الفصل الخامس
الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغيرات المتعددة
Optimization of Functions of Several variables

مقدمة

تناولنا في الفصل الرابع الامثلية للدوال الاقتصادية ذات المتغير الواحد ، غير ان هناك دوالا اقتصادية تحتوي أكثر من متغير مستقل تسمى بدوال ذات متغيرات متعددة كما في دالة الطلب الاتية والتي تتاثر فيها الكمية المطلوبة بمجموعة من المتغيرات وكما ياتي:

$$Q_d = f(P_1, P_2, P_3, Y, N_p)$$

وسنتناول في هذا الفصل الامثلية للدوال الاقتصادية غير المقيدة *Unconstrained Optimization* والدوال الاقتصادية المقيدة *Constrained Optimization*.

وكما لاحظنا في حالة الدوال ذات المتغير المستقل الواحد والشروط الواجب توافرها لكي تكون الدالة عند قيمتها العظمى او الصغرى، فنوضح الشروط الواجب توافرها في حالة الدوال ذات المتغيرات المتعددة ولسهولة التحليل سناخذ اولا الدوال ذات متغيرين فقط ، ثم الدوال المتضمنة اكثر من متغيرين مستقلين.

اولا: الدوال الاقتصادية ذات متغيرين مستقلين

نفترض وجود الدالة الاتية ذات المتغيرين المستقلين X_2, X_1 وهي $Y = f(X_1, X_2)$ وينبغي توافر شرطين مهمين لكي تكون الدالة عند نهايتها العظمى او الصغرى (الدنيا)

1- الشرط الضروري (اللازم) ***Necessary Condition*** : المشتقات الجزئية الاولى لهذه الدالة يجب ان تساوي صفرا أي ان:-

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = f_1 = f' = 0 \quad , \qquad \frac{\partial Y}{\partial X_2} = f_2 = f'' = 0$$

ملاحظة: تمت كتابة رموز المشتقات الجزئية الاولى بصيغ مختلفة لتعدد صيغها في بعض الكتب حتى يمكن للطالب ملاحظتها جميعا.

2- الشرط الكافي ***Sufficient Condition*** : ان تكون قيم المشتقات الجزئية الثانية للدالة عند القيم الحرجة وكما ياتي:

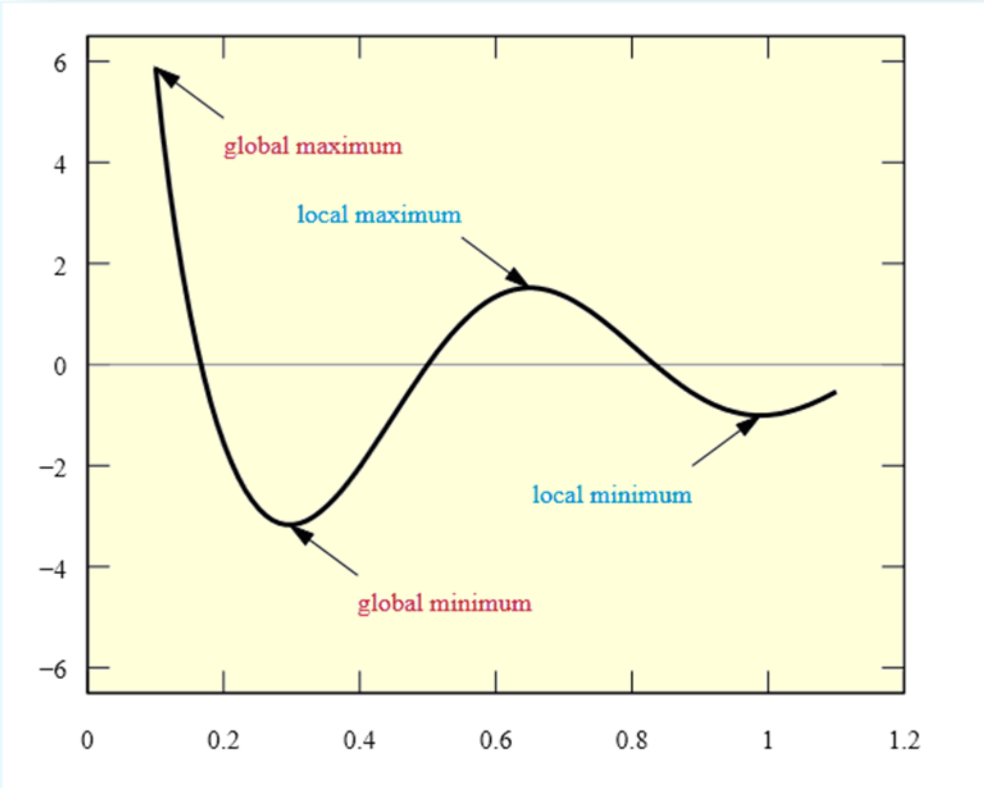
- إن تكون موجبة في حالة النهايات الصغرى أي ان $\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} > 0$ او $(f_{11}, f_{22} > 0)$ ، ويعنى ذلك ان الدالة متجهة الى الاعلى عند القيمة الحرجة.

- أما في حالة النهايات العظمى فينبغي ان تكون المشتقات الجزئية الثانية للدالة سالبة أي $\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} < 0$ او $(f_{11}, f_{22} < 0)$ ويعني ذلك ان الدالة متجهة الى الاسفل عند القيم الحرجة.

3- أما في حال معرفة كون الدالة في حالتها المثلى عند النظر اليها من الاتجاهات جميعها فينبغي ان يتحقق الشرط الاتي:

$$(f_{11})(f_{22}) > (f_{12})^2 \ or \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2}\right) > \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2}\right)^2$$

وفي حال عدم توافر الشرط المذكور فإن الدالة ذات قيمة عظمى او صغرى محلية *(Local Maximum or Minimum)* وليست قيمة كلية *Global*. ويمكن توضيح ذلك بيانيا من الشكل الاتي:



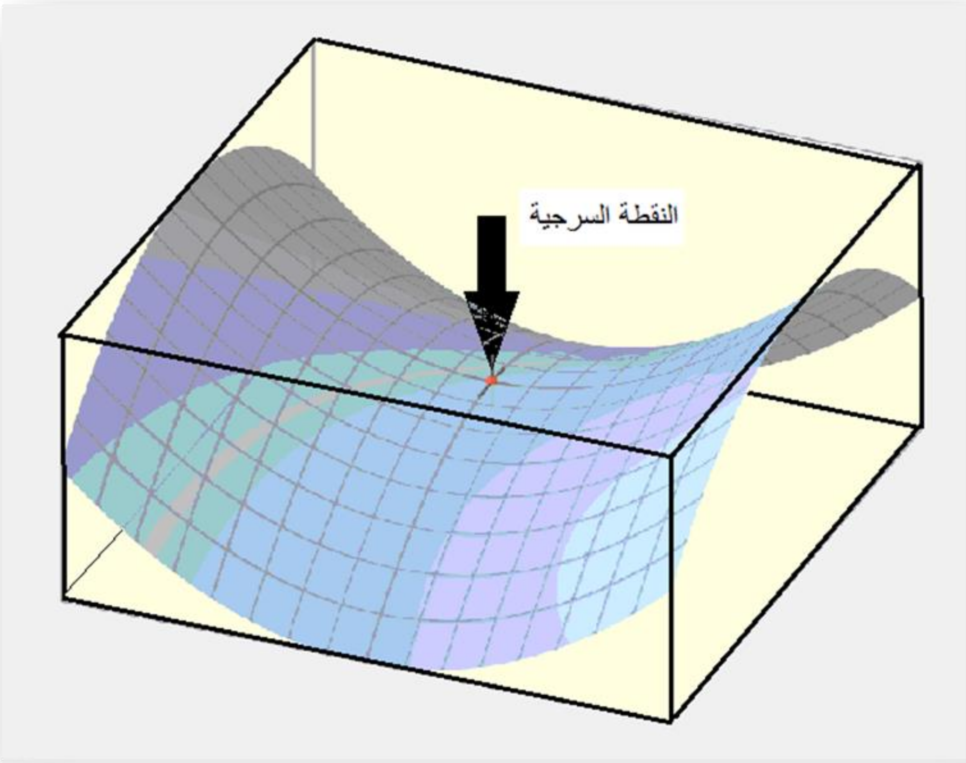
شكل رقم (31) النقاط المحلية العظمى والصغرى والكلية

ان ماذكرناه آنفا لا يمثل الحالات جميعها التي يمكن ان تظهر بها الدالة ففي احيان اخرى لايكفي ان تتشابه الاشارات الجبرية للمشتقات الجزئية الثانية لتحقيق النهايات العظمى والدنيا للدالة ومن هذه الحالات :-

1- الاشارات الجبرية للمشتقات الجزئية الثانية غير متشابهة وكان حاصل ضرب المشتقات الثانية اقل من قيمة مربع المشتقة المتقاطعة ، وهنا ليست للدالة نهاية عظمى او صغرى وانما عند نقطة تسمى النقطة السرجية *Saddle Point*، أي ان:-

$$(f_{11})(f_{22}) < (f_{12})^2$$

ويبين الشكل البياني الاتية النقطة السرجية للدالة $Z = X^2 - Y^2$ مؤشرة باللون الاحمرفي وسط الشكل البياني

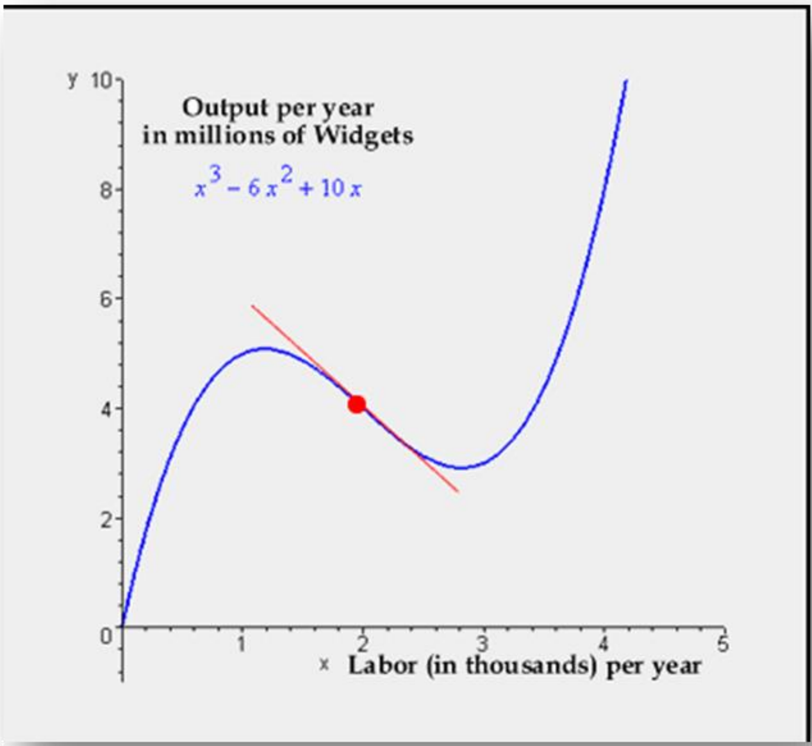


شكل (32) النقطة السرجية

2- أما إذا كانت الاشارات الجبرية للمشتقات الجزئية الثانية متشابهة إلا ان حاصل ضربهما معا اقل من قيمة مربع المشتقة المتقاطعة عند هذه الحالة تكون الدالة عند نقطة تعرف بنقطة الانقلاب *Inflection Point* ، أي ان:-

$$(f_{11})(f_{22})<(f_{12})^2$$

ويبن الشكل البياني الآتي أحد اشكال نقطة الانقلاب للدالة $Y=X^3-6X^2+10X$:



شكل (33) التمثيل البياني لنقطة انقلاب معينة

والجدول الاتي يوضح شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات متغيرين

$$Y = f(X_1, X_2)$$

جدول 1. شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال ذات متغيرين مستقلين

الشرط Condition	نقطة دنيا Minimum	نقطة عظمى Maximum	نقطة انقلاب Inflection Point	نقطة سرجية Saddle Point
الاول 1st	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$	$f_1 = f_2 = 0$
الثاني 2nd	$f_{11}, f_{22} > 0$	$f_{11}, f_{22} < 0$	$f_{11}, f_{22} < 0$ or $f_{11}, f_{22} > 0$	$f_{11} > 0,\ f_{22} < 0$ *or* $f_{11} < 0,\ f_{22} > 0$
الثالث 3rd	$f_{11} f_{22} > (f_{12})^2$	$f_{11} f_{22} > (f_{12})^2$	$f_{11} f_{22} < (f_{12})^2$	$f_{11} f_{22} < (f_{12})^2$

ثانيا: الدوال الاقتصادية متعددة المتغيرات

تناولنا في الفقرة اولا السابقة الدوال التي تحتوي متغيرين مستقلين فقط ، وهنا نعرض الدوال متعددة المتغيرات أي ثلاثة متغيرات وأكثر ولنفترض ان لدينا الدالة الاتية:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n)$$

ومثل هذه الدوال ينبغي توافر الشروط الاتية لتكون الدالة عند نهايتها العظمى او الصغرى وكما ياتي:-

1- الشرط الضروري (اللازم) ***Necessary Condition*** : هو ان تبلغ الدالة نقطة استقرارها ، أي ان الدالة عند هذه النقاط ليست متزايدة ولا متناقصة (أي ان الدالة عند القيمة الحرجة)، وفي هذه النقطة تكون جميع المشتقات الجزئية الاولى للدالة بالنسبة للمتغيرات المستقلة تساوي صفرا ، أي ان:-

$$f_1=\frac{\partial Y}{\partial X_1}=0,\quad f_2=\frac{\partial Y}{\partial X_2}=0\,,\quad f_3=\frac{\partial Y}{\partial X_3}=0$$

2- الشرط الكافي ***Sufficient Condition*** : هنا ينبغي الحصول اولا على مصفوفة المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية ، ويتم ذلك من خلال اعادة تفاضل الدالة جزئيا بالنسبة لجميع المتغيرات، وبما اننا نتناول الدوال متعددة المتغيرات، سنفرض ان عدد المتغيرات المستقلة في الدالة يساوي n ويعني ذلك ان هذه المصفوفة تحتوي على $(n\times n)$ من العناصر وكما ياتي:-

$$H=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ . & & \\ . & & \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{vmatrix}$$

وبعد استخراج القيم الحرجة لكل من $X_n,\ldots\ldots,X_2,X_1$ يتعين تطبيق شروط الفئة الثانية لمعرفة ما اذا كانت القيم الحرجة تعبر عن نقطة قصوى ام دنيا. إلا ان هذه الخطوات تتطلب استخدام المحدد الهيسي.

المحدد الهيسي *Hessian Determinant*

يستخدم هذا المحدد لتشخيص استيفاء شرط الفئة الثانية *Second Order Condition* الخاص بالنقاط المثلى سواء العظمى او الدنيا للدوال متعددة المتغيرات، إذ عند افتراض الدالة الاتية :-

$$Y=f(X_1,X_2,X_3)$$

وبعد تطبيق شرط الفئة الاولى *First Order Condition* فإن:-

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1}=0\quad,\ \frac{\partial Y}{\partial X_2}=0\,,\ \frac{\partial Y}{\partial X_3}=0$$

ومن ثم استخراج القيم الحرجة لكل من X_3,X_2,X_1 ، يتعين تطبيق شرط الفئة الثانية لمعرفة ما اذا كانت القيم الحرجة تعبر عن نقطة عظمى أم دنيا، وتكون عناصر المحدد الهيسي جميعها مشتقات جزئية ثانية ، بعضها مباشر وتقع على القطر الرئيس، في حين تقع المشتقات الجزئية الثانية المتقاطعة خارج القطر الرئيس، ويكون المحدد الهيسي $|H|$ من الفئة الثانية $|H_2|$ اذا كانت الدالة تضم متغيرين مستقلين ، ومن الفئة الثالثة $|H_3|$ اذا كانت تضم ثلاثة متغيرات مستقلة. وبالنسبة للدالة فان المحدد الهيسي لها سيكون:-

$$|H|=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

وفي حالة النقاط العظمى تكون:

$$|H_1|<0\ ,\ |H_2|>0\ ,\ |H_3|<0\ ,\ |H_4|>0,......$$

وفي حالة النقاط الدنيا تكون:

$$|H_1|>0,\ |H_2|>0\ ,\ |H_3|>0,....$$

ويشير الجدول الاتي الى شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات $:Y=f(X_1,X_2,....,X_n)$

جدول 2. شروط النهايات العظمى والصغرى للدوال متعددة المتغيرات

النقطة الدنيا Minimum	النقطة العظمى Maximum	الشرط Condition
$f_1=f_2=....=f_n=0$	$f_1=f_2=....=f_n=0$	الاول 1st
$\|H_1\|,\|H_2\|,...,\|H_n\|>0$	$\|H_1\|<0,\|H_2\|>0,....,\|H_n\|>0$	الثاني 2nd

المحدد الهيسي المؤطر *Bordered Hessian Determinant*

يستخدم هذا المحدد لتشخيص استيفاء شرط الفئة الثانية الخاص بالنقاط المثلى سواء العظمى أو الدنيا للدوال متعددة المتغيرات الخاضعة لقيود بافتراض الدالة الاتية مثلا:-

$$Y=f(X_1,X_2)$$

الخاضعة للقيد $G=g(X_1,X_2)$

فإن الدالة المركبة *Composite Function* تكون عندئذ:-

$$F=f(X_1,X_2)+\lambda[g(X_1,X_2)-G]$$

حيث λ يعبر عن مضاعف لاكرانج *Lagrange Multiplier* ويكون المحدد الهيسي المؤطر بالنسبة لهذه الدالة من الفئة الثانية ويرمز له $|H_2|$ إذ ان:-

$$|H_2|=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial g}{\partial X_1} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} & \frac{\partial g}{\partial X_2} \\ \frac{\partial g}{\partial X_1} & \frac{\partial g}{\partial X_2} & 0 \end{vmatrix}$$

في حالة النقطة العظمى يكون:-

$$|H_2|>0\ ,\ \ |H_3|<0,\ |H_4|>0,........$$

أي ان قيمة المحدد الهيسي المؤطر تكون موجبة اذا كانت فئة المحدد زوجية ، أي ان دالة الهدف تضم عددا زوجيا من المتغيرات ، وتكون سالبة اذا كانت فئة المحدد فردية ، أي ان دالة الهدف تضم عددا فرديا من المتغيرات المستقلة.

في حالة النقطة الدنيا يكون:-

$$|H_2|<0\ ,\quad |H_3|<0,\quad |H_4|<0,........$$

أي ان قيمة المحدد الهيسي المؤطر تكون سالبة دائما بصرف النظر عن عدد المتغيرات المستقلة في دالة الهدف.

وكما ان دالة الهدف يمكن ان تضم عدة متغيرات مستقلة فانها يمكن ايضا ان تخضع لعدة قيود ، أي ان الدالة المركبة يمكن ان تاخذ الشكل العام الاتي:-

$$L=f(X_1,X_2,.....,X_n)+\sum_{j=1}^{j=m}\lambda_j\left[g_j(X_1,X_2,....,X_n)-G_j\right]$$

وعندئذ يكون المحدد الهيسي المؤطر كما ياتي:-

$$|H|=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_n} \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial X_1} .... & \frac{\partial g^1}{\partial X_n} \\ \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 Y}{\partial X_n^2} & \frac{\partial g^m}{\partial X_1} \ ..... & \frac{\partial g^m}{\partial X_n} \\ \frac{\partial g^1}{\partial X_1} & \frac{\partial g^m}{\partial X_1} & 0 \quad ...... & 0 \\ \frac{\partial g^1}{\partial X_n} & \frac{\partial g^m}{\partial X_n} & 0 \quad ...... & 0 \end{vmatrix}$$

وبما ان استخدام المحددات في حل مسائل الامثلية ولاسيما الامثلية المقيدة سيتم الاشارة الى اطارها النظري من دون الدخول في تفاصيل حل امثلة تختص بهذا النوع وانما سيتم اللجوء الى مسائل اقل صعوبة تتناسب ومستوى الطالب في مرحلة البكالوريوس.

بعد التعرف على الجزء النظري للامثلية الاقتصادية في حالتيها غير المقيدة والمقيدة سنتناول بعض الامثلة في الحالتين.

امثلة على الحالة الاولى(الامثلية غير المقيدة)

مثال (5.1): توافرت لديك المعلومات الاتية عن دالتي طلب على سلعة في سوقين منفصلين هما:

$$P_1=400-3Q_1$$
$$P_2=300-2Q_2$$

$P_1=$ سعر السلعة في السوق الاول ، $P_2=$ سعر السلعة في السوق الثاني

$Q_1=$ الكمية المطلوبة في السوق الاول ، $Q_2=$ الكمية المطلوبة في السوق الثاني

وكانت دالة التكلفة الكلية هي : $TC=2Q^2+3Q+25$)

المطلوب: جد حجم الطلب على السلعة في السوقين والذي يحقق اعلى ربح ممكن.

الحل

1- يعبر عن الايراد الكلي هنا بانه مجموع الايراد المتحقق في السوقين أي ان:-

$$TR=TR_1+TR_2$$

$$TR_1=P_1Q_1 \Rightarrow TR_1=(400-3Q_1)Q_1=400Q_1-3Q_1^2$$
$$TR_2=P_2Q_2 \Rightarrow TR_2=(300-2Q_2)Q_2=300Q_2-2Q_2^2$$
$$TR=TR_1+TR_2 \Rightarrow TR=400Q_1-3Q_1^2+300Q_2-2Q_2^2$$

2- اما دالة الكلفة للسلعتين فيعبر عنها كالاتي:

$$TC=2Q^2+3Q+250$$
$$TC=2(Q_1+Q_2)^2+3(Q_1+Q_2)+250$$
$$TC=2Q_1+4Q_1Q_2+2Q_2^2+3Q_1+3Q_2+250$$

3- نجد دالة الربح الكلي والذي يعبر عنه بما ياتي:-

$$\pi=TR-TC$$
$$\pi=400Q_1-3Q_1^2+300Q_2-2Q_2^2-(2Q_1^2+4Q_1Q_2+2Q_2^2+3Q_1+3Q_2+250)$$
$$\pi=-5Q_1^2-4Q_2^2-4Q_1Q_2+397Q_1+297Q_2-250$$

4- لايجاد النقاط الحرجة نقوم بايجاد جذور المشتقة الجزئية الاولى لدالة الربح الكلي بالنسبة لكل من Q_1 , Q_2 وكما ياتي:-

$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_1}=-10Q_1-4Q_2+397=0............(1)$$
$$\frac{\partial\pi}{\partial Q_2}=-8Q_2-4Q_1+297=0..............(2)$$

وبعد حل المعادلتين المذكورتين باحدى الطرائق المعروفة نحصل على الاتي:-

$$16Q_1-497=0$$
$$16Q_1=497$$
$$Q_1\approx 31$$

وبتعويض قيمة Q_1 في احدى المعادلتين 1 او 2 نحصل على قيمة Q_2 وتساوي 22

5- نجد الان المشتقة الجزئية الثانية لاختبار النقطة الحرجة $(Q_1,Q_2)=(31,22)$

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}=-10$$
$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2}=-8$$
$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1\partial Q_2}=-4$$

6- نجري اختبارا لتحديد نوع النقطة الحرجة

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}=-10<0$$
$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2}=-8<0$$
$$\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1^2}*\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_2^2}>(\frac{\partial^2\pi}{\partial Q_1\partial Q_2})^2$$
$$(-10)*(-8)>(-4)^2$$
$$80>16$$

نستنتج ان النقطة المتحصل عليها هي نقطة عظمى لدالة الربح ، إذ ان اعلى ربح يمكن تحقيقه من بيع السلعة في السوقين بعد تعويض قيمتي Q_1 و Q_2 في دالة الربح وهو:

$$\pi=912$$

مثال(5.2):منشأة تبيع منتوجين G1 و G2، بسعر 1000$ للمنتج الاول ، و 800$ للمنتج الثاني. وكانت المنشأة تواجه دالة الكلفة الاتية:

$$TC=2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2$$

وتمثل Q_1 مستوى الانتاج لـ G1 و Q_2 مستوى الانتاج لـ G2 .

المطلوب: احسب اقصى الارباح وقيم كل من Q_1 و Q_2 عند اقصى الارباح

الحل

نستخرج معادلة الايراد الكلي الاول والثاني وكما ياتي:

$$TR_1=1000Q_1$$
$$TR_2=800Q_2$$

وعليه يكون الايراد الكلي للمنشأة هو:

$$TR=TR_1+TR_2=1000Q_1+800Q_2$$

ودالة الكلفة المعطاة اعلاه:

$$TC=2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2$$

وبذلك تكون دالة الربح هي:

$$\pi=TR-TC$$
$$=(1000Q_1+800Q_2)-(2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2)$$
$$=1000Q_1+800Q_2-2Q_1^2-2Q_1Q_2-Q_2^2$$

تتضمن هذه الدالة متغيرين هما Q_1 و Q_2 ولتحقيق الامثلية نستخرج الشرط الضروري الاول والشرط الكافي للمشتقة وكما ياتي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 800 - 2Q_1 - 2Q_2$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2} = -2$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2$$

وينبغي ان تكون المشتقة الاولى مساوية للصفر أي:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 0$$

وتحل المعادلتان آنيا وكما ياتي:

$$1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0$$
$$800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0$$

بترتيب المعادلتين نحصل على الاتي:

$$4Q_1 - 2Q_2 = 1000 \ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2Q_1 - 2Q_2 = 800 \ldots\ldots\ldots(2)$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$2Q_1 = 200$$

وعليه نحصل على قيمة Q_1 وتساوي 100 $(Q_1 = 100)$، وبتعويضها في احدى المعادلتين اعلاه نحصل على قيمة Q_2 وتساوي 300 $(Q_2 = 300)$.

وللتأكد من ان تلك النقطة هي نقطة نهاية عظمى نتبع الاتي:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} < 0 \ , \ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} < 0 \ , \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4 \ , \ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2 \ , \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right)^2 = (-2)^2$$
$$(-4)(-2) - (-2) = 4 > 0$$

اذن اتضح ان المنشأة تعظم ارباحها عند مستويات $(Q_1 = 100)$ و $(Q_2 = 300)$ للمنتوجين G1 و G2 .

ويمكن حساب مستوى الربح عند تلك المستويات وهو:

$$\pi = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$
$$\pi = 1000(100) + 800(300) - 2(100)^2 - 2(100)(300) - (300)^2$$
$$\pi = 170000\$$$

مثال(5.3): محتكر يبيع منتوجين X و Y وكان لديه دوال الطلب الاتية:

$$0.1P_X - 1.2 + 0.2X = 0$$
$$10P_Y - 320 + 40Y = 0$$

وكانت دالة تكاليفه المشتركة كالاتي:

$$TC - X^2 - 2XY - Y^2 = 0$$

المطلوب:

جد السعر وكمية الناتج من كل سلعة الذي يعظم ارباحه، ثم تحقق من هذه الارباح كانت عند نهايتها في تلك النقطة.

الحل

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = P_X X + P_Y Y - TC$$

ناخذ دالة الطلب الاولى: $0.1P_X - 1.2 + 0.2X = 0$ بالتقسيم على معامل السعر 0.1 نحصل على دالة الطلب الاولى بالصورة الاتية:

$$P_X = 12 - 2X$$

اذن دالة الايراد الكلي الاولى تساوي $TR_X = P_X X$ أي

$$TR_X = (12 - 2X)X = 12X - 2X^2$$

وكذلك الحال بالنسبة لدالة الطلب الثانية : $10P_Y - 320 + 40Y = 0$ بالتقسيم على معامل السعر 10 نحصل على دالة الطلب الثانية بالصورة الاتية:

$$P_Y = 32 - 4Y$$

اذن دالة الايراد الكلي الثانية تساوي $TR_Y = P_Y Y$ أي

$$TR_Y = (32 - 4Y)Y = 32Y - 4Y^2$$

ستصبح دالة الربح بالاعتماد على الصيغ الجديدة للايراد الكلي الاولى والثانية:

$$\pi = TR_X + TR_Y - TC$$
$$\pi = 12X - 2X^2 + 32Y - 4Y^2 - X^2 - 2XY - Y^2$$
$$\pi = 12X - 3X^2 + 32Y - 5Y^2 - 2XY$$

وتكون الارباح عند نهايتها العظمى عندما $f_X = f_Y = 0$ وعندما تكون f_{XX} و f_{YY} سالبة وعندما تكون $f_{XX} f_{YY} > (f_{XY})^2$ وكما ياتي:-

عندما $f_X = 0$ ، فان $12 - 6X - 2Y = 0$ ....(1)

وعندما $f_Y = 0$ ، فان $32 - 10Y - 2X = 0$ ....(2)

من معادلة رقم (1) نحصل على المعادلة (3) وهي:

$$-6X - 2Y = -12 \text{.................}(3)$$

ومن معادلة رقم (2) نحصل على المعادلة (4) وهي:-

$$-2X - 10Y = -32 \text{..............}(4)$$

وبضرب المعادلة (4) في 3 نحصل على:

$$-6X - 30Y = -96 \text{..............}(5)$$

وبطرح المعادلة (5) من المعادلة (3) نحصل على الاتي:-

$$28Y = 84$$
$$Y = 3$$

وعندما $Y = 3$ فان $X = 1$ بعد تعويض قيمة Y في المعادلة $-6X - 2Y = -12$

وباخذ المشتقات الثانية لكل من X و Y وكذلك المشتقة المتقاطعة f_{XY} نحصل على الاتي:

$$f_{XX}=-6<0$$
$$f_{YY}=-10<0$$
$$f_{XY}=\frac{\partial(32-10Y-2X)}{\partial X}=-2$$

ويجب ان تكون $f_{XX}f_{YY}>(f_{XY})^2$ أي ان : $(-6)(-10)>(-2)^2$ ويساوي $60>4$

أي ان الارباح تكون اعظم مايمكن عندما :

$X=1$ و $P_X=10$

$Y=3$ و $P_Y=20$

تجدر الاشارة انه تم الحصول على قيم P_X و P_Y بعد تعويض قيم X و Y في دوال الطلب.

وقد يلاحظ الطالب انه تم استخدام رموز المشتقات بصيغ مختلفة في حلول التمرينات وذلك مراعاة لاختلاف الصيغ في مختلف الكتب التي قد يتم الاطلاع عليها للاستزادة ولذلك تم الرجوع الى مختلف الصيغ في حل المسائل علما انها تشير الى النتيجة نفسها.

امثلة على الامثلية المقيدة

كما اشرنا سابقا سيتم حل مسائل الامثلية المقيدة من دون اللجوء الى طريقة المحددات مراعاة لمستوى الطالب في هذه المرحلة من الدراسة.

سنتناول الان المثال رقم (5.4) والذي يتناول الامثلية المقيدة من دون مضاعف لاكرانج.

مثال (5.4): توافرت لديك المعلومات الاتية عن دالة التكلفة الكلية لانتاج سلعتين:

$$TC=Q_1Q_2^{-1}+2Q_2$$

المطلوب : ايجاد عدد الوحدات المنتجة من كل سلعة لتحقيق اقل كلفة معينة ضمن القيد الاتي:

$$Q_1+Q_2=10$$

الحل

تتم كتابة دالة الكلفة اعلاه بالصيغة الاتية: $TC=\frac{Q_1}{Q_2}+2Q_2$

باستخدام معادلة القيد يتم استخراج الكمية الاولى بدلالة الثانية وكما ياتي:

$$Q_1=10-Q_2$$

ثم نعوض عن قيمة Q_1 في دالة الكلفة فنحصل على الاتي:-

$$TC=\frac{10-Q_2}{Q_2}+2Q_2$$

$$TC=\frac{10-Q_2+2Q_2^2}{Q_2}$$

بتطبيق قاعدة مشتقة قسمة دالتين نشتق دالة الكلفة بالنسبة للمتغير Q_2 :

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2}=\frac{Q_2((-1)+4Q_2)-(10-Q_2+2Q_2^2)(1)}{Q_2^2}=0$$

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2}=\frac{-Q_2+4Q_2^2-10+Q_2-2Q_2^2}{Q_2^2}=0$$

$$\frac{\partial TC}{\partial Q_2}=\frac{2Q_2^2-10}{Q_2^2}=0$$

$$2Q_2^2=10\Rightarrow\ Q_2^2=10\Rightarrow Q_2^2=\frac{10}{2}=5$$

$$Q_2=\sqrt{5}\approx 2$$

نجد المشتقة الثانية لاختيار النقطة الحرجة وكما ياتي:-

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2}=\frac{(Q_2^2)(4Q_2)-(2Q_2^2-10)(2Q_2)}{Q_2^4}$$

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2}=\frac{20Q_2}{Q_2^4}=\frac{20}{Q_2^3}$$

نعوض قيمة $Q_2=2$ في المشتقة الثانية وكما ياتي:

$$\frac{\partial^2 TC}{\partial Q_2^2}=\frac{20}{(2)^2}=3.3>0$$

من النتيجة اعلاه يتبين مجود قيمة صغرى عند القيمة $Q_2=2$ ، ثم نعوض قيم $Q_2=2$ في معادلة القيد ونحصل على قيمة Q_1:

$$Q_1+Q_2=10$$
$$Q_1=10-2$$
$$Q_1=8$$

اذن النتيجة توضح انه لتقليل التكاليف لادنى مستوى ينبغي انتاج 8 وحدات من السلعة الاولى ووحدتين من السلعة الثانية.

مثال(5.5):

نفترض أن شركة ما تقوم بإنتاج نوعين من السلع ، وأن إجمالي تكلفتها :

$$TC=4Q_1^2+5Q_2^2-Q_1Q_2$$

إذ أن Q_1 تساوي إنتاج الشركة من السلعة الأولى في الساعة ، وأن Q_2 تساوي إنتاج الشركة من السلعة الثانية في الساعة . ونتيجة لالتزامات الشركة تجاه عملائها ، فإنه يتحتم على الشركة إنتاج ما لا يقل عن 30 وحدة في الساعة من السلعتين معا، ومن الطبيعي أن يرغب مدير الشركة في الوقوف على مستويات الإنتاج من السلعتين التي من شأنها تخفيض تكاليف الشركة إلى أدنى حد ممكن مع افتراض أن حاصل إنتاج السلعتين معا يساوي 30 وحدة في الساعة .

الحل

يمكن التعبير عن مثل هذا النوع من مشاكل الأمثلية المقيدة على النحو الآتي :

دالة الكلفة الكلية : $TC=4Q_1^2+5Q_2^2-Q_1Q_2$

ضمن القيد الاتي: $Q_1+Q_2=30$

وبالطبع يتمثل القيد في أنه لا بد أن تكون : $Q_1+Q_2=30$. ولحل مشكلة قيد Q_1 علينا أن نتتبع الخطوات الآتية:

$$Q_1 = 30 - Q_2$$

وبالتعويض عن $Q_1 = 30 - Q_2$ بـ Q_1 في معادلة دالة الكلفة الكلية نجد أن :

$$\begin{aligned} TC &= 4(30 - Q_2)^2 + 5Q_2^2 - (30 - Q_2)Q_2 \\ &= 4(900 - 60Q_2 + Q_2^2) + 5Q_2^2 - 30Q_2 + Q_2^2 \\ &= 3600 - 270Q_2 + 10Q_2^2 \end{aligned}$$

يتم الحصول على مشتقة TC بالنسبة إلى Q_2 ، وجعلها مساوية للصفر .

$$\frac{dTC}{dQ_2} = -270 + 20Q_2 = 0$$

$$20Q_2 = 270$$
$$Q_2 = 13.5$$

وللتحقق من أنها نهاية صغرى - لا عظمى - ينبغي الحصول على المشتقة الثانية وهي :

$$\frac{d^2TC}{dQ_2^2} = 20$$

وبما أن هذه المشتقة الثانية موجبة ، لذا فإن الناتج نهاية صغرى .

ولإيجاد قيمة Q_1 التي تصل بالتكلفة الإنتاجية إلى أدنى حد ، علينا أن نتذكر أن القيد يتطلب أن تكون : $Q_1 + Q_2 = 30$ ، أي أن:

$$Q_1 = 30 - Q_2$$

ولما كنا على علم بأن القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5 ، فإنه من الطبيعي أن تكون القيمة المثلى لـ Q_1 هي $Q_1 = 30 - 13.5 = 16.5$. وجملة القول هو أنه إذا ما أرادت الشركة الحد من إجمالي تكلفتها إلى أدنى درجة ممكنة مع وجود قيد الإنتاج وهو ألا يزيد إجمالي إنتاجها من السلعتين معا عن 30 وحدة ، فإنه يتعين على الشركة القيام بإنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى و 13.5 وحدة من السلعة الثانية في الساعة ، أي أنه ينبغي أن تقوم الشركة بإنتاج 33 وحدة من السلعة الأولى و 27 وحدة من السلعة الثانية كل ساعتين .

بالتعويض عن Q_1 بـ 16.5 و عن Q_2 بـ 13.5 ، في معادلة دالة الكلفة الكلية ، نجد أن إجمالي تكلفة الشركة تساوي :

$$\begin{aligned} TC &= 4(16.5)^2 + 5(13.5)^2 - (16.5)(13.5) \\ &= 4(272.25) + 5(182.25) - 222.75 \\ &= 1089 + 911.25 - 222.75 \\ &= \$1777.5 \end{aligned}$$

مثال(5.6): لديك دالة الانتاج الاتية:

$$Q = 4LK + L^2$$
$$subject\ to$$
$$K + 2L = 105$$

المطلوب: جد مستويات K و L التي تعظم الناتج

الحل

تعاد كتابة معادلة القيد كما ياتي:-

$$K = 105 - 2L$$

تعوض معادلة القيد في دالة الانتاج وكما ياتي:-

$$Q = 4L(105 - 2L) + L^2 = 420L - 8L^2 + L^2 = 420L - 7L^2$$

نلاحظ ان دالة الهدف أي دالة الانتاج تحتوي متغيرا واحدا هو L ، والان نحسب المشتقة الاولى بالنسبة الى L وكما ياتي:-

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 420 - 14L = 0 \Rightarrow L = \frac{420}{14} = 30$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -14 < 0$$

اقصى انتاج يمكن الحصول عليه بتعويض قيمة L في دالة الانتاج:

$$Q = 420L - 7L^2$$

$$Q = 420(30) - 7(30)^2 = 6300$$

وبتعويض قيمة L في دالة القيد نحصل على قيمة K وكما ياتي:

$$K = 105 - 2L \Rightarrow K = 105 - 2(30) = 45$$

اذن من الحل ينبغي على المنشأة استخدام 30 وحدة من العمل و 45 وحدة من رأس المال لتحقيق اقصى انتاج وهو 6300.

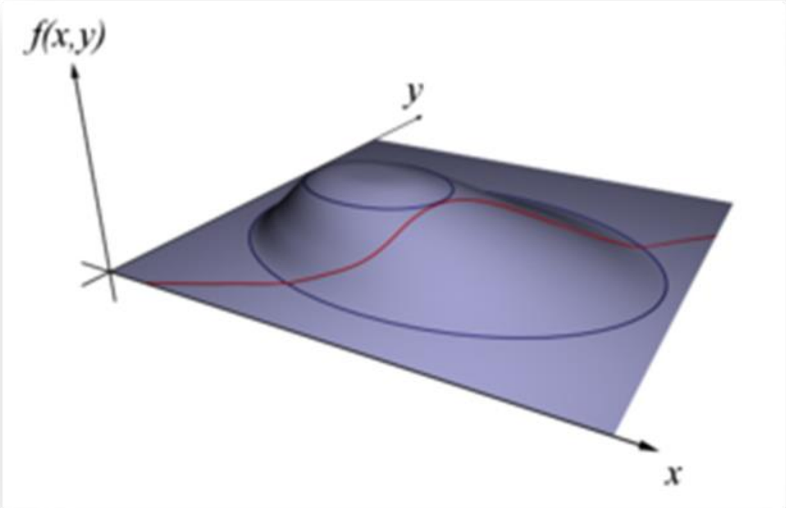
الامثلية المقيدة ومضاعف لاكرانج *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier*

قد يكون الأسلوب الذي قمنا بتناوله فيما سبق ذا جدوى محدودة للتطبيق عند كثرة القيود أو تعقدها ، لذلك يمكن الاستعانة بمضاعفات ***Lagrange*** . وتنطوي هذه الطريقة الخاصة بحل مشكلات الأمثلية المقيدة على تكوين معادلة تعرف بدالة ***Lagrange*** ، وهي المعادلة التي تشتمل على كل من الدالة المراد الحصول على أقصى أو اصغر قيمة لها من ناحية والقيود أو الضوابط من ناحية أخرى ، وتتم صياغة هذه المعادلة لتكون هناك حقيقتان :

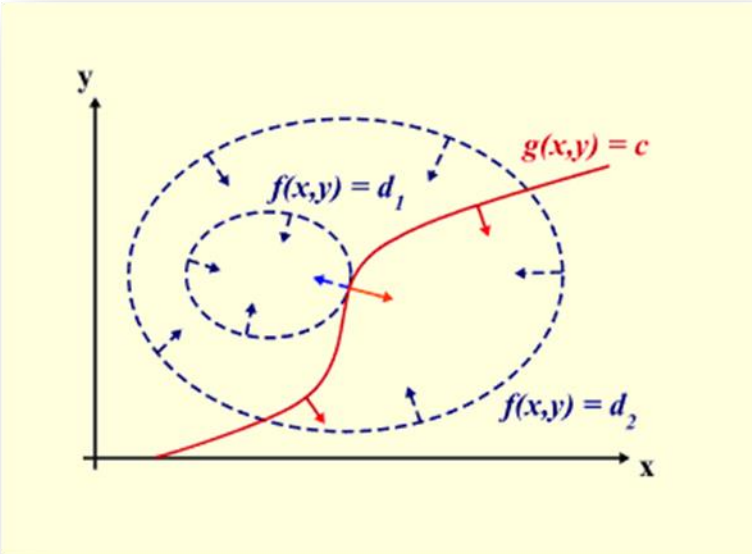
(1) عندما تبلغ هذه المعادلة أقصى - أو أصغر - قيمة لها ، تكون الدالة الأصلية عند أقصى - أو أصغر - قيمة لها بالفعل .

(2) وفي هذه الحالة نكون قد واجهنا الضوابط أو القيود جميعها.

ويشير الشكل البياني (34) الى الامثلية المقيدة بشكلها المجسم ذي الابعاد الثلاثة:-



شكل (34) الامثلية المقيدة : ايجاد قيمة x و y التي تعظم الدالة $f(x,y)$ ضمن القيد الموضح باللون الاحمر $g(x,y) = c$



شكل (35): يمثل الخريطة المناسيبية للشكل (34)

يشير الشكل البياني (35) الخريطة المناسيبية للشكل البياني (34) ويشير الخط الاحمر الى القيد $g(x,y) = c$ ، في حين تشير الخطوط الزرقاء الى تناسبيات الدالة $f(x,y)$، اما النقطة التي تقع عند نقطة تماس الخط الاحمر والخط الازرق تشير الى نقطة الحل ، حيثما $d_1 > d_2$ ، والحل هو تعظيم الدالة $f(x,y)$.

ولإيضاح كيفية بناء إحدى دوال ***Lagrange*** ، علينا معاودة الحديث عن المشكلة التي واجهتها الشركة في مثالنا السابق (5.5). فقد أشرنا إلى أن الشركة ترغب في الوصول بـ TC إلى أصغر قيمة لها بحيث : $TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2$ ، عند وجود قيد $Q_1 + Q_2 = 30$. ولعل أولى الخطوات الواجب إتباعها عند تكوين دالة ***Lagrange*** لمواجهة مشكلة هذه الشركة هي القيام بإعادة صياغة القيد الذي تواجهه الشركة في شكل معادلة مساوية للصفر :

$$30 - Q_1 - Q_2 = 0 \qquad (1)$$

فإذا قمنا بضرب هذا النوع من القيود في عامل مجهول نشير إليه بـ λ ، ثم نجمع النتيجتين على الدالة التي نرغب في الحصول على قيمتها الصغرى في المعادلة (2) فإننا نحصل على دالة ***Lagrange*** وهي :

$$L_{tc} = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 + \lambda\left(30 - Q_1 - Q_2\right) \qquad (2)$$

ولأسباب سيرد ذكرها في الفقرة الآتية يمكننا التحقق من أنه إذا ما تمكننا من إيجاد القيمة العظمى - أو الصغرى - غير المقيدة لدالة ***Lagrange*** فإن الحل سوف يكون مطابقا تماما لحل المشكلة الأصلية للقيمة العظمى - أو الصغرى - المقيدة ، وبعبارة أخرى ، فإن حل مشكلة الأمثلية المقيدة يتطلب منا القيام بتحقيق أمثلية دالة Lagrange. ففي حالة شركتنا هنا ، لا بد لنا من إيجاد قيم كل من Q_1 و Q_2 و λ التي تؤدي إلى الوصول بـ L_{tc} إلى أصغر قيمة لها في المعادلة (1) . وللقيام بذلك ، يتحتم علينا إيجاد المشتقة الجزئية لـ L_{tc} بالنسبة إلى كل من هذه المتغيرات الثلاثة Q_1 و Q_2 و λ :

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial Q_1} = 8Q_1 - Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial Q_2} = -Q_1 + 10Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial \lambda} = -Q_1 - Q_2 + 30$$

وكما أشرنا فيما سبق ، أنه ينبغي أن نجعل هذه المشتقات الجزئية الثلاثة مساوية للصفر حتى نتمكن من الحصول على أدنى قيمة لـ L_{tc} وهكذا فإن :

$$8Q_1 - Q_2 - \lambda = 0 \qquad (3)$$

$$-Q_1 + 10Q_2 - \lambda = 0 \qquad (4)$$

$$-Q_1 + Q_2 + 30 = 0 \qquad (5)$$

كما أنه من الضروري ملاحظة أن المشتقة الجزئية لدالة ***Lagrange*** بالنسبة إلى λ (أي أن : $\partial L_{tc} / \partial\lambda$) عندما تكون مساوية للصفر في المعادلة (5) هي نفسها القيد الموجود في مشكلة الأمثلية الأصلية [راجع المعادلة (1)] ويعود السبب في ذلك إلى الأسلوب الذي تتألف منه دالة ***Lagrange***، ولذلك فإذا كانت هذه المشتقة تساوي صفر ، يمكننا التأكد من استيفاء هذا القيد الأصلي لمتطلباته ، وفي هذه الحالة يكون الحد الأخير على يمين دالة ***Lagrange*** صفراً ، وهكذا تؤول دالة ***Lagrange*** إلى الدالة الأصلية التي كنا نرغب في الحصول على القيمة العظمى - أو الصغرى - لهاو وهو الأمر الذي يعني نجاحنا في حل المشكلة الأصلية للأمثلية المقيدة إذا ما تمكنا من الحصول على أكبر - أو أصغر - قيمة ممكنة لدالة ***Lagrange*** .

وبمعاودة الحديث عن الشركة موضوع البحث نجد أن المعادلات (3) ، (4) ، (5) هي ثلاث معادلات آنية في ثلاث مجاهيل هي Q_1 و Q_2 و λ ، فإذا تمكننا من حل هذا النوع من المعادلات لـ Q_1 و Q_2 ، فإننا نحصل على القيم المثلى لـ Q_1 و Q_2 ، وبطرح المعادلة (4) من المعادلة (3) نجد أن :

$$9Q_1 - 11Q_2 = 0 \qquad (6)$$

وبضرب المعادلة (5) في المقدار 9 وإضافة الناتج إلى المعادلة (6) نتمكن من إيجاد الحل لـ Q_2 :

$$-9Q_1 - 9Q_2 + 270 = 0$$

$$9Q_1 - 11Q_2 \qquad = 0$$

$$-20\,Q_2 + 270 \qquad = 0$$
$$Q_2 = 270 / 20$$
$$= 13.5$$

وهكذا تكون القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5 وبالتعويض عن Q_2 بـ 13.5 في المعادلة (5) ، نجد أن القيمة المثلى لـ Q_1 هي 16.5 .

وهكذا فإننا نصل إلى النتيجة نفسها : وهي أن القيمة المثلى لـ Q_1 هي 16.5 وأن القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5. وبعبارة أخرى، فإنه يتحتم على الشركة إنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى و 13.5 وحدة من السلعة الثانية في الساعة . كما يتضح أن طريقة مضاعفات ***Lagrange*** هذه أفضل من تلك التي سبق لنا تفصيلها وذلك لسببين في الأقل:

(1) أنها قادرة على معالجة أكثر من قيد واحد .

(2) أن قيمة λ تمد صانع القرار بمعلومات مهمة ونافعة .

إن λ [والتي تعرف بمضاعف ***Lagrange***] فإنها تستخدم خصيصا لقياس ما يحدث من تغير في العامل أو المتغير الذي نرغب في الحصول على أقصى أو أدنى قيمة لـ TC في هذه الحالة مع افتراض إمكانية تجاوز القيد بمقدار وحدة واحدة فإذا كانت الشركة ترغب في تخفيض إجمالي نفقاتها إلى أدنى حد ممكن مع وجود قيد إنتاجي يسمح لها بإجمالي إنتاج 31 وحدة من السلعتين معاً بدلاً من 30 وحدة فقط ، وكانت قيمة λ هي التي توضح مقدار الزيادة في القيمة الصغرى لـ TC ، فما هي قيمة λ وطبقا للمعادلة (3) ، وبالتعويض عن $Q_1 = 16.5$ و $Q_2 = 13.5$ تصبح :

$$\lambda = 8(16.5) - 13.5 = 118.5$$

معنى ذلك أنه في حالة تجاوز الإنتاج بمقدار وحدة واحدة ، بحيث يكون إجمالي الإنتاج 31 بدلاً من 30 وحدة ، فسوف يرتفع إجمالي التكلفة بمقدار 118.50 دولار .

وتعد هذه المعلومات ذات قيمة كبرى في حالة الكثير من القرارات الإدارية فعلى فرض ان أحد عملاء شركات أراد شراء احدى السلعتين اللتين تنتجهما الشركة مقابل 115 دولار ، سوف يتحتم على الشركة زيادة إجمالي إنتاجها إلى 31 وحدة في الساعة . وبناء على المعلومات السابق إيضاحها ، فإنه ليس من الصواب بمكان أن توافق الشركة على هذا العرض ، إذ أن هذه الوحدة الإضافية المنتجة سوف ترفع التكاليف بمقدار 118.50 دولار ، أي بزيادة قدرها 3.50 دولار عن الثمن الذي سوف يدفعه العميل(الزبون) مقابل هذه الوحدة الإضافية .

مثال (5.7): اذا كانت دالة المنفعة للسلعتين x_1 و x_2 هي

$$U = (x_1, x_2) = x_1 x_2 + 4x_1$$

اوجد حجم الاستهلاك الامثل من السلعتين لتحقيق اعلى منفعة ممكنة اذا كان قيد الكلفة للسلعتين هو : $8x_1 + 4x_2 = 120$

الحل

باتباع خطوات طريقة لاكرانج

$$L = x_1 x_2 + 4x_1 + \lambda(8x_1 + 4x_2 - 120)$$

نجد المشتقات الجزئية لكل من x_1 و x_2 و λ

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=x_2+4+8\lambda=0 \Rightarrow 8\lambda=-x_2-4 \Rightarrow \lambda=-0.125x_2-0.5 ....(1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=x_1+4\lambda=0 \quad \Rightarrow 4\lambda=-x_1 \quad \Rightarrow \lambda=-0.25x_1 \quad ....(2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=8x_1+4x_2-120=0 ....(3)$$

$\because$ كلا من معادلة (1) ومعادلة (2) تساوي λ

$$\therefore -0.125x_2-0.5=-0.25x_1$$

بضرب طرفي المعادلة بـ(-1) ثم التقسيم على معامل x_1 نحصل على الاتي:-

$$0.5x_2+2=x_1$$

نعوض قيمة x_2 في معادلة القيد رقم (3) فنحصل على الاتي:-

$$8(0.5x_2+2)+4x_2-120=0$$
$$4x_2+16+4x_2-120=0$$
$$8x_2+16=120$$
$$8x_2=120-16$$
$$8x_2=104 \Rightarrow x_2=\frac{104}{8}=13$$

للحصول على قيمة x_1 نعوض x_2 في معادلة القيد (3):

$$8x_1+4(13)-120=0$$
$$8x_1+52-120=0$$
$$8x_1-68=0$$
$$x_1=\frac{68}{8}=8.5$$

ونكون بذلك قد اوجدنا حجم الاستهلاك من السلعتين والذي يحقق اكبر منفعة ممكنة والتي تساوي المقدار الاتي بعد تعويض كل من قيم السلعتين في دالة المنفعة:

$$U=(x_1,x_2)=x_1x_2+4x_1$$
$$U=(8.5)(13)+4(8.5)$$
$$U=110.5+34$$
$$U=144.5$$

مثال (5.8): منتج محتكر ينتج سلعتين هما G1 و G2 لديه دالة التكاليف المشتركة الاتية:

$$TC=10Q_1+Q_1Q_2+10Q_2$$

Q_1 **: تشير الى الكميات المنتجة من السلعة G1.**

Q_2 **: تشير الى الكميات المنتجة من السلعة G2 .**

وكانت دوال الطلب التي يواجهها المحتكر هي:-

$$P_1=50-Q_1+Q_2$$
$$P_2=30+2Q_1-Q_2$$

المطلوب: احسب اقصى ارباح يمكن الوصول اليها ضمن القيد الاتي:-

$$Q_1+Q_2=15$$

الحل

$$\pi = TR - TC$$
$$TC = 10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2$$

للحصول على معادلة الايراد الكلي من بيع السلعة G1 نتبع الاتي:-

$$TR_1 = P_1Q_1 = (50 - Q_1 + Q_2)Q_1 = 50Q_1 - Q_1^2 + Q_2Q_1$$

وكذلك الحال للسلعة G2 :-

$$TR_2 = P_2Q_2 = (30 + 2Q_1 - Q_2)Q_2 = 30Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$

ثم نستخرج معادلة الايراد الكلي للسلعتين:-

$$TR = TR_1 + TR_2$$
$$= 50Q_1 - Q_1^2 + Q_2Q_1 + 30Q_2 + 2Q_1Q_2 - Q_2^2$$
$$= 50Q_1 - Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2$$

وبعد الحصول على معادلة الايراد الكلي والكلفة الكلية نكتب معادلة الربح :

$$\pi = TR - TC$$
$$= (50Q_1 - Q_1^2 + 3Q_1Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2) - (10Q_1 + Q_1Q_2 + 10Q_2)$$
$$= 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2$$

اصبح لدينا المشكلة الرياضية لتعظيم دالة الهدف هنا كما ياتي:-

$$\pi = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2$$
$$subject\ to:$$
$$Q_1 + Q_2 = 15$$

باستخدام صيغة لاكرانج :-

$$L = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2 + \lambda(15 - Q_1 - Q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = 40 - 2Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 40 - 2Q_1 + 2Q_2 \ldots\ldots.(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_2} = 2Q_1 + 20 - 2Q_2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2Q_1 + 20 - 2Q_2 \ldots\ldots.(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 15 - Q_1 - Q_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

بما ان كل من معادلة (1) ومعادلة (2) تساوي λ نحصل على الاتي:

$$40 - 2Q_1 + 2Q_2 = 2Q_1 + 20 - 2Q_2$$
$$40 - 2Q_1 + 2Q_2 - 2Q_1 - 20 + 2Q_2 = 0$$
$$20 - 4Q_1 + 4Q_2 = 0 \qquad \div 4$$
$$5 - Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q_2 = Q_1 - 5$$

وبتعويض قيمة Q_2 في معادلة (3) نحصل على:-

$$15-Q_1-(Q_1-5)=0$$
$$15-Q_1-Q_1+5=0$$
$$20-2Q_1=0$$
$$20=2Q_1$$
$$Q_1=10$$
$$\therefore Q_2=10-5=5$$

وبتعويض قيمة Q_2,Q_1 في دالة الربح نحصل على الاتي:-

$$\pi=40(10)-(10)^2+2(10)(5)+20(5)-(5)^2$$
$$\pi=475$$

اسئلة الفصل الخامس

س1:- لديك دالة المنفعة الاتية :

$$U=X^{0.6}Y^{0.25}$$

المطلوب// ماهي افضل توليفة من السلعتين التي يجب ان تستهلك لغرض تعظيم المنفعة اذا علمت ان هذه الدالة مقيدة بالشرط الاتي:

$$8X+5Y=680$$

س2:- منشأة تبيع منتوجين X و Y في سوقين مرتبطين وكانت دوال الطلب كالاتي:-

$$P_X-13+2X+Y=0$$
$$P_Y-13+X+2Y=0$$

فاذا كانت $TC=X+Y$.

المطلوب// جد السعر ومقدار الناتج من كل سلعة الذي يعظم الارباح . ثم تحقق من ان هذه الارباح كانت عند نهايتها العظمى في تلك النقطة.

س3:-لتكن دالة المنفعة معطاة بالشكل الاتي:-

$$U=2LogX_1+LogX_2$$

وقيد الميزانية:-

$$2X_1+4X_2=36$$

المطلوب//

جد مستويات X_1 و X_2 التي تعظم منفعة المستهلك بوجود قيد الميزانية

س4:- منتج محتكر لسلعتين يواجه دالتي الطلب الاتيتين :-

$$P_1=50-Q_1$$

$$P_2=95-3Q_2$$

وكانت دالة كلفته هي:-

$$TC=Q_1^2+3Q_1Q_2+Q_2^2$$

المطلوب// جد قيم (Q_1) و (Q_2) التي تعظم الربح .

س5:- لديك دالة المنفعة الاتية :-

$$U=260x_1+310x_2+5x_1x_2-10x_1^2-x_2^2$$

المطلوب// احسب قيم كل من x_1 و x_2 التي تعظم المنفعة U.

س6:- لديك دالة المنفعة الاتية :

$$U=x_1x_2$$

ضمن القيد الاتي:-

$$2x_1+10x_2=400$$

المطلوب// جد مستويات x_1,x_2 التي تعظم دالة المنفعة

س7:- جد مستويات $L\,,K$ التي تدني دالة الكلفة الكلية الاتية:-

$$TC=4K+3L$$

ضمن القيد الاتي:-

$$2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=160$$

س8:- اعطيت دالة انتاج منشأة ما :-

$$Q=10K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$$

وكانت دالة القيد هي:-

$$4K+5L=60$$

المطلوب// احسب مستويات $L\,,K$ التي تعظم الناتج.

س9:- لديك دالة منفعة لمستهلك :-

$$U=\ln x_1+2\ln x_2$$

المطلوب// جد قيم x_2,x_1 التي تعظم المنفعة ضمن قيد الميزانية الاتي:-

$$2x_1+3x_2=18$$

باستخدام مضاعفات لاكرانج اجب عن الاسئلة الاتية:-

س10:- استخرج قيم x_2,x_1 التي تعظم دالة المنفعة الاتية:-

$$U(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 3x_1$$

المقيدة بالقيد الاتي:-

$$x_1 + 2x_2 = 83$$

س11:- جد القيمة القصوى لدالة الانتاج الاتية :-

$$Q = 10\sqrt{KL}$$

ضمن القيد الاتي:-

$$K + 4L = 16$$

س12:- منتج محتكر ينتج سلعتين هما G1و G2 ولديه دالة الكلفة الاتية:-

$$TC = 5Q_1 + 10Q_2$$

ويواجه دالتي الطلب الاتيتين:-

$$P_1 = 50 - Q_1 - Q_2$$
$$P_2 = 100 - Q_1 - 4Q_2$$

المطلوب// احسب اقصى ارباح ضمن القيد الاتي:-

$$Q_1 + Q_2 = 100$$

مصادر الفصل الخامس:

1- اسس الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.
2- الاقتصاد الرياضي . كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.
3- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . 1991.
4- حسين علي بخيت - مباديء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.
5- الرويس ،خالد.. اقتصاديات الإنتاج الزراعي.(كتاب منشور على صفحات الانترنيت) جامعة الملك سعود. كلية علوم الأغذية والزراعة. قسم الاقتصاد الزراعي. 2009.
6- الرياضيات الاقتصادية – كتاب منشور على شبكة المعلومات الدولية.
7- مناضل الجواري . الاقتصاد الرياضي. دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع.عمان. 2010.

8-Chiang,A.C; Fundamental Methods of Mathematical Economics. McGraw Hill. 1984.
9- Jacques . Jan. mathematics for Economics and Business. 5th edition. Printice Hall. 2006.
10- John Baxley. Optimization Methods in Economics. Department of Mathematics. Wake Forest University. Published on line . www. google.com.
11-John V. Baxley and John C. Moorhouse. Lagrange Multiplier Problems in Economics. Wake Forest University,Winston-Salem, NC 27109. Published on line . www. google.com.

12- K. Madsen, H.B. Nielsen, O. Tingleff . Optimization with Constraints. 2nd Edition, March 2004**.** . Published on line . www. google.com.
13- Michael D. Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory (Classics in Applied Mathematics). Publisher: Society for Industrial Mathematics | 2002| .
14-Shuonan Dong . Methods for Constrained Optimization. Published on line . www. Mathematics.com. 2006.

الفصل السادس

دوال الانتاج

Production Functions