مثال 7

افرض لديك المصفوفة A كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

أوجد حاصل ضرب AI و IA، حيث أن I تمثل مصفوفة متماثلة أحادية.

Find AI and IA, where I denotes the identity matrix

يمكـــن ضـــرب كلاً من AI و IA إذا كان كلاً من A و I مصفوفات مربعة square matrices لـــنفس الحجـــم أو الدرجـــة. وبما أن A مصفوفة 2 × 2، إذن المصـــفوفة المـــتماثلة الأحاديـــة identity matrix يجب أن يكون حجمها 2 × 2، ولذلك:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(1) + d(0) & c(0) + d(1) \\ a(1) + b(0) & a(0) + b(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = A$$

ونفس الشيء Similarly:

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = A$$

ولذلك: $AI = IA = A$

وتستطيع الملاحظة من هذا المثال هو عند ضرب أي مصفوفة في مصفوفة أحادية لا يحدث تغيير على المصفوفة الأصلية مهما كان حجمها. أو نستطيع القول

هو أن المصفوفة الأحادية I identity matrix تسلك سلوك رقم 1 عند ضربها في أي مصـــفوفة ذات أرقام حقيقية real numbers. وهذا هو التبرير نسميه المصفوفة الأحاديـــة identity matrix ولأي حجم من الأحجام. وكذلك إذا كانت A مصفوفة مـــربعة square matrix لأي حجم من الأحجام يمكن أن تكون العلاقة التالية حقيقة بدون أي لبس أو غموض AI = IA = A

6-6 ضرب المصفوفة المربعة Square matrix في نفسها ($A.A = A^2$):

وكذلك نستطيع تعميم ضرب المصفوفة المربعة square matrix A في نفسها والتي حجمها n × n. وسوف تكون نتيجة الضرب $A.A = A^2$

وكذلك ضربها في نفسها مرة أخرى يعطينا ما يلي:

$$A.A.A = A^3$$

ونســـتطيع الاســـتمرار علـــى هـــذه الطريقة إلى أي عدد من مرات ضرب المصفوفة فكل مرة سوف تزداد القوى The power واحد.

6-7 قوانين على المصفوفات Rules for matrices:

سنعرض في هذا المبحث بعض القوانين أو النظريات (بدون براهين) والتي يمكن الاستفادة منها لحل الأمثلة والأسئلة الخاصة بالمصفوفات كالآتي:

1) $A + B = B + A$ (Commutative law for addition)
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Associative law for addition)
3) $A (BC) = (AB) C$ (Associative law for multiplication)
4) $A (B + C) = AB + AC$ (Left distributive law)
5) $(B + C) A = BA + CA$ (Right distributive Law)
6) $A (B - C) = AB - AC$
7) $(B - C) A = BA - CA$
8) $a (B + C) = aB + aC$
9) $a (B - C) = aB - aC$
10) $(a + b) C = aC + bC$

11) $(a - b)\, C = aC - bC$

12) $a\,(bC) = abC$

13) $a\,(BC) = (aB)\, C = B\,(aC)$

14) $A + 0 = 0 + A = A$

15) $A - A = 0$

16) $0 - A = -A$

17) $A0 = 0 \quad , \quad 0A = 0$

18) $AI = A \quad , \quad IA = A$

6-8 المحددات Determinants:

تعتبر المحددات من الخصائص المهمة في دراسة المصفوفات وفكرة المحددات للمصفوفات المربعة square matrix ستعرض كما يلي:

An important attribute in studying matrix algebra is the concept of determinant for a square matrix.

يرمز إلى المحددة بخطين مستقيمين مثل محدد A هو |A| أو يمكن أن تمزج فقط في أول ثلاث حروف الصغيرة det (A). وأيضاً يعطى للمصفوفة ترتيب مثلاً المصفوفة A.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

نرمز للمحددة لهذه المصفوفة |A| أو det (A) أو يمكن أن تكتب بشكل كامل

مثلاً، $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ، ودرجتها order هو 2.

ويمكن إيجاد المحددة لهذه المصفوفة كما يلي:

$$\det (A) = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{22}$$

وبصورة عامة لإيجاد المحددة للمصفوفة الرباعية 2 × 2 فهو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي main diagonal مطروحاً منه حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي cross-diagonal كما تلاحظ من المثال التالي:

مثال 8

أوجد المحددات للمصفوفات التالية A و B.

Find the determinants for the matrices A and B, where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

$\det(B) = 5 \times 2 - (-1 \times 6) = 10 + 6 = 16$

أما إذا كانت المصفوفة المربعة square matrix ودرجتها 3 × 3. فإن حساب المحددة لها يتم بعدة طرق. وأحد هذه الطرق هو إضافة العمودين الأول والثاني إلى المصفوفة ومن ثم نبدأ بضرب عناصر القطر الرئيسي وكذلك ضرب عناصر القطرين الأخرى اللذان بعده ونجمعها ونطرح منهما حاصل ضرب مفردات القطر الثانوي cross-diagonal والأقطار الثانوية الأخرى التي قبلها وكما في المثال التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & (3) & (2) & (1) \\ \det(A) = & \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \\ & & (1) & (2) & (3) \end{array}$$

$$\det(A) = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{12} \times a_{21} \times a_{33})$$

$$- (a_{12} \times a_{21} \times a_{33} + a_{11} \times a_{23} \times a_{31} + a_{13} \times a_{22} \times a_{31})$$

مثال 9

أوجد المحددات للمصفوفات التالية:

Find the following determinants:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} (+) & (+) & (+) & (1) & (2) & (3) \\ \end{array}$$

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{array} \right. \qquad (1)\ 40 \quad (2)\ 30 \quad (3)\ 0$$

$$\begin{array}{cccccc} (-) & (-) & (-) & (1) & (2) & (3) \\ & & & 28 & 0 & 36 \end{array}$$

$$\det(A) = (28 + 0 + 36) - (40 + 30 + 0) = -6$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -18 \\ (1) & (2) & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array}$$

$$\det(B) = \left| \begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & -2 & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \\ 48 & 10 & 0 \end{array}$$

$$\det(B) = (48 + 10 + 0) - (0 + 0 - 18) = 76$$

6-9 المبدلة للمصفوفة Transpose of a matrix:

المبدلة للمصفوفة A هو تغيير صفوف المصفوفة A إلى أعمدة وتغيير أعمدتها إلى صفوف ويرمز لمبدلة المصفوفة A بالرمز A^T أو A' (وتقرأ A برايم).

$A_{ij} \Rightarrow A^T_{ji}$ and is obtained by interchanging the rows and columns of A.

مثال 10

أوجد المبدلة للمصفوفات التالية:

Find the transpose for:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} , \quad A^T_{ji} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & -10 \end{bmatrix} , \quad B^T_{ji} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن إيجاد المبدلة هو تبديل الصفوف إلى أعمدة وتبديل الأعمدة إلى صفوف، ومن أهم خصائص مبدلة المصفوفة هو Properties for transpose:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $(AB)^T = B^T A^T$

وبالرجوع لتعريف المبدلة يمكن تعريف المصفوفة المتماثلة Symmetric matrix بالشكل التالي:

إذا كانت المصفوفة المربعة A من الدرجة n × n وكانت $A = A^T$ فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة متماثلة.

Let A be a square matrix of order n × n. Then, if $A = A^T$, A is called a symmetric matrix.

for example $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, and since $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ then A is a symmetric matrix.

وكـذلك يلاحـظ هـنا أن ولكل مصفوفة A من الدرجة n × m فإن AA^T وكذلك A^TA هما مصفوفات متماثلة.

6

If A is any matrix of order m × n. Then, AA^T is a symmetric matrix, and so is A^TA.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال 11

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ Find AA^T and A^TA

ولإيجاد النواتج لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 2} \quad \text{and } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 3 & 8 \\ 14 & 20 & 4 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 12 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ بأن الناتج يمثل مصفوفة متماثلة.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

وكذلك فإن الناتج هو مصفوفة متماثلة.

ويتبين من المثال (11) أن استخدام المبدلة طريقة جيدة ومفيدة لكثير من التطبيقات لتحويل المصفوفات الغير متماثلة إلى أن تكون مصفوفات متماثلة.

6-10 معكوس المصفوفة Inverse of a matrix:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n وكان بالإمكان إيجاد مصفوفة مربعة أخرى، ولتكن B، من نفس الدرجة بحيث أن $AB = BA = I_n$ يقال عندئذ أن المصفوفة A قابلة للانعكاس. وتسمى B معكوس المصفوفة A. ويرمز لمعكوس المصفوفة A عادة بالرمز A^{-1}.

If A is a square matrix of order n. And if we can find a square matrix of order n, say B, such that $AB = BA = I_n$ then we say that A is invertable and B is the inverse of A. The inverse of a matrix A is denoted by A^{-1}.

ويلاحظ مما سبق ما يلي:

1) يعرف المعكوس فقط للمصفوفات المربعة

Inverse matrices are defined for square matrices only.

2) إذا كان A معكوس للمصفوفة B فإن B هي أيضاً معكوس للمصفوفة A.
If A is the inverse of B then B is the inverse of A.

3) إذا كان للمصفوفة A معكوس عندئذٍ يقال بأن A قابلة للانعكاس.
If A has an inverse then we say that A is invertable.

4) إذا كان للمصفوفة A معكوس فهناك معكوس واحد فقط.
If A has an inverse then it is unique.

5) ليست جميع المصفوفات المربعة لها قابلية الانعكاس.
Not all square matrices are invertable.

ويمكن على ضوء الخصائص والملاحظات أعلاه إعطاء فكرة عن وجود معكوس لمصفوفة معينة أم لا والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 12

هل أن $B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ معكوس للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

للإجابة على هذا التساؤل علينا إيجاد حاصل الضرب AB وكذلك حاصل الضرب BA وإن كان كلاهما مساوياً إلى المصفوفة I_2 عندئذٍ A هو معكوس B وكذلك B هو معكوس A.

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}=I_2$$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}=I_2$$

وبالتالي فإن B هو معكوس A وكذلك فإن A هو معكوس B.

معكوس المصفوفة المربعة A، والذي يرمز له بالرمز A^{-1}، يمكن إيجاده بعدة طرق وأحد أهم هذه الطرق والتي سيتم ذكرها هنا هي:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)}$$

وتمثل قسمة ما يسمى بالمصفوفة المرافقة Adjoint matrix، والتي يرمز لها بالرمـــز adj(A)، على محدد المصفوفة determinant، والذي يرمز له det(A) أو |A|. ويجـــب الإشارة إلى أنه يوجد للمصفوفة معكوس إذا لم تكن المحددة صفراً، ويعني ذلك أن A^{-1} موجود إذا كان $|A| \neq 0$.

وهـــنا ولإيجـــاد المعكـــوس فإن det(A) أو |A| تم تعريفه سابقاً أما adj(A) فيجب علينا توضيح هذه المصفوفة قبل الدخول في إيجاد المعكوس كالآتي:

لإيجاد adj(A) لمصفوفة A من الدرجة 2 × 2 فإن هناك طريقتان هما:

1) استخدام الطريقة السريعة وكما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad adj(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ويتضـــح مـــن ذلك أن هذه الطريقة تعتمد على تغيير مواقع عناصر القطر الرئيسي main diagonal وتغيير إشارات عناصر القطر الثانوي Cross diagonal، ويلاحظ هنا بأن هذه الطريقة مناسبة لمصفوفة من الدرجة 2×2 فقط.

مثال 13

أوجد معكوس المصفوفات التالية:

Find the inverse matrices for:

a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

سنقوم بحل هذا المثال باستخدام الطريقة السريعة وإيجاد adj(A) كالآتي:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

أما عن det(A) فلدينا:

$$\det(A) = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

وبالتالي فإن المعكوس A^{-1} يمكن إيجاده ليكون:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{1}{[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}]}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

وباستخدام الطريقة السريعة السابق ذكرها لدينا:

$$adj(B) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (4)(8) - (3)(10) = 32 - 30 = 2$$

وبالتالي فإن B^{-1} هو:

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{\det(B)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3/2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

2) استخدام الطريقة المطولة وكما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = adj(A) \qquad adj(A) = \left[(i+j)^{-1} \quad A_{ij}\right]^T$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{22}$$

تكــون الإشارة موجبة لكون مجموع (i+j) زوجي أما إذا كان فردي فسوف تكون سالبة وكما في A_{12}.

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{21}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} +a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^T$$

الآن نرجع المبدلة إلى المصفوفة لتكون المصفوفة المرافقة وكما يلي:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

مثال 14

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

Find the inverse matrices for:

a) $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

ولقد تم إيجاد معكوس هذه المصفوفة باتباع الطريقة السريعة وكما لاحظنا ذلك في المثال (13) السابق.

أما الآن فسنقوم بإيجاد معكوس هذه المصفوفة مرة ثانية وباتباع الطريقة المطولة وكما يلي:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{def(B)}[adj(B)]$$

det (B) = (4) (8) – (10) (3) = 2

adj(B) = $((i+j)^{-1}\ Bij)^T$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = +8$$

$$B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -10$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = -3$$

$$B_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = +4$$

$$adj(B) = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-10}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{-3}{2} \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

d) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} adj(C)$

$$\begin{array}{cccccc} & + & + & + & (0) \; (12) & (-2) \\ \det(C) = & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ & & & (0) & (0) & (0) \end{array}$$

det (C) = (0 + 0 + 0) – (0 + 12 – 2) = -10

adj (C) = $[(-1)^{i+j} C_{ij}]^{-1}$

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = +(-6) = -6$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +(-2) = -2$$

$$C_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 = -2$$

$$C_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +4 = 4$$

$$C_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 = -4$$

$$C_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = +3 = 3$$

$$C_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 = -6$$

$$C_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = +(+1) = 1$$

$$adj(C) = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

6

$$C^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -6 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

c) $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad D^{-1} = \dfrac{1}{\det(D)} adjD$

$$\begin{array}{cccccc} & (1) & (2) & (3)\ \ 12 & 4 & 48 \\ \det(D) = & \left|\begin{array}{c}2\\4\\1\end{array}\right. & \begin{array}{c}3\\3\\2\end{array} & \begin{array}{c}4\\1\\4\end{array} & \begin{array}{c}2\\4\\1\end{array} & \begin{array}{c}3\\3\\2\end{array} \\ & (1) & (2) & (3)\ \ 24 & 3 & 32 \end{array}$$

det (D) = (24 + 3 + 32) – (12 + 4 + 48) = -5

adj(D) = $[(-1)^{i+j} D_{ij}]^t$

$D_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +10$ $\qquad D_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -15$

$D_{13} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$ $\qquad D_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4$

$D_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +4$ $\qquad D_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$$D_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 \qquad D_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = +14$$

$$D_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(-6) = +6$$

$$adj(D) = \begin{bmatrix} 10 & -15 & -5 \\ -4 & 4 & -1 \\ -9 & 14 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

d) $E = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} \qquad E^{-1} = \dfrac{adj(E)}{\det(E)}$

$\det(E) = (-3)(-6) - (9)(2) = +18 - 18 = 0$

لا يمكـن إيجاد المعكوسة للمصفوفة E وذلك لكون المحددة لهذه المصفوفة تساوي صفر.

e) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad F^{-1} = \dfrac{adj(F)}{\det(F)}$

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & (1) & (2) & (3) & 36 & 12 & 24 \\
\text{def (F)} = & \left| \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 3 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ 6 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 2 \end{array} & \\
 & (1) & (2) & (3) & 12 & 36 & 24
\end{array}
$$

$$\det(F) = (12 + 36 + 12) - (36 + 12 + 24) = 0$$

لا يمكن إيجاد المعكوس لهذه المصفوفة لكون محددتها تساوي صفراً.

وفي نهاية هذا المبحث لا بد من الإشارة إلى أن من أهم خصائص معكوس المصفوفة هو:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6-11 حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

Solving system of linear equations using matrices

يجــب الإشارة في بداية هذا المبحث وقبل الحديث عن حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات هو الحديث عن تحويل الأنظمة من المعادلات الخطية من الشكل العام المتعارف عليه إلى أن تكون بشكل يستخدم المصفوفات كالآتي:

افرض أن لدينا m من المعادلات الخطية Linear simultaneous equations ولديــنا n مــن المتغيرات variables أو المجاهيل unknowns بالشكل العام لنظام المعادلات الخطية System of linear equations كالآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ a_{mn}x_n = b_m$$

والذي من الممكن كتابته بالصيغة التالية can be written in the form:

$$AX = b$$

حيث أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \quad and \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

ويلاحظ هنا أن المصفوفة A تسمى مصفوفة المعاملات coefficient matrix وX تسمى مصفوفة المتغيرات variable matrix، أما b فتسمى مصفوفة الثوابت constant matrix.

وإذا كان عدد المعادلات n مساوياً لعدد المتغيرات (المجاهيل) n فيوجد هناك حل للنظام، والذي يمكن إيجاده بعدة طرق لحل المعادلات باستخدام المصفوفات سوف نتناول في هذا المبحث طريقتين فقط.

If # (equations) = # (variables) then the system has a solution that can be found using many methods to solve the system of equations using matrices, and we will consider just two of them.

1) حل المعادلات باستخدام طريقة معكوس المصفوفة والتي سيتم تناولها في الفقرة 1-11-6 القادمة.

2) حل المعادلات باستخدام طريقة كرامر والتي سيتم تناولها في الفقرة 2-11-6 القادمة.

6-11-1 حل المعادلات باستخدام طريقة معكوس المصفوفة:

Solving system of linear equations using the inverse

إذا كان $AX = b$ نظاماً للمعادلات الخطية المكون من n من المعادلات و n من المتغيرات، بحيث أن $|A| \neq 0$ فإن للنظام حل وحيد وهو:

$$X = A^{-1} b$$

If $AX = b$ is a system of linear equations for n equations and n variables, such that $|A| \neq 0$. Then, there is a unique solution for this system, which is:

$$X = A^{-1} b$$

مثال 15

حل المعادلات التالية باستخدام طريقة معكوس المصفوفة:

Solve the following systems of equations using the inverse method:

a) $2X + 8Y = -4$

$X + 3Y = 5$

علينا أولاً كتابة النظام أعلاه بطريقة المصفوفات بالشكل $AX = b$ كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (2)(3) - (1)(8) = -2$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ -7 \end{bmatrix}$$

وبذلك فإن $x = 26$ ، $y = -7$.

b) $2X_1 + 4X_2 + X_3 = 77$

$4X_1 + 3X_2 + 7X_3 = 114$

$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 48$

وبتحويل النظام إلى الشكل $AX = b$ لدينا:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وباتباع الخطوات السابقة لإيجاد A^{-1} فإن:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -11/10 & 5/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -1 \end{bmatrix}$$

وأخيراً فإن:

$$X = A^{-1} b$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5 & -11/10 & 5/2 \\ 1/5 & 2/5 & -1 \\ -1/5 & 3/5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77 \\ 114 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6

وهذا يعني أن: $x_1 = 10$ ، $x_2 = 13$ وأن $x_3 = 5$.

2-11-6 حل المعادلات باستخدام طريقة كرامر:

Solving system of linear equations using Cramer's Rule:

إذا كــان $AX = b$ نظاماً للمعادلات الخطية المكون من n من المعادلات و n من المتغيرات، بحيث أن $|A| \neq 0$ فإن للنظام حل وحيد هو:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\ , \qquad i = 1 , 2 , 3 , \dots , n$$

حــيث أن $\det(A_i)$ هي محددة المصفوفة الناتجة من إبدال عناصر العمود i للمصفوفة A بعناصر العمود b.

If $AX = b$ is a system of linear equations of n equations and n variables, such that $|A| \neq 0$. Then, the system has a unique solution, which is:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\ , \qquad i = 1 , 2 , 3 , \dots , n$$

where $\det(A_i)$ is the determinant of a matrix obtained by interchanging column i by the column b.

والحــل بطريقة كرامر Cramer's يتطلب إيجاد محددات لمصفوفة معاملات المتغيــرات عددها بقدر عدد المتغيرات زائد واحد. تكون المحددة الأولى هي التي تعــتمد على معاملات المتغيرات جميعها أما المحددات الأخرى فمحددة كل متغير يتم باستبدال معاملات ذلك المتغير بالثوابت للمعادلات.

وفــي حالة كون قيمة المحددة الأولى والتي تعتمد على معاملات المتغيرات جمــيعها، وهي $\det(A)$، صفراً فإننا نتوقف عن الحل لعدم وجوده بواسطة طريقة كرامــر، أمــا إذا كانت جميع المحددات تساوي صفراً فهناك عدد غير محدود من الحلول.

ولتوضــيح هــذه الطريقة سنقوم بحل المصفوفات السابقة والتي تم حلها في المثال (15) السابق بطريقة كرامر هذه المرة.

مثال 16

حل المعادلات التالية باستخدام طريقة كرامر:

Solve the following systems of equations using Cramer's Rule:

a) $3X - Y = 2$

$X + Y = 5$

وبتحويل النظام إلى الشكل $AX = b$ لدينا:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

والخطوة الأولى هنا هو إيجاد det(A)، حيث أن $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ كالآتي:

$$\det(A) = (3)(1) - (1)(-1) = 4$$

وهـذا يعنـي وجود حل لهذه المعادلات باستخدام طريقة كريمر وذلك لكون المحـدد الرئيسي الذي يعتمد على معاملات المتغيرات جميعها لا يساوي صفر بل يسـاوي 4. وهـنا نستمر بإيجاد المحددات الأخرى لكل متغير محددة وذلك بتغير معاملات ذلك المتغير في عمود الثوابت وكما يلي:

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} .$$ تم تغيير معاملات X

$$\det(A_1) = (2)(1) - (5)(-1) = 7$$

$$\det(A_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} .$$ تم تغيير معاملات Y

$$\det(A_2) = (3)(5) - (1)(2) = 13$$

وبالتالي فإن قيم المتغيرات حسب صيغة كريمر التي هي كما يلي:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad , \quad x = \frac{7}{4} \quad , \quad y = \frac{13}{4}$$

b) $X_1 - X_2 + 0X_3 = 3$

$2X_1 - X_2 + 2X_3 = -2$

$3X_1 + X_2 + 0X_3 = 3$

وبتحويل النظام إلى الشكل $AX = b$ لدينا:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

المحددة الرئيسية:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\det(A_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$\det(A_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 12$$