مثال 8

افترض أن U = I وافترض المجموعات الجزئية التالية:

A the set of integers greater than or equal –2 and less than 5.
B the set of integers greater than or equal 0.
N the Natural set.

حدد العلاقات وأوجد المجموعات التي يمكن الحصول عليها من المجموعات أعلاه.

$U = I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

في هذا المثال لدينا المجموعات التالية:

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

ونلاحظ هنا أن $N \subset B$ وهذا يعني $N \cup B = B$ و $N \cap B = N$

وكذلك لدينا ما يلي من العلاقات:

$A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$A \cap N = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup N = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$A \cup B = A \cup N$

$A^c = \{\ldots, -4, -3, 5, 6, \ldots\}$

$B^c = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

مثال 9

افترض أن U تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية U = R

وافترض أن:

$A = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$

$B = \{x \mid 1.5 \le x < 3\}$

$C = \{x \mid 1 \le x \le 4\}$

$D = \{x \mid x \geq 4\}$

حدد العلاقات وأوجد المجموعات التي يمكن الحصول عليها من المجموعات أعلاه.

نلاحـــظ هنا أن $A \subset C$ وهذا يعني أن $A \cup C = C$ و $A \cap C = A$ ونلاحظ أيضـــاً أن $A \cap D = \phi$ وهـــذا يعنـــي أن A , D متنافيتان وكذلك لدينا ما يلي من العلاقات:

$A \cap B = \{ x \mid 1.5 \leq x \leq 2 \}$

$A \cup B = \{ x \mid 1 \leq x < 3 \}$

$C \cap D = \{ x \mid x = 4 \} = \{4\}$

$C \cup D = \{ x \mid 1 \leq x < \infty \}$

$A \cup D = \{ x \mid 1 \leq x \leq 2 \} \cup \{ x \mid 1 \geq 4 \}$

$A^c = \{ x \mid -\infty < x < 1 \} \cup \{x \mid 2 < x < \infty \}$

$B^c = \{ x \mid -\infty < x < 1.5 \} \cup \{ x \mid 3 \leq x < \infty \}$

$C^c = \{ x \mid -\infty < x < 1 \} \cup \{ x \mid 4 < x < \infty \}$

$D^c = \{ x \mid x < 4 \}$

مثال 10

أوجد العلاقات التي تربط بين المجموعات التالية:

Find all relationships between the following sets

a) Let $A = \{ 1 , 3 , 5 \}$ and $B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

we notice here that $A \subseteq B$

b) Let $A = \{-2 , +2\}$ and $B = \{ x \mid x^2 = 4\}$

solving the quadratic equation $x^2 = 4$ gives the solution $x = \mp 2$. Therefore, $A = B$

3-3 الفترات Intervals:

كمـا رأيـنا سـابقاً وعند الحديث عن خاصية الترتيب لمجموعات الأعداد وبالأخص الأعداد الحقيقية Properties in Real Numbers هي:

If a and b are real numbers, such that a is less than b. Then, we write $a < b$ which is called an inequality.

وفـي هذا المبحث سنركز على وصف هذه المتباينة ومماثلاتها بشكل فترات Intervals كالآتي:

a) If a and b are real numbers, such that $a < b$. Then, the open interval from a to b, denoted by (a , b), is the set of all real numbers x that lie between a and b. Thus,

$$(a , b) = \{x \mid x \text{ is real number and } a < x < b\}$$

b) Similarly, the closed interval from a to b, denoted by $[a , b]$, is the set of all real numbers that lie between a and b together with a and b included. Thus,

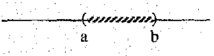
$$[a , b] = \{x \mid x \text{ is real number and } a \le x \le b\}$$

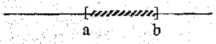
c) Semi closed or Semi open intervals are defined as follows:

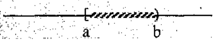
$$[a , b) = \{x \mid x \text{ is real number and } a \le x < b\}$$

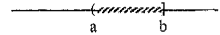
$$(a , b] = \{x \mid \text{ is real number and } a < x \le b\}$$

لجمـيع الفترات الأربعة (a , b) ، $[a , b]$ ، $(a , b]$ و $[a , b)$ الحدان b , a يعرفان على أنهما حدا الفترة endpoints بحيث أن الفترة المفتوحة لا تحتوي على الحد المفتوح فيه الفترة عندها أما الفترة المغلقة فتحتوي على الحد المغلق فيه الفترة عنده. ويمكن عرض الشكل الذي يمثل كل فترة كالآتي:

a) (a , b) 

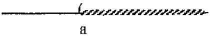
b) [a , b] 

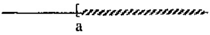
c) [a , b) 

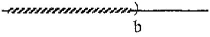
(a , b] 

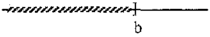
ويلاحـــظ هـــنا مـــدى التشـــابه الكبيـــر بين قراءة ورسم الفترات وتعريف المجموعات كما تم في المبحث السابق.

ويجب الإشارة هنا إلى أنه هناك بعض الفترات الغير محدودة Unbounded intervals لتعنـــي جميع الفترات من الشكل أن تبدأ بقيمة معينة وتكون مفتوحة إلى ∞+ أو أن تبدأ من ∞- وتنتهي بقيمة معينة. ومن أشكال هذه الفترات التالي:

a) $(a , \infty) = \{x : x > a\}$ 

b) $[a , \infty) = \{x : x \geq a\}$ 

c) $[-\infty , b) = \{x : x < b\}$ 

d) $(-\infty , b] = \{x : x \leq b\}$ 

وفـــي نهاية المبحث سنعرض بعض الأمثلة المناسبة لقراءة الفترات ورسمها وعلاقاتها كالآتي:

مثال 11

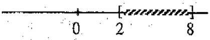
اكتب التالي بشكل فترات write the following in the interval form:

a) $2 \leq x \leq 8$

الفترة التي تمثل هذه القيم هي الفترة المغلقة بالشكل:

$[2 , 8] = \{x : 2 \leq x \leq 8\}$

ورسمها بالشكل:

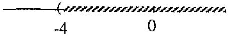


b) $x > -4$

هـذه الفتـرة المفـتوحة تمثل جميع القيم الحقيقية والتي تبدأ من القيمة 4− بالشكل:

$$(-4\,,\infty) = \{x : -4 < x < \infty\} = \{x : x > -4\}$$

ورسمها بالشكل:



3-4 المتباينات الخطية بمتغير واحد:

Linear Inequalities in one variable

بالـرجوع لتعريف المعادلة الخطية بمتغير واحد Linear equation in one variable، وكما رأينا سابقاً، يمكن تعريف المتباينة الخطية بمتغير واحد ضمن هذا المبحث حيث أن الشكل العام للمتباينة بمتغير واحد هو أحد الحالات التالية:

$$ax + b < 0 \qquad \text{or} \qquad ax + b > 0$$

$$ax + b \le 0 \qquad \text{or} \qquad ax + b \ge 0$$

where $a \neq 0$, a and b are real numbers.

وكمـا تم تعريف حل المعادلة الخطية يتم تعريف حل المتباينة الخطية بأحد الأشكال التالية:

General form for the solution of Linear inequality in one variable:

$$x < -\frac{b}{a} \qquad \text{or} \qquad x > -\frac{b}{a}$$

$$x \le -\frac{b}{a} \qquad \text{or} \qquad x \ge -\frac{b}{a}$$

ولا بـد مـن الإشارة هنا إلى الرجوع للقوانين التي سبق ذكرها في خاصية التـرتيب المـتعلقة بمجموعة الأعداد الحقيقية عند حل الأمثلة والتي سيتم عرضها كالآتي:

مثال 12

أوجد حل المتباينات التالية:

Find all real numbers that satisfy the inequality

a) $2x \geq 1$

حل هذه المتباينة هو $x \geq \frac{1}{2}$ وذلك بقسمة طرفي المتباينة على العدد 2

b) $3x - 5 < 10$

وحل هذه المتباينة يتم بإضافة العدد 5 لطرفي المتباينة لنحصل على:

$3x < 15$

ومن ثم نقسم طرفي المتباينة على العدد 3 لنحصل على الحل $x < 5$

c) $3 - x \leq 2x + 4$

لحل هذه المتباينة نضيف x لطرفي المتباينة لنحصل على:

$3 \leq 3x + 4$

ثم نقوم بطرح العدد 4 من طرفي المتباينة لنحصل على:

$-1 \leq 3x$

وأخيراً نقوم بقسمة طرفي المتباينة على العدد 3 لنحصل على الحل:

$-\frac{1}{3} \leq x$ or $x \geq -\frac{1}{3}$

مثال 13

أوجد حل المتباينات التالية Solve the following inequalities:

a) $5 - 2x < 7$

حل هذه المتباينة يتم بطرح العدد 5 من طرفي المتباينة لنحصل على:

$-2x < 2$

وعند قسمة طرفي المتباينة على العدد (2−) لإيجاد الحل، علينا مراعاة أن القسمة على عدد سالب يعكس شكل المتباينة وبالتالي نحصل على:

$x > -1$

b) $5x - \frac{1}{2} < x + 3$

يمكــن حل هذه المتباينة بعدة طرق منها يمكن ضرب طرفي المتباينة بالعدد 2 وذلك للتخلص من العدد $\frac{1}{2}$ ولتسهيل العمليات الحسابية فنحصل على:

$10x - 1 < 2x + 6$

وبطــرح 2x مــن طرفي المتباينة وكذلك بإضافة العدد 1 للطرفين نحصل على:

$8x < 7$

وأخيراً وعند قسمة طرفي المتباينة على العدد 8 نحصل على الحل وهو:

$x < \frac{7}{8}$

مثال 14

حل المتباينة المزدوجة التالية:

Solve the double inequality for x

$5 < 2x + 7 < 13$

في هذه المتباينة المزدوجة يظهر المتغير x في وسط الشكل وبالتالي فإن حل هذه المتباينة المزدوجة سيتم بحل المتباينتين الناتجتين معاً كالآتي:

نبدأ بطرح العدد 7 من جميع أطراف هذه المتباينة لنحصل على:

$-2 < 2x < 6$

وبالقسمة على العدد 2 نحصل على الحل وهو:

$-1 < x < 3$

مثال 15

حل المتباينة المزدوجة التالية:

Solve the double inequality

$2x + 1 < 3 - x < 2x + 5$

لحــل هــذا الــنوع مــن المتباينات المزدوجة علينا أولاً قراءتها على شكل متباينين كالآتي:

المتباينة الأولى $2x + 1 < 3 - x$

المتباينة الثانية $3 - x < 2x + 5$

ثم نقوم بحل كل منها على حدة كالآتي:

a) $3x + 1 < 3 - x$

$4x < 2$

$x < \frac{1}{2}$

b) $3 - x < 2x + 5$

$-3x < 2$

$x > -\frac{2}{3}$

وبالتالي فإن حل المتباينة المزدوجة هو:

$x < \frac{1}{2}$ and $x > -\frac{2}{3}$

ويمكن كتابة الحل بالشكل النهائي التالي:

$$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$$

أما عن تطبيقات المتباينات فكثيرة منها التطبيقات التي تخص تحديد الأرباح Manufacturer's profit والــذي ســيعرض فــي المثال (16) التالي، وتطبيقات الاســتثمار Investment والذي سيتم في المثال (17) التالي وكذلك تطبيقات اتخاذ

القـــرارات بشـــأن الإنتاجـــية Production Decision والذي سيتم في المثال (18) التالي:

مثال 16

مصـــنع للأجهـــزة الإلكترونية يبيع الأجهزة المنتجة لديه بسعر 100 دينار للجهـــاز الواحد، علماً بأن التكاليف الأسبوعية هي 10000 دينار وأن تكلفة الجهاز الـــواحد هـــو 80 ديـــناراً. أوجد عدد الأجهزة الإلكترونية التي باستطاعة المصنع صنعها وبيعها أسبوعياً لتحقيق ربحاً أسبوعياً 1000 دينار على الأقل.

The manufacturer of electronic appliances can sell all he can produce at the selling price of 100 J.D. each. It costs him 80 J.D. to produce each item, and he has overhead costs of 10000 J.D. per week. Find the number of units he should produce and sell to make a profit of at least 1000 J.D. per week.

لنفرض أن عدد الأجهزة المنتجة والمباعة لهذا المصنع هي x وبالتالي فإن:

الكلفة Cost = 10000 + 80 x

العائد Revenue = 100 x

الربح Profit = Revenue – Cost

$$P = 100x - (10000 + 80x)$$

$$P = 20x - 10000$$

ولـــذلك فـــإن قيمة x ، أي عدد الأجهزة المنتجة والمباعة والتي تحقق ربحاً على الأقل 1000 دينار أسبوعياً هي قيمة x التي تحقق التالي:

$$P \geq 1000$$

ويعني ذلك:

$$20x - 10000 \geq 1000$$

ويمكن حل هذه المتباينة بإضافة 10000 لطرفي المتباينة ثم القسمة على 20 لنحصل على:

$$x \geq \frac{9000}{20}$$

أي أن:

$$x \geq 450$$

ويعنـــي ذلــك أن على المصنع أن ينتج على الأقل 450 جهاز لتحقيق على الأقل 1000 ديناراً كربح أسبوعي.

مثال 17

يســـتطيع أحـــد رجـــال الأعمال استثمار 7000 ديناراً بحيث يضع قسم منه بمعدل ربح 7% والباقي بمعدل رقم 10%. ما هي الكمية القصوى التي يجب عليه أن يستثمرها بالمعدل 7% لتحقيق على الأقل 500 دينار كربح سنوي.

A Business man has 7000 J.D. to invest. He wants to invest some of it at 7% and the rest at 10%. What is the maximum amount he should invest at 7% if he wants an annual invest income of at least 500 J.D. per year.

لنفرض أن الكمية التي سيضعها بمعدل ربح 7% هو x وبالتالي فإن الكمية التـــي سيضعها بمعدل ربح 10% هو (7000-x). ولتحقيق ربحاً على الأقل 500 دينار لدينا المتباينة التالية:

$$7\% \, x + 10\% \, (7000 - x) \geq 500$$

أي أن:

$$0.07 \, x + 700 - 0.10 \, x \geq 500$$

أي أن:

$$-0.17 \, x \geq -200$$

وبالتالي فإن:

$x \leq \frac{200}{0.17}$ ويعني ذلك أن $x \leq 1176.47$

وبالتالـــي فـــإن رجل الأعمال يمكن أن يضع 1176.47 ديناراً كحد أقصى بالمعدل 7% لتحقيق الربح المعين.

مثال 18

يود مدير مصنع اتخاذ القرار بشأن التصنيع من عدمه لأحد الأجهزة الواجب تهيئتها لإدارة مصنعه، فإذا أراد شراء هذا الجهاز من الخارج فإن تكلفة الجهاز الواحد 1.5 ديناراً أما إذا أراد تصنيعه في المصنع فإنه سيزيد من الكلفة الكلية بالمقدار 500 ديناراً شهرياً علماً أن تكلفة الجهاز الواحد هو 1 دينار. فما هو عدد الأجهزة التي عليه تهيئتها شهرياً ليستطيع اتخاذ القرار بشأن تصنيع الأجهزة داخل المصنع.

The management of a manufacturing firm wants to decide whether they should manufacture their own items, which the firm has been purchasing from outside suppliers at 1.5 J.D. each. Manufacturing the item will increase the overhead costs of the firm by 500 J.D. per month, and the cost of the item will be 1 J.D. How many items would have to be used by the firm each month to justify a decision to manufacture their own items.

لأجل اتخاذ القرار بشأن التصنيع داخل المصنع يجب أن تكون كلفة الشراء أكبر من كلفة التصنيع كالآتي:

Cost of purchasing	>	Cost of manufacturing
$1.5x$	>	$x + 500$
$0.5x$	>	500
X	>	1000

لذلك فإذا احتاج المصنع على الأقل 1000 جهاز شهرياً على صاحب المصنع تصنيعها في الداخل.

3-5 المتباينات التربيعية بمتغير واحد:
Quadratic Inequalities in one variable

وكما تم تعريف المعادلة التربيعية بمتغير واحد، سابقاً، بالشكل العام التالي:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

where $a \neq 0$, a , b , and c are real constants

يمكن تعريف المتباينة التربيعية بمتغير واحد بأحد الأشكال التالية:

$$a x^2 + b x + c > 0$$

$$a x^2 + b x + c \geq 0$$

where $a \neq 0$. a , b , and c are real constants

وبـــنفس الأسلوب الذي تم اتباعه لحل المعادلات التربيعية، كما ورد سابقاً، نستطيع حل المتباينات التربيعية والأمثلة التالية تشير إلى المعنى كالآتي:

مثال 19

حل المتباينة التالية Solve the following inequality:

$$x^2 - 3x > 0$$

سنقوم بحل هذه المتباينة أولاً عن طريق تحويلها إلى معادلة لنحصل على:

$$x^2 - 3x = 0$$

وباستخراج الحد المشترك x نحصل على:

$$x(x - 3) = 0$$

وذلك يعني أن أصفار المعادلة التربيعية هما $x = 0$ و $x - 3 = 0$ والذي يعني أن $x = 3$

نقوم الآن برسم هاتين النقطتين على خط الأعداد الحقيقية وتحديد الإشارات كالآتي:

إشارة x   − − − − | − − − − | + + + +
-3   0

إشارة x - 3   − − − − | + + + + | + + + +
-3   0

ولتحديد الإشارة الموجبة للمتباينة $x^2 - 3 > 0$ والذي يمثل الحل فإن الحل هو:

$$x < -3 \qquad \text{or} \qquad x > 0$$

مثال 20

حل المتباينة التربيعية التالية Solve the following inequality:

$$x^2 + 3x - 4 \le 0$$

وبنفس الأسلوب المتبع في المثال السابق نحول المتباينة إلى معادلة تربيعية كالآتي:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

وباستخدام أسلوب التحليل إلى العوامل نحصل على:

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

وعند حل كل من حدود المعادلة نحصل على الحل:

$$x = -4 \qquad \text{or} \qquad x = 1$$

ولتحديد الإشارة لدينا:

إشارة x - 1	− − − −	− − − −	+ + + +
	−4	0 1	
إشارة x + 4	− − − −	+ + + +	+ + + +
	−4	0 1	

وبالتالي فإن حل المتباينة التربيعية سيكون عندما $-4 \le x \le 1$

3-6 القيم المطلقة Absolute values:

If x is a real number, then the absolute value of x, denoted by |x| , is defined by:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

for example: |2| = 2 , |-3| = -(-3) = 3 , and |0| = 0.

وبالتالي فإنه من الواضح أن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هو عدد حقيقي موجب nonnegative real numbers ويعني ذلك أن $|x| \geq 0$.

وهناك بعض العلاقات الواجب معرفتها قبل الدخول في حساب القيم المطلقة والتي سيتم عرضها كالآتي (بدون براهين لأنها خارجة عن أهداف هذا الكتاب):

1) If |a| = b , where $b \geq 0$ then either
a = b or a = -b

2) If |a| = |b| , then either a = b or a = -b

3) $|x| = |-x| = \sqrt{x^2}$

4) |x| < a if and only if –a < x < a

5) |x| > a if and only if either x > a or x < -a

6) |a b| = |a| . |b|

7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

والآن سنقوم بعرض بعض الأمثلة للتعامل مع مفهوم القيم المطلقة وباتباع العلاقات التي ورد ذكرها أعلاه لحل المعادلات والمتباينات والمتضمنة لمفهوم القيمة المطلقة كالآتي:

3

مثال 21

أوجد قيمة x لكل مما يأتي   :Solve for x

a) $|2x - 4| = 6$

بالرجوع لتعريف القيمة المطلقة واستخدام العلاقة رقم (1) أعلاه نجد أن لدينا:

$2x - 4 = 6$ or $2x - 4 = -6$

وبحل كل واحدة من هاتين المعادلتين بالطرق السابق ذكرها نحصل على:

$x = 5$ or $x = -1$

b) $|2x + 5| = |3x - 1|$

وبالرجوع لتعريف القيمة المطلقة واستخدام العلاقة رقم (2) أعلاه نجد أن لدينا:

$2x + 5 = 3x - 1$ or $2x + 5 = -(3x - 1)$

$2x + 5 = 3x - 1$ or $2x + 5 = -3x + 1$

وبحل كل واحد من هاتين المعادلتين بالطرق السابقة نحصل على:

$x = 4$ or $x = \frac{-4}{5}$

مثال 22

عبر عن ما يلي باستخدام القيم المطلقة:

Express the following using absolute values

a) x is at distance of 2 units from 5: $|x - 5| = 2$

b) x is at most 3 units from 4: $|x - 4| \leq 3$

c) x is at least 5 units from 4: $|x - 4| \geq 5$

d) x is greater than 8 units from 3: $|x - 3| > 8$

e) x is within a units from c: $|x - c| \leq a$