الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل السابع

المشتقات وتطبيقاتها

الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل السادس
المشتقـــات وتطبيقاتهـــا
The Derivatives and its applications

7-1 مقدمة Introduction:

ســـنتناول فـــي هـــذا الفصل أحد أهم المفاهيم الرياضية ألا وهي المشتقات Derivatives بجميع أنواعها، وتبدأ الدراسة من عملية تعريف مفهوم المشتقة للدالة إلـــى قـــواعد الاشـــتقاق اللازمة لحساب المشتقات لبعض من الدوال المعروفة، ثم نشـــرح التفسير الهندسي geometric interpretation والتطبيقات العملية applied examples لمفهوم المشتقة.

وكذلك سنتناول بحث وإيجاد المشتقات لجمع وطرح الدوال وكذلك المشتقات المرفوعة إلى قوى Derivatives of power functions ومشتقات الضرب والقسمة وأيضـــاً مشـــتقات الـــدوال الأسية واللوغاريتمية. وكذلك سنتناول تطبيقات التحليل الحـــدي ومـــنها الكلفة الحدية marginal cost والعائد الحدي marginal revenue وكـــذلك الربح الحدي marginal profit. وكذلك سيتضمن الفصل العديد من الأمثلة examples والأمـــثلة التطبيقـــية applied examples وأيضـــاً سيحتوي الفصل في نهايته على العديد من الأسئلة exercises.

وبذلك فإن هذا الفصل سيتضمن المباحث التالية: المبحث 2-7 المشتقة للدالة The Derivative of a function والمـــبحث 3-7 التحلـــيل الهندسي Geometric Interpretation والمبحث 4-7 قواعد الاشتقاق Derivatives Rules والمبحث 5-7 الجانب التطبيقي للمشتقات: التحليل الحدي Applications for the Derivatives: Marginal Analysis.

7-2 المشتقة للدالة The Derivative of a function:

تعتبـــر المشـــتقة derivative للدالـــة من المفاهيم الرياضية المهمة والأوسع استخداماً في الدراسات المختلفة وفي الدراسات الاقتصادية خاصة، وقد تطرقنا في

الفصـــول السابقة إلى ميل الخط المستقيم The slope of a straight line والذي تم تعـــريفه كنســـبة تغير المتغير المعتمد y على نسبة تغير المتغير المستقل x وحدة واحدة، والذي يرمز له بالرمز m، ويمكن تعريفه كالآتي:

$$m = \text{slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

حيث أن: Δx يمثل مقدار التغير في قيمة المتغير المستقل x.

Δy يمثل مقدار التغير في قيمة المتغير المعتمد y.

أمـــا Δ فهو الحرف الإغريقي الذي يشير إلى مقدار التغير والذي يسمى دلتا delta.

7

تســـتخدم المشـــتقات لقـــياس معدلات التغير وتعرف على أنها قيم الغاية أو النهاية limit لمعدلات التغير وبواسطتها يمكن دراسة الحساسية التي تتأثر بها الدالة عـــندما يطـــرأ أي تغيير على المتغير المستقل x فمثلاً من مصلحة رب العمل أن يعـــرف التغير في عدد وحدات البيع عندما يتغير السعر. وهناك العديد من الأمثلة التـــي تعـــتمد علـــى تطبيق المشتقة ومنها الزيادة في كلفة الإنتاج نتيجة الزيادة أو التغيـــر في الوحدات المنتجة أو التغير في الأعداد السكانية مع التقدم في الزمن كما سيتضح من خلال المثال التالي:

مثال 1

لفتـــرة عشر سنوات (1990-2000) وجد أن الدالة التالية للزيادة السكانية تصح للسكان في العراق وهي كالآتي:

$$P(t) = 1 + 0.02\,t + 0.002\,t^2$$

حيث أن p هو عدد الملايين millions من السكان.

وأن t هو مقياس السنين year.

أوجد نسبة زيادة النمو السكاني للعراق منذ بداية 1998.

During the 10 year period from 1990 to 2000, the Iraqi population was found to be given by the formula.

$$P(t) = 1 + 0.0\,t + 0.002\,t^2$$

Find the rate of growth at the beginning of 1998.

لإيجـــاد نسبة النمو السكاني للعراق في السنة 1998 والتي تعني $t = 8$ علينا إيجاد التغير أو الزيادة في قيمة p بين $t = 8$ و $t = 8 + \Delta t$ كالآتي:

$$\Delta t = p(8 + \Delta t) - p(8)$$
$$= [1 + 0.02(8 + \Delta t) + 0.002(8 + \Delta t)^2] - [1 + 0.02(8) + 0.002(8)^2]$$
$$= 0.052\,\Delta t + 0.004(\Delta t)^2$$

وهذا يعني أن معدل نسبة النمو السكاني لهذه الفترة الزمنية يمكن حسابه كما يلي:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 0.052 + 0.004\Delta t$$

وبأخذ الغاية أو النهاية limit عندما $\Delta t \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (0.052 + 0.004\Delta t) = 0.052$$

ولـــذلك وعند بداية السنة 1998 نسبة النمو السكاني في العراق هو 0.052 مليون لكل سنة، أي أن العدد هو 52000 لكل سنة.

نسبة التغير في السكان للمثال السابق هي حالة واحدة من مشتقة الدالة والتي سنقوم الآن بتعريفها كالآتي:

تعريف المشتقة Derivative definition:

افـــرض أن الدالـــة $y = f(x)$ المعينة والمستمرة في مجال معين $[x_1, x_2]$. ولنخـــتار إحـــدى نقاط هذا المجال ونجعل المتغير x يأخذ تغيراً طفيفاً مقداره Δx، بمعنى آخر، ننتقل من النقطة x إلى النقطة $x + \Delta x$ ضمن المجال المفروض. عند ذلـــك تنتقل قيمة الدالة من $f(x)$ إلى $f(x+\Delta x)$، ويكون التغير الذي طرأ على قيمة الدالة هو $f(x+\Delta x) - f(x)$. وأن مشتقة الدالة في النقطة x، ونرمز لها بالرمز $f'(x)$ أو $\frac{df}{dx}$، هو:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

let the given function y = f(x) be well defined and continuous on a given interval. Then, the derivative of y with respect to x, denoted by $f'(x)$ of $\frac{dy}{dx}$, is defined t be:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

فــإذا كانت النهاية موجودة قلنا أن الدالة f(x) قابلة للاشتقاق في نقطة أو في مجال معين.

وعــادة ما يطلق على طريقة إيجاد المشتقة بالشكل أعلاه هو إيجاد المشتقة بطريقة التعريف finding the derivative by definition.

وكــذلك تعــرف المشتقة باسم المعامل التفاضلي differential coefficient وعملية حساب المشتقة للدالة تدعى التفاضل differentiation.

ويلاحظ أن هناك أسماء عديدة لمشتقة الدالة f(x)، ويرمز لها بالرموز التالي following symbols:

$$\frac{df}{dx} \;,\; \frac{dy}{dx} \;,\; \frac{d}{dx}(f) \;,\; \frac{d}{dx}(y) \;,\; f'(x) \;,\; y' \;,\; D_x f \;,\; and\;\; D_x y$$

وجمــيع هذه التعريفات والرموز لها نفس المعنى والمتمثل بمشتقة المتغير y (أو f) بالنسبة للمتغير x. The derivative of y (or f) with respect to x.

وبنفس الأسلوب يمكن تعريف $\frac{dc}{da}$ أنه مشتقة الدالة C أو المتغير المعتمد C بالنسبة للمتغير المستقل a، وهكذا لجميع مشتقات الدوال.

مثال 2

أوجد المشتقة $f'(x)$ بطريقة التعريف للدالة:

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 4$$

وقدر قيمة المشتقة عند $x = 3$ ثم $x = -3$

Find $f'(x)$ for the above function and evaluate $f'(3)$ and $f'(-3)$

بالرجوع لتعريف المشتقة وكما رأينا تطبيق ذلك في المثال (1) السابق لدينا:

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 4$$

$$f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4$$

وبالتالي فإن:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [4(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 4] - (4x^2 - 3x + 4)$$

$$= \cancel{4x^2} + 8x\,\Delta x + 4(\Delta x)^2 - \cancel{3x} - 3\Delta x + \cancel{4} - \cancel{4x^2} + \cancel{3x} - \cancel{4}$$

$$= 8x\,\Delta x - 3\Delta x + 4(\Delta x)^2$$

وبالقسمة على Δx نحصل على:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 8x - 3 + 4\Delta x$$

وبأخذ النهاية أو الغاية limit عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على المشتقة $f'(x)$ كالآتي:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 8x - 3$$

وعن قيمة المشتقة عندما $x = 3$ ثم عندما $x = -3$ لدينا:

$$f'(3) = (8)(3) - 3 = 24 - 3 = 21$$

$$f'(-3) = (8)(-3) - 3 = -24 - 3 = -27$$

7-3 التحليل الهندسي Geometric Interpretation:

لاحظنا في المثال (1) عندما يكون المتغير المستقل في الدالة $y = f(t)$ يمثل الـوقت Time فـي المشـتقة $\frac{dy}{dt}$ تعطي نسبة تغير rate of change y. وكما في المـثال (1)، $P = f(t)$ يمـثل الحجم السكاني للتغير في الوقت من سنة إلى أخرى، إذن $\frac{dp}{dt}$ يعطـي نسـبة الـزيادة فـي حجم السكان، وبنفس أسلوب هذا التطبيق للمشـتقات derivatives، هـناك اسـتخدامات هندسـية حقيقـية geometrical significance للمشتقات.

افـرض أن A و B هما نقطتان Two points ولتكن احداثياتهما $(x$ و $f(x))$ و $(x + \Delta x$ و $f(x+\Delta x))$ على رسم الدالة $y = f(X)$.

وبالتالي فإن النسبة والتي تعرف كما يلي:

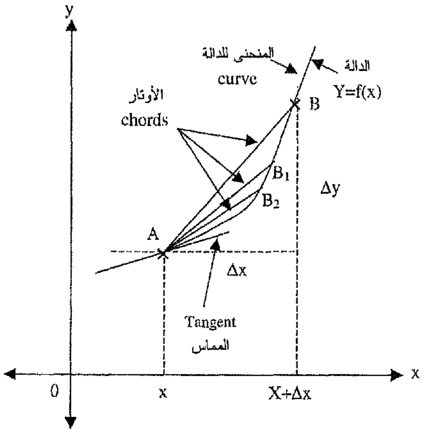
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تمثل ميل الوتر slope of chord AB. وكلما يقل طول الوتر chord وتقترب النقطتان B و A من بعضهما يصبح الوتر chord تقريباً مماس tangent، أي عندما $\Delta x \to 0$ يكـون مـيل الوتر slope of chord قريباً جداً أو مساوياً إلى ميل المماس the slope of the tangent line عند النقطة A.

لذلك:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

يمـثل مـيل خـط المـماس tangent line للدالـة $y = f(x)$ عند النقطة A بالإحداثـيات $(x\ ,\ f(x))$. لاحظ الشكل (1) فكلما كان منحنى الدالة $y = f(x)$ قريباً من الاستقامة smooth عند النقطة A، عندها نستطيع رسم مماس غير عمودي can draw a nonvertical tangent عـند النقطة A وتكون الغاية قد تحققت the limit will exist.



الشكل رقم (1)
المعنى الهندسي للمشتقة

مثال 3

أوجـــد مـــيل المماس ومعادلة خط المماس لرسم الدالة $Y=\sqrt{x}$ عند النقطة (4 ، 9) وكذلك النقطة $\left(\frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{6}\right)$.

Find the slope of the tangent and the equation of the tangent line to the graph $Y=\sqrt{x}$ at the above points.

لدينا الدالة المعروفة $f(x)=\sqrt{x}$ وباستخدام تعريف المشتقة نجد أن المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

وعندما x = 9 فإن:

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

ولهذا فإن ميل المماس slope of the tangent عند النقطة (4 ، 9) هو $\frac{1}{6}$

ولإيجاد معادلة المماس نستطيع استخدام معادلة أو صيغة النقطة والميل.

To obtain the equation of the tangent line, we can use the point – slope formula as follows:

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

وحيث أن الميل $m_1 = \frac{1}{6}$ وأن (4 ، 9) = (x_1 , y_1) لاحظ الشكل رقم (2)

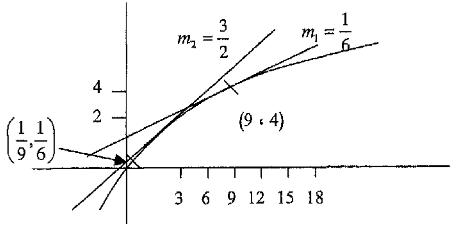
ونجد المعادلة كالآتي:

$$y - 4 = \frac{1}{6}(x - 9)$$

$$y - 4 = \frac{1}{6}x - \frac{9}{6}$$

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{15}{6}$$

وهي معادلة المماس المطلوب.



الشكل رقم (2)

رسم معطيات المثال (3)

أما عندما يكون $x=\frac{1}{9}$:

$$f'(\frac{1}{9})=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{9}}}=\frac{1}{(2)(\frac{1}{3})}=\frac{3}{2}$$

ولـــذلك فإن ميل المماس عند النقطة $\left(\frac{1}{9},\frac{1}{6}\right)$ يساوي $m_2=\frac{3}{2}$ لاحظ الشكل (2) أعلاه.

ومن صيغة معادلة النقطة والميل from the point – slope formula نجد أن المعادلة المطلوبة هي:

$$y-\frac{1}{6}=\frac{3}{2}(x-\frac{1}{9})$$

$$y-\frac{1}{6}=\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}$$

$$y=\frac{3}{2}x$$

وتمثل معادلة المماس المطلوبة عند النقطة $\left(\frac{1}{9},\frac{1}{6}\right)$.

7-4 قواعد الاشتقاق Derivatives Rules:

لاحظـــنا أن استخدام طريقة التعريف لإيجاد مشتقة الدوال تتضمن العديد من الخطـــوات والتـــي تكـــون غالبيتها صعبة التعامل وتحتاج إلى الكثير من العمليات الجبـــرية. وللتغلب على مثل هذه الصعوبات في إيجاد مشتقات الدوال، وخصوصاً البســـيطة والأكثر استخداماً والأسهل تعاملاً منها، هو استخدام ما يسمى بقواعد أو قوانـــين الاشـــتقاق derivatives rules. هـــذه القواعد أو القوانين هي في الحقيقة نظريات لها براهين محددة لن يتم الدخول في تفاصيلها في هذا الكتاب، وذلك لأننا نود التأكيد في هذا الكتاب على تطبيق هذه القواعد والاستعانة بها لإيجاد المشتقات

أكثـــر مـــن الدخـــول فـــي التفاصيل الرياضية البعيدة عن هدف الكتاب في الوقت الحاضر.

وسيتم عرض هذه القواعد بالشكل البسيط التالي:

1) مشتقة الثابت تساوي صفر $\frac{dy}{dx} = zero$ **:Let y = c, then**

وهـــذا واضـــح جداً من التحليل الهندسي لرسم الدالة الثابتة، حيث أنه عندما يكون y ثابت فسوف يكون المستقيم موازي إلى الإحداثي السيني x-axis وهذا يعني أن مـــيله يســـاوي صفر. وبما أن المشتقة هي الميل فلذلك فإن المشتقة للثابت هي صفر.

2) مشتقة أو صيغة القوة أو الأس The power formula:

Iet y = x^n , then $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

وذلك يعني أنه إذا كانت قوة المتغير x كمية ثابتة موجبة positive constant power نطرح واحد من القوة إلى المتغير x ونضرب المتغير x في القوة قبل طرح الواحد.

We decrease the power of x by 1 and multiply by the original exponent of x.

والمثال التالي لتوضيح ذلك:

مثال 4

أوجد مشتقة الدوال التالية:

Find $\frac{dy}{dx}$ for the following:

a) $y = x^5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

b) $y = x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{1-1} = x^0 = 1$

c) $y = \sqrt{x}$ $\qquad y = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d) $y = x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y = \frac{1}{x^2}$ $\qquad y = x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad y = x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

3) مشتقة الدالة y = cx حيث أن c ثابت و x متغير:

Let y = cx then if cx is differentiable function of x, and c is a contant, then $\frac{dy}{dx} = c\frac{dy}{dx}$

ويعنـي ذلك أن مشتقة ضرب ثابت في دالة للمتغير x هو ضرب الثابت في مشتقة تلك الدالة.

The derivative of the product of a constant by a function is the product of the constant by the derivative of the function.

والمثال التالي لتوضيح ذلك:

مثال 5

أوجد مشتقة الدوال التالية:

Find $\frac{dy}{dx}$ for the following:

a) $y = cx^n$ $\qquad \frac{dy}{dx} = cnx^{n-1}$

b) $y = 10x^4$ $\qquad \frac{dy}{dx} = (10)(4)x^3 = 40x^3$

c) $y = \frac{5}{x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-5}{x^2}$

d) $y = 2\sqrt{x}$ $\qquad y = 2x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = (2)(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

4) المشتقة للجمع والطرح لأكثر من دالة قابلة للاشتقاق:

If u(x) and v(x) are two differentiable functions of x, then

$$f(x) = u \mp v$$

and $f'(x) = \frac{du}{dx} \mp \frac{dv}{dx}$

والمثال التالي لتوضح هذه القاعدة:

مثال 6

:Find $f'(x)$ for the following أوجد مشتقة الدوال التالية

a) $f(x) = x^3 + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

b) $y = 4x^3 + \dfrac{4}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 8x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - \frac{8}{x^3}$$

c) $y = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 10$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 10x + 7$$

d) $y = \dfrac{7x^4 - 5x^3 + 5}{3x^2}$

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} + \frac{5}{3}x^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{3} - 5x^{-4}$$

5) مشتقة الضرب Product Rule:

لنفرض أن u(x) و v(x) دالتين قابلتان للاشتقاق بالنسبة للمتغير x

If u(x) and v(x) are any two differentiable functions of x, then

$$\frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

أو تكتب المشتقة للضرب بالأسلوب الآخر التالي:

$$(uv)' = uv' + vu'$$

وتعني أن مشتقة حاصل ضرب دالتان هو الدالة الأولى في مشتقة الدالة الثانية مضافاً إليه (زائد) الدالة الثانية في مشتقة الدالة الأولى.

In words, the derivative of the product of two functions is equal to the first function times the derivative of the second plus the second function times the derivative of the first.

والمثال التالي لتوضيح هذه القاعدة:

مثال 7

أوجد المشتقة للدوال $f'(x)$ إذا كانت الدوال:

Find $f'(x)$ if

a) $f(x) = (4x^3 - 2x)(3x^2 + 4x + 7)$

b) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1)(x^2 + 3)$

c) $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2)$

a) $f(x) = uv$

لإيجاد المشتقة للفرع (a) يمكن أن تكتب الدالة بحالة الضرب بافتراض أن:

$u = 4x^3 - 2x$ و $v = 3x^2 + 4x + 7$

وبتطبيق صيغة الضرب نجد:

$u' = 12x^2 - 2$ و $v' = 6x + 4$

وبالتالي فإن:

$$f'(x) = uv' + vu'$$

$$= (4x^3 - 2x)(6x + 4) + (3x^2 + 4x + 7)(12x^2 - 2)$$

$$f'(x) = 60x^4 + 64x^3 + 66x^2 - 16x - 14$$

هناك طريقة ثانية لإيجاد مشتقة الضرب هو أن نضرب الدالتين أولاً ثم نقوم بعملية المشتقة كما في الأسلوب والأمثلة السابقة وكما يلي:

$$f(x) = 12x^5 + 16x^4 + 22x^3 - 8x^2 + 14x$$

$$f'(x) = 60x^4 + 64x^3 + 66x^2 - 16x - 14$$

وهذه هي نفس النتيجة.

ولإيجاد مشتقة الفرع (b) لدينا

b) $f(x) = (2\sqrt{x}+1)(x^2+3)$

نستخدم قاعدة الضرب لحل المسألة وبافتراض أن:

$$u = 2\sqrt{x}+1 = 2x^{\frac{1}{2}}+1 \quad , \quad v = x^2+3$$

إذن المشتقة هي:

$$u' = x^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad v' = 2x$$

ولذلك فالمشتقة كما يلي:

$$f'(x) = uv' + vu'$$

$$= (2x^{\frac{1}{2}}+1)(2x) + (x^2+3)(x^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 4x^{\frac{3}{2}} + 2x + x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 5x^{\frac{3}{2}} + 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

وأخيراً لإيجاد مشتقة الفرع (c) لدينا:

c) $f(x) = (3x^2+2x+1)(x^2-2)$

وبتطبيق القاعدة مباشرة لدينا:

$$f'(x) = (3x^2+2x+1)(2x) + (x^2-2)(6x+2)$$

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 10x - 4$$

6) مشتقة القسمة Quotient Rule:

إذا كانت u(x) وv(x) قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى x

If u(x) and v(x) are differentiable functions of x, then

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

أو يمكن أن نضعها في الصيغة التالية:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

وتعني أن مشتقة القسمة هو ضرب دالة المقام في مشتقة البسط مطروحاً منه (ناقص) مشتقة المقام في دالة البسط مقسوم على مربع المقام.

والمثالين التاليين لتوضيح قاعدة القسمة.

7

مثال 8

أوجد المشتقة للدوال التالية مستخدماً صيغة مشتقة القسمة.

Use the quotient rule to differentiate the following functions:

$$a)\ \ f(x) = \frac{2x+5}{2x-5} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{1-x^3}{1+x^3} \qquad c)\ \ f(x) = \frac{x}{x-1}$$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-5)(2)-(2x+5)(2)}{(2x-5)^2} = \dfrac{-20}{(2x-5)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{(1+x^3)(-3x^2)-(1-x^3)(3x^2)}{(1+x^3)^2} = \dfrac{-6x^2}{(1+x^3)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2.1 - x.1}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

مثال 9

أوجد المشتقة للدالة التالية مستخدماً دالة القسمة:

Find the derivative of the following function by using the Quotient Rule:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-2x)}{x-1}$$

نفرض أن:

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

وأن المشتقة تكون:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

حيث أن:

$$v' = 1 \quad , \quad u' = (x+1)(3x^2-2) + (x^3-2x).1$$

$$u' = 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2$$

إذن المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(4x^3+3x^2-4x-2) - (x+1)(x^3-2x).1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 2}{(x-1)^2}$$

7) مشتقة قاعدة السلسلة The Chain Rule:

إذا كانـــت y دالة بالنسبة إلى u وأن u هو دالة إلى x إذن تكون المشتقة كما يلي:

If y is a function of u and u is function of x, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

وتستخدم هذه المشتقة في حالة الدوال المعقدة.

Using it to differentiate a complicated function.

مثال 10

أوجـــد المشتقة للدوال التالية مستخدماً صيغة السلسلة وحدد كيفية تحليل كل دالة.

Find the derivative of the following functions, use the chain rule, indicate how each function is decomposed:

a) $y = (1 - x^3)^4$

b) $y = \sqrt{4x + 4}$

c) $y = (x^3 + 1)^6$

لاستخدام صيغة السلسلة نستطيع تحليل كل دالة كما يلي:

a) $y = (1 - x^3)^4$

افرض أن $y = u^4$ عندما $u = 1 - x^3$ ، لذلك فإن المشتقة:

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = -3x^2$$

وعليه باستخدام صيغة السلسلة Chain Rule لدينا ما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = (4u^3).(-3x^2)$$

$$= 4(1 - x^3)^3(-3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -12x^2(1 - x^3)$$

b) $y = \sqrt{4x + 4} = (4x + 4)^{\frac{1}{2}}$

افرض أن $y = u^{\frac{1}{2}}$ عندما $u = 4x + 4$ ، لذلك فإن المشتقة:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \qquad , \qquad \frac{du}{dx} = 4$$

وعليه باستخدام صيغة السلسلة chain rule لدينا ما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} .4$$

$$= \frac{1}{2}(4x + 4)^{-\frac{1}{2}} .4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(4x + 4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{4x + 4}}$$

c) $y = (x^3 + 1)^6$

افرض أن $y = u^6$ عندما $u = x^3 + 1$ ، لذلك فإن المشتقة:

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 \qquad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

وعليه باستخدام صيغة مشتقة السلسلة كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = 6u^5 . 3x^2$$

$$= 6(x^3 + 1)^5 . 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -18x^2 (x^3 + 1)^5$$

ويمكن وضع صيغة مشتقة دالة السلسلة كما يلي:

1) **If $y = [u(x)]^n$ then** $\left[\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}\right]$

2) **If y = f (inside), then** $\frac{dy}{dx} = f'(inside)$. **(derivative of inside with respect to x).**

3) **If y = (inside)^n, then** $\frac{dy}{dx} = n(inside)^{n-1}$. **(derivative of inside with respect to x).**

تعتبر الصيغ الأخيرة طريقة مباشرة لإيجاد مشتقة الدالة بصيغة السلسلة وسيتم توضيح ذلك بالمثال التالي:

مثال 11

أوجد المشتقة للدوال التالية مستخدماً صيغة السلسلة Chain Rule:

Given the following functions, find $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = (2x^4 + 1)^3$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+10)}}$

c) $y = (x^2 + 3x - 10)(3 - x^2)^3$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$

يمكن التطبيق المباشر لصيغة السلسلة كالآتي:

a) $y = (2x^4 + 1)^3$, $\dfrac{dy}{dx} = 3(inside)^2 . \dfrac{d}{dx}(inside)$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^2+1)^2 . \frac{d}{dx}(2x^4+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(2x^4+1)^2 . 8x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 24x^3(2x^4+1)^2$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+10)}} = (x^2+10)^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+10)^{-\frac{1}{2}-1} . \frac{d}{dx}(x^2+10)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2+10)^{-\frac{3}{2}} . 2x$$

$$f'(x) = -x(x^2+10)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x^2-10)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+10)^3}}$$

c) $y = (x^2 + 3x - 10)(3 - x^2)^3$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+3x-10)3(3-x^2)^2.(-2x) + (3-x^2)^3(2x+3)$$

$$\frac{dy}{dx} = -6x(3-x^2)^2(x^2+3x-10) + (3-x^2)^3(2x+3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (3-x^2)^2\left[-6x(x^2+3x-10) + (3-x^2)(2x+3)\right]$$

d) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3.\frac{(x+1).1-(x-1).1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3.\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 8\frac{(x-1)^3}{(x+1)^5}$$

8) مشتقة الدالة الأسية Derivative of Exponential function:

let $y = e^x$, then $\dfrac{dy}{dx} = e^x.1 = e^x$

مشتقة الدالة الأسية هي الدالة الأسية نفسها مضروبة بمشتقة الأس.

والمثال التالي لتوضيح مشتقة الدالة الأسية:

مثال 12

أوجد المشتقة للدوال الأسية التالية:

Find the derivatives for the following exponential functions:

a) $y = xe^x$

b) $y = e^{x^4}$

c) $y = x^3e^x$

d) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

e) $y = e^{3x}$

f) $y = e^{x^3-3x^2}$

g) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

لإيجاد المشتقات لدينا:

a) $y = xe^x$

افرض أن $y = uv$ وأن $u = x$, $v = e^x$ ، لذلك فإن:

$$\frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = u.v' + v.u'$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^x + e^x.1 = (x+1)e^x$$

b) $y = e^{x^4}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^4}.4x^3 = 4x^3e^{x^4}$$

c) $y = x^3.e^x$

$$\frac{dy}{dx} = x^3.e^x + e^x.3x^2 = (x^3+3x^2)e^x$$

d) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)e^x - e^x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{xe^x + \cancel{e^x} - \cancel{e^x}}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

e) $y = e^{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$$

f) $y = e^{x^3 - 3x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 - 6x)e^{x^3 - 3x^2}$$

g) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = x.e^{\frac{1}{x}}(-x^{-2}) + e^{\frac{1}{x}}$$

$$= -x^{-1}e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} = (1 - x^{-1})e^{\frac{1}{x}} = (1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$$

9) مشتقة الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

Derivative of the logarithmic function

Let y = lnx, then $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$

مشـــتقة الدالـــة اللوغاريتمية هو واحد على الدالة ومن ثم يضرب الناتج في مشتقة الدالة. والمثال التالي لتوضيح مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

مثال 13

أوجد مشتقة الدوال اللوغاريتمية التالية:

a) $y = \ln (x + c)$

b) $y = \ln (x^4 + 2x - 10)$

c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

d) $y = x\ln x$

e) $y = x\ln(x+1)$

f) $y = \frac{x}{\ln x}$

g) $y = \log_{10} x^2$

لإيجاد المشتقات لدينا:

a) $y = \ln(x + c)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+c)}.1 = \frac{1}{x+c}$$

b) $y = \ln(x^4 + 2x - 10)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^4+2x-10)}.(4x^3+2) = \frac{4x^3+2}{(x^4+2x-10)}$$

c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right) - (\ln x)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

d) $y = x\ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}} + \ln x(1) = 1 + \ln x$$

e) $y = x\ln(x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{(x+1)} + \ln(x+1)(1) = \frac{x}{(x+1)} + \ln(x+1)$$

f) $y = \frac{x}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x - \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

g) $y = \log_{10} x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x^2}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 \ln 10}$$

اشتقاق الدالة اللوغاريتمية يجب أن يوضع أولاً بصيغة اللوغاريتم الطبيعي

The common logarithm (log) to be expressed in terms of a natural logarithm (ln) before it could be differentiated.

وتطبق هذه الصيغة لأي أساس للدالة اللوغاريتمية فيجب أن تحول إلى لوغاريتم طبيعي ومن ثم تشتق الدالة.

10) المشتقات العليا Highter Derivatives:

نستطيع أن نشتق الدالة لأكثر من مرة إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق وتسمى المشتقة الأولى والمشتقة الثاني والمشتقة الثالثة وإلى آخره إلى أعلى درجة ممكنة.

Let y = f(x) be a given function of x with derivative dy/dx = $f'(x)$. In full, we call this the first derivative of y with respect to x. If $f'(x)$ is a differentiable function of x, its derivative is a differentiable function of x, its derivative is called the second derivative of y with respect to x. If the second derivative is a differentiable function of x, its derivative is called the third derivative of y, and so on.

ويمكن أن نرمز إلى المشتقات الأولى والثانية والثالثة وإلى أعلى مرتبة كما يلي:

The first and all higher – order derivatives of y with respect to x are generally denoted by one of the following types of notation:

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$y', \quad y'', \quad y''', \quad \ldots \quad y^{(n)}$$

$$f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x), \quad \ldots \quad f^{(n)}(x)$$

والمثال التالي لتوضيح معنى المشتقات من درجات أعلى:

مثال 14

7

أوجد المشتقة الأولى والثانية وإلى أعلى درجة للدوال التالية:

Find the first and second, and higher-order derivatives of:

a) $y = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 100$

b) $f(x) = x^4$

c) $y = x^2 \ln x$

لإيجاد المشتقات لدينا:

a) $y = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 100$

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 8x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3 - 36x^2 + 30x - 8$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120x^2 - 72x + 30$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 240x - 72$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 240$$

ونلاحظ هنا بأن المشتقة السادسة وجميع المشتقات من الدرجات الأعلى جميعها صفر.

b) $f(x) = 4x^4$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f'''(x) = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 24$$

ونلاحـــظ هــنا بأن المشتقة الخامسة وجميع المشتقات من الدرجات الأعلى جميعها صفر.

c) $y = x^2 \ln x$

$$y' = x^2 . \frac{1}{x} + \ln x . 2x$$

$$y'' = x^2(-x^{-2}) + x^{-1}(2x) + \ln x(2) + 2\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= -1 + 2 + 2\ln x + 2$$

$$y'' = 3 + 2\ln x$$

ونلاحظ هنا بأننا يمكننا الاستمرار بعملية الاشتقاق إلى درجات عليا.

7.5 الجانب التطبيقي للمشتقات: التحليل الحدي

Applications for the Derivatives: Marginal Analysis

هــناك العديــد مــن تطبيقات المشتقات في مجال إدارة الأعمال والاقتصاد applications in business and economics لإعــداد أو لبــناء مــا يسمى النسب الحدية marginal rates.

في هذا المجال كلمة حدية marginal تستخدم لتعني المشتقة derivative وهو نسبة التغير rate of change والأمثلة التالية توضح عملية تطبيق المشتقات في هذه المجالات.

1) الكلفة الحدية Marginal Cost:

افرض أن أحد المصنعين لأحد المواد وجد أنه لغرض صنع x من الوحدات في الأسبوع، الكلفة الكلية في عدد الدولارات the total cost in dollars تتمثل بدالة الكلفة التالية ($C = 400 + 0.4\ x^2$). وإذا كان عدد الوحدات المنتجة في الأسبوع هو 200 فإن الكلفة كما يلي ($C = 400 + 0.4 \times (200)^2 = 2000$) ومعدل إنتاج الوحدة الواحدة average cost puritan هو $\frac{2000}{200} = 10$ دولار.

7

والآن افرض أن المصنع قرر تغيير خطة الإنتاج من 200 إلى ($200+\Delta x$) وحـــدة في الأسبوع. حيث أن Δx هو التغير في زيادة الإنتاج لعدد الوحدات. إذن الكلفة سوف تكون:

$$C + \Delta C = 400 + 0.04\ (200 + \Delta x)^2$$
$$= 400 + 0.04\ [40000 + 400\ \Delta x + (\Delta x)^2]$$
$$= 2000 + 16\ \Delta x + 0.04\ (\Delta x)^2$$

ولذلك فالكلفة الإضافية (extra cost) لإنتاج الوحدات الإضافية هي:

$$\Delta C = (C + \Delta C) - C$$
$$\Delta C = 2000 + 16\ \Delta x + 0.04\ (\Delta x)^2 - 2000$$
$$\Delta C = 16\ \Delta x + 0.04\ (\Delta x)^2$$

ولهذا فمعدل الكلفة لكل وحدة إضافية تم إنتاجها هو:

The average cost per item of the extra items is therefore:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 16 + 0.04 \Delta x$$

وعلى سبيل المثال افرض أن الإنتاج قد ازداد من 200 إلى 240 ($\Delta x=40$) لكـــل أســـبوع فـــإن معدل الكلفة للـــ40 وحدة الإضافية Average cost for the additional 40 items سوف تساوي: $16 + 0.04\ (40) = \$17.6$ لكل أسبوع.

أمـــا إذا كانت الزيادة من 200 إلى 210 ($\Delta x=10$) فإن معدل الكلفة إلى 10 وحدات الإضافية سوف يكون (16.4) لكل أسبوع.

وعلـــيه فـــإن الكلفة الحدية marginal cost هي معدل كلفة الوحدة الإضافية عندما يكون هناك تغيير قليل جداً بزيادة عدد الوحدات المنتجة.

The average cost per extra item when a very small change is made in the amount produced.

وفي المثال السابق فإن الكلفة الحدية كما يلي:

$$\text{Marginal Cost} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0} (16 + 0.04\Delta x) = 16$$

وفي حالة دالة الإنتاج العامة general cost function C(x) تمثل كلفة إنتاج x من الوحدات المحددة، فإن الكلفة الحدية هي:

$$\text{Marginal Cost} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta X} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

ويتضـــح بذلك أن الكلفة الحدية تمثل المشتقة لدالة الكلفة derivative of the cost function بالنســبة إلـــى الكمـــيات المنـــتجة with respect to the amount produced، أي أن:

$$\text{Marginal Cost} = \frac{dc}{dx}$$

وهـــنا فـــإن الكلفة الحدية تقيس نسبة زيادة الكلفة بالنسبة للزيادة في كميات الإنتاج.

The marginal cost measures the rate at which the cost is increasing with respect to increases in the amount produced.

مثال 15

افرض أن الدالة التالية تمثل دالة الكلفة Total cost function:

$$C(x) = 0.001\,x^3 - 0.3\,x^2 + 40\,x + 800$$

حدد الكلفة الحدية marginal cost كدالة إلى المتغير x. قدر Evaluate الدالة الحدية عندما يكون الإنتاج production $x = 50$ ، $x = 100$ ، $x = 150$.

في هذا المثال المطلوب إيجاد مشتقة الدالة ($C'(x)$).

والدالــة الســابقة للإنــتاج تــتكون من عدة أنواع من قوى المتغير x وعند الاشتقاق نجد ما يلي:

$$C'(x) = 0.003\,x^2 - 0.6\,x + 40$$

الدالــة الأخيــرة تمــثل الكلفة الحدية، ولهذا سوف تعطي معدل كلفة زيادة الإنتاج كمية قليلة على الكمية المنتجة وكما يلي:

عندما $x = 50$ فإن الكلفة الحدية سوف تكون:

$$C'(x) = 0.003\,x^2 - 0.6\,x + 40$$

$$C'(50) = (0.003)\,(50)^2 - (0.6)\,(50) + 40$$

$$= 7.5 - 30 + 40 = 16.5$$

وعندما تكون $x = 100$ فإن الكلفة الحدية سوف تكون:

$$C'(100) = (0.003)\,(100)^2 - (0.6)\,(100) + 40$$

$$= 30 - 60 + 40 = 10$$

أما عندما تكون $x = 150$ فإن الكلفة الحدية سوف تكون:

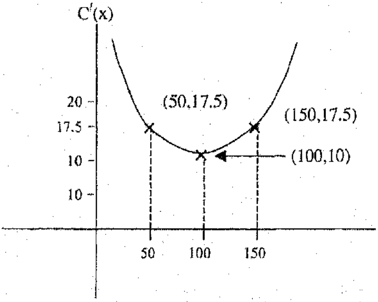
$$C'(150) = (0.003)\,(150)^2 - (0.6)\,(150) + 40$$

$$= 67.5 - 90 + 40 = 17.5$$

واضـــح من المثال أن الكلفة الحدية قد انخفضت عندما ازداد الإنتاج من 50 إلـــى 100 وحـــدة وبعدها ازداد مرة ثانية عندما ازداد الإنتاج من 100 إلى 150. ويمكـــن توضـــيح هـــذه النتائج في الشكل رقم (3) التالي. وهذا السلوك إلى الكلفة الحدية هو سلوك طبيعي حيث الإنتاج 100 هو الأمثل.

والتفســير الاقتصـــادي يوضح احتمال إنتاج 100 وحدة هو الإنتاج الأمثل لاســتخدام المكـــائن والمـــواد والـــوقت وأقل من ذلك يعني أننا لم نستخدم المواد

والمكـــائن والـــوقت استخدام أمثل وكذلك عندما تزيد الكمية عن 100 فإن المكائن والمـــواد الإضافية والوقت يحتاج إلى زيادة إضافية لا يمكن أن تستوعب من قبل المكائن مرةٍ واحدةٍ فنحتاج إلى تكرار العملية لإنتاج الوحدات الإضافية ولذلك تزداد الكلفة.



الشكل رقم (3)

تفسير الكلفة الحدية للمثال رقم (15)

وعلـــى ضوء نتائج الكلفة الحدية يكون من المهم أن نقارن بين سلوك الكلفة الحديــــة marginal cost مع معادلة أو نموذج الكلفة الخطي البسيط simple linear cost model. فـــي حالة الخطي البسيط $(C(x) = mx + b)$ كلاً من (b, m) ثوابت والكلفة الحدية $C'(x) = m$ حيث m ثابت لكل قيم x. هذه الكلفة ولكل وحدة إضافية additional unit للإنتاج تكون ثابتة، لا تعتمد أو مستقلة عن مستوى الإنتاج.

ومـــن الضــــروري عدم الخلط بين الكلفة الحدية marginal cost مع معدل الكلفة average cost. فإذا كان $C(x)$ هو دالة الكلفة the cost function فإن معدل كلفـــة الإنتاج x من الوحدات the average cost of producing x items هو الكلفة الكلية total cost $C(x)$ مقسوم على عدد الوحدات المنتجة وكما يلي:

$$\text{Average cost per Item} = \frac{C(x)}{x}$$

وهـــذه الدالة تختلف بشكل كامل عن الكلفة الحدية والتي هي المشتقة $C'(x)$ derivative. الكلفة الحدية تمثل معدل الكلفة لكل وحدة إضافية average cost per additional unit للــزيادة القلــيلة فـــي الإنتاج والفرق بين الحالتين كما في المثال التالي:

مثال 16

لدالة الكلفة cost function التالية:

$$C(x) = 10000 + 20\,x + 0.2\,x^2$$

الدالة الحدية marginal cost لهذه الدالة هي:

$$C'(x) = 20 + 0.4\,x$$

أمـــا معدل كلفة الإنتاج The average cost of producing x items فهو كما يلي:

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10000}{x} + 20 + 0.4x$$

وهاتان الدالتان تختلفان اختلافاً كبيراً وجوهرياً فيما بينما.

2) الربح والعائد الحدي Marginal Revenue and profit:

الآن نوجد اشتقاق العوائد revenues derived من مبيعات منتجات حقل sale of a firm's products أو خـــدمات معينة. إذا كان $R(x)$ يمثل العائد بالدولار فإن الناتج من مبيعات x من الوحدات، ويعرف العائد الحدي marginal revenue يمثل مشتقة العائد، $R'(x)$ ، وكما يلي:

$$\text{Marginal Revenue} = R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}$$

افرض أن عدد الوحدات المباعة قد ازدادت من x إلى $x+\Delta x$، وتتبعها زيادة في العائد corresponding increment in revenue وتكون كما يلي:

ΔR = New Revenue – Old Revenue

$\Delta R = R(x + \Delta x) - R(x)$

معـدل الـزيادة فـي العائد لكل وحدة مباعة إضافية average increate in revenue per additional item sold نحصـل علـيه مـن قسـمة ΔR على عدد الوحدات الإضافية أي يكون $\frac{\Delta R}{\Delta x}$، وتحديد قيمة الغاية limiting value لهذا المعدل كلما $\Delta x \to 0$ وهذا هو العائد الحدي marginal revenue.

والعائد الحدي يمثل الدخل الإضافي إلى الحقل لكل وحدة إضافية مباعة، أي يكون هو النسبة rate لزيادة العائد بالنسبة إلى الزيادة في حجم المبيعات increase in the volume of sales.

مثال 17

افرض أن الدالة التالية تمثل دالة العائد revenue function:

$$R(x) = 20x - 0.02\,x^2$$

عـندما يكـون x عـدد الوحدات المباعة، حدد العائد الحدي. ثم قدر العائد الحدي عندما يكون $x = 200$.

في البداية نحتاج لإيجاد وتقدير $R'(x)$ كالآتي:

$$R'(x) = 20 - 0.04\,x$$

وهذا هو العائد الحدي عندما تكون x من الوحدات المباعة. وعندما $x = 200$ فإن العائد الحدي هو:

$$R'(200) = 20 - 0.04\,(200) = 12$$

ويعنـي ذلك عندما تباع 200 وحدة فإن أي زيادة قليلة في المبيعات يضيف زيادة على العائد بمقدار 12$ لكل وحدة.

ويمكن أن يعرف العائد أيضاً كالآتي $R(x) = xP$

عـــندما P هـــو سعر الوحدة المباعة و x عدد الوحدات المباعة، وفي حالات عديـــدة يـــتم اســـتخدام المتغيـــرات للعلاقة بين x و P على أنها تمثل دالة الطلب demand equation.

مثال 13

أوجـــد العائـــد الحدي، عندما يكون $x = 300$، إذا كانت دالة الطلب كما في المعادلة التالية:

Find the marginal revenue, when $x = 200$, if the demand equation is:

$x = 1000 - 100\,p$

حيث أن السعر = p وحدد الوحدات المباعة = x.

أولاً يجـــب أن نضـــع المعادلة بصيغة p السعر هو دالة إلى المتغير x عدد الوحدات المباعة أو المطلوبة كالآتي

$100\,p = 1000\,x$

بالقسمة على 100 تكون المعادلة:

$P = 10 - 0.01x$

وتمثل معادلة الطلب، أما دالة العائد فهي كما يلي:

Then the revenue function is given by:

$R(x) = xp$

$R(x) = xp = x\,(10 - 0.01x)$

$R(x) = 10\,x - 0.01x^2$

الآن نســـتطيع إيجاد العائد الحدي من الدالة للعائد وذلك بإيجاد المشتقة للدالة R(x) كالآتي:

$R'(x) = 10 - 0.02\,x$

أما العائد الحدي عندما يكون حجم الطلب أو المبيعات تساوي $x = 300$ فإن العائد الحدي سوف يكون 4 وكما يلي:

$R'(300) = 10 - (0.02)\,(300) = 10 - 6 = 4$