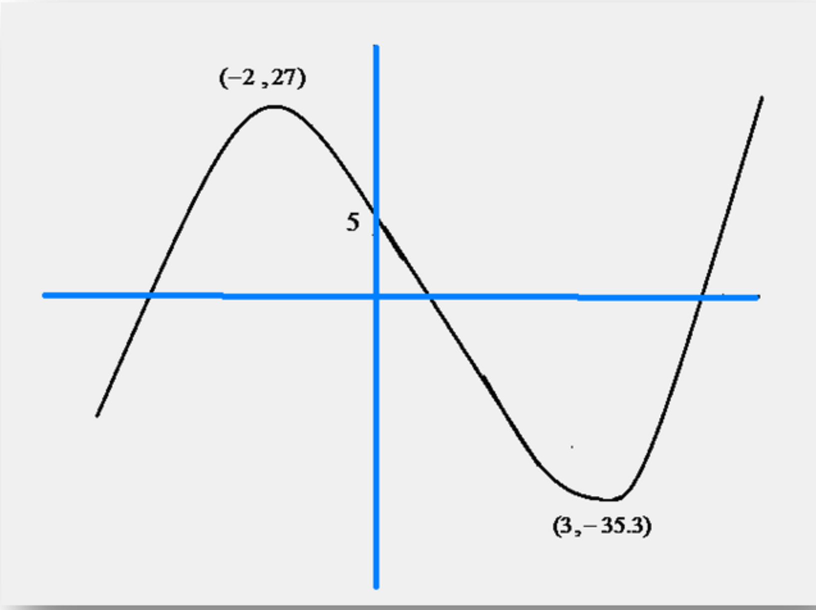
نعوض الان $x = -2$ في دالة المشتقة الثانية لتحديد نوع القيمة القصوى كما ياتي:-

$$f''(-2) = 6(-2) - 3 = -15 < 0$$

وهذا يعني وجود قيمة عظمى عند $x = -2$ وهذه القيمة هي:-

$$y = f(-2) = (-2)^3 - \frac{3}{2}(-2)^2 - 18(-2) + 5 = 27$$

ويمكن تمثيل الدالة بيانيا كما في الشكل الاتي:-



شكل (27) تمثيل الدالة $y = f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 5$ بيانيا

مثال(4.4): جد القيم القصوى للدالة الآتية ومثلها بيانياً.

$$y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$

الحل

نستخرج المشتقة الاولى والثانية للدالة

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

نحتاج الى حل المشتقة الاولى للدالة لانها معادلة من الدرجة الثانية :

$$6x^2 + 6x - 12 \qquad \div 6$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1^2 - 4(1)(-2))}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2, 1$$

توجد قيمتان من الحل لـ x هما 2- و 1 ،

ولتصنيف النقطتين نحتاج الى ايجاد $f''(-2)$ و $f''(1)$ أي ان:-