$$f''(-2)=12(-2)+6=-18$$

وهذه القيمة المستخرجة قيمة سالبة عليه توجد نقطة نهاية عظمى عند $x=-2$ وعندما $x=-2$

$$y=2(-2)^3+3(-2)^2-12(-2)+4=24$$

وعند نقطة النهاية العظمى نجد الاحداثية الاتية (-2,24) .

لتصنيف النقطة الثانية $f''(1)$:-

$$f''(1)=12(1)+6=18$$

وهذه النقطة موجبة أي توجد نقطة نهاية دنيا عند $x=1$ وعندما $x=1$ نحصل على:-

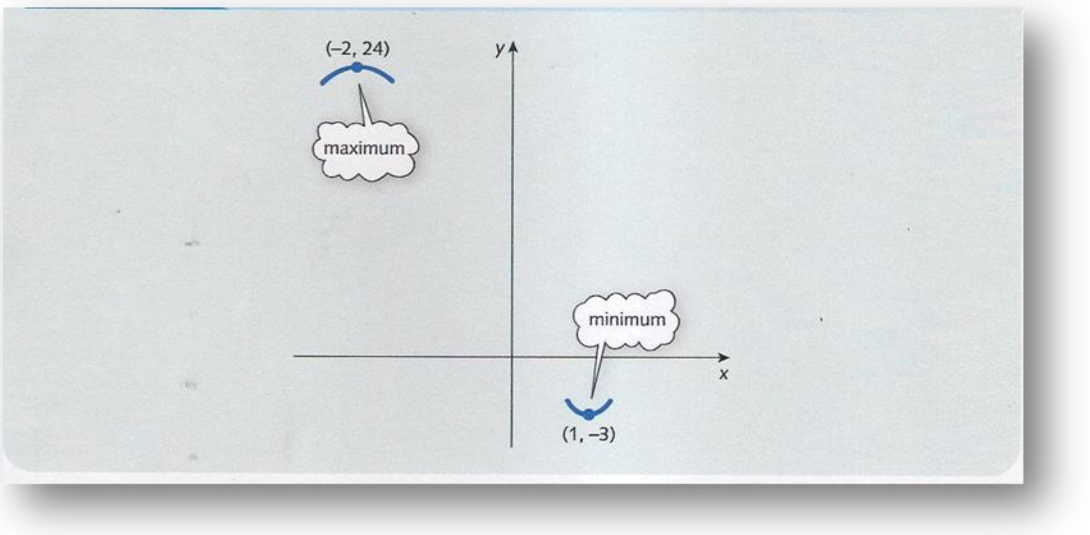
$$y=2(1)^3+3(1)^2-12(1)+4=-3$$

وعليه عند نقطة النهاية الدنيا نجد الاحداثية (1 ,-3)

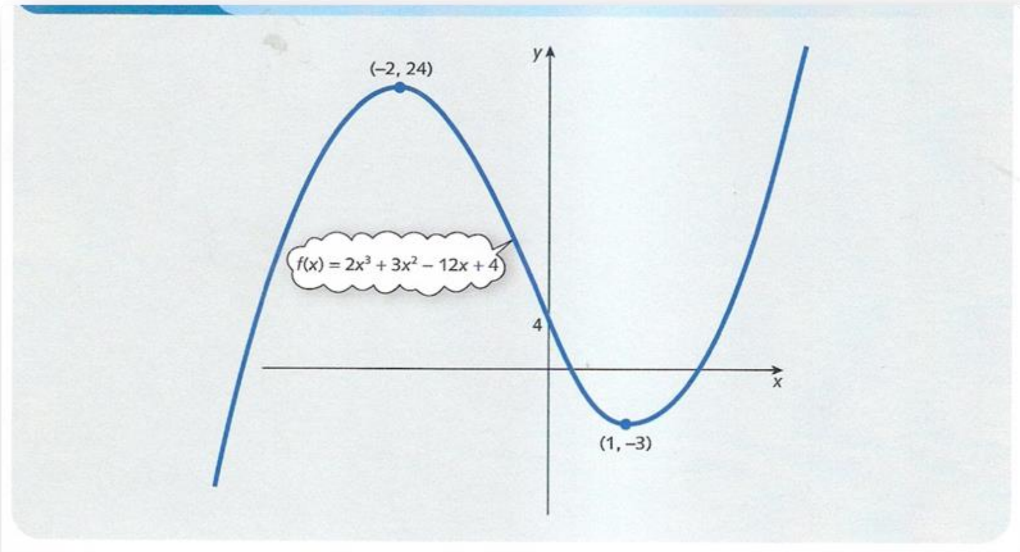
ولتوضيح الصورة بشكل عام يمكن توقيع بعض النقاط لقيم x والمناظرة لها قيم y وكما موضح بالجدول الاتي:-

x	-10	0	10
y	-1816	4	2184

ويمكن توضيح الدالة بيانيا من خلال الاشكال البيانية الاتية:-



شكل(28) النقاط العظمى والدنيا للمثال (4.4)



شكل (29) التمثيل البياني للدالة $y = f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$

تطبيقات الامثلية الاقتصادية *Economical Application of Optimization*

اولا- دالة الايراد الكلي *Total Revenue Function*

مثال (4.5): جد حجم الانتاج الامثل الذي يحقق اعلى ايراد ممكن اذا علمت ان دالة الايراد الكلي هي:-

$$TR = -2Q^2 + 24Q$$

الحل

لايجاد قيمة Q (حجم الانتاج) التي تحقق عندها دالة الايراد الكلي قيمة عظمى ينبغي ايجاد المشتقة الاولة لدالة الايراد الكلي ثم نجد جذور المشتقة وكما ياتي:

$$\frac{\partial TR}{\partial Q} = -4Q + 24 = 0 \Rightarrow Q = \frac{24}{4} = 6$$

والان نجد المشتقة الثانية لدالة الايراد الكلي ونتاكد من كون القيمة التي تتحقق عند $Q = 6$ هي قيمة عظمى:

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q^2} = -4 < 0$$

من النتيجة يتبين ان المشتقة الثانية سالبة ويعني وجود قيمة عظمى عند $Q = 6$. اما قيمة الايراد الكلي عند هذه الكمية من الانتاج فهي:

$$TR = -2(6)^2 + 24(6) = 72$$

ولو جربنا أي قيمة اخرى غير $Q = 6$ ولتكن 5 فتكون قيمة الايراد الكلي عند 5 هي:

$$TR = -2(5)^2 + 24(5) = 70$$

وهذه القيمة اقل من 72

وفي حال اختيار قيمة اكبر من 6 ولتكن القيمة 7 ستكون قيمة الايراد الكلي عند القيمة 7 هي:

$$TR = -2(7)^2 + 24(7) = 70$$

وهذه القيمة كذلك اقل من 72

عليه تكون قيمة الانتاج $Q = 6$ تحقق اعلى قيمة لدالة الايراد الكلي.

ثانيا- دالة التكاليف الكلية *Total Cost Function*

مثال(4.6): اذا كانت دالة الكلفة الكلية هي:

$$TC = Q^3 - 9Q^2 + 24Q + 15$$

المطلوب : جد حجم الانتاج الذي يخفض الكلفة الكلية لادنى مستوياتها:

الحل

نشتق دالة التكاليف الكلية ثم نجد جذور المشتقة وكما ياتي:-

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = 3Q^2 - 18Q + 24 = 0$$

وهذه الدالة تربيعية نجد جذورها عن طريق القانون العام (الدستور) إذ أن:-

$$c = 24,\ b = -18,\ a = 3$$

$$Q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(3)(24)}}{2(3)}$$

$$Q = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6}$$

$$Q = 4 \quad or\ Q = 2$$

نجد الان المشتقة الثانية لدالة التكاليف ونختبر القيم الناتجة من جذور المشتقة الاولى وكما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q^2} = 6Q - 18$$

نعوض $Q = 4$ و $Q = 2$ في المشتقة الثانية لنحدد القيمة الصغرى وكما ياتي:

عند $Q = 4$ فان قيمة المشتقة الثانية هي:-

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q^2} = 6(4) - 18 = 6 > 0$$

وعند $Q = 2$ فإن قيمة المشتقة الثانية هي:-

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q^2} = 6(2) - 18 = -6 < 0$$

والمشتقة الثانية عند $Q = 2$ هي سالبة فهي لاتحقق شرط المشتقة الثانية في حالة التدنية اذ ينبغي ان تكون موجبة.

وعليه فعند $Q = 4$ فان المشتقة الثانية موجبة وهي تحقق الشرط ، وان القيمة الصغرى للتكاليف الكلية تتحقق عند $Q = 4$ وهذه الكلفة هي:-

$$TC = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) + 15 = 31$$

ويمكن التاكد من القيمة $Q = 4$ تحقق ادنى قيمة لدالة التكاليف الكلية وذلك بتجربة ارقام اخرى اكبر واقل من $Q = 4$ وتعويضها في دالة التكاليف الكلية.

ثالثا- دالة الربح الكلي *Total Profit Function*

مثال(4.7): اذا كانت دالة الطلب هي:-

$$P = 200 - 0.5Q$$

ودالة الكلفة الكلية هي:-

$$TC = 500 + 20Q$$

المطلوب: عند أي مستوى من المبيعات يتحقق اعلى ربح ممكن؟

الحل

نجد دالة الربح الكلي وهي:-

$$\pi = TR - TC$$

ويعبر عن دالة الايراد الكلي بما ياتي:-

$$TR = P.Q = (200 - 0.5Q)Q = 200Q - 0.5Q^2$$

$$\pi = 200Q - 0.5Q^2 - 20Q - 500$$

$$\pi = -0.5Q^2 + 180Q - 500$$

نشتق دالة الربح ونجد جذورها:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -Q + 180 = 0 \Rightarrow Q = 180$$

نجد المشتقة الثانية للتاكد من شرط التعظيم وان القيمة 180 تتحقق عندها معظمة الدالة:-

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -1 < 0$$

ولان المشتقة الثانية سالبة فهذا يشير الى وجود قيمة عظمى للربح الكلي عند $Q = 180$ وهذه القيمة للربح الكلي هي:-

$$\pi = -0.5(180)^2 + 180(180) - 500 = 15700$$

كما يمكن ان نجد ان اعلى ربح يتحقق عند تساوي الايراد الكلي مع التكلفة الحدية وكما ياتي:

مبدأ تساوي التكاليف الحدية مع الإيرادات الحدية لتحقيق الأمثلية

وبعد أن تسنى لنا التعرف على كيفية الاستعانة بعلم التفاضل لحل مشكلات الأمثلية العظمى أو الصغرى ، يصبح من السهل علينا إدراك حقيقة مهمة ، وهي أن القاعدة الأساسية لتعظيم الربح ، لا تتأتى إلا حينما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي ، ويوضح الشكل (28) دالتي التكاليف الكلية والإيرادات الكلية لشركة ما وبما أن الربح الكلي يساوي الإيرادات الكلية مطروحاً منه التكاليف الكلية ، لذا فإن الربح الكلي يكون مساوياً للمسافة الرأسية بين منحنى الإيرادات الكلية ومنحنى التكلفة الكلية عند أي مستوى من مستويات الإنتاج المختلفة . هذا وتصل هذه المسافة إلى أقصاها عند مستوى الإنتاج Q_1 ، حيث يتساوى ميل منحنى الإيرادات الكلية مع ميل منحنى التكاليف الكلية ولما كان ميل منحنى الإيرادات الكلية هو الإيراد الحدي(MR) وميل منحنى التكاليف الكلية هو التكلفة الحدية(MC) ، فإن هذا يعني وصول الربح إلى أقصى حد ممكن عندما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيرادات الحدية .

ورياضيا:

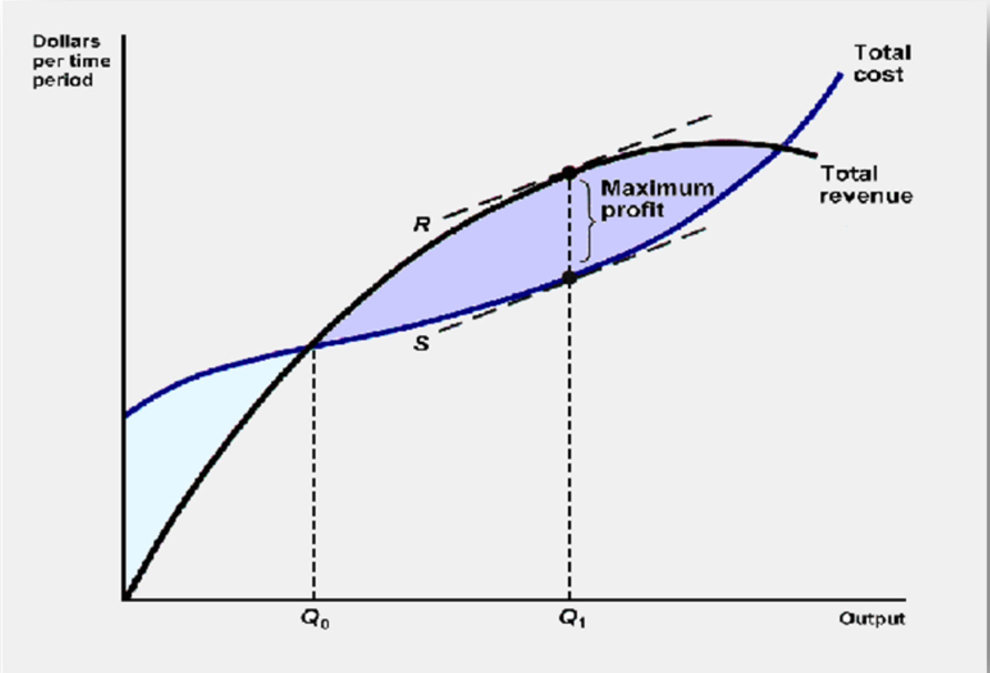
$$\pi = TR - TC$$

وان القيمة العظمى تتحقق عندما $\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0$ فهذا يؤدي الى

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\partial TR}{\partial Q} - \frac{\partial TC}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial TR}{\partial Q} = \frac{\partial TC}{\partial Q}$$

وهذا يعني ان اعلى ربح يتحقق عندما :

$$MR=MC$$



شكل (30) قاعدة تساوي التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي لتعظيم الربح : عند مستوى الإنتاج Q_1 يتعظم الربح نظراً لأن الإيراد الحدي (والذي يساوي ميل المستقيم R) يساوي التكلفة الحدية (والتي تساوي ميل المستقيم S) .

مثال (8.4): جد الكمية التي يتحقق عندها اعلى ربح ممكن اذا كانت دالة الايراد الكلي هي:

$$TR=-3Q^2+388Q$$

ودالة الكلفة الكلية هي: $TC=Q^3-9Q^2+100Q+15$

الحل

يتحقق اعلى ربح ممكن عندما $MR=MC$

نجد الايراد الحدي : $MR=\frac{\partial TR}{\partial Q}=-6Q+388$

ثم نجد الكلفة الحدية : $MC=\frac{\partial TC}{\partial Q}=3Q^2-18Q+100$

وبالمساواة ينتج :

$$MR=MC$$
$$-6Q+388=3Q^2-18Q+100$$
$$-3Q^2+18Q-100-6Q+388=0$$
$$-3Q^2+12Q+288=0$$

وهذه دالة تربيعية نجد جذورها عن طريق القانون العام(الدستور) :

$$Q=\frac{-(12)\pm\sqrt{(12)^2-4(-3)(288)}}{2(-3)}$$

$$Q=\frac{-12\pm\sqrt{3600}}{-6}=\frac{-12\pm60}{-6}$$

$$Q=12 \qquad or \qquad Q=-8$$

وحيث ان الكمية السالبة تهمل فتكون الكمية التي تحقق اعلى ربح هي 12.

مثال (4.9): اذا كانت دالة طلب السوق لمنشأة ما كالاتي:-

$$4P+Q-16=0$$

وكانت دالة التكاليف المتوسطة كالاتي:-

$$AC=\frac{4}{Q}+2-0.3Q+0.05Q^2$$

المطلوب: جد قيمة Q التي تحقق:-

1- اقصى ايراد ممكن

2- ادنى تكاليف حدية

3- اقصى ارباح

الحل

1- اقصى ايراد ممكن:

نبسط دالة الطلب ونجدها كالاتي:-

بالتقسيم على 4 ستكون دالة الطلب كالاتي: $P=4-0.25Q$

نجد دالة الايراد الكلي :

$$TR=P.Q=(4-0.25Q)Q=4Q-0.25Q^2$$

ويكون الايراد الكلي عند نهايته العظمى عندما $\frac{\partial TR}{\partial Q}=0$ و $\frac{\partial^2 TR}{\partial Q}<0$ وكما ياتي:-

$$\frac{\partial TR}{\partial Q}=4-0.5Q$$

$$Q=\frac{4}{0.5}=8$$

$$\frac{\partial^2 TR}{\partial Q}=-0.5<0$$

وبذلك فان الايراد الكلي يكون عند نهايته العظمى عندما $Q=8$ وقيمته هي :-

$$TR=4(8)-0.25(8)^2=16$$

2- ادنى تكاليف حدية:

حتى نجد قيمة Q التي تدني التكاليف الحدية ينبغي اولا ايجاد دالة التكاليف الكلية وكما ياتي:-

$$TC=(AC)(Q)$$

$$TC=\frac{4}{Q}+2-0.3Q+0.05Q^2$$

$$TC=4+2Q-0.3Q^3+0.05Q^3$$

اما دالة التكاليف الحدية فهي المشتقة الاولى لدالة التكاليف الكلية وتساوي:

$$MC = \frac{\partial TC}{\partial Q} = 2 - 0.6Q + 0.15Q^2$$

وتكون التكاليف الحدية عند نهايتها الدنيا عند $\frac{\partial MC}{\partial Q} = 0$ و $\frac{\partial^2 MC}{\partial Q^2} > 0$

$$\frac{\partial MC}{\partial Q} = -0.6 + 0.3Q = 0$$

$$-0.6 + 0.3Q = 0$$

$$0.3Q = 0.6$$

$$Q = 2$$

$$\frac{\partial^2 MC}{\partial Q^2} = 0.3 > 0$$

لذلك فان التكاليف الحدية تكون عند نهايتها الدنيا عندما $Q = 2$

3- اقصى ارباح

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi = 4Q - 0.25Q^2 - 4 - 2Q + 0.3Q^2 - 0.05Q^3$$

$$\pi = -0.05Q^3 + 0.05Q^2 + 2Q - 4$$

وتكون الارباح عند نهايتها العظمى عندما $\frac{\partial \pi}{\partial Q} = 0$ و $\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} < 0$ وكما ياتي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = -0.15Q^2 + 0.1Q + 2 = 0$$

وبعد حل المعادلة باستخدام القانون العام نحصل على قيمتين لـQ هما اما $Q = 4$ او $Q = -3.3$.
وحيث ان Q لايمكن ان تكون سالبة عليه فان $Q = 4$ هي التي تحقق الشرط وعندما $Q = 4$ فإن
-:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -0.3Q + 0.1$$

$$= -0.3(4) + 0.1 = -1.1 < 0$$

وبذلك فإن الارباح تكون اقصى مايمكن عند $Q = 4$.

مثال (4.10):اذا كانت دالة الطلب : $Q_d = 40 - 2P$ ، وكانت دالة العرض: $2P - Q_s = 20$.
افترض ان الحكومة قد فرضت ضريبة بمقدار t على كل وحدة من الوحدات المعروضة، وقد قام المنتجون بتعديل دالة العرض لتتضمن هذه الضريبة . احسب:
1- نسبة الضريبة التي تعظم ايراد الضريبة
2- اقصى ايراد ضريبة يمكن الحصول عليه

الحل

1- نسبة الضريبة التي تعظم ايراد الضريبة

اذا كانت $2P - Q_s = 20$ ، فان $P = 10 + 0.5Q_s$ ، إذ ان المنتجين يعدلون دالة العرض لتتضمن الضريبة فسيؤدي ذلك الى انتقال الدالة كما تم بيانها سابقا.

$$P=10+0.5Q_s+t$$

إذ ان دالة الطلب هي:

$$P=20-0.5Q_d$$

وعند حالة التوازن تكون $Q_s=Q_d$ وبذلك فإن :

$$10+0.5Q+t=20-0.5Q$$

$$t=10-Q$$

t هي نسبة الضريبة وبذلك فان اجمالي ايراد الضريبة: $T=tQ$

أي انه نسبة الضريبة مضروبة في الكمية المنتجة وبذلك فان:

$$T=(10-Q)Q=10Q-Q^2$$

وتكون T اقصى ما يمكن عندما $\frac{\partial T}{\partial Q}=0$ و $\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2}<0$

$$\frac{\partial T}{\partial Q}=10-2Q$$

وعندما يكون اجمالي ايراد الضريبة T اقصى ما يمكن فان:

$$10-2Q=0$$

اي ان:

$$Q=5$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial Q^2}=-2<0$$

وبذلك تكون T اقصى ما يمكن عند $Q=5$ ، وعندما تكون $Q=5$ فان:

$$t=10-5=5$$

وبذلك فإن $t=5$ هي نسبة الضريبة التي تعظم T

2- اقصى ايراد ضريبي يمكن الحصول عليه

$$T=tQ=5(5)=25$$

اسئلة الفصل الرابع

س1:-كانت دالة طلب محتكر كالاتي:

$$P=30-0.75Q$$

فإذا كانت دالة AC على الشكل الاتي:

$$AC-\frac{30}{Q}=9+0.3Q$$

المطلوب: جد قيمة Q التي تعطي:

1- اقصى ايراد ممكن
2- ادنى تكاليف متوسطة
3- اقصى ارباح
4- اختبر في كل حالة الشرط الثاني

س2:- اذا كانت دالة الطلب والكلفة الكلية لسلعة ما هي:

$$4P+Q-16=0$$

$$TC=4+2Q-3\frac{Q^2}{10}+\frac{Q^3}{20}$$

المطلوب//

1- جد كلا من TR, MR, MC, π

2- جد النقطة التي تجعل $MR = MC$

3- اثبت رياضيا ان مرونة النقطة التي تعظم الايرادات تساوي $\left(\left(E_d \right) = -1 \right)$

س3:-مشروع اقتصادي معين كانت دالتا معدل ايراداته ومعدل تكاليفه كما ياتي:

$$AR = 22 - 0.5Q$$

$$AC = \frac{1}{3}Q^2 - 8.5Q + 50 + \frac{90}{Q}$$

المطلوب:

1- استخراج الايرادات الحدية والتكاليف الحدية

2- مستوى انتاجه الذي يعظم ارباحه

س4:- تعمل احدى المنشآت في ظل المنافسة غير الكاملة ولها دالة كلفة كلية من الدرجة الاولى ، يكلف انتاج كل وحدة اضافية 1800 وحدة نقدية ، وتبلغ الكلفة الثابتة 40000 وحدة نقدية ، اما دالة الطلب فهي $P = 3000 - 5Q$ والمطلوب:

1- ايجاد مستوى الانتاج الذي يعظم الربح

2- ايجاد اعظم الارباح

3- ايجاد مستوى السعر الموافق لمستوى الانتاج الذي يعظم الايراد

س5:- لديك دالة الطلب الاتية: $P + Q = 30$

ودالة الكلفة الكلية هي:- $TC = \frac{1}{2}Q^2 + 6Q + 7$

المطلوب

1. جد مستوى الانتاج الذي يعظم الايراد الكلي.
2. جد مستوى الناتج الذي يعظم الربح
3. احسب الايراد الحدي والكلفة الحدية

س6:- اعطيت دالة الطلب الاتية:- $P + 2Q = 20$

ودالة الكلفة الكلية الاتية: $Q^3 - 8Q^2 + 20Q + 2$

المطلوب

1. جد مستوى الناتج الذي يعظم الايراد الكلي
2. جد مستوى الناتج الذي يعظم الربح

س7:- اعطيت دالة الكلفة الكلية الاتية:

$$TC = 3Q^3 - 3Q^2 + 36Q$$

المطلوب: احسب مستوى الانتاج الذي يدني متوسط الكلفة ، ثم احسب متوسط الكلفة والكلفة الحدية عند ذلك المستوى من الانتاج.

س8:- لديك المعلومات الاتية عن دالتي الطلب والكلفة الكلية :

$$4P+Q-16=0$$
$$and$$
$$TC=4+2Q-\frac{3Q^2}{10}+\frac{Q^3}{20}$$

المطلوب:

1. استخرج دوال $MC, \; MR, \pi, TR$ بدلالة الناتج Q.
2. حل المعادلة الاتية : $\frac{\partial \pi}{\partial Q}$ ، ثم جد قيمة الناتج الذي يعظم الربح.
3. اثبت انه عند النقطة التي يعظم بها الربح فان $MR=MC$

مصادر الفصل الرابع

1- أسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.
2- الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.
3- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة الدكتور اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . 1991.
4- حسين علي بخيت - مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.
5- الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.
6- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. 2010.
7-Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. 1984.
8- Henderson James M & Quandt Richard E, Microeconomc theory A mathematical approach , 3rd ed, 1980.
9- Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.
10- Samuelson P.A , Foundation of Economic Analysis , Cambridge Mass, Harvard university Press.1948.

الفصل الخامس

الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغيرات المتعددة

Optimization of Functions of Several variables

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:-

- **الدوال الاقتصادية ذات متغيرين مستقلين**
- **الدوال الاقتصاديةمتعددة المتغيرات**
- **الامثلية غير المقيدة**
- **الامثلية المقيدة**
- **الامثلية المقيدة ومضاعفات لاكرانج**