يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- **مفهوم دالة الانتاج**
- **اشكال دوال الانتاج**
- **عوائد الحجم**
- **تعظيم ارباح المنشأة باستخدام دالة كوب دوكلاص**
- **اشتقاق دالة التكاليف من دالة انتاج كوب دوكلاص**
- **دالة الانتاج ذات مرونة الاحلال الثابتة**
- **الدوال الانتاجية الجبرية من الدرجة الثانية**
- **دوال الانتاج غير الجبرية**

الفصل السادس
دوال الانتاج
Production Functions

مقدمة

يتناول هذا الفصل نظرية الانتاج فضلا عن التعرف على بعض دوال الانتاج الشائعة في الاقتصاد، كما سنستعرض مختلف مؤشرات دوال الانتاج بالاعتماد على مفاهيم الاشتقاق الجزئية ثم ننتقل الى دوال الانتاج المتجانسة وخواصها ، ويشمل هذا الفصل ايضا الشكل العام لدالة الانتاج ومؤشراتها والمعدل الحدي للاحلال ومرونة الاحلال فضلا عن موضوعات اخرى.

دالة الانتاج *Production Function*

تمثل دالة الانتاج مجموعة العلاقات الممكنة والكفوءة فنيا *Technically Efficient* بين عناصر الانتاج وكمية الانتاج . فاذا تم التعبير عن كمية الانتاج التي تمثل المتغير التابع *Dependent Variable* الرمز Y ، واعطيت عناصر الانتاج وهي المتغيرات المستقلة *Independent Variables* الرموز $X_1, X_2, ..., X_n$ فان دالة الانتاج تاخذ الشكل الاتي:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$$

كما يمكن ان تعرف دالة الانتاج بانها((علاقة تربط بين عناصر الانتاج (المدخلات)(Inputs) والناتج النهائي (المخرجات) (Outputs))). وتعبر عن الحالة الفنية التي تربط المدخلات والمخرجات، وتقوم هذه العلاقة على اساس استخدام عناصر الانتاج باشكالها المختلفة والتي من اهمها العمل ***L*** ورأس المال ***K***.

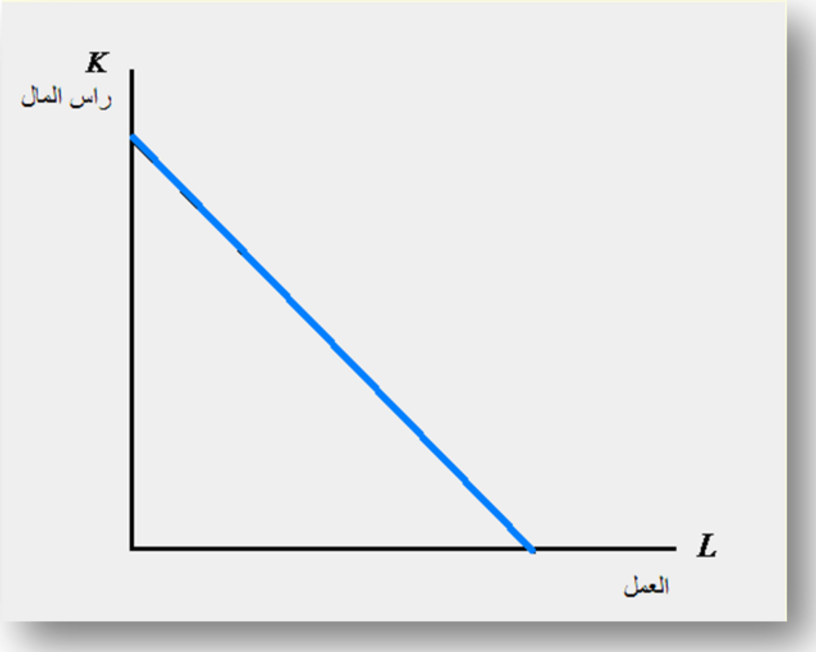
ويمكن صياغة دالة الانتاج في ابسط صورها من ان حجم الانتاج Y يرتبط بعلاقة دالية بعوامل الانتاج ، رأس المال والعمل والتقدم التقني، وتاخذ دالة الانتاج في هذه الحالة الشكل العام الاتي:-

$$Y = f(K, L)$$

إذ تمثل Y كمية الانتاج في وحدة الزمن ، اما K فتمثل كمية رأس المال و L تمثل حجم العمل المستخدم في العملية الانتاجية، أما التقدم التقني فيمكن ادخاله في العلاقة الدالية بطرائق عدة لا مجال للتعرض اليها هنا، وقد بذل الاقتصاديون القياسيون جهودا كبيرا لمحاولة توضيح الاشكال الرياضية لدوال الانتاج انطلاقا من الاحصاءات المتوفرة على مستوى المنشأة او القطاع الصناعي او الاقتصاد القومي وتنحصر مهمة الاقتصاد الرياضي في تحليل دوال الانتاج من الوجهة النظرية والرياضية وايجاد مؤشراتها بالاعتماد على مفاهيم الاشتقاق والتفاضل.
تتعدد اشكال دوال الانتاج وتتخذ صورا مختلفة إلا ان أكثرها شيوعا هي دوال الانتاج الاتية:

اولا- الدالة الخطية *Linear Function*

يفترض هذا الشكل من الدوال احلال كاملا بين عناصر الانتاج ، إذ ان السلعة هنا يمكن ان تنتج أما باستخدام رأس المال فقط أو عنصر العمل فقط أو بتوليفات لانهائية من العمل ورأس المال، وتتخذ الشكل الاتي:



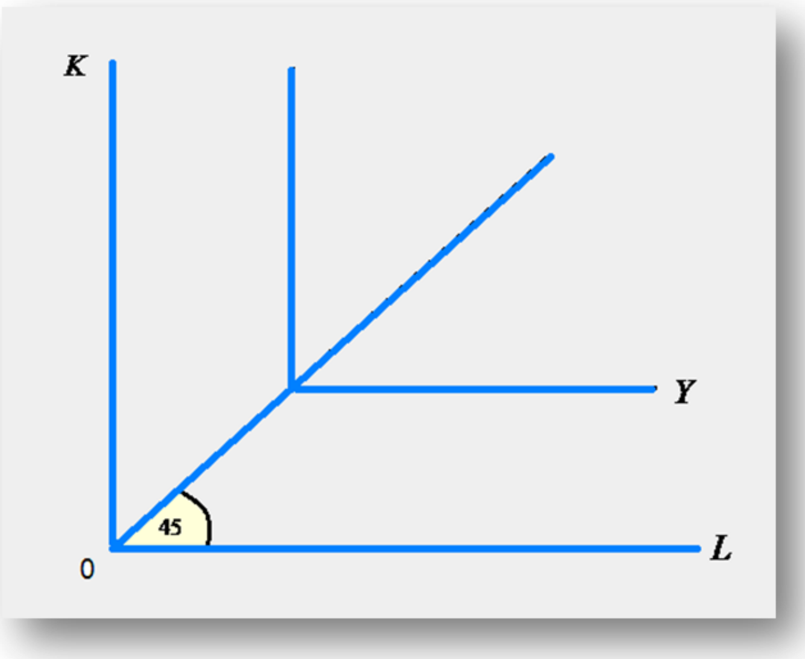
شكل (36) الشكل الخطي لدالة الانتاج

ثانيا- دالة المستخدم المنتج (دالة ليونيتيف) *Input-Output Function*

تعتمد الدالة في صياغتها على ان معامل الاحلال بين عناصر الانتاج يساوي صفرا ، الأمر الذي يعني ان هناك طريقة واحدة فقط لانتاج أي سلعة ، فإما أن يكون استخدام لعنصر رأس المال من دون أي استخدام لعنصر العمل او استخدام لعنصر العمل من دون أي استخدام لعنصر رأس المال وهذا يعني ان مرونة الاحلال بين عنصري رأس المال والعمل مساوية للصفر اي:-

$$\sigma=0$$

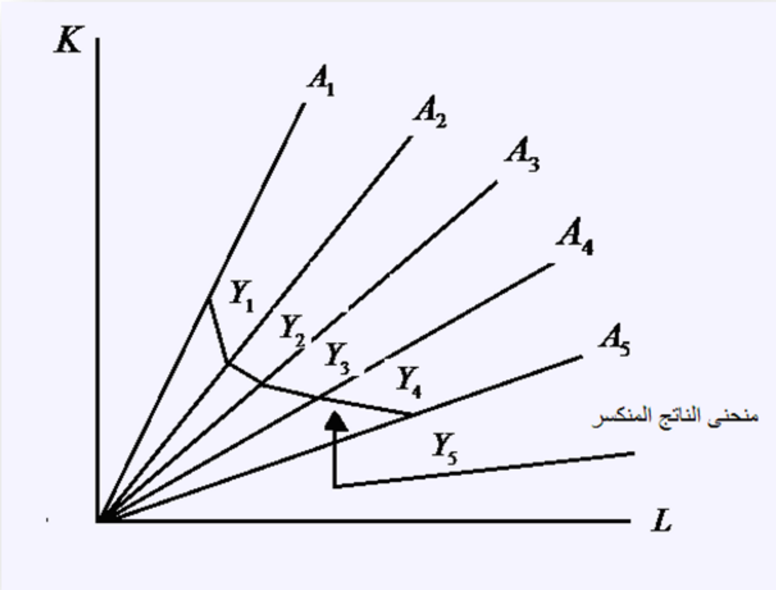
وتتخذ دالة ليونيتيف الشكل الاتي:-



شكل (37) دالة المستخدم المنتج – ليونيتيف

ثالثاً- دالة الناتج المتساوي المنكسر

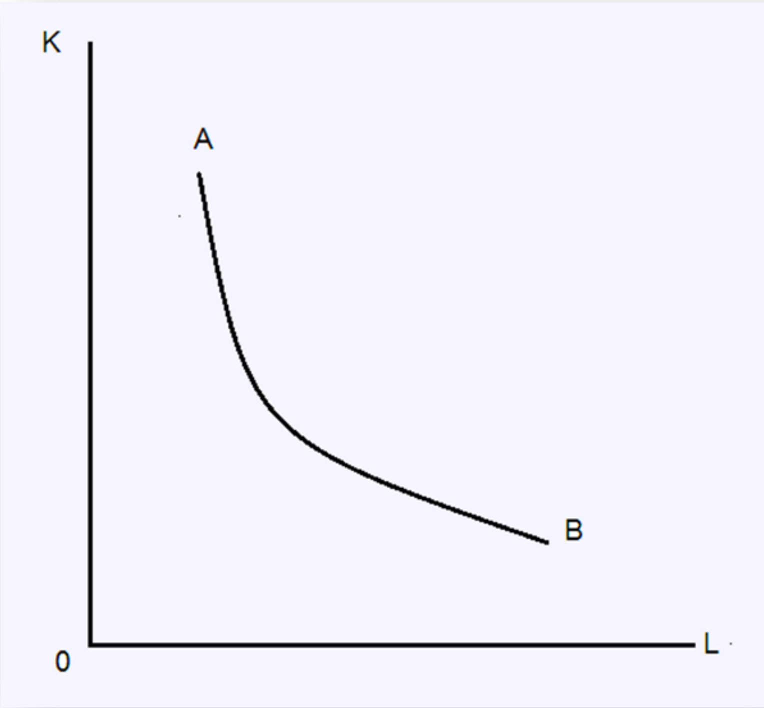
يمثل المنحنى المنكسر (Kinked Isoquant) في الشكل البياني (38) ويكون فيه الإحلال محدوداً بين عناصر الإنتاج (K,L) ، وتوجد طرائق قليلة فقط لإنتاج أي سلعة ، ويكون الإحلال ممكناً عند نقطة الانكسار ويسمى هذا الشكل أيضاً بمنحنى تحليل النشاط أو منحنى البرمجة الخطية ، إذ يميل عامة المنظمين ومهندسي الإنتاج إلى استخدام المنحنى المنكسر نظراً لأنهم ينظروا إلى عملية الإنتاج على أنها ذات اتجاه منفصل (Discrete) وليس مستمراً (Continuous) . ، وكما في الشكل الاتي:



شكل (38) منحنى الناتج المنكسر

رابعاً- دالة الناتج المتساوي المحدب تجاه نقطة الاصل

وهو الإحلال المحدود بين عنصري الإنتاج العمل ورأس المال (L,K) ، وهو المنحنى المحدب الأملس *Smooth-Convex Isoquant* . ويكون التحدب نحو نقطة الأصل لأنه يمثل إحلالا حديا متناقصا، وذلك لأن معدل الإحلال الحدي سوف يساوي النسبة بين الإنتاجية الحدية لأحد عناصر الإنتاج إلى الإنتاجية الحدية للعنصر الآخر في أي نقطة على منحنى الناتج المتساوي مما يجعل ميله سالبا ، فكلما ازداد القدر المستخدم من عنصر ما ازدادت صعوبة إحلالهِ محل العنصر الآخر جاعلاً النواتج الحدية لعناصر الإنتاج موجبة ومتناقصة والتي تمثل بدورها المنطقة الرشيدة للإنتاج ، ويعبر عنه بالشكل الآتي:



شكل (39) منحنى الناتج المحدب

ويعبر عن ذلك رياضياً بالآتي:-

إذا كانت دالة الانتاج $Y = f(K,L)$ ، فيمكن عند ذلك إشتقاق *MRTS* رياضيا , الذي يمثل ميل منحنى الناتج المتساوي , وذلك بأخذ التفاضل الكلي لدالة الانتاج وكما يأتي :-

$$dY = f_1 dK + f_2 dL$$

إذ تمثل f_1 و f_2 المشتقة الجزئية الاولى لكل من عنصري الانتاج K و L على التوالي بالنسبة لـ Y والتي تساوي الانتاجية الحدية لكل منهما. ولغرض المحافظة على مستوى الانتاج نفسه فإن ذلك يستوجب أن يكون $dY = 0$. وعند ذلك يمكن زيادة K بمقدار dK وتقليل L بمقدار dL , أي أن :-

$$f_1 dK + f_2 dL = 0$$
$$f_1 dK = -f_2 dL$$

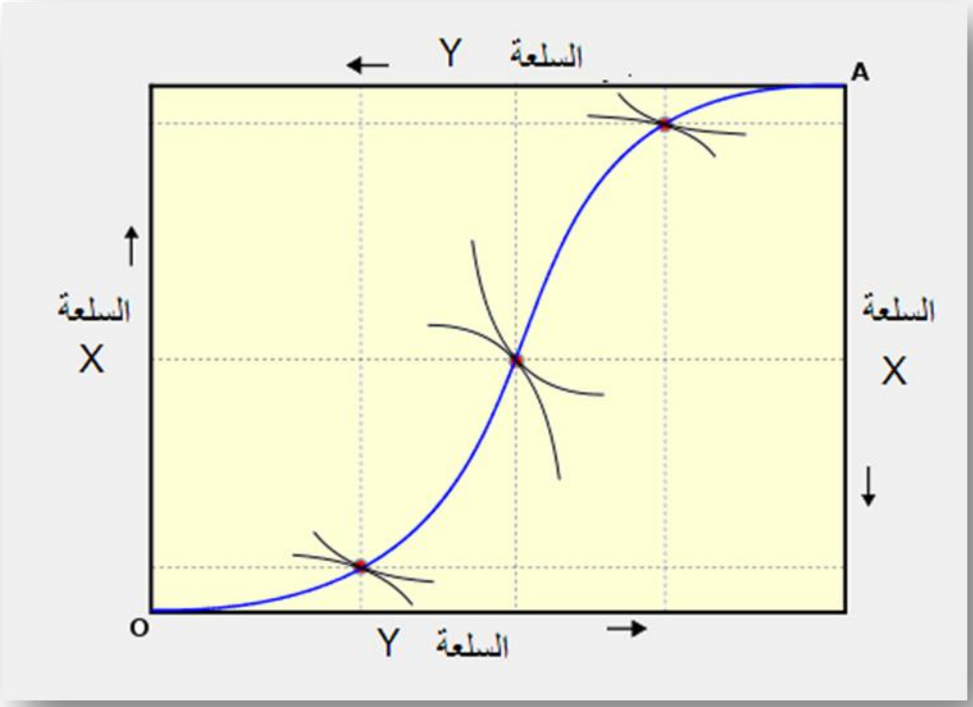
$$-\frac{dL}{dK} = \frac{f_1}{f_2} = -\frac{MPK}{MPL} = MRTS_{Lfor1}$$

Where $f_1 = MPK$
$f_2 = MPL$

إن هذا يقود إلى اصطلاح معدل الإحلال الحدي التقني (*Marginal Rate of Technical Substitution*) ، والذي يرمز له (MRS_t) ، ويعني تناقص الكميات المستخدمة من عنصر إنتاجي معين مقابل زيادة الوحدات المستخدمة من عنصر إنتاجي آخر مع بقاء مستوى الإنتاج من دون تغيير , وميل منحنى سواء المنتج يعبر عن ذلك الاصطلاح .

خامسا- دالة صندوق ايدجورث *Edgworth Box*

تستخدم هذه الدالة لانتاج سلعتين وليس سلعة واحدة وباستخدام خليط مختلف من عنصري الانتاج العمل ورأس المال إذ تتكون هنا دالتان بعدد السلع المنتجة ويكون لكل سلعة دالة انتاج.



شكل (40) دالة صندوق ايدجورث

سادسا – دالة كوب دوكلاس *Cobb-Douglas Function*

تستخدم هذه الدالة بشكل واسع في البحوث النظرية والتطبيقية ولهذا سيتم التركيز على هذا الشكل من دوال الانتاج في الصفحات القادمة.

تجدر الاشارة الى ان هناك ثلاثة قوانين أساسية تحكم العملية الإنتاجية وهي:

اولا:- وجود علاقة طردية بين حجم الإنتاج (y) والمستخدم من عوامل الإنتاج($x's$).

ثانيا:- قانون تناقص الغلة *Law of Diminishing Return*: إذ تتناقص الإنتاجية الحدية لعوامل الإنتاج عند زيادتها.

ثالثا:- غلة الحجم إذ تبين غلة الحجم نسبة الزيادة في حجم الإنتاج الكلي الناتجة من زيادة في مستوى النشاط(أي جميع عوامل الإنتاج المستخدمة) بنسبة معينة، فإذا بدأنا بالدالة:

$$Y=\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

ولقد أكتشف كل من *Paul Douglas,C.W Cobb* باستخدام بيانات عن علاقات واقعية للإنتاج على مدى أربعة وعشرين عاماً دالة من أكبر مميزاتها طواعيتها لتطبيق القوانين الثلاثة السابق الإشارة إليها، وقد ارتبطت هذه الدالة بإسميهما عام 1927م ويمكن كتابتها كما أتت في دراستهما رياضياً كما يأتي:

$$Y=\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

إذ أن:

Y= الناتج،

L= عدد العاملين (رجل/سنة)،

K= رأس المال،

β_0 = مقدار ثابت.

$\beta_1, \beta_2 =$ عوامل موجبة تختلف قيمتها من دالة لأخرى.

تعد هذه الدالة التي حاول فيها *Paul Douglas,C.W Cobb* تطويع بيانات عن الصناعة الأمريكية في المدة من 1899-1922م لقياس مدى مساهمة العمالة ورأس المال في الإنتاج من أهم أدوات التحليل الاقتصادي التي ظهرت حتى الآن والتي انتشرت بشكل واسع وما زالت تستخدم بكثرة في مجال الدراسات الاقتصادية، فضلاً عن أن هذه الدالة تعد الأداة التي مكّنت الاقتصاديين من بناء نماذج واكتشاف دوال أخرى أدت إلى إحداث طفرة واضحة في أساليب التحليل الاقتصادي في عصرنا هذا ولهذا فإن دراسة هذه الدالة بالتفصيل من كافة جوانبها تعد هدفاً أساسياً في هذا الجزء من المادة.

كيفية إنطباق القوانين الثلاثة على هذه الدالة:

أولاً: مرونة الإنتاج بالنظر إلى عامله

ويقصد بها درجة استجابة التغير في حجم الإنتاج نتيجة التغير في حجم أحد عوامل الإنتاج المستخدمة. بمفاضلة الدالة (1) بالنسبة لعنصر العمل L يتضح أن:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \left(\beta_0 L^{\beta_1 - 1} K^{\beta_2} \right)$$

$$= \beta_1 \frac{\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}}{L}$$

$$= \beta_1 \frac{Y}{L}$$

اذ ان:

$$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} * \frac{L}{Y} = \beta_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ويطلق على مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل L (العمالة) حيث أن النتيجة في المعادلة (2) تشير إلى أن:

معلمة عنصر العمل= التغير النسبي في حجم الناتج (Y) / التغير النسبي في عنصر العمل (L)

وبالطريقة السابقة نفسها يمكن إثبات أن مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر راس المال K تساوي β_2 أي أن:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} \frac{K}{Y} = \beta_2$$

فإذا زادت نسبة المستخدم من عنصر العمل (L) بنسبة 1% فان ذلك سيؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة β_1% بافتراض ثبات عنصر راس المال (K) واذا ازدادت نسبة المستخدم من عنصر راس المال بنسبة 1% فان ذلك سيؤدي الى زيادة الانتاج بنسبة β_2% بافتراض ثبات عنصر العمل(L).

ثانياً: تناقص الغلة

يعني قانون تناقص الغلة، تناقص الإنتاجية الحدية. أي أن الإنتاجية الحدية لعنصر العمل L هي:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \frac{Y}{L}$$

أي أن الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج L $\beta_1 \frac{Y}{L}$ تتناقص بزيادة المستخدم من L وقياساً على ذلك فإن الإنتاجية الحدية للعامل K هي:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \beta_2 \frac{Y}{K}$$

أي ان الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج K $\beta_2 \frac{Y}{K}$ تتناقص هي الأخرى بزيادة المستخدم من K.

ثالثاً: غـلة الحجم

تبين غلة الحجم نسبة الزيادة في حجم الإنتاج الكلي الناتجة من زيادة في مستوى النشاط(أي جميع عوامل الإنتاج المستخدمة) بنسبة معينة، فإذا بدأنا بالدالة:

$$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

فإذا قررنا زيادة مستوى النشاط بالنسبة A فإن:

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 (AL)^{\beta_1} (AK)^{\beta_2} \\ &= \beta_0 A^{\beta_1} L^{\beta_1} (A^{\beta_2} K^{\beta_2}) \\ &= A^{\beta_1+\beta_2} (\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}) \\ &= A^{\beta_1+\beta_2} Y \end{aligned} \quad \text{.........................(3)}$$

أي إذا زاد حجم النشاط بنسبة A فإن حجم الإنتاج الكلي سيزيد بنسبة $A^{\beta_1+\beta_2}$ والمعادلة (3) يمكن أن تساعدنا في تقدير عائد السعة *Returns to Scale* وعلى ذلك إذا كانت:

(1) $\beta_1 + \beta_2 = 1$ فإن هذا يعني ثبات عائد السعة *Constant Returns to Scale*.

(2) $\beta_1 + \beta_2 > 1$ فإن هذا يعني تزايد عائد السعة *Increasing Returns to Scale*.

(3) $\beta_1 + \beta_2 < 1$ فإن هذا يعني تناقص عائد السعة *Decreasing Returns to Scale*

مثال(6.1): بين سمة عوائد الحجم في دوال الانتاج الاتية:

$$Y = 2L^{0.7} K^{0.6}$$

الحل

لكي نحسب عوائد الحجم في دوال الانتاج السابقة تضرب عوامل الانتاج L, K بقيمة ثابتة ولتكن مثلا m او A او أي رمز آخر وكما ياتي:-

$$\begin{aligned} Y &= 2L^{0.7} K^{0.6} \\ &= 2(mL)^{0.7}\ (mK)^{0.6} \\ &= 2(m)^{0.7}\ (L)^{0.7}\ (m)^{0.6}\ (K)^{0.6} \\ &= (m)^{0.7+0.6}\ 2(L^{0.7} K^{0.6}) \\ &= m^{1.3}\ Y \end{aligned}$$

$\because 1.3 > 1$ فان عوائد الحجم في هذه الدالة متزايدة. وهكذا يمكن استخدام الطريقة نفسها لمختلف اشكال دالة الانتاج.

فضلا عن الخصائص السابق الإشارة إليها فإن دالة كوب- دوكلاس Cobb-Douglas تتسم أيضاً بالآتي:

1- إن الدالة خطية في الصورة اللوغاريتمية أي أن:

$$Log Y = Log \beta_0 + \beta_1 Log L + \beta_2 Log K \text{..............(4)}$$

وتعد الصيغة (4) ذات أهمية خاصة إذ أن الدالة يتم تقدير معلماتها وهي في هذه الصورة المبسطة.

2- يعد الناتج الحدي للمورد دالة للناتج المتوسط فإذا كان الناتج الحدي للمورد مثلاً هو:

$$MP_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta_1 \frac{Y}{L} > 0$$
$$= \beta_1 (AP_L) > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وإذ أن AP تشير إلى الناتج المتوسط الذي يساوي الناتج الكلي Y مقسوماً على مورد الإنتاج L ، المعادلة (5) توضح أن مرونة الإنتاج للمورد L تساوي نسبة الإنتاج الحدي لمتوسط إنتاج المورد نفسه أي أن :

$$\beta_1 = \frac{MP_L}{AP_L}$$

يظل الناتج الحدي موجباً مادام مورد الإنتاج كذلك كما أن مجموعة النقاط التي تكون فيها الإنتاجية الحدية للموارد مساوية للصفر على خريطة سواء الإنتاج تشكل الخطوط الحرجة *Ridge Lines* للدالة والتي تحصر بداخلها توليفة الموارد الأكثر كفاءة من الناحية التقنية و التي يطلق عليها أيضاً المنطقة الرشيدة للإنتاج.

3- تسمح دالة كوب دوكلاس بظهور أحدى المراحل الثلاث للإنتاج والتي تكون فيها الإنتاجية الحدية إما ثابتة، متزايدة، أو متناقصة ويظهر هذا من خلال التفاضل الثاني للناتج بالنسبة لمستوى مورد الإنتاج كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \beta_1(\beta_1 - 1)\frac{Y}{L^2}$$

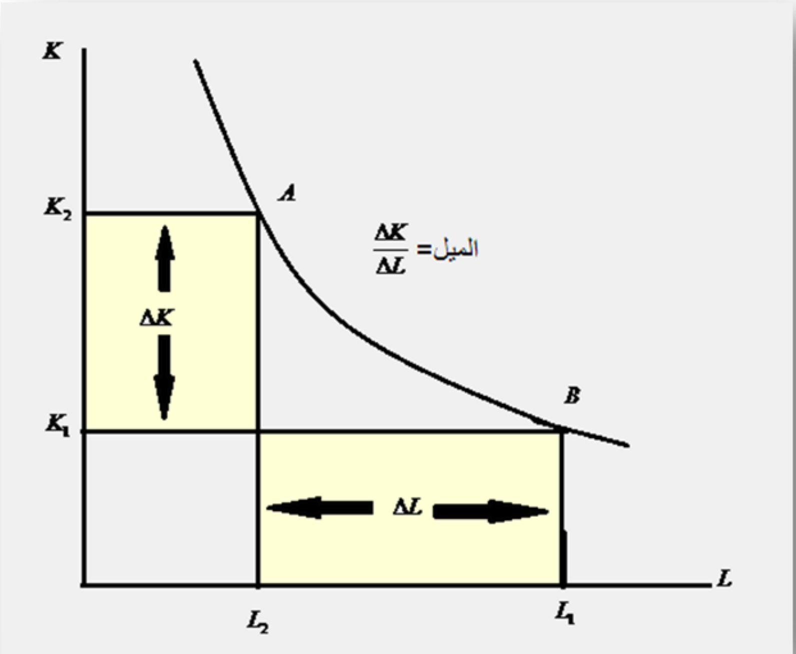
ويتضح من التفاضل الثاني أن قيمته سواء كانت صفرية، موجبة، أو سالبة إنما تتوقف على قيمة β_1

4- دالة كوب – دوكلاس هي دالة متجانسة من الدرجة $\beta_1 + \beta_2$ أي أن درجة التجانس تتوقف على مجموع مرونات الإنتاج E حيث:

$$E = \beta_1 + \beta_2$$

وكما سبق وأشرنا فإن درجة التجانس قد تكون مساوية للوحدة أو الصفر أو أكبر من الوحدة وذلك في حالات ثبات عائد السعة أو تناقصها أو تزايدها على الترتيب، هذا وتشير درجة التجانس إلى مدى استجابة الناتج للتغير في عنصري الإنتاج بنسبة واحدة.

5-إن القيم الموجبة لمرونة إنتاج الموردين والتي تقل عن الوحدة في هذه الدالة، إنما تعني أن منحنى سواء الإنتاج محدب تجاه نقطة الأصل مما يعني تناقص معدل الإحلال الحدي بين الموردين *Marginal Rate of Technical Substitution (MRTS)* كما في الشكل الاتي:



شكل (41) المعدل الحدي للاحلال الفني

$$MRTS_{LK} = \frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K}$$
$$= \frac{\beta_1 Y / L}{\beta_2 Y / K} = \frac{\beta_1 K}{\beta_2 L} ....(6)$$

ويتضح من المعادلة أنه كلما زاد إحلال L محل K فإن $MRTS_{LK}$ يتناقص باستمرار.

6- الدالة ليس لها نهاية عظمى ومن ثم ليس لها خطوط حرجة.

7- يتوقف الأسلوب التقني (طريقة مزج الموارد) على النسبة $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ في المعادلة (6). فمع ثبات معامل عنصر رأس المال فإن زيادة معامل العمالة β_1 تعني استخدام أسلوب تكثيف العمالة *Labour Intensive Technique* في الإنتاج على حساب الآلات أي بمعنى آخر استخدام قدر أكبر من العمالة والعكس إذا كانت قيمة β_2 أكبر من قيمة β_1 فإن استخدام إسلوب تكثيف رأس المال *Capital Intensive Technique* هو الأفضل للإنتاج. هذا وتجدر الإشارة إلى أن اختيار أي من الأسلوبين إنما يتوقف على أسعار هذين الموردين.

8- ثبات مرونة الإحلال ومساواتها للوحدة، تعرّف مرونة الإحلال *The Elasticity of Substitution* بأنها التغير النسبي في الموارد إلى التغير النسبي في معدل الإحلال الحدي أي أن:

σ = التغير النسبي في K/L / التغير النسبي في MRTS

$$\sigma = \frac{\%\Delta K / \%\Delta L}{\%\Delta MRTS}$$

إذ أن σ هي مرونة الإحلال، ولإثبات أن مرونة إحلال دالة *C-D* ثابتة ومساوية للوحدة فإن:

$$\sigma = \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\partial(\partial K/\partial L)/(\partial K/\partial L)} = \frac{\partial(K/L)/(K/L)}{\frac{\partial(\beta_1/\beta_2.K/L)}{(\beta_1/\beta_2.K/L)}} ....(7)$$

$$= \frac{\partial(K/L)(\beta_1/\beta_2)}{(\beta_1/\beta_1)\partial(K/L)} = 1$$

مما يعني أن الممر التوسعي لدالة كوب-دوجلاس يكون خطاً مستقيماً كما هو موضح بالمعادلة الآتية:

$$K = (\beta_1/\beta_2)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)L$$

تـــــعظيم أربــــاح الــــمنشأة باســــتخدام دالة كـــــوب- دوكــــــلاس

تعرف أرباح المنشأة بأنها الفرق بين الإيراد الكلي والتكاليف الكلية، فإذا فرضنا أن الإيراد الكلي يأخذ الشكل :

$$TR = Y.P_Y$$

وتشير *TR* إلى الإيراد الكلي في حين تشير كل من P_y,Y إلى الناتج المادي و سعر الوحدة من الناتج على الترتيب. وبفرض وجود موردين إنتاجيين فقط هما X_2,X_1 فإن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل:

$$TC = P_{X_1}X_1 + P_{X_2}X_2 + TFC$$

حيث تشير *TFC* إلى التكاليف الثابتة الكلية في حين تشير كل من P_{X_2}, P_{X_1} إلى سعر الوحدة من الموردين X_2,X_1 على الترتيب. وأن دالة الربح تأخذ الصورة الآتية:

$$\prod = YP_Y - P_{X_1} - P_{X_2} - TFC............(8)$$

هناك ثلاث طرائق لتعظيم أرباح المنشأة وإن كانت جميعها تصل في النهاية الى نتيجة واحدة وهي:

الطريقة الأولى: وذلك بإحلال دالة الإنتاج في المعادلة (8) وبعدها يتم إيجاد التفاضلات الجزئية للمتغير $\prod$ بالنسبة لمتغيرات المعادلة وهي في هذه الحالة X_2,X_1.

الطريقة الثانية: وفيها يتم الاستعانة بمضروبات لا جرانج وفيها تتحول دالة الربح إلى دالة لا جرانج كما يأتي:

$$\prod = YP_Y - P_{X_1}X_1 - P_{X_2}X_2 - TFC - \lambda[Y - F(X_1, X_2)]$$

λ تشير إلى معامل لاجرانج *Lagrange Multiplier* وباقي العوامل كما هي معرفة سابقاً، ثم يتم إجراء التفاضلات الجزئية للمتغيرات X_2,X_1 بالإضافة إلى المتغير λ و المتغير Y مع

ملاحظة أن $(Y\ P_y)$ يعبر عن الإيراد الكلي في هذه الحالة ولا يتم إحلال الدالة $Y=f\ (X_2,X_1)$ محل Y في الإيراد الكلي.

الطريقة الثالثة: وفيها يتم استخدام مضروبات لاجرانج ولكن لإيجاد توليفة الموارد الأقل تكلفة. أي أن دالة الهدف تكون تدنية تكاليف المنشأة في ظل قيد دالة الإنتاج، وتصبح دالة الهدف في هذه الحالة كما في المعادلة الآتية:

$$TC = P_{X_1}X_1 + P_{X_2}X_2 + TFC + \lambda\left[\overset{0}{Y} - F(X_1, X_2)\right]$$

ثم يتم إيجاد التفاضلات الجزئية لدالة الهدف للمتغيرات λ, X_1, X_2 في حين $\overset{0}{Y}$ تشير إلى ثبات الإنتاج عند $\overset{0}{Y}$ ولا يتم إجراء التفاضل بالنسبة له، وفي مناقشتنا سوف نستخدم الطريقة الثانية ومن خلال استخدام دالة إنتاج كوب- دوكلاس المشار إليها في المعادلة (1) تصبح دالة الهدف كما يأتي:

أي أن:

$$\prod^* = P_Y Y - rK - wL - TFC - \lambda(Y - \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2})$$
$$\prod^* = TR - rK - wL - TFC - \lambda(Y - \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

إذ أن:

$\prod$ =أقصى ربح،

r= سعر الوحدة من رأس المال (سعر الفائدة)،

w= أجر العامل،

TFC= إجمالي التكاليف الثابتة،

λ = معامل لاجرانج،

P_y = سعر الوحدة من الناتج Y،

TR= الإيراد الكلي.

ولتحديد كميات الموارد التي تحقق هدف المنشأة في معظمة أرباحها فإن ذلك يستدعي تحقيق شرطين:

الشرط الضروري:

وفيه يجب مساواة التفاضلات الجزئية لدالة الهدف لمتغيرات الدالة بالصفر كما يأتي:

$$\frac{\partial \prod}{\partial L} = -w + \lambda\beta_1 \frac{\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}}{L} = 0$$

ومنها:

$$w = \lambda\beta_1 \frac{Y}{L}$$

وبالمثل :

$$\frac{\partial \prod}{\partial L} = -r + \lambda\beta_2 \frac{\beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}}{K} = 0$$

ومنها:

$$r = \lambda\beta_2 \frac{Y}{K}$$

كذلك:

$$\frac{\partial \prod^*}{\partial Y} = P_Y - \lambda = 0$$

ومنها:

$$P_Y = \lambda$$

كذلك:

$$\frac{\partial \prod^*}{\partial \lambda} = -Y + \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} = 0$$

ومنها فإن:

$$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2}$$

الـشرط الـكافي:

لمعظمة أرباح المنشأة يستدعى أن تكون التفاضلات الثانية لدالة الربح لموارد الإنتاج سالبة أي أن:

(أ) $$\frac{\partial^2 \prod}{\partial K^2} = PF_{11} < 0$$

(ب) $$\frac{\partial^2 \prod}{\partial L^2} = PF_{22} < 0$$

(ج) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \prod^*}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 \prod^*}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 \prod^*}{\partial L \partial K} & \frac{\partial^2 \prod^*}{\partial L^2} \end{vmatrix} = P^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} < 0$$

وإذ أن:

$$f_{11} = \frac{\beta_2(\beta_2 - 1)Y}{K^2}$$

$$f_{22} = \frac{\alpha_1(\beta_1 - 1)Y}{L^2}$$

$$f_1 = \beta_1 \beta_0 L^{\beta_1 - 1} K^{\beta_2}$$

$$f_{12} = \frac{\beta_1 \beta_0 L^{\beta_1 - 1} K^{\beta_2}}{LK} = \frac{\beta_1 \beta_2 Y}{LK}$$

$$f_{21} = \frac{\beta_1 \beta_2 Y}{LK}$$

ولما كان سعر الوحدة من الناتج P_y موجبة فإن تحقيق الشرط الكافي لمعظمة أرباح المنشأة يستدعي أن:

$$f_{11} = \frac{\beta_2(\beta_2 - 1)Y}{K^2} < 0$$

$$f_{22} = \frac{\beta_1(\beta_1 - 1)Y}{L^2} < 0$$

$$f_{11} f_{22} > f_{12} f_{21}$$

$$\frac{\beta_1 \beta_0 (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) Y^2}{L^2 K^2} > \frac{(\beta_1 \beta_2)^2 Y^2}{L^2 K^2}$$

أي أن :

$$(\beta_1-1)(\beta_2-1)>\beta_1\beta_2$$

وهذا يستدعي بالطبع أن تكون :

$$\beta_1+\beta_2<1$$

أي أن شرط تعظيم الأرباح بافتراض سيادة المنافسة الكاملة في أسواق الموارد وسوق الناتج يستدعي أن تكون الدالة متجانسة من الدرجة أقل من الوحدة أي معنى آخر في ظل تناقص عوائد السعة.

امثلة متنوعة عن تعظيم الانتاج:

نظرا لصعوبة الاطار النظري المعروض حول استخدام المصفوفات والمحددات سيتم تناول بعض الامثلة التي تتناسب مع مستوى الطالب في هذه المرحلة ، وتمهيدا لهذا الامثلة سيتم عرض اطار نظري عن كيفية تعظيم المنتج لانتاجه في ظل قيود معينة او تدنية لدالة كلفته لانتاج حجم معين من الانتاج وكل هذا ضمن موضوع توازن المنتج.

توازن المنتج

يتعرض المستهلك الى مشكلة اختيار السلع التي تمنحه اقصى اشباع ممكن في حدود دخله ، و الشيء نفسه يواجهه المنتج في اختيار عوامل الانتاج من عمل ورأس المال الذي يمنحه اقصى انتاج باقل كلفة ممكنة، وسنتعرض الى بعض المفاهيم التي تساعدنا في تناول هذا الموضوع أي توازن المنتج.

منحنى الناتج المتساوي *Isoquant curve*:

هو المحل الهندسي لكافة التوليفات من عنصري العمل ورأس المال (كما تم افتراضه في مبحثنا هذا) والتي تمنح المنتج حجم الانتاج نفسه والممثل بالدالة الاتية:

$$Y_0=f(K,L)$$

المعدل الحدي للاحلال مابين عاملي الانتاج (العمل وراس المال) *Marginal rate of substitution*. ويساوي النسبة ما بين التغير في كمية العمل على التغير في كمية رأس المال . ولحساب ذلك نحسب التفاضل الكلي لدالة الانتاج وكما ياتي:

$$dY_0=f_K dK+f_L dL=0$$

الانتاجية الحدية لرأس المال/ الانتاجية الحدية للعمل = $MRS=-\dfrac{\Delta L}{\Delta K}=\dfrac{f_K}{f_L}$

خط التكاليف المتساوية *Isocost*: هنا نفترض ان المنتج يخصص مبلغا معينا من المال نسميه الميزانية لشراء عوامل الانتاج وهنا كما افترضنا العمل ورأس المال وذلك لانتاج كمية معينة من سلعة معينة. وتكتب دالة الكلفة على النحو الاتي:-

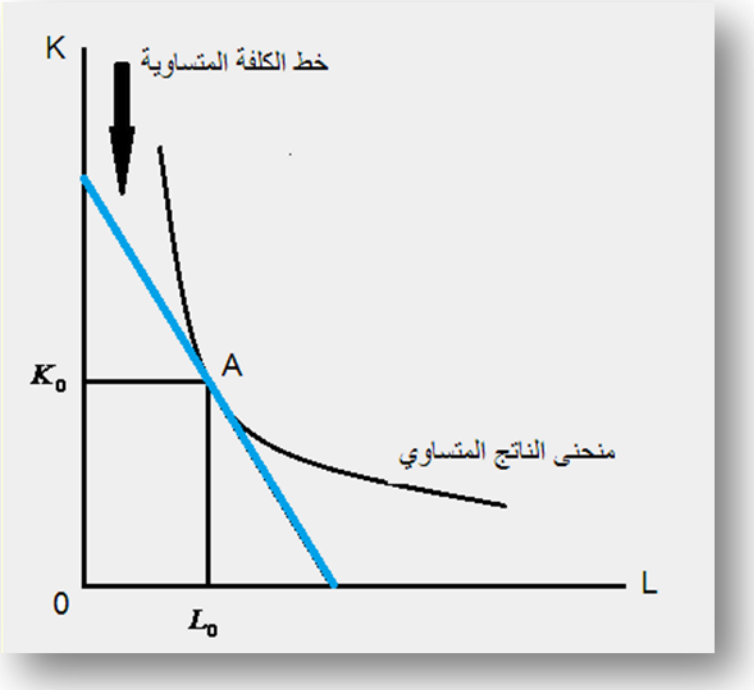
$$TC=P_K K+P_L L$$

ويعبر عن النسبة بين عوامل الانتاج بميل الخط المستقيم أي ميل خط التكاليف ويساوي:-

$$-\frac{P_L}{P_K}$$

السلوك الامثل للمنتج : يهدف المنتج الى الحصول على اقصى انتاج ممكن باقل تكلفة ممكنة ويمكن التوصل الى هذه النتيجة بالطرائق الاتية:-

1- **الطريقة البيانية** : نرسم منحنى الناتج المتساوي ومنحنى خط التكاليف. وعندما يمس خط التكاليف المتساوية منحنى الناتج المتساوي في النقطة المؤشرة بالرسم ادناه وهي نقطة A فان احداثيات هذه النقطة تمثل الكميات اللازمة من عنصري العمل ورأس المال التي تعظم انتاج المشروع باقل كلفة.



شكل (42) تعظيم الانتاج

2- **الطريقة الجبرية**: في نقطة التماس فإن :- ميل خط التكاليف = المعدل الحدي للاحلال
سعر وحدة رأس المال/ سعر وحدة العمل= الانتاجية الحدية لرأس المال/ الانتاجية الحدية للعمل

$$\frac{P_K}{P_L}=\frac{f_K}{f_L}$$

3- **طريقة مضاعف لاكرانج**: يتم تعظيم دالة الانتاج تحت قيد الكلفة ويتم تشكيل الصيغة الاتية :-

$$F=f(K,L)+\lambda(TC-P_K K-P_L L)$$

وباخذ المشتقات الجزئية الاولى نحصل على الاتي:-

$$\frac{\partial F}{\partial K}=f_K dK-\lambda P_K=0\Rightarrow f_K=\lambda P_K............(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}=f_L dL-\lambda P_L=0\Rightarrow f_L=\lambda P_L...............(2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=TC-P_K K-P_L L=0......................(3)$$

ومن معادلة (1) ومعادلة (2) نحصل على الاتي:-

$$\frac{f_K}{f_L}=\frac{P_K}{P_L}$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها سابقا.

أما السلوك الامثل للمنتج الذي يهدف الى تقليل تكاليف الانتاج عند حجم انتاج معين فيمكن الحصول عليه بتشكيل صيغة لاكرانج وكما ياتي:-

$$F = P_K K + P_L L + \lambda(Y_0 - f(K,L))$$

وباخذ المشتقات الجزئية الاولى نحصل على:-

$$\frac{\partial F}{\partial K} = P_K - \lambda f_K = 0 \Rightarrow P_K = \lambda f_K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = P_L - \lambda f_L = 0 \Rightarrow P_L = \lambda f_L \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = Y_0 - f(k,L) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ومن معادلة (1) ومعادلة (2) نحصل على الاتي:-

$$\frac{P_K}{P_L} = \frac{f_K}{f_L}$$

مثال(6.2) : لدينا دالة الانتاج الاتية : $Y = 4KL$ ، واسعار عوامل الانتاج $P_K = 5$ و $P_L = 10$.

المطلوب: ماهو اقصى انتاج ممكن ضمن كلفة كلية =100 .

الحل: بالطريقة الرياضية

يمكن التعبير عن دالة الكلفة الكلية بالاتي:

$$TC = 100 = 5K + 10L$$

لتعظيم الانتاج تحت قيد الكلفة الكلية نشكل صيغة لاكرانج :

$$F = 4KL + \lambda(100 - 5K - 10L)$$

شرط تعظيم الدالة نستخرج المشتقات الجزئية الاولى

$$\frac{\partial F}{\partial K} = 4L - 5\lambda = 0 \Rightarrow 4L = 5\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 4K - 10\lambda = 0 \Rightarrow 4K = 10\lambda \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 100 - 5K - 10L = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

من معادلة (1) و معادلة (2) نحصل على الاتي:-

$$\lambda = \frac{4}{5}L$$

$$\lambda = \frac{4}{10}K$$

$$\frac{4L}{5} = \frac{4K}{10}$$

$$20K = 40L$$

$$2K = 4L$$

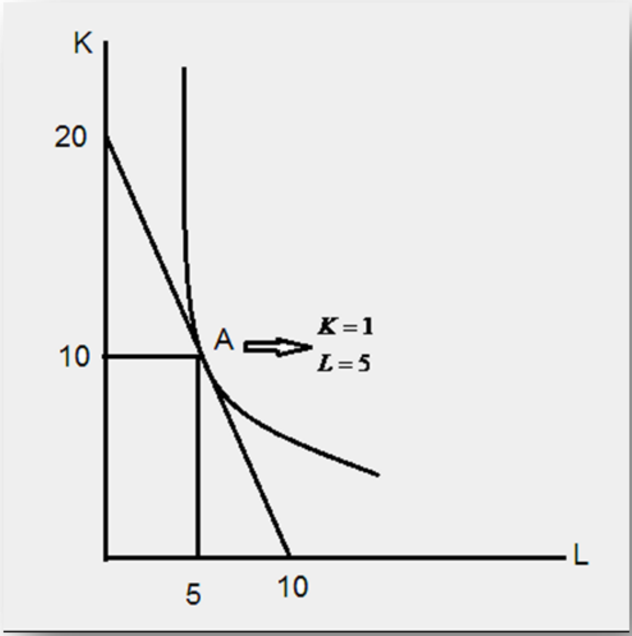
$$K = 2L$$

وبالتعويض عن قيمة K في معادلة (3) نحصل على الاتي:-

$$K = 10 \quad , \quad L = 5 \quad , \quad Y = 200$$

الحل بالطريقة البيانية

نرسم منحنى الناتج المتساوي $K=\frac{50}{L}$ وكذلك خط التكاليف $K=20-2L$. يمس خط التكاليف منحنى الناتج المتساوي في النقطة A واحداثياتها هي $(L=5\ ,\ K=10)$ وحجم الانتاج المقابل $(Y=20)$.



شكل(43) تعظيم الانتاج للمثال (6.2)

مثال (6.3):توفرت المعلومات عن دالة انتاج تاخذ الشكل الاتي:-

$$Y=2K^2-4KL+5L^2$$

واسعار عوامل الانتاج هي:- $P_L=40$ **و** $P_K=80$

المطلوب:

1- احسب قيمة الكلفة الكلية الموافقة لحجم الانتاج الذي يساوي $Y=200$

2- احسب حجم الانتاج الموافق لكلفة كلية تساوي $TC=600$

الحل

نريد تخفيض تكاليف الانتاج عند حجم انتاج معين نشكل الصيغة الاتية:-

$$F=(80K+40L)+\lambda(200-2K^2+4KL-5L^2)$$

لتعظيم هذه الدالة نستخرج المشتقات الجزئية الاولى لنحصل على:-

$$\frac{\partial F}{\partial K}=80-4\lambda K+4\lambda L=0\Rightarrow 80=4\lambda(K-L)\text{..........}(1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial L}=40+4\lambda K-10\lambda L=0\Rightarrow 40=2\lambda(5L-2K)\text{.......}(2)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=2000-2K^2+4KL-5L^2=0\text{........................}(3)$$

من معادلة 1 ومعادلة 2 نحصل على الاتي:-

$$K=2L$$

وبعد الحل نحصل على قيمة كل من:-

$$L=20,\qquad K=40$$

إذن الكلفة الكلية الموافقة لحجم الانتاج $Y=200$ هي $TC=400$

لحساب حجم الانتاج الموافق لكلفة كلية معلومة نشكل الصيغة الاتية:-

$$F=2K^2-4KL+5L^2+\lambda(6000-80K-40L)$$

نستخرج المشتقات الجزئية الاولى فنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial L}=-4K+10L-40\lambda=0\Rightarrow 40\lambda=10L-4K\text{.......}(1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial K}=4K-4L-80\lambda=0\Rightarrow 80\lambda=4K-4L\text{...........}(2)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=6000-80K-40L=0\text{...............................}(3)$$

بعد الحل نحصل على $K=2L$

اذن حجم الانتاج الموافق لكلفة كلية $TC=600$ هو $Y=450$

أهـم عـيوب دالة كـوب – دوكلاس

أوضح ريدر *Reder* عام 1943م أن أهم عيوب دالة (*C-D*) هي:

1- ثبات الإنتاجية الحدية لعناصر الإنتاج خاصة العمل داخل المنشأة و المتحصل عليه من معادلة *C-D* وذلك كما يأتي:

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=\beta_1\frac{Y}{L}$$

والذي يتفق مع النتيجة التي توصل إليها دوكلاس *Douglas* من أن معدل الأجر w يتساوى مع الإنتاجية الحدية للعمل أي أن :

$$\frac{\partial Y}{\partial L}=w$$

وهو أمر غير ممكن ولاسيما إذا واجه عنصر العمل ظروف تشغيل احتكار القلة في سوق العمل إذ تدفع المنشآت للعمل أجراً أقل من إنتاجيته الحدية.

2- كما أضاف كارتر *Carter* 1956م أن أمام بساطة وسهولة قياس دالة *C-D* فإن هناك ثمناً لهذا يتمثل في ثبات المرونة الإنتاجية للموارد وكذلك ثبات مرونة الإحلال إذ أن كفاءة المورد قد تتناقص باستمرار عند إضافة وحدات متتالية منه ومن ثم انخفاض إنتاجيته الحدية.

3- الدالة غير قادرة على التعبير عن مراحل الإنتاج الثلاث معاً في آن واحد أي أنها غير قادرة على إظهار الأحوال التي تعكس العائد الحدي المتزايد والمتناقص فضلا عن العائد الحدي السالب معاً.

4- في حين ذكر هيثفيلد *Heathfield* 1971م ان دالة *C-D* هي دالة تطبيقية فقط للموارد الإحلالية وليس المكملة ولهذا فإن الدالة تصلح فقط للمدى البعيد إذ يمكن أن تتحول الموارد المكملة في المدى القريب إلى إحلالية في المدى البعيد.

5- أما يوتوبولس و نوجنت *Yotopoulos, Pan A-and Deffery B.Nugent* 1976م فأضافوا أن ثبات مرونة الإحلال لدالة *C-D* ومساواتها للوحدة إنما تعني أن الممر التوسعي للمنشأة هو خط مستقيم أي أن مقدرة الموارد على الإحلال محل بعضها هي مقدرة ثابتة. ليس هذا فحسب فإذا اشتملت الدالة على أكثر من متغيرين مستقلين فإن هذا يعني أن الممرات التوسعية لكل عنصرين إنتاجيين في الدالة يجب أن تكون خطية وهذا بالطبع أمر بالغ الصعوبة إن لم يكن نادر الحدوث، فلا يمكن أن تظل جميع الموارد بالكفاءة نفسها مع استمرار إحلالها محل بعضها.

6- تشترط دالة *C-D* ضرورة وجود كل عناصر الإنتاج لتتم العملية الإنتاجية إذ أن غياب أحدهما يؤدي إلى تلاشي الدالة كلية .

اشتقاق دالـــة الـــتكاليف من دالـــة إنـــتاج كـــوب – دوكـــلاس

إذا فرض أن دالة كوب دوجلاس تأخذ الشكل الآتي:-

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

وأن دالة التكاليف للمنشأة هي:

$$C = rK + wL$$

و:

Y= الناتج، K= رأس المال، L= العمل، r= سعر رأس المال، w = سعر وحدة العمل، C= التكاليف الكلية (المتغيرة)، A,α,β= معلملات الدالة.

باستخدام مضروبات لاجرانج فإن كميات الموارد التي تحقق تدنيه التكاليف الإنتاجية ،تعني مساواة التفاضلات الجزئية للدالة لهذه المتغيرات بالصفر كما يأتي:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial L} = w - \lambda\beta\frac{Y}{L} = 0$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial K} = r - \lambda\beta\frac{Y}{K} = 0$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda} = Y - AK^{\alpha}L^{\beta} = 0$$

وهذا ما يسمى بالشرط الضروري لتدنيه التكاليف الإنتاجية للمنشأة، ومن هذا الشرط الضروري يتضح أن :

$$\frac{\alpha L}{\beta K} = \frac{r}{w}$$

وعلى هذا فإن:

$$K = \frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}L$$

وبإحلال K المتوصل إليها في معادلة الإنتاج الأصلية ينتج أن:

$$Y = A\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}L^{\alpha+\beta}$$

ومنها ينتج أن دالة الطلب المشروط لعنصر العمل تكون كالآتي:-

$$L^{*} = \left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

وبإحلال L في معادلة الممر التوسعي $\left(K=\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}L\right)$ نحصل على دالة الطلب المشترط لعنصر رأس المال والتي تكون على النحو الآتي:

$$K^*=\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

ثم بإحلال المعادلتين الأخيرتين L^*,K^* في معادلة التكاليف الأصلية نحصل على دالة التكاليف المطلوبة:

$$C=r\left(\frac{w}{r}\frac{\alpha}{\beta}\right)\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}+w\left[\frac{Y}{A}\left(\frac{r}{w}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

ويتضح من هذه المعادلة أن التكاليف دالة لكل من الناتج Y و أسعار الموارد r,w فضلا عن معلملات دالة كوب دوكلاس A,α,β.

دالـة الإنـتاج ذات مـــرونـة الإحـلال الـثابتة

The Constant Elasticity of Substitution Production Function (CES)

أشار أرو *Arrow*، تشنري *Chenery* ومنهاس *Minhas* فضلا عن سولو *Solw* سنة 1961م إلى أن معدل الإحلال الثابت بين موردي العمل ورأس المال والمساوي للوحدة في دالـة كـوب دوجلاس هو أخطر عيوبها وعليه ولتلافي هذا العيب تم ابتكار دالـة *CES* التي تفترض ثبات مرونة الإحلال بين الموارد ولكن عدم مساواة تلك المرونة للوحدة، هذا وتأخذ هذه المعادلة (التي يطلق عليها أحياناً دالة *ACMS* نسبة إلى الحروف الأولى لمكتشفيها) الشكل الرياضي الاتي:

$$Y=A\left[\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

إذ أن:

Y= الناتج،

A= ثابت الدالة ويطلق عليه معامل الكفاءة.

δ= معامل توزيع حيث يوضح مدى مساهمة كل من رأس المال والعمل في الإنتاج وعادة ما تنحصر قيمة هذا المعامل بين الوحدة والصفر ($0<\delta<1$).

ρ = معامل الإحلال، يوضح مرونة الإحلال بين الموارد وعادة ما تكون قيمته أكبر من أو يساوي الوحدة ($\rho\geq1$). L,K= متغير رأس المال والعمل على الترتيب.

خصائص دالة *CES*:

1- الإنتاجية الحدية للموارد موجبة فمثلاً نجد أن الإنتاجية الحدية لمورد رأس المال يمكن أن يعبر عنها بالمعادلة الآتية:

$$MP_K=\frac{\partial Y}{\partial K}=\frac{A}{-\rho}(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)L^{-\rho})^{-\frac{1}{\rho}-1}(-\delta\rho K^{-\rho-1}$$

$$MP_K=\delta A\left(\frac{Y}{K}\right)^{1+\rho}\text{.......................}(9)$$

ونظراً لأن A,δ هي عوامل موجبة فإن MP في المعادلة (9) موجب للقيم الموجبة لرأس المال K.

2- تناقص معدل الإحلال الحدي التقني بين رأس المال والعمل حيث أن:

$$MRTS_{LK}=\frac{\partial K}{\partial L}=\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}$$

3- الدالة ليس لها نهاية عظمى وليس لها خطوط حرجة.

4- مرونة الإحلال ثابتة ولا تساوي الوحدة إنما تعتمد على قيمة ρ كما هو موضح بالمعادلة الآتية:

$$\sigma=\frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d(MRTS)}{(MRTS)}} \qquad \sigma=\frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}{\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}} \qquad \sigma=\frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{K}{L}}}{\dfrac{d\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}{\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}}}=\frac{1}{\rho+1}$$

ولما كانت قيمة ρ ثابتة، فإن σ أيضاً ثابتة إلا أن قيمة الأخيرة تختلف باختلاف قيمة ρ فإذا كانت:

أ) $\rho =$ صفر فإن الدالة تتسم بثبات مرونة الإحلال ومساواتها للوحدة وتتفق الدالة في هذه الحالة مع دالة كوب دوكلاس.

ب) $\rho =$ -1 فإن منحنى سواء الإنتاج يكون خطاً مستقيماً والإحلال لانهائياً بين الموارد.

ج) ρ (<)- 1 فإن منحنى سواء الإنتاج يكون أكبر ميلاً ويكون الإحلال مرتفعاً لارتفاع مرونة الإحلال.

د) ρ (>)-1 فإن منحنى سواء الإنتاج يتخذ الشكل المقعر تجاه نقطة الأصل على عكس المألوف الذي يتصف بالتحدب تجاه نقطة الأصل.

الدالة تتميز بعدم مساواة مرونة الإحلال للوحدة كما أن الدالة تسمح بالإحلال والتكامل بين عناصر الإنتاج فإذا كانت مرونة الإحلال أكبر من الصفر ($\sigma>0$) فإن هذا يعني أن الموارد إحلالية، أما إذا كانت الموارد مكملة فإن مرونة الإحلال تأخذ القيمة أقل من الصفر ($\sigma<0$)، وعلى هذا فإن الدالة تصلح لوصف بيانات المدى القصير والمدى الطويل بعكس الحال في دالة كوب دوكلاس التي تصلح لبيانات المدى الطويل فقط.

أهم عــيوب دالة *CES*:

أ) من الصعب استخدام هذه الدالة للبيانات الخاصة بأكثر من متغيرين مستقلين.

ب) ثبات مرونة الإحلال على الرغم من أنها لا تساوي الوحدة إلاّ أن الدالة مازالت مقيدة بهذا الشرط.

ج) الدالة يمكن أن تصف أحد المراحل الثلاثة المعروفة للإنتاج وليس جميعها في آن واحد وتتفق في هذا مع دالة كوب دوجلاس.

دالـة الإنتاج ذات مـرونة الإحلال المتغيرة

تعد دالة *VES* تطويراً جديداً لدالة كوب دوكلاس و دالة *CES* حيث تحررت من شرط ثبات مرونة الإحلال، وتأخذ الدالة الصورة الرياضية الآتية:

$$Y=\left[aK^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}+a^{-\frac{1}{b}}\frac{1-b}{1-b-c}\left(\frac{K}{L}\right)^{-\frac{c}{b}}L^{-\left(\frac{1}{b}-1\right)}\right]^{\frac{-1}{\frac{1}{b}-1}}$$

وبفرض أن :