الفصل الثامن

8 التكامل وتطبيقاته

8-1 مقدمة

8-2 مفهوم التكامل غير المحدد

8-3 التكامل لدوال معروفة - قواعد التكامل

8-4 طرق التكامل

8-4-1 التكامل بطريقة التعويض

8-4-2 التكامل بطريقة التجزئة

8-4-3 التكامل بالتفريق إلى كسور بسيطة

8-4-4 التكامل المحدود

8-5 التطبيقات الاقتصادية للتكامل

أ) استخراج دالة التكلفة الكلية ودالة الإيراد الكلي

ب) حساب فائض المستهلك

ج) حساب فائض المنتج

أسئلة الفصل الثامن

الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثامن
التكامـــل وتطبيقاتـــه
Integration and its applications

8-1 مقدمة Introduction:

سنعرض في هذا الفصل دراسة المفهوم الرياضي المهم لكثير من التطبيقات ومـــنها الإدارية والهندسية ألا وهو التكامل Integration عن طريق إعطاء تعريفاً واضحاً للتكامل غير المحدد لدالة Definition of indefinite integral ونشرح كيفية إيجـــاد الـــتكامل غيـــر المحدد للدوال المعرفة How to integrate some known functions وعـــن الطـــرق المختلفة لإيجاد بعض من قيم التكامل غير المحدد منها التكامل بطريقة التغيير أو التحويل transformation of variables والتكامل بطريقة التجـــزئة integration by parts والتكامل بالتفريق إلى كسور بسيطة integration using fractions. وكـــذلك ســـيتم التعرف على التكافل المحدد Definite integral وسيتضـــمن الفصـــل على العديد من الأمثلة examples ويحتوي الفصل في نهايته على العديد من الأسئلة exercises.

وبالتالـــي فـــإن هذا الفصل سيتضمن عدة مباحث منها المبحث 2–8 مفهوم التكامل غير المحدد The concept of indefinite integral والمبحث 3–8 التكامل لـــدوال معـــروفة – قـــواعد التكامل Rules for integration والمبحث 4–8 طرق الـــتكامل Integration Methods. أمـــا المبحث الأخير 5–8 التطبيقات الاقتصادية للتكامل Economics application for integrals.

8-2 مفهوم التكامل غير المحدد The concept of indefinite integral:

لاحظـــنا ممـــا سبق ماذا نعني بالتفاضل differentiation والتي تمثل عملية إيجـــاد المشتقة derivative. والآن سنقوم بالتعرف على العملية المعاكسة لها والتي تســـمى بالتكامل integration والتي تمثل إيجاد قيمة التكامل integral بتعبير آخر نقول بأن أي عمليتين تقوم كل منهما بإلغاء الأخرى تسمى العملية المعاكسة ولذلك

يوجد للمشتقة عملية معاكس يطلق عليها اسم التكامل. ويرمز للتكامل عادة بالرمز $\int$ ونكتب $\int f(x)\,dx$ والذي يدعى بالتكامل غير المحدد indefinite integral، أما $\int_a^b f(x)dx$ فيمثل التكامل المحدد definite integral وسنقوم الآن بتوضيح معنى التكامل كالآتي:

إذا كانت الدالة f(x) هي مشتقة الدالة g(x) في مجال معين وبالنسبة للمتغير x والذي يعني:

$$g'(x) = f(x)$$

فإننا نسمي الدالة g(x) تكاملاً للدالة f(x) في المجال المفروض.

If f(x) is the derivative of the function g(x) for some domain with respect to the variable x.i.e, $g'(x) = f(x)$. Then, we said that g(x) is the integration of the function f(x) for the same domain.

وبالتالي فإن البحث في تكامل الدالة f(x) يعني البحث عن دالة جديدة، ولتكن g(x)، بحيث أن مشتقتها it's derivative هي الدالة المفروضة f(x). ونسمي الدالة g(x) بالدالة الأصلية للدالة f(x) أو يطلق عليها اسم تكامل integral للدالة f(x).

for example: $(x^2 + 3x + 1)' = 2x + 3$

Then, the function $x^2 + 3x + 1$ is the integral for the function $2x + 3$

وبما أن مشتقة العدد الثابت يساوي صفر فإننا من تعريف تكامل الدالة نستنتج أن هذا التكامل معين بغض النظر عن قيمة العدد الثابت. ففي المثال أعلاه نلاحظ أن الدوال:

$$x^2 + 3x + 10$$

$$x^2 + 3x - 5$$

$$x^2 + 3x + \frac{3}{4}$$

يمكـــن اعتـــبار كل منها تكاملاً للدالة $2x + 3$ وذلك لأن مشتقة كل منها هو $2x + 3$.

ولهـــذا إذا كانت الدالة $g(x)$ هي واحدة من تكاملات الدالة $f(x)$ فإن كل تلك التكاملات يمكن التعبير عنها بالشكل $g(x) + c$ حيث أن c ثابت كيفي ويسمى بثابت الـــتكامل. وإذا أردنـــا اختـــيار دالة أصلية واحدة فقط فإننا نعطي للثابت c القيمة المناسبة.

ولنفـــرض الآن أنـــنا نريد تعيين قيمة c التي من أجلها تكون قيمة التكامل للدالة $2x - 3$ مساوية إلى 7 عندما $x = 2$.

Find the value for the constant c such that the integration of the function $2x - 3$ equals 7 if x equals 2.

لأجل إيجاد قيمة الثابت لدينا:

تكامـــل الدالة $2x - 3$ هو $x^2 + 3x + c$، وكما رأينا سابقاً. وبالتالي فإن قيمة ذلك التكامل عندما $x = 2$ مساوياً إلى 7 يعني أن:

$$(2)^2 + 3(2) + c = 7$$

أي أن:

$$4 + 6 + c = 7$$

$$10 + c = 7$$

$$c = 7 - 10 = -3$$

وبالتالـــي فإن التكامل الوحيد للدالة $2x - 3$ والذي قيمته 7 عندما $x = 2$ هو عندما $c = -3$. ولأجل توضيح العلاقة بين التكامل والتفاضل لدينا:

Relationship between integration and differentiation:

بالرجوع لتعريف المشتقة derivative فإن:

$$f^{\backslash}(x) = \frac{dy}{dx}$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل التالي:

$dy = f'(x)\,dx$

والتـــي تعـــرف باسم تفاضل الدالة y ونرمز له بالرمز dy. وذلك يعني أن تفاضل أي دالة يساوي مشتقتها في تفاضل المتغير المستقل X. أي أن عملية إيجاد تكامـــل الدالـــة f(x) تعنـــي الانتقال من هذه الدالة، والتي تمثل مشتقة لدالة أصلية أخـــرى، إلـــى الدالة الأصلية لها y. أي العودة من التفاضل dy إلى y والذي يعني إلغاء عملية التفاضل.

ولذلك فإننا نرمز لتكامل الدالة f(x) بالرمز $\int f(x)\,dx$.

8-3 التكامل لدوال معروفة – قواعد التكامل Rules for integration:

بالاســتفادة من قواعد الاشتقاق والتي تم ذكرها في الفصل السابق يمكننا أن نجـــد قيمة تكاملات مجموعة من الدوال وبشكل مباشر ودون اللجوء إلى أي وسيلة رياضـــية. والتالي تمثل قائمة بتكامل دوال معروفة حيث أن n هو عدد حقيقي وأن a_1 و a_2 عددان ثابتان حقيقيان. أما c فهو ثابت التكامل.

The following are some useful rules for integration, where n is a Real number. a_1 and a_2 are real constants. and c is the constant of the integration method.

1) $\int n^x dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad , \quad n \neq -1$

2) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

3) $\int a_1 f(x)dx = a_1 \int f(x)dx$

4) $\int [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)]dx = a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx$

5) $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \dfrac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$

6) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

7) $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

6) $\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + c$

وبالاستعانة بالقواعد أعلاه يمكن إجراء التكاملات التي ستعرض في الأمثلة التالية:

مثال 1

أوجد التكامل للدوال التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int dx = x + c$

b) $\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + c$

c) $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

d) $\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = (3)(\frac{1}{3})x^3 + c = x^3 + c$

e) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^2}{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

f) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

h) $\int \frac{2}{x^3}dx = 2\int x^{-3}dx = (2)(\frac{x^{-2}}{-2}) + c = -x^{-2} + c = \frac{-1}{x^2} + c$

i) $\int (3x-1)dx = \int 3xdx - \int dx = 3\int xdx - \int dx = \frac{3}{2}x^2 - x + c$

j) $\int\left[16x^7 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right]dx = 16\int x^7 dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int \frac{1}{x}dx$

$$= (16)\left(\frac{x^8}{8}\right) - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + \ln|x| + c$$

$$= 2x^8 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ln|x| + c$$

h) $\int\left[e^x - 3x^2\right]dx = \int e^x dx + 3\int x^2 dx$

$$= e^x + (3)\frac{x^3}{3} + c$$

$$= e^x + x^3 + c$$

8

مثال 2

أوجد تكامل ما يلي:

Find the integral for the following:

a) $\int x(x+1)dx$

يلاحـــظ هـــنا أننا نود تكامل حاصل ضرب. ولكن إذا استطعنا أن نضرب الحدين الموجودين فإن ذلك سيسهل شكل وطريقة إيجاد التكامل كالآتي:

$$\int x(x+1)dx = \int (x^2 + x)dx$$

$$= \int x^2 dx + \int x dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + c$$

b) $\int (x^3+1)(x^2-1)dx = \int (x^5 - x^3 + x^2 - 1)dx$

$$= \int x^5 dx - \int x^3 dx + \int x^2 dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x + c$$

c) $\int (x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x})dx$

وبضـــرب الحدان الموجودان داخل عملية التكامل و الاستعاضة بأن الضرب هو الفرق بين مربعين لدينا ما يلي:

$$\int \left[x^2 - (\frac{1}{x})^2 \right] dx = \int x^2 dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int x^2 dx - \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \left(\frac{-1}{3} \right) x^{-3} dx + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3x^3} + c$$

d) $\int (x+5)^2 dx$

وبعملية فتح التربيع الموجودة على الحد x+5 نحصل على ما يلي:

$$\int (x+5)^2 dx = \int (x^2 + 10x + 25) dx$$

$$= \int x^2 dx + 10 \int x dx + 25 \int dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{2}x^2 + 25x + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 + 25x + c$$

مثال 3

أوجد تكامل ما يلي:

Find the integral for the following:

a) $\int (x^2+x+1)(2x+1)dx$

يمكن إيجاد هذا التكامل بطريقتين وهما:

الطريقة الأولى: سنقوم بضرب الحدين في داخل التكامل ومن ثم إجراء التكامل كما تم ملاحظته في الأمثلة السابقة وكما يلي:

$$= \int (2x^3+x^2+2x^2+x+2x+1)dx$$

$$= \int (2x^3+3x^2+3x+1)dx$$

$$= 2\int x^3dx + 3\int x^2dx + 3\int xdx + \int dx$$

$$= (2)\left(\frac{x^4}{4}\right) + (3)\left(\frac{x^3}{4}\right) + (3)\left(\frac{x^2}{4}\right) + x + c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

الطريقة الثانية: وسنقوم هنا بتمييز أن الحدين داخل التكامل أحدهما هو مشتقة الحد الآخر وباستخدام القاعدة رقم (5) فإن $f(x) = x^2 + x + 1$ وأن $f'(x) = 2x + 1$ وبالتالي فإن قيمة التكامل تصبح:

$$\int (x^2+x+x)(2x+1)dx = \frac{1}{2}(x^2+x+1)^2 + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+x+1)(x^2+x+1) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+x^2+x+1\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right] + c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

وطبيعي أن تتفق الطريقتان في الناتج والذي يمثل تكامل الدالة.

ولكن يجب أن نلاحظ هنا أن الحل بالطريقتين كان نتيجة أن الضرب كان ممكناً للعمل بالطريقة الأخرى.

أما إذا كان الضرب غير ممكناً (وهذا ما سنراه في (b)، (c)، و(d) من هذا المثال) فيجب علينا إيجاد التكامل باتباع فكرة الطريقة الثانية والمعتمدة على القاعدة رقم (5) وكالآتي:

b) $\int (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}(2x+1)dx$

$$= \frac{3}{4}(x^2 + x + 1)^{\frac{4}{3}} + c$$

c) $\int (x^3 + 1)^4 x^2 dx$

وهنا نلاحظ أن مشتقة $x^3 + 1$ هي $3x^2$. وذلك يعني أننا نحتاج إلى الضرب في 3 للحصول على تلك المشتقة. عملية الضرب هذه ستغير قيمة التكامل ما لم نقوم بالقسمة على 3 في الوقت ذاته. وذلك يعني ما يلي:

$$\int \frac{1}{3}(x^3 + 1)^4 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{5}(x^3 + 1)^5 + c$$

$$= \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + c$$

d) $\int \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx$

ونلاحظ هنا أن مشتقة lnx هي $\frac{1}{x}$ وبالتالي فإن قيمة التكامل ستكون:

$$\frac{1}{3}(\ln x)^3 + c$$

مثال 4

أوجد تكامل ما يلي:

Find the integral for the following:

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

وهنا نلاحظ بأن المقام $x^2 + x + 1$ وأن مشتقته هي $2x+1$ والتي تمثل البسط. وذلك يعني أن البسط هو مشتقة المقام وباستخدام القاعدة رقم (6) فإن نتيجة أو قيمة التكامل هي:

$$\ln \left|x^2+x+1\right| + c$$

b) $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3} dx$

باستخدام نفس الملاحظة أعلاه فإن قيمة التكامل هي:

$$\frac{-1}{2}(x^2+x+1)^{-2} + c = \frac{-1}{2(x^2+x+1)^2} + c$$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}} dx$

وهنا نلاحظ بأن المقام بدون الجذر $1-3x^2$ ومشتقته $-6x$. وبذلك يعني علينا ضرب البسط في المقدار -6 ليصبح البسط مشتقة المقام وبالتالي علينا أيضاً قسمة الحد على المقدار -6 في نفس الوقت للحصول على ما يلي:

8

$$\frac{-1}{6}\int\frac{-6x}{\sqrt{1-3x^2}}dx \quad = \frac{-1}{6}\int(1-3x^2)^{\frac{-1}{2}}(-6x)dx$$

$$= \frac{-2}{6}(1-3x^2)^{\frac{1}{2}}+c$$

$$= \frac{-1}{3}\sqrt{1-3x^2}+c$$

8.4 طرق التكامل Integration Methods:

في هذا المبحث سنقوم بعرض بعض من الطرق العامة لإيجاد التكامل كالآتي:

8-4-1 التكامل بطريقة التعويض Transformation of variables:

للحصول على تكامل دالة ما ولم نستطع تطبيق أي من قواعد التكامل السابق ذكرها فقد يكون بالإمكان حساب التكامل المطلوب عن طريق التعويض أو التغيير أو التحويل من المتغير X إلى متغير آخر بحيث تصبح الدالة الجديدة من أشكال الدوال التي تنطبق عليها إحدى قواعد التكامل السابقة.

لو كان لدينا التكامل $\int f(x)dx$ وقمنا بتغيير x إلى u مثلاً من خلال العلاقة $x = h(x)$ فإن تفاضل x سيكون $dx = h'(u)\,dx$ وبالتالي فإن التكامل الأصلي للدالة سيصبح:

$$\int f(x)dx = \int f(h(u))h'(u)du$$

وبعد حساب قيمة التكامل الأخير فإننا نعود إلى المتغير X عن طريق حساب قيمة u بدلالة X. والمثال التالي سيوضح ذلك:

مثال 5

أوجد قيمة التكاملات التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int (2x+3)^4 dx$

وباستخدام العلاقة $u = 2x + 3$ فإن $x = \frac{u-3}{2}$ وأن $dx = \frac{1}{2}du$ وبالتالي

فإن قيمة التكامل ستصبح:

$$\int (2x+3)^4 dx = \int u^4 . \frac{1}{2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{5} u^5 + c$$

$$= \frac{1}{10} u^4 + c$$

وأخيراً نقوم بالتعويض عن u بدلالة x ليصبح الناتج:

$$\frac{1}{10}(2x+3)^5 + c$$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2-2}} dx$

وباستخدام العلاقة $u = 3x^2 - 2$ فإن $du = 6x\ dx$ وبالتالي فإن قيمة التكامل ستصبح:

$$\int (3x^2-2)^{\frac{-1}{2}} x dx = \int u^{\frac{-1}{2}} . \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{6} . 2u^{\frac{1}{2}} + c$$

8

$$= \frac{1}{3}(3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2 - 2} + c$$

8-4-2 التكامل بطريقة التجزئة Integration by parts:

لحساب التكامل بطريقة التجزئة علينا الرجوع لمشتقة حاصل ضرب دالتين والتي كانت كالآتي:

$$[h_1(x)h_2(x)]' = h_1(x)h'(x_2) + h_2(x)h'(x_1)$$

والتي كانت تعني الدالة الأولى في مشتقة الثانية مضافاً إليه الدالة الثانية في مشتقة الأولى.

وبأخذ التكامل للطرفين نحصل على ما يلي:

$$\int [h_1(x)h_2(x)]' dx = \int h_1(x)h_2'(x_2) + \int h_2(x)h_1'(x_1)dx$$

وبمـــا أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة يمثل $h_1(x)h_2(x)$ فإن ذلك يعني أن العلاقة الأخيرة ستصبح كالآتي:

$$h_1(x)h_2(x) = \int h_1(x)h_2'(x)dx + \int h_2(x)h_1'(x)dx$$

وذلك يعني أن:

$$\int h_1(x)h_2'(x)dx = h_1(x)h_2(x) - \int h_1'(x)h_2(x_1)dx$$

وتطبيق هذه الطريقة سيكون أنه عندما نريد إيجاد قيمة تكامل حاصل ضرب دالتين بحيث نستطيع تكامل أحدها ونشتق الأخرى فإننا يمكننا تطبيق طريقة التكامل بالتجزئة لإيجاد قيمة التكامل. وسيتم ملاحظة ذلك من المثال التالي:

مثال 6

أوجد قيمة التكاملات التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int x\sqrt{x+5}dx$

بافتراض أن $x = h_1(x)$ فإن $dx = h_1'(x)$ وبافتراض أن:

$$\int\sqrt{x+5}dx = \int h_2'(x)dx$$

$$\int(x+5)^{\frac{1}{2}}dx = \int h_2'(x)dx$$

فإن:

$$\frac{3}{2}(x+)^{\frac{3}{2}} = h_2(x)$$

وبالتالي قيمة التكامل الأصلي:

$$\int x\sqrt{x+5} = x.\frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}} - \int\frac{3}{2}(x+5)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+5)^{\frac{5}{2}} + c$$

b) $\int \ln x dx$

بافتراض أن $h_1(x) = \ln x$ فإن $h'(x) = \frac{1}{x}dx$. وبافتراض أن $\int dx = \int h_2'(x)dx$ فإن $x = h_2(x)$ وبالتالي فإن قيمة التكامل:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln - \int dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

c) $\int xe^x dx$

وبافتراض أن $h_1(x) = x$ فإن $h_1'(x) = dx$ وبافتراض أن

$\int e^x dx = \int h_2'(x)dx$ فإن $e^x = h_2(x)$ وبالتالي فإن قيمة التكامل هي:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + c$$

8-4-3 التكامل بالتفريق إلى كسور بسيطة Integration by using fractions:

وهــذه الفقرة تتناول تكامل الدوال الكسرية fraction functions وهي الدوال التي كل منها على شكل كسر fraction بسطه كثير حدود ومقامه كثير حدود كذلك. ويعــتمد بصورة أساسية على كون درجة البسط أقل من درجة المقام ويمكن تحليل المقــام إلى عوامله ومن ثم إيجاد تكامل الكسور البسيطة التي تكون الكسر المراد إيجــاد قيمة تكامله. وعندما يكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام فعندئذ علينا أولاً بقسمة البسط على المقام، بأي من الطرق السابق ذكرها، للحصول على نــاتج القســمة مضافاً إليه كسر يكون درجة بسطه أقل من درجة مقامه وبعد ذلك نقــوم بالتجــزئة إلى الكسور البسيطة ومن ثم إيجاد ناتج أو قيمة التكامل. والمثال التالي سيوضح ذلك:

مثال

أوجد قيمة التكاملات التالية:

Find the integral for the following:

a) $\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$

نلاحظ هنا بأن البسط هو ليس مشتقة المقام لنستطيع استخدام إحدى العلاقات الســابق ذكــرها لإيجاد التكامل، كما وأننا لا نستطيع استخدام طريقة التعويض أو

طريقة التكامل بالتجزئة. ولكن بما أن الدالة كسرية وأن درجة البسط أقل من درجة المقام فإننا سنطبق طريقة التكامل بالتجزئة إلى كسور بسيطة كالآتي:

أولاً علينا تحليل المقام إلى عوامله كالآتي:

$$X^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

وبالتالي فإن التكامل سيكون كما يلي:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+1)} dx$$

وبما أن الكسر $\frac{1}{(x-3)(x+1)}$ يمكن كتابته على الشكل:

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

فإننا نستطيع إيجاد قيمة A و B من تساوي الشكلين كالآتي:

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-3B)}{(x-3)(x+1)}$$

وذلك يعني أن $A + B = 0$ وأن $A - 3B = 1$. ومن حل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$A = \frac{1}{4} \quad , \quad B = \frac{-1}{4}$$

وكذلك يمكن الحصول على قيمة كل من A و B باستخدام العلاقة $A(x+1) + B(x-3) = 1$ والتعويض عن قيمة x بأصفار المقام. أي عندما $x = 3$ فإن $4A = 1$ ويعني $A = \frac{1}{4}$ ، أما عندما $X = -1$ فإن $-4B = 1$ ويعني $B = \frac{-1}{4}$.

وعند التعويض عن تلك القيمتين نحصل على التكامل التالي:

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{1}{(x-3)(x+1)}dx$$

$$= \int \frac{A}{x-3}dx + \int \frac{B}{x+1}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}}{x-3}dx + \int \frac{\frac{-1}{4}}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{|x-3|}{|x+1|} + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + c$$

b) $\int \frac{x^2+5x-1}{x+3}dx$

ونلاحظ هنا بأن الدالة كسرية وأن درجة البسط أكبر من درجة المقام ولذلك علينا إيجاد ناتج القسمة (باستخدام طريقة القسمة الطويلة) لنحصل على:

$$\int \frac{x^2+5x-1}{x+3}dx = \int (x+2)dx - \int \frac{7}{x+3}dx$$

$$= \int xdx + \int 2dx - \int \frac{7}{x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x - 7\ln|x+3| + c$$

c) $\int \frac{x^4 - 2x}{4x^2 - 9} dx$

ونلاحظ هنا بأن الدالة كسرية وأن درجة البسط أكبر من درجة المقام وبالتالي علينا بإجراء القسمة (باستخدام القسمة الطويلة) كالآتي:

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16} \\ \hline 4x^2 - 9 & x^4 - 2x \\ & \mp x^4 \pm \frac{9}{4}x^2 \\ \hline & \frac{9}{4}x^2 - 2x \\ & \mp \frac{9}{4}x^2 \pm \frac{81}{16} \\ \hline & -2x + \frac{81}{16} \end{array}$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل ستكون:

$$\int \frac{x^4 - 2x}{4x^2 - 9} dx = \int \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16} \right) dx + \int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{4x^2 - 9} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int x^2 dx + \frac{9}{6} \int dx + \int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{4x^2 - 9} dx$$

ونلاحظ أن الكسر الأخير هو دالة كسرية درجة بسطها أقل من درجة مقامها وبتحليل المقام $4x^2$-9 إلى عوامله (2x+3) (2x-3) فإن:

$$\int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{4x^2 - 9} dx = \int \frac{-2x + \frac{81}{16}}{(2x-3)(2x+3)} dx$$

والكسر الأخير يساوي:

$$\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{2x+3}=\frac{A(2x+3)+B(2x-3)}{(2x-3)(2x+3)}$$

وأخيراً فإن:

$$A(2x+3)+B(2x-3)=-2x+\frac{81}{16}$$

$$2Ax+3A+2Bx-3B=-2x+\frac{81}{16}$$

$$(2A+3B)x+(3A-3B)=-2x+\frac{81}{16}$$

وبالتالي فإن:

$$2A+2B=-2$$

$$3A-3B=\frac{81}{16}$$

وبحل المعادلتين الأخيرة أن $B=\frac{-43}{32}$ و $A=\frac{11}{32}$

وذلك يعني أن:

$$\int\frac{-2x+\frac{81}{16}}{4x^2-9}dx=\int\frac{A}{2x-3}ux+\int\frac{}{2x+3}ux$$

$$=\frac{11}{(32)(2)}\int\frac{2}{2x-3}dx+\frac{43}{(32)(2)}\int\frac{2}{2x+3}dx$$

$$=\frac{11}{64}\ln|2x-3|-\frac{43}{64}\ln|2x+3|+c$$

وأخيراً فإن:

$$\int\frac{x^4-2x}{4x^2-9}dx=\frac{1}{12}x^3+\frac{19}{16}x+\frac{11}{64}\ln|2x-3|-\frac{43}{64}\ln|2x+3|+c$$

8-4-4 التكامل المحدود Definite Integral:

أمـــا عن التكامل المحدود فإنه تكامل ولكن لفترة أو لمجال معين ونرمز لهذا التكامل بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ حيث أن a و b قيمتان حقيقيتان. ونعني بذلك التكامل أن نجـــد قيمة التكامل من النقطة a إلى النقطة b وعن قيمة هذا التكامل فهي التعويض عن ناتج التكامل عند النقطة b مطروحاً منه ناتج التكامل عند النقطة a.

Let $\int f(x)dx = g(x)$

Then $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$

ويمكن تجزئة مجال التكامل المحدود كالآتي:

Let f(x) be a function that can be integrated over the interval [a , b], and let c be any point in this interval. i.e. a < c < b. Then:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

والمثال التالي يوضح التكامل المحدود كالآتي:

مثال 8

أوجد قيمة التكامل التالي:

Find the integral of the following:

a) $\int_3^5 (x^2 - x + 1)dx = \int_3^5 x^2 dx - \int_3^5 x dx + \int_3^5 dx$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right]_3^5 - \left.\frac{x^2}{2}\right]_3^5 + \left.x\right]_3^5$$

$$= \frac{1}{3}(5^3 - 3^3) - \frac{1}{2}(5^2 - 3^2) + (5 - 3) = 26.67$$

b) $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$

ولإيجــاد قــيمة هــذا التكامل فيشابه طريقة التكامل المحدود مع كون أحد أطراف التكامل غير محدودة (∞) والحل كما يلي:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\int_{1}^{x}\frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left.\frac{-1}{x}\right]_1^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} - (-1)$$

$$= \frac{-1}{\infty} + 1$$

$$= 0 + 1 = 1$$

8-5 التطبيقات الاقتصادية للتكامل:

Economics application for integrals

للــتكامل تطبــيقات عديــدة مــنها الفيزيائية، الرياضية، الهندسية، الإدارية والاقتصادية وغيرها. وسنركز في هذا المبحث على التطبيقات الاقتصادية لأهميتها ودرجــة علاقــتها بالنواحــي الإدارية والمالية وخصوصاً للطلبة في التخصصات المالية والإدارية. وسنذكر بعض من جوانب هذه التطبيقات كالآتي:

أ) استخراج دالة التكلفة الكلية Total cost function ودالة الإيراد الكلي Total revenue function:

ببســاطة فإن دالة التكلفة الكلية total cost function هي تكامل دالة التكلفة الحديــة marginal cost function. أما دالة الإيراد الكلي total revenue function

فهي تكامل دالة الإيراد الحدي marginal revenue function. والمثال التالي لتوضيح ذلك:

مثال 9

إذا علمت أن دالة التكلفة الحدية هي $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$ حيث أن x هو حجم الإنتاج. أوجد دالة التكاليف الكلية y:

$$Y = \int f(x)dx$$

$$= \int (4x^2 + 3x + 1)dx$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + c$$

وبافتراض أن التكاليف الكلية معلومة، ولتكن 15، عندما حجم الإنتاج x يساوي صفر فإن:

$$Y = c = 15$$

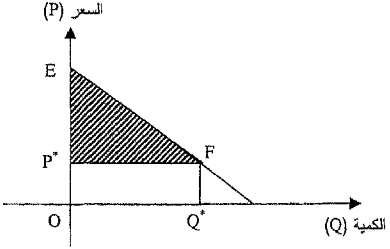
عندئذٍ تصبح دالة التكاليف الكلية معينة بصورة وحيدة كالآتي:

$$Y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 15$$

ب- حساب فائض المستهلك Consumer surplus:

لنفرض أن دالة الطلب Q من قبل المستهلك هي $Q = a + bp$ حيث أن p هو السعر وأن a و b هما عددان حقيقيان.

وبما أن الطلب دالة متناقصة decreasing في السعر فإن الثابت b يجب أن يكون سالباً negative $(b < 0)$. وليكن p^* و Q^* هما سعر التوازن وكمية الطلب التوازني فعندئذٍ تكون مساحة الشكل المظلل (المثلث rectangular) في الشكل التالي تمثل فائض المستهلك consumer surplus:



ولحســاب فائض المستهلك علينا إيجاد مساحة الشكل المثلثي المظلل والتي تســاوي مســاحة $OEFQ^*$ مطــروحاً منه مساحة OP^*FQ^*. ويلاحظ بأن مساحة $OEFQ^*$ هي تكامل دالة السعر $P = \frac{Q}{b} - \frac{a}{b}$

أما مساحة المستطيل OP^*FQ^* فهو P^*Q^*. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال 10

إذا علمــت أن دالة الطلب $Q = 10 - 2p$ وكان سعر التوازن $P^* = 3$ أوجد فائض المستهلك.

إذا كانت دالة الطلب $Q = 10 - 2p$ فإن دالة السعر P ستكون $P = 5 - \frac{1}{2}Q$

وإن كــان ســعر الــتوازن $P^* = 3$ فإن كمية التوازن $Q^* = 4$ وعليه يكون فائض المستهلك هو:

$$\int_0^{Q^*} (5 - \frac{1}{2}Q)dQ - P^*Q^*$$

$$\left[5Q - \frac{1}{4}Q^2\right]_0^4 - (3)(4)$$