$$\theta=\frac{1-b}{1-b-c}a^{-\frac{1}{b}}=(1-a)A^{-\rho}$$
$$\rho=\frac{1}{b}-1............(10)$$
فإن الدالة (10) يمكن إعادة كتابتها كما يأتي:
$$Y=\left[aK^{-\rho}+A(1-a)\theta\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho c(1+\rho)}L^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}.........(11)$$
يلاحظ من المعادلة (11) أنها تتخذ شكل دالة *CES* فيما عدا أن دالة *VES* تحتوي على عنصر ثالث وهو نسبة رأس المال إلى العمل $\frac{K}{L}$

وتـــتسم مـــــــرونة الإحـــــــلال في الـــــــدالة *VES* بالـــــــخصائص الآتية:-

1- مرونة الإحلال في الدالة *VES* تأخذ الصورة الآتية:
$$\sigma=\frac{b}{1-c\left(1+\frac{\partial K}{\partial L}\cdot\frac{L}{K}\right)}............(12)$$
فإذا كانت $c=0$ فإن $CES=VES$ ، أما إذا كانت $c=0$ ، $b=1$ فإن *VES = C-D*

2- تتفق دالة *VES* مع كل من دالة *C-D, CES* في أن دالة الناتج الحدي للمورد هي دالة موجبة الميل.

ومن أهم عيوب دالة *VES* مايلي:

1- يصعب تعميم الدالة لأكثر من متغيرين.

2- الدالة غير خطية المعلمات *Coefficients* مما يشكل صعوبة في تقديرها.

الـدوال الإنــتاجية الـجبرية مـن الـدرجة الـثانية *Quadratic Production Functions*

تتخذ الصورة العامة للدوال الجبرية من الدرجة الثانية الشكل الآتي:
$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+\frac{1}{2}b_1X_1^2+\frac{1}{2}b_2X_2^2+b_3X_1X_2........(13)$$
إذ أن:

Y= الإنتاج،

X_2,X_1 = موردي العمل ورأس المال،

a_o= ثابت الدالة،a,b= معاملات الدالة.

وتـتسم هذه الـدالة بالـخصائص الآتية:

1- الدالة غير متجانسة.

2- إذا كانت قيمة $b_3<0$ (أقل من الصفر) فإن الدالة تصلح للموارد المتنافسة

أما إذا كانت قيمة b_3 = الصفر فإن الدالة يمكن تطبيقها في حالة الموارد المستقلة،

أما إذا كانت قيمة $b_3>0$ (أكبر من الصفر) فالدالة تطبيقية في حالة الموارد المكملة.

3- الخطوط الحرجة موجبة الميل إذا كانت الموارد مكملة، وسالبة الميل إذا كانت الموارد متنافسة، وخطوط مستقيمة موازية للمحورين إذا كانت الموارد مستقلة.

4- منحنيات السواء محدبة تجاه نقطة الأصل.

5- يمكن أن تصف الثلاث مراحل للإنتاج.

ومن أهم عيوبها هو صعوبة تطبيقها لأكثر من متغيرين.

دوال الانتاج التحويلية *Transcendental Production Functions*

تتخذ الصورة الرياضية العامة لهذه الدوال الشكل الرياضي الآتي:

$$Y=cX_1^{a_1}e^{b_1x_1}X_2^{a_2}e^{b_2x_2}.....X_n^{a_n}e^{b_nx_n}.......(14)$$

إذ أن:

Y= الإنتاج،

e= أساس اللوغاريتم الطبيعي،

$X_1,X_2,\ldots,X_n$= عوامل الإنتاج،

$C,a_1,a_2,\ldots,a_n$= معاملات الدالة.

هذا ويمكن أن تتحول هذه الدالة إلى دالة إنتاجية في متغير واحد مباشرة و من ثم تتخذ الدالة الشكل الجديد التالي:

$$Y=CX^{a}e^{bx}.............(15)$$

يركز الاقتصاديون كثيراً على خصائص الدالة (15) كبديل للدالة (14) حتى يسهل فهم طبيعة هذه الدالة التي تتلخص في ما يأتي:

1- الناتج الحدي للمورد موجب للقيم الموجبة لهذا المورد على النحو الآتي:

$$\frac{\partial K}{\partial X}=Y\left(\frac{a}{x}+b\right)$$

بمساواة التفاضل الجزئي بالصفر يمكن إيجاد قيمة X المعظمة للإنتاج كما يأتي (16)

$$x=-\frac{a}{b}.............(16)$$

بمساواة التفاضل الثاني بالصفر يمكن إيجاد قيمة X عند نقطة انقلاب الدالة كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}=Y\left(\frac{a^2-a}{X^2}+\frac{2ab}{X}+b^2\right)=0$$

$$X=\frac{-a+\sqrt{a}}{b}.........(17)$$

2- من أهم ما يجذب الانتباه لهذه الدالة هي أنه عندما تتخذ (b) في المعادلة (16) والمعادلة (17) قيمة سالبة أو قيمة أكبر من الوحدة فإن الدالة سوف تنطبق عليها الصورة الكلاسيكية إذ سيزداد الناتج Y بمعدل متزايد، ثم معدل متناقص، حتى يصل الناتج أقصاه ثم يتناقص الإنتاج بزيادة كمية المورد المستخدم كما يشير لذلك قانون تناقص الغلة.

3- تتحول الدالة إلى دالة كوب دوجلاس وهي دالة جبرية عندما تساوي (b) الصفر ويصبح الشكل العام للدالة كما يأتي:

$$Y=CX.......(18)$$

4- الدالة غير متجانسة في صورتها العامة إلا إذا تحقق الشرط الآتي:

$$b_1=b_2=0$$

وفي هذه الحالة فإن الدالة سوف تتخذ شكل دالة كوب دوجلاس.

5- مرونة إنتاج الموارد X_2,X_1 تأخذ الصورة الآتية:

$$E_1=b_1X_1+a_1$$

$$E_2=b_2X_2+a_2$$

إذ أن E_2,E_1 تشير إلى مرونة الإنتاج للموارد X_1 و X_2 على الترتيب.
6- منحنى سواء الدالة محدب تجاه نقطة الأصل إذا تحقق شرط التجانس.
7- إذا تحقق شرط التجانس فإن الخطوط الحرجة تحصر الموارد المكملة ولكن على نقاط الخطوط الحرجة فإن الموارد لا تتصف بالاستقلالية.

اسئلة الفصل السادس

س1:- لدينا دالة الانتاج الاتية: $Y=4X_1^{\frac{2}{3}}X_2^{\frac{1}{3}}$
المطلوب
1- احسب الانتاجية المتوسطة والحدية لكل عامل انتاج.
2- لدينا اسعار عوامل الانتاج $P_{X_1}=2\ ,\ P_{X_2}=3$. ماهو الحد الادنى لتكاليف الانتاج الموافق لحجم الانتاج $Y=100$.

س2:- اذا اعطيت دوال الانتاج الاتية:-

$$1)\ Y=f(K,L)=10\sqrt{K}\sqrt{L}$$

$$2)\ Y=f(K,L)=5K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$$

وتم مضاعفة عناصر الانتاج K و L بين ما مدى تاثير ذلك على حجم الانتاج

س3:- اذا كانت لديك دالة الانتاج الاتية:-

$$Y=f(K,L)=100K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{5}{4}}$$

وكان قيد الكلفة لراس المال والعمل: $200K+100L=1000$
المطلوب: جد حجم رأس المال والعمل الامثلين بحيث يكون الانتاج اكبر ما يمكن.

س4:- اذا كانت دالة الانتاج ممثلة بالشكل الاتي:-

$$Y=2\sqrt{KL}$$

اوجد مايأتي:-

1- الانتاجية الحدية لعنصر رأس المال MP_K.
2- الانتاجية الحدية لعنصر العمل MP_L.
3- التغير في الانتاجية الحدية لعنصر رأس المال ΔMP_K.
4- التغير في الانتاجية الحدية لعنصر العمل ΔMP_L.

س5:- اذا كانت دالة انتاج مشروع ما:
$$Y = K^{0.3} L^{0.5}$$
وكانت مقيدة بالقيد الاتي: $6K + 2L = 28$،
جد الحجم الامثل للانتاج في ظل القيد.

مصادر الفصل السادس

1- ج(بلاك) و ج ف برادلي. الرياضيات الاساسية للاقتصاديين. ترجمة اموري هادي كاظم والدكتور ابراهيم موسى الورد. دار الحكمة للطباعة والنشر. بغداد . 1991.
2- حسين علي بخيت - مبادىء الاقتصاد الرياضي- كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد – 2000.
3- شمعون شمعون – الرياضيات الاقتصادية – دوان المطبوعات الجامعية – الساحة المركزية – الجزائر- منشور على الشبكة العالمية الدولية.
4- الوتار، ابي محمد صبري واثيل عبد الجبار الجومرد ، مدخل الى الاقتصاد الرياضي، دار الكتب للطباعة والنشر ، الموصل، 1993.

5- Arne Henningsen &Geraldine Henningsen, Econometric Estimation of the "Constant Elasticity of Substitution" Function in R: Package micEconCES.2011.
6- Elmer G. Wiens, Egwald Economics: Microeconomics: Production Functions,2012, Published on line www. Egwald.com.
7- Judith K. Hellerstein and David Neumark, Production Function and Wage Equation Estimation with Heterogeneous Labor: Evidence from a New Matched. Employer-Employee Data Set. 2007. Published on line http://www.nber.org/books/bern07-1.

8- KC Border, On the Cobb–Douglas Production Function,California Institute of Technology , Division of the Humanities and Social Sciences. Published on line: www.google .com.
9- Krister Ahlersten, Essentials of Microeconomics: Exercises. 2008. Published on line www.bookboon.com.
10- Rainer Klump, Peter McAdam and Alpo Willman, The Normalized CES Production Function Theory and Empirics . European Central Bank. Working Paper Series.2011.
11- Ronald C. Griffin, John M. Montgomery, and M. Edward Rister, Selecting Functional Form in Production Function Analysis. Published on line: www.google .com.
12- Ted Bergstrom, Lecture Notes on Elasticity of Substitution. 2011. Published on line: www.google .com.

الفصل السابع

التحليل الديناميكي للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية

Dynamic Analysis

يهدف هذا الفصل الى التعرف على:

- **التحليل الديناميكي المستمر**
- **مفهوم التكامل وانواعه**
- **التطبيقات الاقتصادية للتكامل**
- **فائض المنتج والمستهلك**
- **فائض المجتمع**
- **التحليل الديناميكي المتقطع**
- **معادلات الفروق**
- **تطبيقات اقتصادية على معادلات الفروق**

الفصل السابع
التحليل الديناميكي للعلاقة بين المتغيرات الاقتصادية

مقدمة

يتناول هذا الفصل انواع التحليل الديناميكي والذي يهدف بدوره الى تحديد اتجاهات المتغيرات الاقتصادية ومدى ميلها نحو الاستقرار بمرور الزمن ، وهو بادخاله عامل الزمن فانه يتجاوز عيوب التحليل الساكن والساكن المقارن، وينقسم التحليل الديناميكي الى قسمين رئيسين هما: التحليل الديناميكي المستمر *Continuious Dynamic analysis* وافضل تطبيق لهذا النوع من التحليل هو التفاضل *Differentation*(وقد تم الحديث عنه سابقا)، والتكامل *Integration* . في حين يتناول القسم الثاني التحليل الديناميكي المتقطع والمعبر عنه بمعادلات الفروق.

التحليل الديناميكي المستمر *Continuious Dynamic analysis*

لقد تم تناول موضوع التفاضل في الفصول السابقة ولاسيما تطبيقاته الاقتصادية بشيء من التفصيل ، وعليه سيتم تناول الجزء الثاني من الموضوع وهو التكامل وتطبيقاته الاقتصادية.

ان للتكامل تطبيقات عدة في مختلف العلوم ومنها الاقتصادية، وتندرج تحت التطبيقات الاقتصادية للتكامل ، الدوال الحدية والكلية ومنها التكلفة الكلية والايرادات الكلية فضلا عن دالة الاستهلاك والادخار و فائض المنتج والمستهلك وغيرها من التطبيقات الاقتصادية.

مفهوم التكامل

يعرف التكامل بانه عملية ايجاد الدالة نفسها أي انه عكس عملية التفاضل، فاذا كانت $f'(Q)$ مشتقة الدالة $F(Q)$ فان $F(Q)$ هي تكامل $f'(Q)$ وتصاغ على الشكل الاتي:-

$$f(Q) = \int f'(Q)dQ$$

وتشير الدالة $f'(Q)$ الى الدالة المتكاملة ، أي هي الدالة التي نحاول ايجاد تكاملها، ويضاف dQ لتاثير المتغير الذي اعتمادا عليه يتم تكامل الدالة $f'(Q)$ ، فضلا عن انه يستخدم مؤشراً لتحديد اين تنتهي الدالة التي يجري تكاملها.

مما يتضح ان التكامل هو معكوس التفاضل ، وتجدر الاشارة الى انه لاتوجد قاعدة عامة للتكامل عكس ما هو متعارف عليه في التفاضل. كما ينبغي الالمام بقواعد التفاضل عند ايجاد تكامل الدالة.

تكاملات الصورة القياسية

حتى يمكن فهم التكامل لنفترض اننا نرغب في ايجاد تكامل X^2 ، أي ان X^2 هي مشتقة دالة واننا نريد الحصول على تلك الدالة ، سوف نتبع الاتي:-

$$X^2 = f'(X)$$
$$f(X) = \int f'(X)dX = ?$$

ومن قواعد المشتقة المعروفة مسبقا نجد ان:-

$$dX^3/dX = 3X^2$$

وبذلك فان:-

$$d(X^3/3)/dX = 3X^2/3 = X^2$$

أي ان الدالة التي تكون مشتقتها X^2 هي $X^3/3$

وينبغي ان نلاحظ هنا ان $X^3/3$ هي ليست التكامل الوحيد لـ X^2 انما هي احد التكاملات . ولنتامل الدالة $\frac{X^3}{3}+k$ ، حيث ان k هو ثابت ، وان مشتقة الدالة $\frac{X^3}{3}+k$ بالنسبة الى X هي ايضا X^2 وهنا نستنتج ان الدالة التي تكون مشتقتها X^2 هي $\frac{X^3}{3}+k$ حيث يسمى k ثابت التكامل.

قوانين التكامل Integration Laws

1- تكامل المقدار الثابت يساوي المقدار الثابت في تكامل المتغير مضافا اليه ثابت التكامل:-

$$\int kdX = kX + C$$

2- تكامل dX يساوي (X)

$$\int dX = X + C$$

3- تكامل الدالة الأسية X^n يساوي الاس مضافا اليه واحد مقسوم على الاس الجديد .

$$\int X^n dX = \frac{X^{n+1}}{n+1} + C \qquad , n \neq -1$$

4- تكامل المقدار السالب هو Ln أي:-

$$\int X^{-1} dX = LnX + C$$
$$\int \frac{1}{X} dX = \int X^{-1} dX = LnX + C$$

5- تكامل مقدار ثابت مرفوع الى أس يساوي المقدار نفسه مقسوما على معامل الاس في الاساس Ln

$$\int a^{kx} dX = \frac{a^{kx}}{kLna} + C$$

6- تكامل جمع او طرح دالتين او اكثر يساوي جمع او طرح تكامل دالتين:-

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

7- تكامل الدالة السالبة يساوي الاشارة (-) مضروبا في تكامل الدالة:

$$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$$

8- تكامل الأس الطبيعي:

$$\int e^{kx}dx=\frac{e^{kx}}{k}+c$$

تجدر الاشارة الى ان هناك قوانين اخرى للتكامل هي ليست ضمن مجال دراستنا كقانون التكامل بالتجزئة وقانون التكامل بالتعويض وغيرها.

كما ينبغي الاشارة الى ان التكامل ينقسم الى قسمين هما:

1- التكامل المحدود: وهو التكامل الذي يمتلك حدين حداً اعلى ويكتب اعلى علامة التكامل ، وحدا اسفل ويكتب اسفل علامة التكامل.

2- التكامل غير المحدود

التطبيقات الاقتصادية للتكامل

اولا: الدوال الحدية والكلية

يساعدنا التكامل في ايجاد دالة الكلفة الكلية TC من دالة الكلفة الحدية MC التي تعرف بانها التغير الحاصل في الكلفة الكلية الناتج من الزيادة في الانتاج. ومن المعروف ان الجزء الذي يتغير من الكلفة الكلية هو الكلفة المتغيرة بتغير مستوى الانتاج أي ان:-

$$TC=\int MC\,dQ=VC+C=VC+FC$$

عندما يكون ثابت التكامل هو C والمعبر عنه بالكلفة الثابتة $Fixed\ Cost$

مثال(7.1): توافرت لديك المعلومات الاتية عن دالة الكلفة الحدية للمنتج x :-

$$MC=5+16x-3x^2$$

فاذا كانت الكلفة الكلية لانتاج 5 وحدات من x تساوي 500 وحدة نقدية .

المطلوب: جد دالة الكلفة الكلية

الحل

$$MC=5+16x-3x^2$$

$$TC=\int(5+16x-3x^2)dx$$

$$=5x+16\frac{x^2}{2}-3\frac{x^3}{3}+k$$

$$TC=5x+8x^2-x^3+k$$

وعندما $x=5$ فان الكلفة الكلية =500

$$500=25+200-125+k$$

$$k=400$$

اذن دالة الكلفة الكلية تكون:-

$$TC=5x+8x^2-x^3+400$$

ثانيا: دالة الايرادات الكلية *Total Revenues Function*

يستخدم التكامل هنا لايجاد دالة الايرادات الكلية TR من خلال دالة الايراد الحدي MR ، والتي يعبر عنها بالاتي:-

$$MR=\frac{dTR}{dQ}$$

ويمكن ايجاد دالة الايراد الكلي من خلال:

$$\int dTR=\int MR dQ$$

$$TR=\int MR dQ+k \quad , \quad k=Constant\ of\ Integration$$

مثال (7.3) لديك دالة الايراد الحدي لسلعة ما معبر عنها بالصيغة الاتية:

$$MR=12-3x^2+4x$$

المطلوب: جد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب

الحل

$$MR=12-3x^2+4x$$

$$TR=\int(12-3x^2+4x)dx+k$$

$$TR=12x-x^3+2x^2 \quad , \quad k=0$$

اما دالة الطلب فهي:

$$P=\frac{TR}{x}=12+2x-x^2$$

مثال (7.4): لديك دالة الايراد الحدي الاتية:

$$MR=\frac{6}{(x-3)^2}-4$$

المطلوب: جد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب

الحل

$$TR=\int\left|\frac{6}{(x-3)^2}-4\right|dx=-\frac{6}{x-3}-4x+k$$

$$x=0\,,TR=0\,,k=-2$$

اذن دالة الايراد الكلي المطلوبة هي :

$$TR=-\frac{6}{x-3}-4x-2$$

الان دالة الطلب هي:

$$P=\frac{TR}{x}=-\frac{6}{x(x-3)}-4-\frac{2}{x}$$

$$=-\frac{6}{x(x-3)}-\frac{2}{x}-4$$

$$=\frac{-6-2x+6}{x(x-3)}-4$$

$$=\frac{-2}{x-3}-4=\frac{2}{3-x}-4$$

اذن دالة الطلب المطلوبة هي:

$$P=\frac{2}{3-x}-4$$

ثالثا: دالة الاستهلاك *Consumption Function*

يمكن الحصول على دالة الاستهلاك من خلال تكامل الميل الحدي للاستهلاك (MPC) وكما ياتي:

مثال (7.5): اذا كان الميل الحدي للاستهلاك معطى بالصيغة الاتية:

$$MPC=0.8+\frac{0.1}{\sqrt{Y}}$$

واذا علمت ان الاستهلاك يساوي الدخل عندما الدخل يساوي 100

المطلوب: جد دالة الاستهلاك

الحل

$$C=\int(MPC)dY=\int(0.8+\frac{0.1}{\sqrt{Y}})dY$$

$$C=\int(0.8+0.1Y^{-\frac{1}{2}})dY$$

$$C=0.8Y+\frac{0.1Y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+k$$

$$C=0.8Y+0.2Y^{\frac{1}{2}}+k$$

ولغرض ايجاد ثابت التكامل k نعوض المعلومات المثبتة في السؤال وكما ياتي:-

$$100=0.8(100)+0.2(100)^{\frac{1}{2}}+k$$

$$100=80+2+k$$

$$k=18$$

اذن دالة الاستهلاك بصورتها الكاملة هي:-

$$C=0.8Y+0.2Y^{\frac{1}{2}}+18$$

رابعا: دالة الادخار *Saving Function*

مثال(7.6) : اذا كان الميل الحدي للادخار MPS يساوي 0.4 اوجد:

1- دالة الادخار

2- دالة الاستهلاك عندما $C=4$

الحل

$$S=\int MPS\,dY$$

$$=\int(0.4)dY$$

$$=0.4Y+C$$

اذن دالة الادخار هي $S=0.4Y+C$

$$Y = C + S$$
$$C = Y - S$$
$$C = Y - [0.4Y + C]$$
$$C = Y - 0.4Y - C$$
$$C = 0.6Y - C \qquad C = 4$$
$$\therefore C = -4 = 0.6Y$$

دالة الادخار : $S = 0.4Y + C$

دالة الاستهلاك: $C = -4 + 0.6Y$

خامسا: تعظيم الربح *Profit Maximization*

تناولنا في فصول سابقة الشرط الضروري لتعظيم الربح وهو عندما يتساوى الايراد الحدي مع الكلفة الحدية ، الامر الذي يمكننا ايجاد مستوى الانتاج الذي يعظم الربح من خلال دالتي الكلفة الحدية والايراد الحدي وعند اجراء التكامل للدالتين نستطيع ايجاد الربح الاجمالي عند مستوى الانتاج الذي يعظم الربح ، أي ان:

$$\pi = \int_0^{Q^*} (MR - MC)\, dQ$$

مثال(7.7): اذا كانت دالتا الايراد الحدي والكلفة الحدية لمشروع ما هما:-

$$MR = 600 - 6Q^2$$
$$MC = 216$$

المطلوب: جد الربح الكلي للمشروع

الحل

نستخدم الشرط الضروري لتعظيم الربح وهذا الشرط هو:

$$MR = MC$$
$$600 - 6Q^2 = 216$$
$$6Q^2 = 600 - 216$$
$$6Q^2 = 384 \Rightarrow Q^2 = 64$$

اذن اما $Q = 8$ او $Q = -8$

وبتطبيق الشرط الكافي لمعرفة ان $Q = 8$ هو المستوى الذي يعظم الانتاج

$$\pi = 600 - 6Q^2 - 216$$
$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = -12Q < 0$$

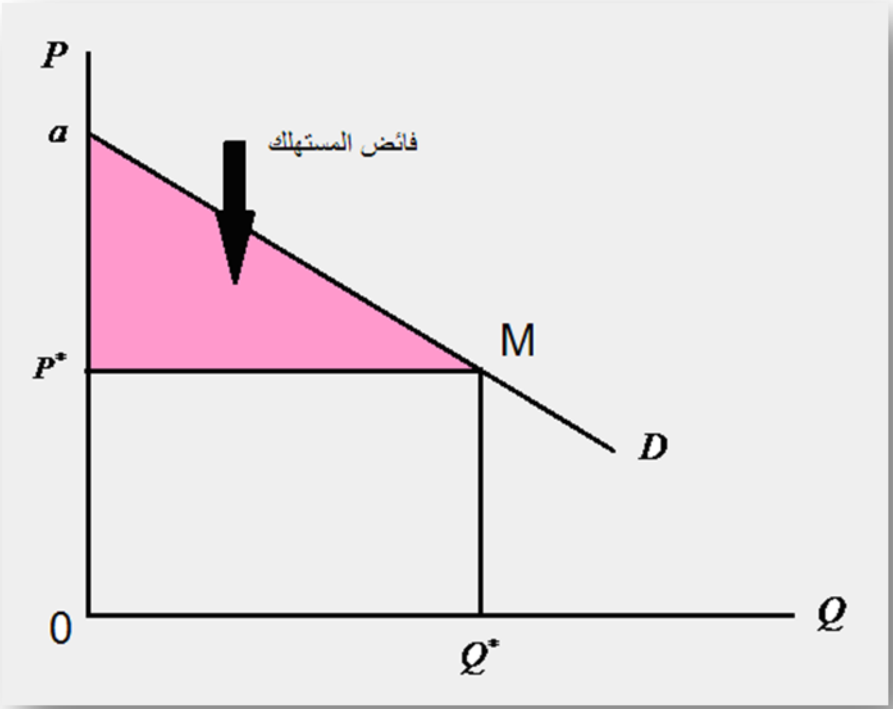
وللحصول على اقصى ربح عند مستوى الانتاج $Q = 8$ ، فإن هذا يتم باجراء التكامل وكما ياتي:-

$$\pi = \int_0^8 (MR - MC)\, dQ$$
$$\pi = \int_0^8 (600 - 6Q^2 - 216)\, dQ$$
$$\pi = [600Q - 2Q^3 - 216Q]$$
$$\pi = [600(8) - 2(8)^2 - 216(8)] - [0]$$
$$\pi = 2048$$

سادسا: فائض المستهلك وفائض المنتج *Consumer and Producer Surplus*

فائض المستهلك CS : هو الفرق بين السعر الذي يكون المستهلك مستعدا لدفعه للحصول على كمية معينة من سلع وخدمات وبين السعر الذي يدفعه فعلا لتلك الكمية حسب ما حددته اليات السوق (سعر التوازن) ومن الرسم البياني (44) فهو يمثل المساحة المحصورة بين منحنى الطلب وسعر التوازن.

لنفرض ان لدينا دالة طلب في صيغتها العامة وهي: $Q=a-bP$ وكان لدينا السعر التوازني P^* والكمية التوازنية Q^* والمطلوب حساب فائض المستهلك الذي مثله المثلث aP^*M ولحساب فائض المستهلك نقوم اولا بحساب مساحة الشكل aMQ^*0 ونطرح منه مساحة المستطيل P^*MQ^*0



شكل (44) فائض المستهلك

ونوجد مساحة الشكل aMQ^*0 عن طريق التكامل المحدد

$$CS=\int_0^{Q^*} P(Q)\,dQ$$

إذ ان $P(Q)$ هو السعر للدالة في الكمية التوازنية وان معادلة الطلب:

$$Q=a-bP$$

فنوجد معكوس دالة الطلب:

$$P=\frac{Q-a}{-b}=\frac{Q}{-b}-\frac{a}{-b}$$

وبذلك تكون مساحة الشكل aMQ^*0 هي:-

$$aMQ^*0=\int_0^{Q^*} f(P)dQ=\int_0^{Q^*}\left(\frac{Q}{-b}+\frac{a}{b}Q\right)dQ$$

$$CS=\left[\frac{Q^2}{-2b}+\frac{a}{b}Q\right]_0^{Q^*}-\left[P^*\times Q^*\right]$$

$$CS=\frac{Q^2}{-2b}+\frac{aQ}{b}-\left[P^*\times Q^*\right]$$

مثال (7.8): اذا كانت دالة الطلب ممثلة بالصيغة الاتية:

$$Q=12-3P$$

فاذا كان سعر التوازن يساوي 1 $\left(P^*=1\right)$ **فان الكمية التوازنية = 9** $Q^*=9$

المطلوب: اوجد قيمة فائض المستهلك

الحل

دالة سعر التوازن هي:

$$P=4-\frac{1}{3}Q$$

وعليه يكون فائض المستهلك هو:

$$CS=\int_0^{Q^*}\left(4-\frac{1}{3}Q\right)dQ-P^*Q^*$$

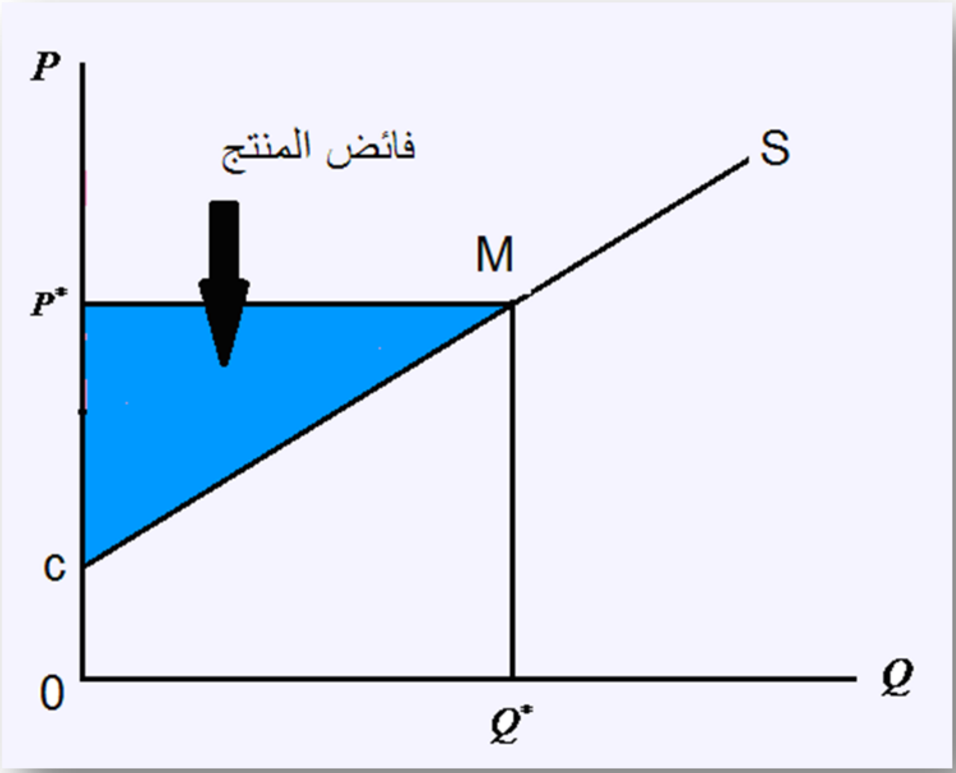
$$CS=\left[4Q-\frac{1}{6}Q^2\right]_0^9-9$$

اذن فائض المستهلك في هذه الحالة :

$$CS=(36-135)-9=135$$

فائض المنتج *PS*: يعبر عن فائض المنتج بانه الفرق بين السعر الذي يكون المنتج مستعدا لبيع كمية معينة من سلع وخدمات عنده وبين السعر الذي يحصل عليه فعلا لتلك الكمية حسب ما حددته آليات وقوى السوق (سعر التوازن) ومن الرسم البياني (45) فهو يمثل المساحة المحصورة بين منحنى العرض وسعر التوازن.

اذا كان لدينا دالة العرض $Q_S=-c+bP$ و Q^* هي الكمية التوازنية و P^* هو السعر التوازني والمثلث P^*Mc يمثل فائض المنتج.



شكل (45) فائض المنتج

ويمكن حساب فائض المنتج كما ياتي:-
نحسب مساحة الشكل cMQ^*0 التي تساوي تكامل دالة العرض المحدد بالنطاق $(0,Q^*)$ أي ان:-

$$PS=\int_0^{Q^*} P(Q)dQ$$

ثم نطرحها من مساحة المستطيل P^*MQ^*0 لتكون المساحة الناتجة هي مساحة المثلث P^*Mc او فائض المنتج.

مثال(7.9): اذا كانت دالة العرض هي: $Q=-4+3P$
وكان السعر التوازني هو 5 $(P^*=5)$ **وعليه فان الكمية التوازنية تساوي 11** $(Q^*=11)$ ،
جد فائض المنتج.
الحل
تكون دالة السعر (معكوس دالة العرض) هي:

$$P=\frac{Q}{3}+\frac{4}{3}$$

وعليه يكون فائض المنتج مساويا الى:-

$$PS = P^{*}Q^{*} - \int_{0}^{Q^{*}} \left(\frac{Q}{3} + \frac{4}{3} \right) dQ$$

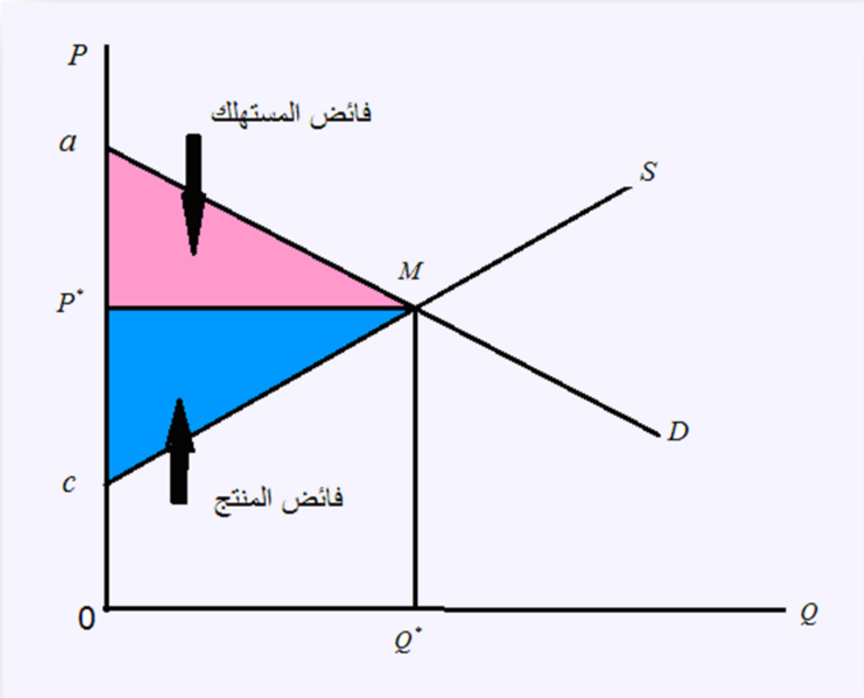
$$PS = (5)(11) - \left[\frac{Q^{2}}{9} + \frac{4}{3}Q \right]_{0}^{11} = 55 - (13.444 + 14.6)$$

اذن قيمة فائض المنتج هي:-

$$PS = 55 - 28.044 = 26.925$$

فائض المجتمع *PCS*

يعد فائض المجتمع (او مجموع فائض المستهلك والمنتج) من اهم المفاهيم او الادوات في تحليل اقتصاديات الرفاهية، ويتم حسابه بجمع فائض المستهلك مع فائض المنتج او بحساب المنطقة المحصورة فوق منحنى العرض وتحت منحنى الطلب في نطاق الكمية التوازنية، وكما في الشكل البياني الاتي:-



شكل (46) فائض المنتج والمستهلك

معكوس دالة الطلب: $P_1 = f_1(Q)$
معكوس دالة العرض: $P_2 = f_2(Q)$
فائض المستهلك:

$$CS = \int_0^{Q^*} f_1(Q)dQ - Q^* P^*$$

بينما فائض المنتج:

$$PS = Q^* P^* - \int_0^{Q^*} f_2(Q)dQ$$

وبجمع فائض المنتج مع فائض المستهلك للحصول على فائض المجتمع، او الحصول على فائض المجتمع مباشرة عن طريق حساب المنطقة المحصورة فوق منحنى العرض وتحت منحنى الطلب ، فإن:

فائض المجتمع:

$$PCS = \int_0^{Q^*} f_1(Q)dQ + \int_0^{Q^*} f_2(Q)dQ$$

مثال(7.10): لديك دالة الطلب الاتية :

$$P_d = 25 - Q^2$$

ودالة العرض الاتية:

$$P_S = 2Q + 1$$

فاذا علمت ان التوازن يعني $Q_d = Q_S$ فاجب عما ياتي:

1- احسب سعر وكمية التوازن.

2- احسب فائض المستهلك وفائض المنتج وفائض المجتمع.

الحل

1- حساب سعر وكمية التوازن:

$$\because P_S = P_d$$
$$2Q + 1 = 25 - Q^2$$

$$Q^2 + 2Q - 24 = 0$$
$$(Q+6)(Q-4) = 0$$

اذن كمية التوازن وسعر التوازن بعد الحل هما :

$$(P^*, Q^*) = (9,4)$$

2- حساب فائض المستهلك وفائض المنتج وفائض المجتمع:

فائض المستهلك:

$$CS = \int_0^{Q^*} (P_d)\,dQ - (P^* Q^*)$$
$$CS = \int_0^4 (25 - Q^2)\,dQ - (P^* Q^*) = \left[25Q - \frac{1}{3}Q^3\right]_0^4 - [(4)(9)]$$
$$CS = 78.67 - 36$$
$$CS = 42.67$$

فائض المنتج:

$$PS = P^* Q^* - \int_0^{Q^*} (P_S)\,dQ$$
$$PS = P^* Q^* - \int_0^4 (2Q+1)\,dQ = 36 - \left[Q^2 + Q\right]_0^4$$
$$PS = 36 - 20 = 16$$

فائض المجتمع:

$$PCS = 42.67 + 16 = 58.67$$

كما يمكن حساب فائض المجتمع بان ناخذ دالة التوازن ثم نكامل هذه الدالة وكما ياتي:

$$Q^2 + 2Q - 24 = 0$$
$$PCS = \int_0^4 (Q^2 + 2Q - 24)\,dQ$$
$$PCS = \left[\frac{1}{3}Q^3 + Q^2 - 24Q\right]_0^4$$
$$PCS = 0 - (21.333 + 16 - 96)$$
$$PCS = 58.67$$

وهو النتيجة نفسها في الحالة الاولى.

التحليل الديناميكي المتقطع ***Discrete Dynamic analysis***

تفترض النماذج الاقتصادية الساكنة ان متغيرا ما يعتمد على متغير اخر في المدة الزمنية نفسها ، إلا ان الاقتصاد ليس ساكنا فقد تعتمد مثلا الكمية المعروضة في مرحلة زمنية معينة على السعر الذي كان سائدا في المرحلة السابقة ، او قد يعتمد الاستهلاك الجاري على الدخول السابقة وهكذا.

إن دراسة اثر هذه التباطؤات (التخلف الزمني) *Lags* هو أمر اساس عند دراسة التغيرات التي تواجه الاقتصاد خلال الزمن. ومثل هذا التحليل يعني اننا نتعامل مع اقتصاد ديناميكي (حركي) وهو نقيض للاقتصاد الساكن.

تستخدم معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى في دراسة التغيرات المتعلقة بالزمن عندما يعتمد ما يحدث في فترة زمنية على ما حدث في المدة السابقة، ونفهم من سياق الحديث ان تطبيق ذلك على على دالة الاستهلاك مثلا يعني ان الاستهلاك في أي مدة زمنية ولتكن المدة t مثلا يعتمد على دخل المدة $t-1$ ويعبر عن ذلك رياضيا بالاتي:-

$$C_t = f(Y_{t-1})$$

معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى:

حتى يمكن التعرف على مفهوم معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاول سنتناول نظاما اقتصاديا مغلقا من دون وجود نشاط حكومي وكما ياتي:-

$$Y_t = C_t + I_t$$

والرموز المثبتة في المعادلة اعلاه قد تم التعرف عليها مسبقا غير ان ماتجدر الاشارة اليه هنا ان الفرق بين هذه المعادلة والمعادلة الاتية ، $Y=C+I$ هو ان المدة الزمنية قد تم تاشيرها بالرمزالسفلي t.وهذا هو الفرق بين الأنموذج الساكن والأنموذج الديناميكي كما تم الاشارة اليه مسبقا.

ولنفترض ان I_t ياخذ القيمة I_0 وهي قيمة لاتتغير مع تغير t ، واذا كان الاستهلاك دالة لدخل المدة السابقة فسوف تتخذ دالة الاستهلاك الشكل الاتي:-

$$C_t = c_0 + cY_{t-1}$$

إذ تمثل c_0 الاستهلاك التلقائي(المستقل عن الدخل)، في حين يمثل c الميل الحدي للاستهلاك MPC وبما ان:-

$$Y_t = C_t + I_t$$

فإن:-

$$Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I_0 ....(1)$$

وهذه معادلة فروق خطية من الدرجة الاولى ، بسبب ان الدخل في المدة t يعتمد جزئيا على ما حدث في المدة السابقة. فاذا ما كان الدخل في المدة t متاثرا باحداث المدة $t-2$ او $t-3$ ، أي $Y_t = f(Y_{t-2})$ ، او $Y_t = f(Y_{t-2})$ ، فسيكون لدينا معادلة فروق من الدرجة الثانية او من الدرجة الثالثة. وكون المعادلة (1) اعلاه خطية لانها لم تحتو على حدود مرفوعة لاس اكبر من واحد مثل $c(Y_{t-1})^2$.

ان خطوات حل معادلات الفروق الخطية من الدرجة الاولى يمكن اجمالها بالمثال الاتي:

مثال(7.11): اذا كان لدينا المعادلة $Y_t = C_0 + cY_{t-1} + I_0$ والسؤال بماذا ستخبرنا هذه المعادلة حول تغيرات الدخل بالنسبة للزمن ، وكانت لدينا المعلومات الاتية:

$$c = 0.8 \ , \quad I_0 = 500 , \quad C_0 = 100$$

بتوفر المعلومات نكتب معادلة الدخل كالاتي:

$$Y_t = 100 + 0.8Y_{t-1} + 500$$
$$Y_t = 600 + 0.8Y$$

وحتى يمكن التعرف على تغير Y بالنسبة للفترة الزمنية t ينبغي معرفة قيمة الدخل في المدة الاولية (الابتدائية) أي Y_0 ولتكن هذه القيمة تساوي 2500 أي ان $(Y_0 = 2500)$ وإذ ان:-

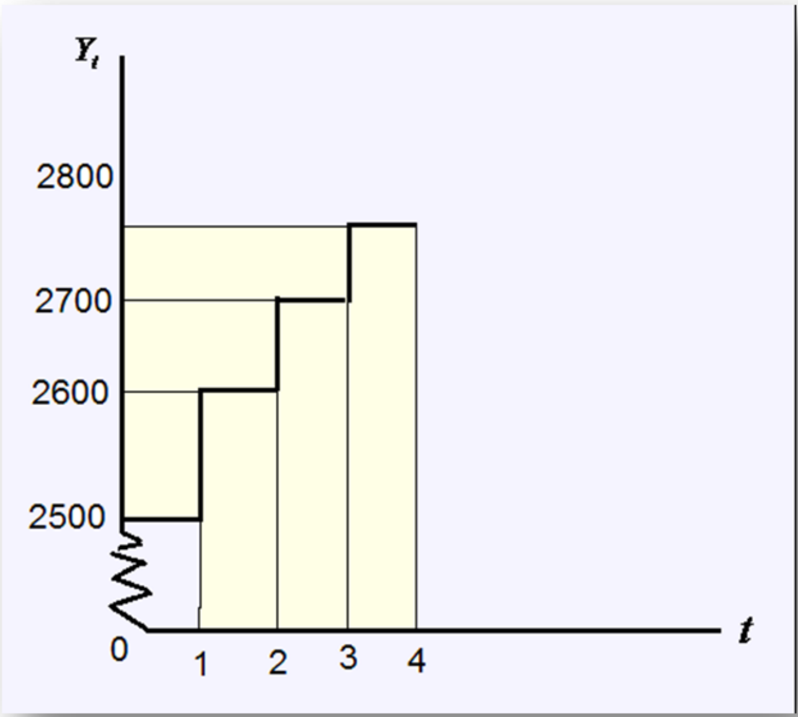
$$Y_t = 600 + 0.8Y_{t-1}$$

فانه يمكن حساب Y_t عندما $t=$ 1، 2، 3 .....

عليه يمكن حسابها كالاتي:-

$$Y_1 = 600 + 0.8Y_{1-1} \Rightarrow Y_1 = 600 + 0.8Y_0 \Rightarrow Y_1 = 600 + 0.8(2500) \Rightarrow Y_1 = 2600$$
$$Y_2 = 600 + 0.8Y_{2-1} \Rightarrow Y_2 = 600 + 0.8Y_1 \Rightarrow Y_2 = 600 + 0.8(2600) \Rightarrow Y_2 = 2680$$
$$Y_3 = 600 + 0.8Y_{3-1} \Rightarrow Y_3 = 600 + 0.8Y_2 \Rightarrow Y_3 = 600 + 0.8(2680) \Rightarrow Y_3 = 2744$$
$$Y_4 = 600 + 0.8Y_{4-1} \Rightarrow Y_4 = 600 + 0.8Y_3 \Rightarrow Y_4 = 600 + 0.8(2744) \Rightarrow Y_4 = 2795.2$$

يشير الشكل البياني (47) الى التغيرات في الدخل خلال المدد المؤشرة في المثال اعلاه. كما يبين الشكل البياني بوضوح ان النماذج الاقتصادية التي تم التعبير عنها بصيغة معادلات فروق تعالج الزمن على انه متغير منفصل او غير مستمر.



شكل (47) تغيرات الدخل خلال الزمن

وتعد هذه الطريقة بسيطة في حال اردنا حساب دخل لقيم صغيرة من t ، غير ان الامر يصبح اكثر تعقيدا كلما اصبحت t اكبر.

مثال(7.12): لديك المعادلة الاتية : $Y_t = 2Y_{t-1}$ ، وضح التغيرات التي ستحدث على المتغير Y اذا علمت ان قيمة Y في الزمن صفر =3 أي $Y_0 = 3$

الحل

في حالة كانت قيمة Y تساوي 3 فان:-

$$Y_1 = 2Y_0 = 2\times 3 = 6$$
$$Y_2 = 2Y_1 = 2\times 6 = 12$$
$$Y_3 = 2Y_2 = 2\times 12 = 24$$

ولتوليد الصيغة العامة للحل اعلاه يمكن كتابتها على الشكل الاتي:-

$$Y_1 = 2Y_0 = 2^1 \times 3$$
$$Y_2 = 2Y_1 = 2^2 \times 3$$
$$Y_3 = 2Y_2 = 2^3 \times 3$$

والان يمكن كتابة الصيغة العامة للحل اعلاه:

$$Y_t = 3(2^t)$$

وبشكل عام هناك طريقتان لحل معادلات الفروق من الدرجة الاولى وهي كما ياتي:-

1. **طريقة التكرار *Iterative Method***
2. **الطريقة العامة *General Method***