الرياضيات وتطبيقاتها

في العلوم الادارية والاقتصادية

الفصل الثاني

2 معادلات بمتغير واحد

2-1 مقدمة

2-2 المعادلة الخطية

2-3 تطبيقات المعادلات الخطية

2-4 المعادلات التربيعية

2-4-1 الحل بطريقة الجذر التربيعي

2-4-2 الحل بطريقة التجزئة إلى العوامل

2-4-3 الحل بطريقة المميز (الصيغة التربيعية)

2-4-4 طريقة إكمال المربع

أسئلة الفصل الثاني

الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثاني
معادلات بمتغير واحد
Equations in One Variable

2-1 مقدمة Introduction:

هــذا الفصل سوف يتناول المعادلات Equations بشكليها المعادلات الخطية Linear Equations والمعــادلات التــربيعية Quadratic Equations لمتغير واحد One Variable ولــيكن X أو Y. وكــذلك ســوف يتناول هذا الفصل أيضاً بعض المفاهــيم Concepts والعلاقــات أو الصيغ Rules الخاصة بالتعامل مع مثل هذه المعــادلات. وكذلك سنتعرف على كيفية حلها Solving the Equations لإيجاد قيم المتغيــر الخاص بها وسيتضمن الفصل أيضاً كثير من الأمثلة المختلفة Examples وكذلك الأمثلة التطبيقية Applied Examples والتي تساعد في الاستفادة من مفهوم المعادلات لحل كثير من المشاكل التطبيقية. وسيحتوي الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

سيتضــمن الفصــل عدة مباحث وهي المبحث 2-2 المعادلة الخطية بمتغير واحــد Linear equation in one variable والمــبحث 3-2 تطبــيقات المعادلات الخطــية Applications of linear equations وأخيــراً المــبحث 4-2 المعادلات التربيعية Quadratic equations.

2-2 المعادلة الخطية Linear Equation:

المعادلة هي صيغة تعبر عن المساواة بين مقدارين جبريين

The equation is a statement that expresses the equality of two algebraic expressions.

بصورة عامة المعادلة تتضمن متغير واحد أو أكثر One variable or more وتحتوي على رمز المساواة (=).

التالي أمثلة عن المعادلات The following are examples on equations:

$$2-3(x-2)=\frac{x}{5}-8 \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{6x}{3}+2(2x+1)=8 \qquad \ldots (2)$$

ويلاحظ أن المعادلة رقم (1) وكذلك المعادلة رقم (2) هي معادلة من الدرجة الأولى (أو خطية) لمتغير واحد

Equation (1) is first degree (or Linear) in one variable x, and so is equation (2).

أمـــا عن حل المعادلات الخطية من الدرجة الأولى ولمتغير واحد هو عندما نجــد قــيمة هذا المتغير وعند التعويض عن قيمة ذلك المتغير في المعادلة يتساوى طرفا المعادلة

A solution is a number that when substituted for the variable makes the equation true.

وبتعبير آخر حل المعادلة الخطية بمتغير واحد هو القيمة التي تجعل المعادلة صحيحة ويسمى جذر المعادلة أو حل المعادلة

The value of the variable that makes an equation a true statement is called a root or a solution of the given equation.

ويمكن ملاحظة أن الحل للمعادلة رقم (1) هو (5) في حين أن الحل للمعادلة رقم (2) هو (1) وكما يلي توضيح للحل:

1) $2-3(x-2)=\frac{x}{5}-8$

$$2-3x+6=\frac{x}{5}-8$$

$$(8-3x=\frac{x}{5}-8)(5)$$

$$40-15x=x-40$$

$$80=16\,x$$

$x = 5$

وللـتأكد مـن الحـل نعـوض في المعادلة الأصلية عن قيمة x بالمقدار 5 وسنحصل على ما يلي:

$$2-3(5-2)=\frac{5}{5}-8$$

$$2-3\,(3)=1-8$$

$$2-9=-7$$

$$-7=-7$$

مما يشير إلى أن الحل صحيح.

2) $\frac{6x}{3}+2(2x+1)=8$

$$\frac{6x}{3}+4x+2=8$$

$$(\frac{6x}{3}+4x=6)(3)$$

$$6x+12x=18$$

$$18x=18$$

$$x=1$$

وللـتأكد مـن الحـل نعـوض في المعادلة الأصلية عن قيمة x بالمقدار 1 وسنحصل على ما يلي:

$$\frac{6}{3}+2(2+1)=8$$

$$2+2\,(3)=8$$

$$2+6=8$$

$$8=8$$

مما يشير إلى أن الحل صحيح.

سنقوم الآن بعرض بعض خصائص المساواة والتي ستكون ذات فائدة كبيرة في حل المعادلات الخطية كالآتي:

Equality properties:

For a , b and c real numbers we have:

1) If c = b, then c + a = b + a	Addition property
2) If c = b, then c − a = b − a	Subtraction property
3) If c = b, then a c = a b , $a \neq 0$	Multiplication property
4) If c = b, then $\frac{c}{a} = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$	Division property

وبالتالـــي فإننا نستطيع أن نجمع (أو نطرح أو نضرب أو نقسم) ثابت أو أي حد جبري لطرفي المعادلة وتبقى المعادلة والنتائج كما هي بشرط عدم الضرب في (أو القسمة على) صفر.

We can add, subtract, multiply or divide any constant or any algebraic expression (non zero) to both sides of an equation.

الحالات التالية لتوضيح تلك الخصائص أعلاه:

for example, let $x - 2 = 3$

بإضــافة 2 إلى طرفي المعادلة فإن ذلك لا يؤثر على حل المعادلة باستخدام خاصية الإضافة أعلاه

Adding 2 to both sides of this equation will not change the roots of this equation, by the addition principle, and we have:

$x - 2 + 2 = 3 + 2$

$x = 5$

وهــذا يعني أن $x = 5$ هو حل المعادلة وهو الحل الوحيد Unique solution لهذه المعادلة.

As another example, let $3x = 9$

وبتقسيم طرفي المعادلة على المعامل 3 فإن ذلك لا يؤثر على نتائج المعادلة، حيث أننا لم نقسم على صفر باستخدام خاصية القسمة

Dividing both sides of this equation by 3 will not change the roots of this equation, by the division property, and we have

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

وهذا هو حل المعادلة الوحيد.

ونستطيع تطبيق جميع الخصائص السابق ذكرها بنفس الأسلوب.

أما عن تعريف المعادلة الخطية من الدرجة الأولى فلدينا:

Definition:

An equation is a first degree or a linear equation in one variable X if it can be transformed into equation where the left side is of the form ax + b, $a \neq 0$ and the right side is equal to zero, where a and b are real constants.

And this form is called the standard form of a linear equation.

وذلك يعني أن المعادلة الخطية بمتغير واحد هي المعادلة ذات الشكل العام $ax + b = 0$ ، حيث أن b , a هما ثوابت حقيقية.

for example: $4x + 8 = 0$ is a linear equation in one variable and subtracting 8 from both sides gives

$$4x = -8$$

Then, dividing both sides by 4 we get

$$x = -2$$

This is the only solution for the equation.

As another example we notice that $x - 100 = 0$ is also a linear equation in one variable.

Adding 100 to both sides fives $x = 100$ and this is the only solution for the equation.

لــذلك فإن المعادلة الخطية أو المعادلة من الدرجة الأولى بمتغير واحد لها حل واحد فقط

Therefore, a first degree or a linear equation has only one solution (unique solution).

ويتضـــح كـــذلك مما سبق أن هناك خطوات عامة يمكن اتباعها لإيجاد حل المعادلة الخطية من الدرجة الأولى كالآتي:

The following are the steps for solving linear equations

الخطوة الأولى: التخلص من الأقواس في المعادلة

Step 1: Expand any parentheses which may be found in the equation.

الخطــوة الثانـــية: الـــتخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك للمقامات جميعها.

Step 2: Remove any fractions which may be found in the equation by multiplying both sides by the common denominator of the fractions involved.

الخطـــوة الثالثة: نقل الحدود المحتوية على الثوابت إلى الطرف الأيمن من المعادلـــة والحـــدود المحـــتوية على المتغير إلى الطرف الآخر، ثم تبسيط المعادلة لإيجاد الحل.

Step 3: Move all the terms containing the constants to the right side and all terms containing the variable to the left side, then simplify.

الأمثلة التالية توضح اتباع الخطوات أعلاه لحل بعض من المعادلات الخطية كالآتي:

مثال 1

حل المعادلة التالية :Solve the following equation

$$\frac{7x}{5}-\frac{x-2}{3}=\frac{6}{3}-\frac{1}{3}(x-\frac{3x-2}{5})$$

لحـــل هذه المعادلة علينا أولا التخلص من الكسور وذلك بالضرب في المقام المشترك وهو 15 لجميع حدود المعادلة بعد رفع الأقواس كالآتي:

$$(\frac{7x}{5}-\frac{x-2}{3}=\frac{6}{3}-\frac{x}{3}+\frac{3x-2}{15})(15)$$

$$(15)(\frac{7x}{5})-(15)(\frac{x-2}{3})=(15(\frac{6}{3})-(15)(\frac{1}{3})+(15)(\frac{3x-2}{15})$$

$$(3)\ (7x)-(5)\ (x-2)=(5)\ (6)-(5)\ (x)+(3x-2)$$

$$21\ x-5\ x+10=30-5x+3x-2$$

$$21x-5x+5x-3x=30-2-10$$

$$18\ x=18$$

$$x=1$$

وهذا هو الحل الوحيد للمعادلة وهو أن تكون قيمة x مساوية إلى 1.

مثال 2

حل المعادلة التالية Solve the following equation:

$$5\ x-3\ (7-x)=13-9\ x$$

لحـــل هـــذه المعادلة نحتاج أولاً لفتح الأقواس ثم نقوم بنقل الحدود لنحصل على:

$$5\ x-21+3\ x=13-9x$$
$$5\ x+3\ x+9\ x=13+21$$
$$17\ x=34$$
$$x=2$$

وهذا هو الحل الوحيد للمعادلة وهو أن تكون قيمة x مساوية إلى 2.

مثال 3

حل المعادلة التالية Solve the following equation:

$$\frac{y-2x}{D}=\frac{3(y-r)}{M}$$

a) for y and b) for x

فـــي البداية نحتاج لضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك للمقامات وهو DM لنحصل على:

$$M(y - 2x) = 3D(y - r)$$

$$My - 2Mx = 3Dy = 3Dr$$

لحــل الفــرع (a) من المثال نعتبر جميع الحروف ثوابت باستثناء y فيعامل كمتغير:

$$My - 3Dy = -3Dr + 2Mr$$

$$y(M - 3D) = 2Mr - 3Dr$$

$$y = \frac{2Mr - 3Dr}{M - 3D}$$

وهذا هو حل المعادلة للمتغير y.

أمـــا لحــل الفــرع (b) من المثال فنعتبر جميع الحروف ثوابت باستثناء x فيعامل كمتغير:

$$-2Mx = 3Dy - 3Dr - My$$

$$x = \frac{3Dy - 3Dr - My}{-2M}$$

وهذا هو حل المعادلة للمتغير x.

مثال

حل المعادلة لإيجاد قيمة x   :Solve for x

$$M = \frac{y}{1-x}$$

بضرب طرفي المعادلة بالحد $\frac{1-x}{M}$ نحصل على:

$$1-x = \frac{y}{M}$$