الواجب التعرف عليها ودراستها من قبل الراغبين في استخدامها وكذلك للطلبة الذين يدرسون هذه المادة كمتطلب في اختصاصاتهم، وعلى وجه الخصوص طلبة الادارة والاقتصاد.

ولقد تم وضع الكتاب ليكون مرجعاً مهماً ومقرراً لتدريس مادة الرياضيات في كلية العلوم الإدارية والمالية في جامعة عمان الأهلية وكذلك في كليات العلوم الإدارية والمالية في بقية الجامعات، آملين أن يكون هذا الكتاب لبنة إضافية مفيدة للتدريس في الجامعات العربية وأن يلقى القبول من الجميع.

وفقنا الله جميعاً لخدمة العلم

المؤلفين

الفصل الأول

1 مراجعة في الجبر

1-1 مقدمة

2-1 الأعداد الحقيقية

3-1 النسب (الكسور)

4-1 الأسس

5-1 العمليات الجبرية

6-1 العوامل

أسئلة الفصل الأول

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الأول
مراجعة في الجبر
Review of Algebra

1-1 مقدمة Introduction:

سيتم في هذا الفصل إعطاء مقدمة للعمليات الجبرية Review on Algebraic Operations والتي تعتبر محاولة لمراجعة المهارات الرياضية للطلبة Mathematical Skills عن طريق التعرف على الأعداد Numbers بالطريقة التي تميز تسمياتها وأنواعها المختلفة Their Kinds وتعريفاتها الواضحة Their Definitions والرموز Symbols المستخدمة لدراستها وكذلك جميع المفاهيم Concepts المتعلقة بها والعمليات الجبرية Algebraic Operations الممكن استخدامها موضحين العلاقات Relations والنظريات Theories الخاصة بكل منها. وكذلك سيتم حل كثير من الأمثلة Examples وسيحتوي الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

سيتضمن الفصل عدة مباحث وهي المبحث 2-1 الأعداد الحقيقية Real Numbers والمبحث 3-1 النسب (الكسور) (Fractions) Ratios. المبحث 4-1 الأسس Exponents والمبحث 5-1 العمليات الجبرية Algebraic Operations، أما المبحث الأخير 6-1 فهو العوامل Factors.

1-2 الأعداد الحقيقية Real Numbers:

لإعطاء وصف وتعريف واضح للأعداد الحقيقية Real Numbers علينا البدء بتعريف ووصف أبسط وأسهل أنواع الأعداد المتعارف عليها وهي الأعداد الطبيعية.

We will strat with the simplest numbers which are called the Natural numbers, and they are the following numbers

$$1, 2, 2, 4, \ldots$$

وببســاطة فإن معنى الأعداد الطبيعية واضح في أنه يمثل الأعداد الصحيحة موجــبة والتي تكون قيمها أكبر من صفر (أو تسمى أرقام العد والتي تستخدم في عـــد) Positive integers greater than zero وكــذلك يمكن ملاحظة أن عمليتي جمع addition والضرب multiplication للأعداد الطبيعية يعطي نتائج هي أيضاً عداد طبيعية.

Addition and multiplication for Naturals numbers are also Natura numbers.

فمثلاً $1 + 3 = 4$ وكذلك $(1)\ (3) = 3$

أما عن عملية الطرح Subtraction فإن النتائج لا تعطى دائماً أعداد طبيعية

Subtraction for Naturals numbers are not always Natural numbers

فمثلاً $1 - 3 = -2$. لذلك علينا التعرف على أعداد أخرى أكبر وأوسع من عنى الأعداد الطبيعية وهناك الأعداد الصحيحة Integer Numbers.

We notice that the Integer Numbers are the following numbers

…. , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , …

والتــي يتضـــح أنها تعني جميع الأعداد الطبيعية وكذلك مماثلاتها من القيم سالبة وأيضاً قيمة الصفر.

We notice that Integer Numbers are all positive and negativ numbers and also the zero value.

ويلاحــظ أيضـــاً بـــأن جمع وطرح وضرب الأعداد الصحيحة يعطي أعداد سحيحة.

Addition, subtraction, and multiplication for Integer numbers ar also Integer numbers.

مــثلاً $1 + 3 = 4$ ، $1 - 3 = -2$ وكــذلك $(1)\ (3) = 3$ وجميعها أعداد سحيحة.

أمـــا عـــن القسمة division فإن النتائج لا تمثل أعداد صحيحة دائما وأحيانا تكون الأعداد غير صحيحة.

Division for Integer numbers are not always an Integer numbers.

مـــثلاً $\frac{1}{3} = 3 \div 1$ وبالتالي علينا التعرف على أعداد جديدة تسمى الأعداد النسبية Rational numbers والتي تعرض بشكل نسب.

Rational numbers which are formed by taking ratios of Integers of the form $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ where a and b are Integers.

ومن أمثلة الأعداد النسبية:

$$\frac{6}{6} , \frac{1}{3} , \frac{-2}{3} , \frac{4}{3} , \frac{-3}{4} , \frac{9}{3} , \frac{-3}{9}$$

وغيـــرها من أشكال قسمة عددين صحيحين وبشرط عدم القسمة على صفر لأن ذلك يعطي نتائج غير معرفة Undefined Results.

ويلاحظ هنا بأن بعض نتائج القسمة تمثل أعداد صحيحة مثل $\frac{9}{3} = 3$ وذلك يعني أن الأعداد الصحيحة هي أعداد نسبية وليس العكس صحيح.

Some of the results of the divisions are integers which means that all integers are Rational numbers but not vise versa.

أما بعض نتائج القسمة الأخرى فلا تمثل أعداد صحيحة بل يطلق عليها اسم الأعداد النسبية عامة واسم الكسور fraction إذا كان البسط numerator أقل less than من المقام Denominator ومن أمثلة ذلك:

$$\frac{3}{9} , \frac{-3}{4} , \frac{-2}{3} , \frac{1}{3}$$ وغيرها.

أمـــا الأعـــداد التي لا يمكن كتابتها بشكل نسبة فتسمى الأعداد الغير نسبية Irrational numbers ومـــنها $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{7}$ ، π وغيرها مع أنها بصورة عامة قليلة مقارنة مع ما تكونه الأعداد النسبية.

وأخيــراً فإن الأعداد الحقيقية Real Numbers هي عبارة عن جميع الأعداد النســبية وبضــمنها الأعداد الطبيعية والصحيحة وكذلك على جميع الأعداد الغير نسبية.

Both Rational and Irrational Numbers comprise the Real numbers (division by zero is not defined).

تتميــز الأعداد النسبية والغير نسبية عن بعضها بطريقة عرضها عند إيجاد نــاتج القســمة $\frac{a}{b}$ بالشكل العشري decimal، حيث أن الأعداد النسبية هي الأعداد العشــرية المنتهية Terminate أو تلك التي تكون شكل دوري Repeating pattern أما غيرها فهي عبارة عن أعداد غير نسبية فمثلاً:

$\frac{5}{4} = 1.25$	Rational number
$\frac{7}{8} = 0.875$	Rational number
$\frac{4}{3} = 1.3333\bar{3}$	Rational number
$\frac{3}{11} = 0.2727\overline{27}$	Rational number
$\sqrt{2} = 1.414213562376$	Irrational number
$\pi = 3.718$	Irrational number

وقبل الانتقال لتعريف مفهوم آخر علينا القول بأن الأعداد الحقيقية هي ليست منتهــى الأعــداد فهــناك نطــاق أوسع من الأعداد والذي يسمى بالأعداد المركبة Complex Numbers والتــي نســتطيع مــن خلالهــا حل جميع أشكال المعادلات التربيعية Quadratic Equations والتي لا يوجد لها حل No Real Solution مثل: $x^2 = -1$.

الأعــداد المركبة Complex Numbers هي الأعداد التي تأخذ الشكل العام التالي

Complex Numbers have the following general form a + bi , where a , b are Real numbers and $i = \sqrt{-1}$.

ومن أمثلة هذه الأعداد 4 ، $\frac{2}{3}$ ، i ، 7i ، 4 + 3i ، 2 – 5i وغيرها

ويلاحظ بان بعض الأعداد المركبة هي أعداد حقيقية.

We notice that Reals are complex numbers.

مثل 4 ، $\frac{2}{3}$ أما بعضها الآخر فيسمى الأعداد الخيالية Immaginary Numbers مثل i ، 7i. وأن الأعداد المركبة هي جميع الأعداد الحقيقية وجميع الأعداد الخيالية (الغير حقيقية).

Both Real and Immaginary Numbers together comprise the complex numbers.

الأعداد الحقيقية Real numbers والتي يرمز لها بالرمز $\Re$ هي جميع القيم التي تبدأ بأصغر قيمة ممكنة ويرمز لها بالرمز ∞- وتنتهي بأكبر قيمة ممكنة ويرمز لها بالرمز ∞+ وبالتالي فإن الأعداد الحقيقية لها المعاني التالية:

Meaning of $\Re$:

1- الأعداد الحقيقية $\Re$ هي عبارة عن فترة Interval من القيم تبدأ بالقيمة ∞- وتنتهي بالقيمة ∞+ وتكتب بالشكل $\Re = (-\infty , +\infty)$ وسيتم تعريف الفترات Intervals ومناقشتها لاحقاً.

Real numbers are called the interval of Real numbers.

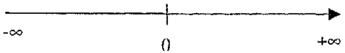
2- الأعداد الحقيقية $\Re$ يطلق عليها اسم مجموعة الأعداد الحقيقية.

Real numbers are called the set of Real Numbers.

وهذا المفهوم المجموعة set سيتم مناقشته وتعريفه لاحقاً.

3- الأعداد الحقيقية $\Re$ تمثل خط line من القيم الحقيقية ويسمى هذا الخط بالخط الكارتيزي coordinate line أو يسمى بالإحداثي السيني x-axis.

Real numbers are called the coordinate line of real numbers starting from -∞ and ending with +∞ containing zero, which can be presented as the following



هـذا الإحداثـي السيني يستخدم بشكل واسع لرسم النقاط والأشكال المختلفة وسيتم مناقشة ذلك وبالتفصيل لاحقاً.

أما عن خصائص الأعداد الحقيقية Properties of Real Numbers فهي:

1- Commutative property **الخاصية التبادلية**

If a , b are real numbers, then:

$$a + b = b + a \quad , \quad a\,b = b\,a$$

for example: $1 + 3 = 3 + 1 = 3$

$1 + (-3) = (-3) + 1 = -2$

$(1)\,(3) = (3)\,(1) = 3$

2- Associative property **الخاصية التشاركية**

If a , b, and c, are real numbers, then:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \quad (a\,b)\,c = a\,(b\,c)$$

for example: $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$

$2\,.\,(3\,.\,4) = (2\,.\,3)\,.\,4 = 24$

3- Distributive property **الخاصية التوزيعية**

If a , b , and c are real numbers, then:

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c \quad , \quad (b + c)\,a = b\,a + c\,a$$

for example: $2\,(3 + 4) = (2)\,(3) + (2)\,(4) = 14$

4- Identity elements:

if a is real number, then:

$$a + 0 = a \quad , \quad a\,.\,1 = a$$

it is abvious that if we add any real number to zero we get the same number, and also if we multiply any real number by one we get same number.

5- Inverse property **الخاصية العكسية**

If a is a real number, then –a is called the negative of a , also the reciprocal of a is a^{-1} and we have:

$$a + (-a) = 0 \quad , \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

for example: if a = 3 then –a = -3 and $a^{-1} = \frac{1}{3}$

and we have

$$3 + (-3) = 3 - 3 = 0 \quad \text{and} \quad 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

6- Order property **خاصية الترتيب**

if a , b are real numbers, and b – a is positive, then b – a > 0 which means that b > a or a < b.

We will state some theorems (without proof) for ordering properties as follows:

a) if a < b and b < c , then a < c
for example: 1 < 2 and 2 < 3 then 1 < 3

b) If a < b , then a + c < b + c
also a – c < b – c
for example: 2 < 3 , then 2 + 1 < 3 + 1 since 3 < 4
also 2 < 3 , then 2 – 1 < 3 – 1 since 1 < 2

c) If a < b , then a c < b c if c positive , and $c \neq 0$
also a c > b c if c negative , and $c \neq 0$
for example: 2 < 3 , then (2) (2) < (3) (2) since 4 < 6
but, if 2 < 3 , then (2) (-2) > (3) (-2) since –4 > -6

d) If a < b and c < d , then a + c < b + d
for example: if 1 < 2 and 3 < 4 , then 1 + 3 < 2 + 4 since 4 < 6

e) If a and b are both positive or both negative, and
if a < b , then $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
for example: if 2 < 3 , then $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

and if $-3 < -2$, then $\frac{-1}{2} > -\frac{1}{3}$

فـــي نهاية هذا المبحث سيتم عرض بعض الأمثلة للتعامل مع الأعداد بكافة تسمياتها مستخدمين العمليات الجبرية المناسبة لكل منها مراعين الخصائص السابق ذكرها وكالآتي:

مثال 1

:Simplify the following بسط المقادير التالية

a) $5 + 4 = 9$

b) $5 - 4 = +1$

c) $4 + 5 = 9$

d) $4 - 5 = -1$

e) $(5)(4) = 20$

f) $(4)(5) = 20$

g) $(5)(-4) = -20$

h) $(-5)(4) = -20$

i) $(-4)(-5) = 20$

j) $1 \div 3 = \frac{1}{3}$

k) $3 \div 1 = 3$

مثال 2

:Simplify the following بسط المقادير التالية

a) $x + 3x = 4x$

b) $3x + x = 4x$

c) $x - 3x = -2x$

d) $3x - x = 2x$

e) $(x)(3x) = 3x^2$

f) $(3x)(x) = 3x^2$

g) $x \div 3x = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

h) $3x \div x = \frac{3x}{x} = 3$

مثال 3

بسط المقادير التالية Simplify the following:

a) $2(3a) + 9a = 6a + 9a = 15a$

b) $4a + 2(3a) = 4a + 6a = 10a$

c) $3(4a) - 8a = 12a - 8a = 4a$

d) $4a - 2(3a) = 4a - 6a = -2a$

e) $x + (3x + 4y) = x + 3x + 4y = 4x + 4y$

f) $x(3x + 4y) = 3x^2 + 4xy$

g) $4(x + 2y - 3z) = 4x + 8y - 12z$

مثال 4

بسط المقادير التالية Simplify the following:

a) $\frac{4}{2} = 2$

b) $\frac{2}{4} = 0.5$

c) $\frac{3}{4} = 0.75$

d) $\frac{4}{3} = 1.333\overline{33}$

e) $(4)\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

f) $(4)\left(\frac{3}{4}\right) = 3$

g) $(\frac{1}{2})(\frac{3}{4}) = \frac{3}{8}$

1-3 النسب (الكسور) Ratios (Fractions):

لقد تم تعريف النسبة، وكما رأينا سابقاً على أنها الشكل $\frac{a}{b}$ ، حيث أن a ، b عددان حقيقيان وأن $b \neq 0$.

The ratio $\frac{a}{b}$ is defined to be the quotient of the two real numbers a and b, where $b \neq 0$.

وعـندما يكون المقام denominator b أكبر من البسط numerator a عندئذ تُعرف النسبة على أنها الكسر Fraction.

When the numerator a is less than the denominator b, then the ratio $\frac{a}{b}$ is called the fraction.

ويمكن ملاحظة أن النسبة $\frac{a}{b}$ تكتب أيضاً بالشكل $a\ b^{-1}$ ، حيث أن $b^{-1} = \frac{1}{b}$ والذي يسمى بالمعكوس inverse.

$\frac{a}{b}$ is defined as the product of a and the inverse of b, i.e $\frac{a}{b} = a\ b^{-1}$.

أما عن العمليات الجبرية الخاصة بهذا النوع من الأعداد فهي كالآتي:

1- Multiplication of Fractions:

$$(\frac{a}{b})(\frac{c}{d}) = \frac{ac}{bd}$$

That is, the product of two fractions is obtained by the multiplication the two numerators divided by the multiplication of the two denominators.

2- Division of Fractions:

$$(\frac{a}{b}) \div (\frac{c}{d}) = (\frac{a}{b})(\frac{d}{c}) = \frac{ad}{bc}$$

That is, the quotient of two fractions is obtained by multiplying the first fraction by the inverse of the second fraction.

3- Cancellation of common factors:

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc} \quad , \quad c \neq o$$

That is, the fraction would be the same if the numerator and the denominator of the fraction is multiplied or divided by any nonzero number.

4- Addition and Subtraction of Fractions:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

similarly:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

That is, if two fractions have a common denominator, they may be added (or subtracted) by adding (subtracting) their numerators.

When, we have to add (or subtract) two fractions with different denominators, then we have to use a common denominator for both fractions. To keep the numbers as small as possible, we choose the smallest possible common denominator which is called the least common denominator.

That is, if $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ are two fractions, then:

$$\frac{a}{b}\mp\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\mp\frac{cb}{bd}=\frac{ad\mp cb}{bd}$$

ومع بساطة القوانين السابق ذكرها للتعامل مع الكسور والنسب بصورة عامة ولكــن الأمــثلة التي سيتم ذكرها في هذا المبحث ستكون شاملة وتتضمن كثير من التفاصــيل التــي لا نستطيع رؤيتها من خلال القانون فحسب بل علينا التعامل مع المعطيات والتركيز على الصورة الصحيحة لها وسيتم ذلك كالآتي:

مثال 5

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following:

a) $(\frac{2}{3})(\frac{4}{7}) = \frac{(2)(4)}{(3)(7)} = \frac{8}{21}$

b) $(\frac{2x}{3})(\frac{4}{7y}) = \frac{(2x)(4)}{(3)(7y)} = \frac{8x}{21y}$

c) $2x(\frac{4}{7y}) = (\frac{2x}{1})(\frac{4}{7y}) = \frac{(2x)(4)}{(1)(7y)} = \frac{8x}{7y}$

d) $(\frac{2}{3}) \div (\frac{4}{7}) = (\frac{2}{3})(\frac{7}{4}) = \frac{(2)(7)}{(3)(4)} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

e) $(\frac{2x}{3}) \div (\frac{4}{7y}) = (\frac{2x}{3})(\frac{7y}{4}) = \frac{(2x)(7y)}{(3)(4)} = \frac{14xy}{12} = \frac{7xy}{6}$

f) $(2x) \div (\frac{4}{7y}) = (\frac{2x}{1}) \div (\frac{4}{7y}) = (\frac{2x}{1})(\frac{7y}{4}) = \frac{14xy}{4} = \frac{7yx}{2} = \frac{7xy}{2}$

g) $(\frac{4}{7y}) \div (2x) = (\frac{4}{7y}) \div (\frac{2x}{1}) = (\frac{4}{7y})(\frac{1}{2x}) = \frac{(4)(1)}{(7y)(2x)} = \frac{4}{14xy} = \frac{2}{7xy}$

h) $(\frac{x}{y})^{-1} = 1 \div (\frac{x}{y}) = (1)(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$

مثال 6

استنتج قيمة المقدار الذي تم استخدامه للعلاقات التالية:

a) $\frac{x}{y} = \frac{3x}{3y}$ (multiplying by common factor: 3)

b) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{-8}{-12}$ (multiplying by common factor: 2, 3, -4)

c) $\frac{2x}{3} = \frac{6x^2}{9x}$ (multiplying by common factor: 3x)

مثال 7

بسط المقادير التالية Simplify the following:

a) $\frac{48}{84}$

لأجل تبسيط المقدار 48 مقسوماً على 84 يجب علينا أولاً أن نكتب المقدارين بعواملهم الأولية ومن ثم نحذف العوامل المشتركة من البسط والمقام ونجد الناتج كالآتي:

$$\frac{48}{84}=\frac{\cancel{2}.\cancel{2}.2.2.\cancel{3}}{\cancel{2}.\cancel{2}.\cancel{3}.7}=\frac{2.2}{7}=\frac{4}{7}$$

b) $\frac{6xy^2}{27x^2y}=\frac{2.\cancel{3}.\cancel{x}.\cancel{y}.y}{\cancel{3}.3.3.\cancel{x}.x.\cancel{y}}=\frac{2.y}{3.3.x}=\frac{2y}{9x}$

باستخدام نفس الأسلوب أعلاه وتحليل البسط والمقام لعواملهم وحذف العوامل المشتركة

c) $\frac{2x(y+4)}{8y(y+4)}=\frac{x}{4y}$ $\qquad (y+4\neq 0)$

وبنفس الأسلوب السابق العامل المشترك هو (y + 4) 2 مع إضافة شرط أن هذا العامل المشترك لا يساوي صفراً.

مثال 8

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following:

a) $\frac{5}{11}+\frac{10}{11}=\frac{5+10}{11}=\frac{15}{11}$

b) $\frac{5}{11}-\frac{10}{11}=\frac{5-10}{11}=\frac{-5}{11}$

c) $\frac{2}{3x}+\frac{4}{3x}=\frac{2+4}{3x}=\frac{6}{3x}=\frac{2}{x}$

d) $\frac{2y}{3x}-\frac{4}{3x}+\frac{5z}{3x}=\frac{2y-4+5z}{3x}$

مثال 9

بسط كل مما يلي Simplify the following:

a) $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$

لإيجـــاد ناتج جمع $\frac{5}{6}$ و $\frac{1}{3}$ يجب علينا في البداية توحيد المقام ليكون المقدار نفسه وسنستخدم 6 ليكون المقام الموحد، وذلك يعني علينا ضرب الحد الثاني وهو $\frac{1}{3}$ في المقدار 2 لكل من البسط والمقام ليصبح $\frac{(1)(2)}{(3)(2)}=\frac{2}{6}$ ومن ثم يتم جمعه مع المقدار الأول $\frac{5}{6}$ ليكون الناتج:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}+\frac{(2)(1)}{(2)(3)}=\frac{5}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5+2}{6}=\frac{7}{6}$$

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}-\frac{(1)(2)}{(3)(2)}=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}$

باستخدام نفس الأسلوب السابق لتوحيد المقامات.

c) $\frac{5}{6}+\frac{3}{7}=\frac{(5)(7)}{(6)(7)}+\frac{(3)(6)}{(7)(6)}=\frac{35}{42}+\frac{18}{42}=\frac{35+18}{42}=\frac{53}{42}$

d) $\frac{5}{6}-\frac{3}{7}=\frac{(5)(7)}{(6)(7)}-\frac{(3)(6)}{(7)(6)}=\frac{35}{42}-\frac{18}{42}=\frac{35-18}{42}=\frac{17}{42}$

مثال 10

بسط المقدار التالي Simplify of following:

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$$

لإيجاد ناتج القسمة علينا أولاً إيجاد ناتج البسط كما يلي:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{(2)(2)}{(3)(2)}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4+1}{6}=\frac{5}{6}$$

وكذلك علينا إيجاد ناتج المقام كما يلي:

$$\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{(1)(2)}{(3)(2)}-\frac{5}{6}=\frac{2}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2-5}{6}=\frac{-3}{6}$$

وبالتالي فإن ناتج حاصل القسمة سيكون:

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{-3}{6}}=(\frac{5}{6})(\frac{-6}{3})=\frac{-5}{3}$$

مثال 11

بسط المقدار التالي Simplify the following:

$$\frac{7x-\frac{2x}{3}}{15y-\frac{y}{3}}$$

لإيجاد ناتج عملية القسمة علينا أولاً إيجاد ناتج البسط ليكون:

$$7x-\frac{2x}{3}=\frac{7x}{1}-\frac{2x}{3}=\frac{(7x)(3)}{(1)(3)}-\frac{2x}{3}=\frac{21x-2x}{3}=\frac{19x}{3}$$

وكذلك علينا إيجاد ناتج المقام ليكون:

$$15y-\frac{y}{3}=\frac{15y}{1}-\frac{y}{3}=\frac{(15y)(3)}{(1)(3)}-\frac{y}{3}=\frac{45y}{3}-\frac{y}{3}=\frac{45y-y}{3}=\frac{44y}{3}$$

وأخيراً علينا قسمة ناتج البسط على ناتج المقام ليصبح لدينا:

$$(\frac{19x}{3})\div(\frac{44y}{3})=(\frac{19x}{\cancel{3}})(\frac{\cancel{3}}{44y})=\frac{19x}{44y}$$

1-4 الأسس Exponents:

إذا كان m عدد صحيح موجب positive integer فإن a^m (وتقرأ a للقوة أو الأس m) a is raised to the power m تُعرف على أنها حاصل ضرب العدد a في نفسه بمقدار m من المرات.

That is,

$a^m = a . a . a \ldots a$ (m من المرات)

for example:

$$2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$$
$$3^4 = 3 . 3 . 3 . 3 = 81$$

وهنا نطلق اسم القوة أو الأس Power or exponent للرمز m ونطلق اسم الأساس base للرمز a

Definition:

If $a \neq 0$, then $a^0 = 1$, and if m is any positive integer (so that $-m$ is a negative integer), then:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

for example:

$$(-5)^0 = 1 \quad , \quad (\frac{3}{5})^0 = 1 \quad , \quad 3^0 = 1 \quad , \text{ also}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3.3} = \frac{1}{9} \quad and \quad (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = \frac{1}{(-3)(-3)(-3)} = \frac{-1}{27}$$

أما عن خصائص الأسس Exponent Properties:

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$, except that if either m or n is negative, then $a \neq 0$.

That is, to multiply two powers with the same base we can add the two exponents.

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad a \neq 0$

That is, to divide one power by another with the same base, subtract the exponent in the denominator from the exponent in the numerator.

3) $(a^m)^n = a^{mn}$, $a \neq 0$ if m or n is negative or zero

That is, a power raised to a power is equal to the base raised to the product of the two exponents.

4) $(ab)^m = a^m b^m$, $ab \neq 0$ if $m \leq 0$

That is, the product of two numbers all raised to the mth power is equal to the product of the mth powers of the two numbers.

5) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$ and $a \neq 0$ if $m \leq 0$

That is, the quotient of two numbers all raised to the mth power is equal to the quotient of the mth powers of the two numbers.

الأمثلة التالية تمثل الحالات المختلفة للتعامل مع الأسس ومن خلال استخدام الخصائص التي تم ذكرها أعلاه كالآتي:

مثال 12

:Evaluate the following أوجد ناتج ما يلي

a) $3^5 . 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$

b) $x^5 . x^3 = x^{5+3} = x^8$

c) $3^5 . 3^{-2} = 3^{5-2} = 3^3$

d) $x^5 . x^{-3} = x^{5-3} = x^2$

مثال 13

:Evaluate the following أوجد ناتج ما يلي

a) $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

b) $\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

c) $\frac{3^2}{3^5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$

d) $\frac{x^3 \;.\; x^2}{x^5} = x^{3+2-5} = x^0 = 1$

مثال 14

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) $(3^3)^2 = 3^{3.2} = 3^6$

b) $(x^2)^3 = x^{2.3} = x^6$

c) $(x^2)^5 \,.\, (x^{-2})^3 = x^{2.5} \,.\, x^{-2.3} = x^{10} \,.\, x^{-6} = x^{10-6} = x^4$

مثال 15

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) $6^3 = (2.3)^5 = 2^5 \,.\, 3^5$

b) $(xy)^3 = x^3\, y^3$

c) $(x^2\, y^{-3})^4 = (x^2)^4 \,.\, (y^{-3})^4 = x^{2.4} \,.\, y^{-3.4} = x^8 \,.\, y^{-12} = \frac{x^8}{y^{12}}$

مثال 16

بسط المقادير التالية Simplify the following:

a) $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3}$

b) $(\frac{x}{y})^4 = \frac{x^4}{y^4}$

c) $(\frac{x^2}{y^3})^2 = \frac{(x^2)^2}{(y^3)^2} = \frac{x^{2.2}}{y^{3.2}} = \frac{x^4}{y^6}$

مثال 17

:Simplify the following بسط المقدار التالي

$$(x^{-1}+y^{-1})^{-1}(\frac{1}{xy})$$

يلاحـــظ أن المقدار أعلاه هو حاصل ضرب حدين ولإيجاد ذلك علينا إيجاد قيمة الحد الأول أولاً كالآتي:

$$(x^{-1}+y^{-1})^{-1}=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^{-1}=(\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy})^{-1}$$

$$=(\frac{y+x}{xy})^{-1}=\frac{xy}{x+y}$$

ومن ثم ضربه بالحد الثاني ليصبح الناتج:

$$(\frac{\cancel{xy}}{x+y})(\frac{1}{\cancel{xy}})=\frac{1}{x+y}$$

1-5 العمليات الجبرية Algebraic Operations:

ســيتم في هذا المبحث تطبيق العمليات الرياضية السابق ذكرها في المباحث الســـابقة باســـتخدام المقاديـــر الجبرية Algebraic Expressions، حيث أن المقدار الجبري مثل x+3 أو $2x^2$-4x+5 وغيرها هو عبارة عن عدد من الحدود terms

Algebraic Expression is a statement or quantity consisting of one or more terms, for example x+3 has two terms, while $2x^2$-4x+5 has three terms, and so on.

In the term $2x^2$, the factor 2 is called the numerical coefficient and the factor x^2 is called the literal part of this term. The term 5 has no literal part and is called a constant term.

An expression containing only one term is called Monomial such as: $2x^2$, 5 , x , $\frac{x}{y}$, and xy.

An expression containing exactly two terms is called Binomial such as x+3 , $3\frac{x}{y}-2x^2$, and $3x+\frac{1}{4}$.

And an expression containing exactly three term is called Trinomial such as $2x^2 - 4x + 5$ and $3x + \frac{1}{y} - 4$.

In general, an algebraic expression containing more than one term is called Multinomial.

سـنقوم أولاً باسـتعراض بعض من العلاقات التي تساعدنا لتطبيق العمليات الجبرية على المقادير الجبرية كالآتي:

Algebraic operations on algebraic expressions when a and b are real numbers are:

1) $a(x + y) = ax + ay$

2) $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

3) $(x + a)(x - a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2$

4) $(x + a)^2 = (x + a)(x + a) = x^2 + 2ax + a^2$

5) $(x - a)^2 = (x - a)(x - a) = x^2 - 2ax + a^2$

6) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

والآن سوف نقوم بعرض مجموعة من الأمثلة والتي من خلالها سيتم تطبيق العمليات السابق ذكرها من جمع وطرح وضرب وقسمة المقادير الجبرية كالآتي:

مثال 18

أوجد ناتج العمليات التالية Find the value for the following:

a) $4x + 5x = (4 + 5)x = 9x$

b) $4a + 2a - 3a = (4 + 2 - 3)a = 3a$

c) $\frac{2x}{y} + \frac{x}{y} = 2(\frac{x}{y}) + (\frac{x}{y}) = (2+1)(\frac{x}{y}) = \frac{3x}{y}$

مثال 19

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following:

a) $(7x^2 - 2xy + 3y^2 + 1) + (3x^2 - 5xy + 6y^2)$

$= 7x^2 + 3x^2 - 2xy - 5xy + 3y^2 + 6y^2 + 1$

$= (7 + 3)x^2 - (2 + 5)xy + (3 + 6)y^2 + 1$

$= 10x^2 - 7xy + 9y^2 + 1$

b) $(7x^2 - 2xy + 3y^2 + 1) - (3x^2 - 5xy + 6y^2)$

$= 7x^2 - 3x^2 - 2xy + 5xy + 3y^2 - 6y^2 + 1$

$= (7 - 3)x^2 + (-2 + 5)xy + (3 - 6)y^2 + 1$

$= 4x^2 + 3xy - 3y^2 + 1$

مثال 20

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following:

a) $2(x - 3y + 7xy) = 2x - 6y + 14xy$

b) $xy^2(x + 2xy + 3y^2) = xy^2 . x + xy^2 . 2xy + xy^2 . 3y^2$

$= x^2y^2 + 2x^2y^3 + 3xy^4$

مثال 21

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following:

a) $(x + 3)(y - 2) = x(y - 2) + 3(y - 2)$

$= xy - 2x + 3y - 6$

b) $(2x - 3)(3x^2 + 2x - 5) = 2x(3x^2 + 2x - 5) - 3(3x^2 + 2x - 5)$

$= 2x . 3x^2 + 2x . 2x + 2x(-5) - 3 . 3x^2 - 3.2x + (-3)(-5)$

$= 6x^3 + 4x^2 - 10x - 9x^2 - 6x + 15$

$= 6x^3 + 4x^2 - 9x^2 - 10x - 6x + 15$

$= 6x^3 + (4 - 9)x^2 + (-10 - 6)x + 15$

$= 6x^2 - 5x^2 - 16x + 15$

مثال 22

بسط المقدار التالي Simplify the following:

$2\,[\,3\,x\,(4-2\,x)] + 7\,[\,(x-3)\,(x+2)-3]$

لإيجاد الناتج لدينا:

$2\,[\,3\,x\,.\,4-3\,x\,.\,2\,x] + 7\,[\,x\,(x+2)-3\,(x+2)-3]$

$= 2\,[\,12\,x-6\,x^2\,] + 7\,[\,x^2+2\,x-3\,x-6-3]$

$= 2\,(12\,x-6\,x^2) + 7\,(x^2-x-9)$

$= 24\,x-12\,x^2+7\,x^2-7\,x-9$

$= -5\,x^2+17\,x-9$

مثال 23

أوجد ناتج كل مما يلي Evaluate the following:

a) $(x+3)^2 = (x+3)\,(x+3) = x^2+3\,x+3\,x+9 = x^2+6\,x+9$

b) $(x-\frac{1}{2})^2 = (x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) = x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} = x^2-x+\frac{1}{4}$

c) $(2\,x-5)\,(2\,x+5) = (2\,x)^2-(5)^2 = 4\,x^2-25$

d) $(3\,x-2\,y)\,(3\,x+2\,y) = (3\,x)^2-(2\,y)^2 = 9\,x^2-4\,y^2$

e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2 = 2-3 = -1$

f) $\frac{2x+4y^2}{2} = \frac{2x}{2}+\frac{4y^2}{2} = x+2y^2$

g) $\frac{6x^2+3y-2xy}{x} = \frac{6x^2}{x}+\frac{3y}{x}-\frac{2xy}{x} = 6x+3\frac{y}{x}-2y$

أما عن القسمة في حالة كون البسط مقدار جبري مقسوماً على مقدار جبري آخـــر يمثل المقام فإن القسمة الطويلة هي المناسبة في هذه الحالة وذلك لأن تجزئة حدود البسط وقسمتها على المقام والتي كانت واضحة في العلاقة (6) السابقة والتي

تـــم تطبـــيقها فـــي الفـــرعين (f) و(g) من المثال السابق لم تعد مناسبة ولا تكفي بالغرض المطلوب لإيجاد الناتج لعملية تلك القسمة.

For the division of two algebraic expressions then long division would be the appropriate way if there are no common factor between the numerator (dividend) and the denominator (divisor).

وفي هذه الحالة علينا استخدام القسمة الطويلة حيث أن البسط يسمى المقسوم Dividend، أما المقام فيسمى المقسوم عليه Divisor وأن الناتج يسمى Quotient. وإن كانت القسمة الطويلة غير منتهية فهناك ما يسمى بالباقي Remainder وأخيراً فإن ناتج القسمة يتمثل بالعلاقة التالية:

$$\frac{Dividend}{Divisor} = Quotient + \frac{\text{Re}\,mainder}{Divisor}$$

وسيتم توضيح معنى القسمة الطويلة بالأمثلة التالية:

مثال 24

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) 245 ÷ 5

وباتباع طريقة القسمة الطويلة لدينا:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 49 \longleftarrow \text{Quotient الناتج} \\
\hline
\text{Divisor المقسوم عليه} \longrightarrow 5 & 245 \longleftarrow \text{Dividend المقسوم} \\
 & \underline{20} \\
 & 45 \\
 & \underline{45} \\
 & 0 \longleftarrow \text{Remainder الباقي}
\end{array}
$$

وبالتالي فإن الجواب هو:

245 ÷ 5 = 49

b) $\frac{218}{3}$

وباتباع طريقة القسمة الطويلة لدينا:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 72 \\
\hline
3 & 218 \\
 & \underline{21} \\
 & \ \ 08 \\
 & \ \ \ \underline{6} \\
 & \ \ \ 2
\end{array}
$$

وبالتالي فإن الجواب هو:

$$\frac{218}{3} = 72 + \frac{2}{3}$$

ويمكن قسمة $\frac{2}{3}$ ليكون $0.666\bar{6}$ وبالتالي فإن الجواب النهائي سيكون:

$$\frac{218}{3} = 72.666\bar{6}$$

مثال 25

أوجد ناتج ما يلي Evaluate the following:

a) $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2)$

وباتباع طريقة القسمة الطويلة لدينا:

$$
\begin{array}{lr|l l}
 & & x-3 & \longleftarrow \text{Quotient الناتج} \\
\hline
\text{Divisor المقسوم عليه} \longrightarrow & x-2 & x^2-5x+6 & \longleftarrow \text{Dividend المقسوم} \\
 & & \underline{x^2-2x} & \\
 & & \quad -3x+6 & \\
 & & \quad \underline{-3x+6} & \\
 & & \qquad 0 & \longleftarrow \text{Remainder الباقي}
\end{array}
$$

ويمكن كتابة ناتج القسمة كالآتي:

$$(x^2 - 5x + 6) \div (x - 2) = x - 3$$

أو

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2}=x-3$$

b) $(2x^3-3x^2+4x+6)\div(2x+1)$

وباتباع طريقة القسمة الطويلة لدينا:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+3 \\ \hline
2x+1 & 2x^3-3x^2+4x+6 \\
 & \underline{2x^3+x^2} \\
 & \quad -4x^2+4x \\
 & \quad \underline{-4x^2-2x} \\
 & \qquad\quad 6x+6 \\
 & \qquad\quad \underline{6x+3} \\
 & \qquad\qquad 3
\end{array}$$

وبالتالي فإن الجواب هو:

$$\frac{2x^3-3x^2+4x+6}{2x+1}=x^2-2x+3+\frac{3}{2x+1}$$

كمـــا ويلاحظ وبالرجوع إلى المثال (23) السابق الفرع (a) والذي كان فيه حاصل القسمة $\frac{245}{5}$ مساوياً إلى 49، فإن من الواضح هو أن (5)(49) مساوياً إلى 245، بمعنى أن 245 = (5)(49) . وكذلك ومن المثال (24) السابق الفرع (a) نجد أن:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

وهذا ما يسمى بالتحليل factoring والذي سيتم شرحه وبالتفصيل في المبحث القادم.

1-6 العوامل Factors:

إذا كان حاصل ضرب العددين a , b هو c فذلك يعني أن c = a . b وبالتالي يسمى العددان a , b بعوامل factors للعدد c.

If the product a b is equal to c. That is, c = a b then, a and b are said to be the factors of c.

ويعني ذلك أيضاً أن العدد a يعتبر عامل من عوامل العدد c إذا كان العدد c يقبل القسمة على العدد a بدون باقي، وكما تم ملاحظة ذلك من بعض الأمثلة لعمليات القسمة سابقاً.

a is said to be factor of c if c can be divided by a without a remainder.

For example: 2 and 3 are the factors for 6, since $(2)(3) = 6$,

also we notice that $6 \div 2 = 3$ and $6 \div 3 = 2$

وبنفس الأسلوب يمكن الحديث عن عوامل المقادير الجبرية، حيث أنه إذا كان أحد المقادير الجبرية يمثل حاصل ضرب مقدارين جبريين آخرين أو أكثر فإن تلك المقادير الجبرية تمثل عوامل المقدار الجبري الأصلي.

Similarly, if two (or more) algebraic expressions are multiplied together, then these expressions are said to be factors of the expression obtained as their product.

for example x y is the product of x times y, then x and y are said to be factors of x y.

الطريقة المناسبة لكتابة المقدار بشكل حاصل ضرب عوامله تسمى التحليل إلى العوامل Factoring.

The process of writing a given expression as the product of its factors is called factoring the expression.

وكما تم التنويه إليه، يتضح أن عملية التحليل إلى العوامل Factoring هي طريقة معاكسة لعملية ضرب الحدود Multiplication of factors والتي تم شرحها سابقاً، وبالتالي فإن كثير من القوانين Rules والعلاقات المستخدمة في التحليل ستكون مستنبطة من قوانين الضرب السابقة. وهذه العلاقات سيتم ذكرها في هذا المبحث كالآتي:

The following are general methods for factoring:

1

1- Common Factors:

$$a x + b x = (a + b) x$$

2- Difference of two squares

$$a^2 - b^2 = (a- b) (a + b)$$

3- Sum or difference of two cubes:

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + a b + b_2)$$

4- Factoring a Quadratic form:

$x^2 + p x + q$, where p and q are constants using the fact that:

$(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b) x + a b$

we need to find a and b such that their product is q and their sum is p.

Therefore, the factoring process here is that if:

$$x^2 + p x + q = (x + a) (x + b)$$

Then, $p = a + b$ and $q = a b$

5- Factoring a Quadratic form:

$m x^2 + px + q$, where p , q and m are nonzero constants and $m \neq 1$ or $m \neq -1$.

Using the fact that:

$$m x^2 + p x + q = (x + a) (x + b)$$

if $p = a + b$ and $q = a b$

وأخيـراً فـإن عرض الطرق أعلاه لعملية التحليل من خلال الأمثلة الوافية لأغلب الحالات المرادفة سيتم كالآتي:

مثال 26

أوجد عوامل المقادير التالية Factor the following:

a) $x + x^2 = x\,(1 + x)$

b) $x^2\,y + 3\,y^3\,x = x\,y\,(x + 3\,y^2)$

c) $x + 3\,x\,y - z - 3\,z\,y = x\,(1 + 3\,y) - z\,(1 + 3\,y)$

$= (1 + 3\,y)\,(x - z)$

ويمكــن ملاحظـــة أن الأســـلوب المستخدم هنا هو إيجاد الحدود المشتركة common factors.

مثال 27

حلل المقادير التالية Factor the following:

a) $x^2 - 4 = (x - 2)\,(x + 2)$

b) $9\,x^2 - 25 = (3\,x - 5)\,(3\,x + 5)$

والأســـلوب المستخدم هنا هو تحليل الفرق بين مربعين، حيث أنه في الفرع (a) الحد المربع الأول x^2 تم تحليله إلى الحدين x و x ، أما الحد المربع الثاني فهو 4 والـــذي تم تحليله إلى الحدين 2 و 2. أما في الفرع (b) فإن الحد المربع الأول $9x^2$ تـــم تحلـــيله إلى الحدين 3 x و 3 x أما الحد المربع الثاني فهو 25 والذي تم تحليله إلى 5 و 5.

مثال 28

حلل التالي Factor the following:

a) $x^2 + 7\,x + 6 = (x + 1)\,(x + 6)$

b) $x^2 + 5\,x - 6 = (x - 1)\,(x + 6)$

c) $x^2 - 5\,x - 6 = (x + 1)\,(x - 6)$

واضح في جميع هذه العمليات من التحليل أنه يجب علينا البحث عن عددين حاصل ضربهما 6 بحيث أن حاصل جمعهما 7 للفرع (a) وحاصل طرحهما 5 للفرعين (b) و(c). وذلك لا يمكن إلا باستخدام عملية تحليل العدد 6 إلى العاملين 6 و 1 وبالتالي فإن اختيار الإشارة يتم بالتوافق بين إشارة حاصل الضرب وإشارة الجمع أو الطرح.

مثال 29

اكتب عوامل المقدار التالي Factor the following:

$x^2 - 7x + 12$

لأجل تحليل المقدار أعلاه يجب إيجاد العددين a و b بحيث أن حاصل ضربهما (12) وأن حاصل جمعهما (7−) وهنا يوجد لدينا عدة خيارات وهي:

a = 1	b = 12	a + b = 13
a = -1	b = -12	a + b = -13
a = 2	b = 6	a + b = 8
a = -2	b = -6	a + b = -8
a = 3	b = 4	a + b = 7
a = -3	b = -4	a + b = -7

وبالتالي فإن التحليل المناسب هو:

$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

مثال 30

حلل المقادير التالية Factor the following:

a) $x^2 - 10x + 24 = (x - 6)(x - 4)$

b) $x^2 + 14x + 24 = (x + 2)(x + 12)$

وهنا تم اعتماد نفس المبدأ للتحليل الذي تم عمله في المثال (28) السابق.