الفصل الثالث

3 المتباينات

الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الثالث
المتباينـــــــــات
Inequalities

3-1 مقدمة Introduction:

تـــم فـــي الفصـــل الأول التعـــرف علـــى الأعداد الحقيقية Real Numbers وخصـائصــــها العامـــة Their Properties وكـــذلك تم التعرف على معنى الأعداد الحقيقـــية Meaning of Reals. وفـــي الفصـــل الثاني تم التعرف على المعادلات الخطـــية والتـــربيعية لمتغيـــر واحد Linear and Quadratic Equations In One Variable وطـــرق الحل المناسبة لها Their Solving Methods. وفي هذا الفصل ســيتم التعـــرف على مفاهيم رياضية جديدة New Mathematical Concepts لها علاقة وثيقة بتعريف وخصائص ومعنى الأعداد الحقيقية ألا وهي المجموعات Sets والفتـــرات Intervals والمتبايـــنات الخطـــية والتربيعية بمتغير واحد Linear and Quadratic Inequalities In One Variable مـــن خـــلال التعرف على المتباينات Inequalities ورموزها واستخداماتها وتطبيقاتها الكثيرة. وكذلك سيتم حل كثير من الأمـــثلة Examples والأمـــثلة التطبيقـــية Applied Examples والتي تساعد في الاســـتفادة من مفهوم المتباينات لحل كثير من المشاكل التطبيقية. وسيحتوي الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

سيتضمن الفصل عدة مباحث وهي المبحث 2-3 المجموعات Sets ونظرية المجمـــوعات Set Theory والمـــبحث 3-3 الفتـــرات Intervals والمبحث 4-3 المتبايـــنات الخطية بمتغير واحد Linear Inequality In One Variable والمبحث 5-3 المتبايـــنات التربيعية بمتغير واحد Quadratic Inequality In One Variable وأخيراً المبحث 6-3 القيم المطلقة Absolute Values.

3-2 المجموعات Sets:
ونظرية المجموعات Set theory:

سنبدأ الحديث عن المجموعات Sets وطرق التعامل معها How to Deal with Sets والعلاقات التي تخصها Their Relationships بمحاولة تعريف المجموعة set أولاً كالآتي:

Set: Any well-defined collection of objects, These objects are called members or elements of that set.

These members or elements usually written within this kind of parentheses { } to designate a set using one of these letters A, B, C, D, … or if the number of sets are very big, then we usually use the letters A_1, A_2, A_3, … to designate our sets.

Examples of sets:

1) The set of all students in Math. course.
2) The football team in a university.
3) The set of all households in Amman.
4) The set of Integer numbers.

ويلاحظ من الأمثلة أعلاه أن المجموعة set هي تجمع من مفردات elements يفترض أن يكون لها صفة أو صفات مشتركة، فمجموعة فريق كرة القدم في الجامعة يتألف من عدد من الطلبة في الجامعة واللذين يلعبون ضمن نفس الفريق، أما مجموعة الأعداد الصحيحة فهي جميع الأعداد الصحيحة التي تم التعرف إليها سابقاً وهكذا لوصف بقية المجموعات ومماثلاتها.

وحيث أننا سندرس المجموعات ضمن مادة الرياضيات من خلال هذا الكتاب لذلك سيتم التركيز هنا لكتابة والتعامل مع مجموعات الأعداد.

أما عن طرق كتابة المجموعات Methods for writing sets:

1) Listing Method:

if it is possible to specify all elements of a set, then, we can use this method to describe the set by listing all the elements and enclosing the list inside braces.

The general form of listing the elements a_1 , a_2 , a_3, ... , a_n inside the set A, me have:

$A = \{a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n\}$

where, a_i , $i = 1 , 2 , 3 , \dots , n$ are called members or elements of the set.

We say that element a_i is a member of (belongs to) the set A, and write $a_i \in A$.

for example, set A consists of the elements 1 , 2 , 3. Then, we write $A = \{1 , 2 , 3\}$, and $1 \in A$, $2 \in A$, and $3 \in A$.

2) Rule Method:

if it is not possible or in which it would be inconvenient to list all members or elements of a particular set. Then, we can use what is called the Rule – Method. In which, we have to specify and state a rule for membership of the elements in the set.

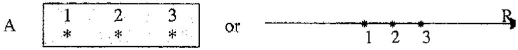
For example to write the set of real numbers between the two numbers a and b. Then, we use

$A = \{ x \mid a < x < b$, where a and b are reals$\}$

3) Venn – Diagram:

this method is to present the set by a graph, this graph may be a rectangular or a circle to designate the set and then specify all elements in side this set. Also, this graph maybe the real line and all sets can be presented by the specified points or intervals on this line.

The general form for Venn – Diagram may be:



سنقوم الآن وبعض استعراض طرق عرض المجموعات بالتعامل مع بعض الأمثلة المناسبة لتعريف وكتابة مجموعات الأعداد وكالآتي:

مثال 1

اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية Write the set of Natural Numbers

الأعـــداد الطبيعية وكما تم وصفها سابقاً هي الأعداد ... , 3 , 2 , 1، ويرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز N وستمثل المجموعة التالية:

$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

مثال 2

اكتب مجموعة الأعداد الصحيحة Write the set of Integer Numbers

الأعـــداد الصحيحة وكما تم وصفها سابقاً هي الأعداد الطبيعية N ومماثلاتها مـــن القـــيم الســـالبة ونقطة الصفر، ويرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز I وستمثل المجموعة التالية:

$I = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مثال 3

اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية Write the set of odd Naturals

هذه المجموعة هي جزء Subset من الأعداد الطبيعية السابقة الذكر N والتي لها خاصية أن تكون تلك الفردية منها وبالتالي فإن هذه المجموعة ولتكن A هي:

$A = \{ 1, 3, 5, 7, \dots \}$

مثال 4

اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية بين العددين 7 , 2

Write the set of Naturals between 2 and 7

لكتابة هذه المجموعة علينا تمييز أربعة حالات مختلفة كالآتي:

a) Both 2 and 7 are included in the set, say A, then:

$A = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

b) Both 2 and 7 are not included in the set, say B, then:

$B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

c) 2 is included in the set, say C, but 7 is not, then:

$C = \{ 2 , 3 , 4 5 , 6 \}$

d) 7 is included in the set, say D, but 2 is not, then:

$D = \{ 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}$

ويلاحـــظ مـــن خـــلال الحـــالات أعـــلاه أن هناك فرق واضح في وصف المجمـــوعات من خلال المفردات الداخلة فيها عن طريق وصف تلك المجموعات القائمة Listing the elements.

مثال 5

اكتب مجموعة الأعداد الحقيقية Write the set of Real Numbers

وكما تم وصف الأعداد الحقيقية سابقاً والتي لا يمكن تمييز مفرداتها وبالتالي فإننـــا لا نستطيع استخدام طريقة القائمة Listing والتي تم اعتمادها للأمثلة السابقة وذلـــك لصـــعوبة تحديد جميع العناصر الداخلة ضمن هذه المجموعة. ولذلك يجب علينا استخدام طريقة القاعدة Rule بالشكل التالي:

$R = \{ x \mid -\infty < x < \infty \}$

مثال 6

اكتب مجموعة الأعداد الحقيقية وارسمها بين العددين 2 و 7

Write and graph the set of Reals between 2 and 7

وكمـــا تلام ملاحظته ضمن مثال (4) السابق فإن هناك أربعة حالات مختلفة يمكن تمييزها كالآتي:

a) 2 and 7 are included in the set, say A_1 , then:

$A_1 = \{ x \mid 2 \leq x \leq 7 , x \text{ is real number} \}$

b) 2 and 7 not included in the set, say A_2 , then:

$A_2 = \{ x \mid 2 < x < 7 , x \text{ is real number} \}$

c) 2 is included in the set, say A_3 , but 7 is not, then:

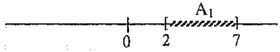
$A_3 = \{ x \mid 2 \le x < 7 \text{ , x is real number} \}$

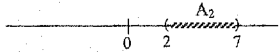
d) 7 is included in the set, say A_4 , but 2 is not, then:

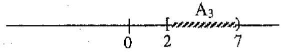
$A_4 = \{ x \mid 2 < x \le 7 \text{ , x is real number} \}$

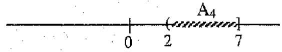
وهنا أيضاً يمكن ملاحظة أن الحالات الأربعة أعلاه تعطي مجموعات مختلفة.

أما عن رسم هذه المجموعات فلدينا:

a) 

b) 

c) 

d) 

سنقوم الآن بتعريف وتسمية عدد من المجموعات بأسماء محددة وأشكال معينة ورموز معتمدة كالآتي:

Identity Set: A set that contains only one element such as $A = \{1\}$, $B = \{0\}$, and $C = \{c\}$

Empty Set: A set that contains no elements, denoted by ϕ , which is also called the null set. Such as

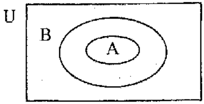
$A = \{ x \mid x \text{ is an integer between 7 and 8} \}$

$B = \{ x \mid x \text{ is a real number and } x^2 = -1 \}$

Universal Set: A set that contains all subsets and all elements of a given study, denoted by U or S. This set is also called a Sample Space, denoted by Ω.

Subset: A set A is said to be a subset of another set B if every element of A is also an element of B. In such a case, we write $A \subseteq B$.

This relationship can be presented by Venn-diagram as follows:



Note: From the above definitions, we can notice that:

1) Any set A is a subset of the Universal set U

That is , $A \subseteq U$

2) Any set A is a subset of itself.

That is , $A \subseteq A$

3) An empty set ϕ is a subset of any set A.

That is, $\phi \subseteq A$

Therefore, we can say, in general, $\phi \subseteq A \subseteq U$

مثال 7

اكتب المجموعات الجزئية للأعداد 1 , 2 , 3

Write all subsets of 1 , 2 , 3

وهنا يمكن القول بأن المجموعات الجزئية subsets والتي يمكن تكوينها من استخدام الأعداد 1 , 2 , 3 هي تبدأ من أصغر مجموعة وهي ϕ

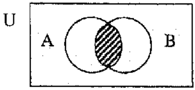
ثم نأخذ الأعداد كلاً على حدة لتكون المجموعات {1}، {2}، {3} ثم نأخذ الأعداد كل اثنين مع بعض لنحصل على المجموعات {1 ، 2}، {1 ، 3}، {2 ، 3} وأخيراً نأخذ الأعداد الثلاثة مع بعضها لتكون المجموعة الأكبر U = {1 ، 2 ، 3}

وبالتالي فإن المجموعات الجزئية هي:

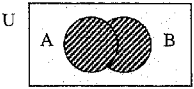
Subsets: ϕ , {1} , {2} , {3} , {1 , 2} , {1 , 3} , {2 , 3} , U

أما عن العلاقات التي يمكن ملاحظتها للمجموعات Relationships on Sets:

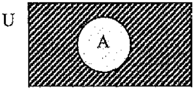
1) **Intersection:** The intersection of two sets A and B, denoted by $A \cap B$ is the set that contains all elements in A and in B presented as



2) **Union:** The union of two sets A and B, denoted by $A \cup B$ is the set that contains all elements that are in A or in B or in both presented as:

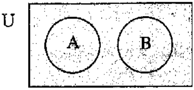


3) **Complement:** The complement of a set A, denoted by $\overline{A}$ or A^c, is the set of all elements that are in U, but not is A presented as:

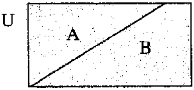


4) **Equal:** Two sets A and B are said to be equal if $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$. In such a case we write $A = B$.

5) **Mutually Exclusive:** Two sets A and B are said to be mutually exclusive (or disjoint) if and only if $A \cap B = \phi$ presented as:



or



3

ويلاحـظ أن الفـرق بـين الشكلين أن $B \cup A = U$ للحالة التي في الجهة اليمنى، أما الأخرى فليست كذلك.

باسـتخدام العلاقـات السـابقة التعريف هناك بعض العلاقات التي نستطيع إيجادها أو تحديدها من ذلك وهي كالآتي:

1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

وتسمى خاصية التبادل Commutative laws

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

وتسمى خاصية التشارك Associative laws

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

وتسمى خاصية التوزيع Distributive laws

5) $A \cup U = U$, $A \cup \phi = A$

$A \cap U = A$, $A \cap \phi = \phi$

وتسمى خاصية الوحدة Identity laws

6) $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \phi$

وتسمى خاصية المتممة Complement laws

7) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

وتسمى قوانين دي مورغان Demorgan's laws

أمـا عـن بعـض الأمثلة التي تستخدم الخصائص والتسميات أعلاه فيمكن عرضها كالآتي: