الفصل الرابع

4

الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية

الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الرابع
الخطوط المستقيمة وأنظمة المعادلات الخطية
Straight lines and Systems of Linear Equations

4-1 مقدمة Introduction:

تم في الفصل الثاني دراسة المعادلات الخطية Linear Equations بجميع تفاصيلها، وفي هذا الفصل سيتم التعامل مع الخطوط المستقيمة Straight Lines والتي تمثل المعادلات الخطية ورسوماتها التي تتضح بكونها خطوط مستقيمة. وكذلك سيتم التعرف في هذا الفصل على أنظمة المعادلات الخطية Systems of Linear Equations والذي يمثل معادلة خطية أو أكثر One Linear Equation or More. وكذلك سيتم التعرف في هذا الفصل على كثير من المفاهيم الرياضية Mathematical Concepts المرادفة لهذه الدراسة ومنها الإحداثيات الكارتيزية Cartesian Coordinates، المسافة بين نقطتين Distances، ميل الخط المستقيم Slope وكذلك على طريقة رسم المعادلات الخطية Graph of Linear Equations.

وسيتضمن الفصل أيضاً على كثير من الأمثلة Examples وكثير من الأمثلة التطبيقية Applied Examples لتوضيح أهمية مفاهيم هذا الفصل في الجانب التطبيقي وكذلك سيتضمن الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

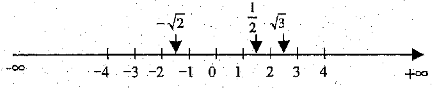
سيتضمن الفصل عدة مباحث هي المبحث 4-2 نظام المحاور الكارتيزية Cartesian Coordinates System والمبحث 4-3 صيغة المسافة The Distance Formula والمبحث 4-4 رسم المعادلات الخطية لمتغيرين Graphing Linear Equations in two Variables والمبحث 4-5 الميل The Slope والمبحث 4-6 صيغة الميل والنقطة Point-Slope Formula والمبحث 4-7 المعادلات الخطية أو المستقيمات الأفقية والعمودية Horizontal and Vertical Lines والمبحث 4-8 الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة Parallel and Perpendicular Lines والمبحث 4-9 تطبيقات ورسم المعادلات الخطية Applications and Graphing

والمبحث 10-4 أنظمة المعادلات الخطية لمتغيرين linear equations Systems of linear equations in two variables، وأخيراً المبحث 11-4 أنظمة المعادلات الخطية لثلاث متغيرات System of linear equations in three variables.

4-2 نظام المحاور الكارتيزية Cartesian coordinates system:

يعتبر نظام الأعداد الحقيقية هو القاعدة الأساسية لهذا الفصل ولهذا الكتاب بصورة عامة في نفس الوقت، حيث أن هذا النظام The system of real numbers هو مجموعة من الأعداد الحقيقية مع بعض العمليات الجبرية من جمع وطرح وضرب وقسمة addition, subtraction, multiplication and division للأعداد الحقيقية كما تم الحديث عنه وبكافة التفاصيل في الفصل الأول.

ويكون من المفيد والنافع لعرض مجموعة الأعداد الحقيقية وكما تم في الفصل الأول من خلال معنى الأعداد الحقيقية أن مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل خط line من القيم الحقيقية ويسمى هذا الخط بالخط الكارتيزي Cartesian coordinate أو أن تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على شكل رسم بياني يمثل خط مستقيم للأرقام line numbers. ويمكن تحديد نقطة point على هذا المستقيم بشكل عشوائي لتمثل الرقم صفر zero point وتمثل هذه النقطة نقطة البداية أو الأصل origin، ومن هذه النقطة نأخذ على الاتجاهين الأيمن والأيسر مسافات محددة ومتساوية لتحديد وحدات القياس unit of measurements ونضع الأعداد الحقيقية ونبدأ على جهة اليمين من الصفر right of zero الأعداد الموجبة من 1 صعوداً إلى $+\infty$ والأعداد السالبة على جهة اليسار من الصفر left of zero وأيضاً نبدأ من -1 نزولاً إلى $-\infty$، وكما هو واضح من الشكل رقم (1) التالي:



الشكل رقم (1)

رسم خط الأعداد الحقيقية

وبالتالي يمكن تلخيص ما ورد أعلاه في التعريف التالي:

الخــط الكارتيزي Cartesian line: هو الخط من الأعداد الحقيقية والمتمثل بــنقطة الأصــل origin واتجاه موجب positive direction ووحدة قياس unit of measurements، بحــيث أن هــناك علاقة واحد لواحد one-to-one بين مجموعة الأعداد الحقيقية set of real numbers والنقاط التي تقع على الخط الكارتيزي أو ما يسمى بخط الأعداد الحقيقية real line.

أما عندما يكون لدينا محورين متعامدين perpendicular lines أحدهما أفقي horizontal line والآخر عمودي vertical line يتقاطعان عند نقطة الأصل origin عــندئذٍ يمثل تمثيل النقاط في مستوى plane والذي يسمى نظام المحاور الكارتيزية Cartesian coordinate system.

يســمى المســتقيم الأفقــي باســم الإحداثي السيني x-axis ويسمى المستقيم العمــودي باســم الإحداثــي الصادي y-axis وهذان المستقيمان يتقاطعان في نقطة تسمى بنقطة الأصل origin وهي النقطة (0,0)، حيث أن الإحداثي السيني لها صفر والإحداثي الصادي أيضاً صفر.

ولــتحديد مقــياس الرسم للنظام ترتب القيم الموجبة على يمين نقطة الأصل والقيم السالبة على يسار نقطة الأصل بالنسبة للإحداثي الأفقي x-axis

Positive numbers to the right of the origin and negative numbers to the left of the origin.

أمــا بالنســبة للإحداثي الصادي y-axis فإن القيم الموجبة تكون أعلى نقطة الأصل أما القيم السالبة فتكون أسفل نقطة الأصل

Positive numbers lying above the origin and negative numbers lying below the origin.

أمــا عن مقاييس الرسم unit of measurements فلا تحتاج أن تكون نفسها وقد تم عمل ذلك فعلاً في التطبيقات المختلفة حيث يمكن عرض كميات مختلفة لكل محــور فمثلاً عندما يمثل المحور السيني x عدد الحاسبات المباعة ويمثل المحور

الصـــادي y المبالغ العائدة من البيع فإن مقاييس الرسم يفضل أن تكون مختلفة في وحـدة القـياس different number of scales وبالتالـي يمكـن تلخيص ما سبق بالتعريف التالي:

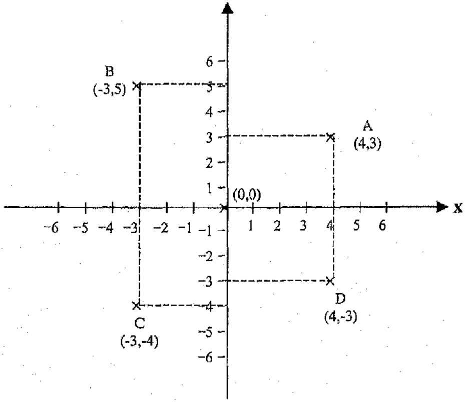
الخطـوط الكارتيـزية Cartesian coordinates: أو مـا يسمى بالمستوى الكارتيـزي Cartesian plane هـو زوج من المحاور المتعامدة في نقطة الأصل (0,0) ويسميان بالإحداثي السيني x-axis والإحداثي الصادي y-axis.

ويمكن رسم النقاط points والمعادلات equations والدوال functions عادة على هذه الإحداثيات كالآتي:

الـنقطة point فـي المسـتوى plane يمكن عرضها وتمثيلها بشكل أحادي uniquely فـي أي مكان على هذا المستوى بواسطة الأزواج المرتبة order pairs مـن الأعداد. والزوج (x , y) حيث أن x يمثل الرقم الأول first number و y يمثل الثانـي second number وهمـا الإحداثي السيني x والإحداثي الصادي y للنقطة (x , y) والتي يمكن رسمها على المستوى xy-plane .

الشكل رقم (2) التالي يمثل المستوى xy-plane ورسم النقاط التالية: النقطة A بالإحداثـيات (3 , 4) والـنقطة B بالإحداثيات (5 , 3-) والنقطة C بالإحداثيات (4- , 3-) والنقطة D بالإحداثيات (3- , 4-) وكذلك نقطة الأصل (0 , 0).

هذا الشكل يمثل المحورين المتعامدين في نقطة الأصل (0 , 0) حيث يقسمان المسـتوى xy-plane إلى أربعة أجزاء متساوية هي الربع الأول والذي يمثل جميع النقاط بالقيم الموجبة لــx والقيم الموجبة لــy والربع الثاني الذي يمثل جميع النقاط بالقيم السالبة لــx والقيم الموجبة لــy والربع الثالث والذي يمثل جميع النقاط بالقيم السالبة لــx والقيم السالبة لــy وأخيراً الربع الرابع والذي يمثل جميع النقاط بالقيم الموجبة لــx والقيم السالبة لــy.



الشكل رقم (2)

رسم النقاط D, C, B, A على المستوى xy-plane

ويلاحظ أنه وبصورة عامة لا توجد نقطتين على المستوى متساويتين، حيث أن $(x,y) \neq (y,x)$ ويمكن ملاحظة ذلك وبوضوح من النقطتين D,A.

4.3 صيغة المسافة The Distance Formula:

إحدى استخدامات نظام المحاور الكارتيزية Cartesian Coordinate System والمهمة هو إيجاد المسافة بين نقطتين على المستوى The distance between any two points in the plane من خلال الإحداثيات coordinates الخاصة بهذه النقاط.

بافتراض أن النقطتين هما (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) فإن المسافة بين هاتين النقطتين Distance between these two points، ويرمز لها بالرمز d، يمكن إيجادها وبواسطة نظرية بيثكورن Pythagorean theorem بالشكل التالي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وسيتم تطبيق هذه الطريقة لإيجاد المسافة بين نقطتين كما في الأمثلة التالية:

مثال 1

أوجد المسافة بين النقطتين C, A من الشكل السابق:

Find the distance between the points (4,3) and (-3,-4):

using the distance formula لإيجاد المسافة نستخدم العلاقة أعلاه

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3-4)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$$

مثال 2

أوجد المسافة بين النقطتين B, A

Find the distance between the points (-6,-6) and (6,6)

بتطبيق صيغة المسافة the distance formula لدينا:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-6-6)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2} = \sqrt{144+144} = \sqrt{288}$$

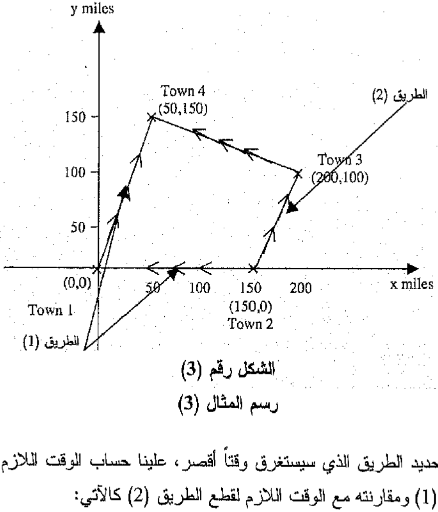
$$d = 16.97056$$

مثال 3

أربعة مدن 1، 2، 3، 4 كما في الشكل رقم (3) التالي. يراد ربط المدينتين 2 و 4 بطـريقين سريعين. الطريق الأول (1) ينطلق من المدينة 2 إلى المدينة 4 مـن خلال المدينة 1 حيث أن الطريق الذي يربط المدينة 1 بالمدينة 4 هو طريق سـاحلي. أمـا الطـريق الثاني (2) فينطلق من المدينة 2 إلى المدينة 4 من خلال المديـنة 3 حيث أنه يتضمن طريق جبلي بين المدينتين 3 و4. رغب أحد السائقين الذهاب من المدينة 2 إلى المدينة 4 بمعدل سرعة 60 ميل/ساعة باستخدام الطريق

الأول (1) وبمعـــدل ســـرعة 50 مـــيل/ساعة باستخدام الطريق الثاني (2). ما هو الطريق الذي يسلكه للوصول بوقت أقل.

Towns 1, 2, 3, and 4 are located as in figure (3). Two highways connect towns and 4. Highway (1), from town 2 to town 4 via town 1, includes coastal highway joining towns 1 and 4. And highway (2), from town 2 to town 4, includes a mountain highway joining towns 3 and 4. Driver wishes to drive from town 2 to town 4 and can drive with average of 60 mph using highway (1) and 50 mph using highway (2). Which road should he take minimizing the time spent for driving.



الشكل رقم (3)

رسم المثال (3)

لتحديد الطريق الذي سيستغرق وقتاً أقصر، علينا حساب الوقت اللازم لقطع الطريق (1) ومقارنته مع الوقت اللازم لقطع الطريق (2) كالآتي:

1) إذا ســـلك الســـائق الطـــريق (1) فالمسافة d_1 المقطوعة بتطبيق صيغة المسافة هي:

$$d_1 = \sqrt{(150-0)^2+(0-0)^2}+\sqrt{(50-0)^2+(150-0)^2}$$

$$= \sqrt{(150)^2+0^2}+\sqrt{(50)^2+(150)^2}$$

$$= \sqrt{(150)^2}+\sqrt{2500+22500}$$

$$= 150+\sqrt{25000}$$

$$= 150 + 158.11383 = 308.11388$$

وبالتالي فإن الوقت Time اللازمة لقطع هذه المسافة هو T_1 كالآتي:

$$\text{الزمن } (T_1) = \frac{d_1 \text{ (المسافة بالأميال)}}{S_1 \text{ (السرعة بالساعة/ ميل)}} = \frac{308.11388}{60} = 5.14$$

ويعني هذا أن الوقت اللازم لهذه الرحلة هو 5.14 ساعة

2) أمـــا إذا سلك السائق الطريق (2) فالمسافة d_2 المقطوعة بتطبيق صيغة المسافة هي:

$$d_2 = \sqrt{(200-150)^2+(100-0)^2}+\sqrt{(50-200)^2+(150-100)^2}$$

$$= \sqrt{(50)^2+(100)^2}+\sqrt{(-150)^2+(50)^2}$$

$$= \sqrt{2500+10000}+\sqrt{22500+2500}$$

$$= \sqrt{12500}+\sqrt{25000}$$

$$= 111.8034 + 158.114 = 269.9174 \approx 270$$

وبالتالي فإن الوقت Time اللازم لقطع هذه المسافة هو T_2 كالآتي:

$$\text{الزمن } (T_2) = \frac{d_2 \text{ (المسافة بالأميال)}}{S_2 \text{ (السرعة بالساعة/ ميل)}} = \frac{270}{50} = 5.4$$

ويعني هذا أن الوقت اللازم لهذه الرحلة هو 5.40 ساعة.

وبمقارنة الوقتين نقول بأن على السائق أن يسلك الطريق (1) بالوقت 5.14 ساعة وهو الوقت الأفضل والأقل.

4-4 رسم المعادلات الخطية لمتغيرين:
Graphing linear equations in two variables

المعادلـــة الخطية لمتغيرين هي المعادلة التي يمكن تكتب بالشكل أو الصيغة التالية:

$$Ax + By = C$$

حـــيث أن A , B , C هـــي ثـــوابت حقيقية ولكن ليس A , B كليهما صفر، وتسمى هذه الصيغة بالصيغة القياسية Standard form.

على سبيل المثال لدينا المعادلات التالية:

$$5x - 4y = 10 \ , \ y = 3x - 3 \ , \ y = -4 \ , \ x = 6$$

وجمـــيعها معـــادلات خطية بمتغيرين، حيث أننا نستطيع تحويل جميع هذه المعادلات من أشكالها العادية إلى الشكل أو المعادلة القياسية standard form.

أمـــا حل المعادلة بمتغيرين فهو الأزواج المرتبة ordered pairs من الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلة satisfy the equation.

فعلى سبيل المثال الزوج المرتب أو النقطة (0 , -3) هو الحل للمعادلة:

$-3x + 4y = -12$ وذلك لأن: $-3x + 4y = -3\ (0) + 4\ (-3) = -12$

مجمـــوعة الحل solution set للمعادلة بمتغيرين هو المجموعة لجميع حلول المعادلة.

وعـــندما نقول رسم المعادلة graph an equation لمتغيرين فإننا نعني رسم مجمـــوعة الحل في المستطيل للمحاور set on a rectangular coordinate system وتكـــون جميع النقاط أو الحلول على شكل خط مستقيم straight line. كذلك يمكن كـــتابة المعادلـــة الخطـــية بمتغيرين linear equation in two variables بالصيغة التالية:

حيث أن: b , m ثوابت حقيقية.

وهـــي أيضـــاً تمثل معادلة خطية وأن رسمها يكون على شكل خط مستقيم، ســـوى أن هـــذا الشكل يدل على اعتماد المتغير y على المتغير x بالشكل الخطي mx + b وأن m يمثل ميل الخط المستقيم slope of the straight line وأن b يمثل الثابت أو المقطع على الإحداثي الصادي للخط المستقيم intercept of the straight line. وهذان المفهومان سيتم الحديث عنهما وبشكل أوسع لاحقاً.

المعادلـــة أو الصـــيغة الثانية $y = mx + b$ هي حالة خاصة من المعادلة أو الصيغة الأولى $Ax + By = C$ عندما يكون $B \neq 0$.

والرســـم يمكن أن يتم باستخدام أي من الصيغتين، حيث أننا نقوم برسم أي نقطتـــين مـــن مجموعة الحل Graph any two points from the solution set ثم نصل النقطتين بخط ليمثل رسم الخط المستقيم.

عندما يقطع الخط المستقيم أياً من المحاور x-axis أو y-axis فتلك النقاط أي نقـــاط التقاطع تسمى بالمساقط أو معاملات التقاطع intercepts. وأبسط طريقة أو أســـلوب لإيجاد هذه التقاطعات هو بافتراض أن $x = 0$ ثم إيجاد قيمة y المقابلة بعد الـــتعويض فـــي المعادلة الخطية لإيجاد معامل التقاطع x-intercept. ثم نفرض أن $y = 0$ وإيجـــاد قـــيمة x المقابلة بعد التعويض في المعادلة الخطية لإيجاد معامل التقاطع y - intercept. ومن المفضل أحياناً أن نجد نقطة ثالثة لغرض التأكد. ومن ثـــم رسم نقطتي التقاطع وإيصالهما بالخط المستقيم الذي يمثل رسم المعادلة الخطية والأمثلة التالية لتوضيح ذلك.

مثال 4

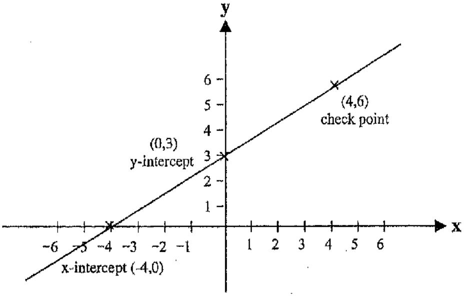
ارسم المعادلة التالية Graph the following equation:

$$-3x + 4y = 12$$

لأجـــل الرسم علينا تحديد بعض النقاط والتي تمثل بعض من حلول المعادلة كالآتي:

X	-4	0	4
Y	0	3	6

ومـــن الواضح أننا اخترنا قيمة موجبة وهي 4 وقيمة سالبة وهي 4− ونقطة الصـــفر لعمـــل هذا الجدول المصغر من القيم المحتملة للمعادلة. وكذلك يلاحظ أن النقطتين (0,3) و(0 , 4-) هما نقطتا تقاطع المعادلة مع الإحداثيين السيني والصادي intercepts. وبتعيـــين تلك النقاط على xy-plane يكون الرسم كما في الشكل رقم (4) التالي:



الشكل رقم (4)

رسم المعادلة $-3x + 4y = 12$

مثال 5

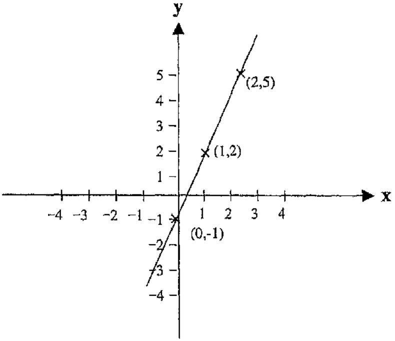
ارسم المعادلة التالية Graph the following equation:

$y = 3x - 1$

لأجل الرسم يمكننا إيجاد وتحديد النقاط التالية:

X	0	1	2
Y	-1	2	5

ويكون الرسم كما في الشكل رقم (5) التالي:



الشكل رقم (5)

رسم المعادلة y = 3x - 1

4-5 الميل Slope:

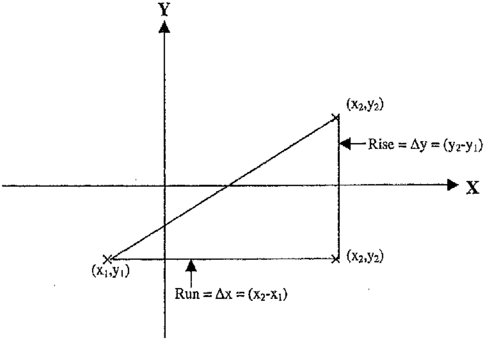
يعتبر الميل slope للخط المستقيم من الخصائص المهمة للمعادلة الخطية ومقياس رقمي مفيد جداً لقياس انحدار الخط المستقيم، ولهذا فإن فكرة الميل استخدمت بشكل واسع لهذه الغاية. والميل slope، والذي يرمز له بالرمز m، للخط المستقيم المار بنقطتين two points (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) يمكن إيجاده من خلال الصيغة التالية The following formula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Rise}{Run}$$

حيث أن Δx يمثل مقياس التغير في قيمة x ، وتقرأ دلتا x

وأن Δy يمثل مقياس التغير في قيمة y ، وتقرأ دلتا y

ويمكن فهم معنى الميل slope من الشكل رقم (6) التالي:



الشكل رقم (6)

توضيح معنى الميل slope

ويلاحـــظ هنا أن الميل للخط المستقيم الأفقي يساوي صفراً، أما الميل للخط المستقيم العمودي فهو غير موجود أو غير معرف.

The slope of a horizontal line is zero, and the slope of a vertical line is not defined.

يمكن إيضاح ذلك بالمثال التالي:

مثال 6

أوجد الميل للخط المستقيم لكل زوج من النقاط:

Find the slope of the line through each pair of points.

a) (-2 , 5) and (4 , -7)

الميل للخط المار بالنقطتين بافتراض أن $(x_1,y_1) = (-2\ ,\ 5)$ وأن $(x_2,y_2) =$ (4,-7) هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-5}{4-(-2)} = \frac{-12}{4+2} = \frac{-12}{6} = -2$$

ويلاحـــظ أن المـــيل لا تتغير قيمته في حال تغيير النقاط الأولى بدل الثانية وبالعكس. فبافتراض أن $(x_1,y_1) = (4,-7)$ وأن $(x_2,y_2) = (-2,5)$ فإن الميل هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-7)}{-2-4} = \frac{5+7}{-6} = \frac{12}{-6} = -2$$

b) (-3 , -1) and (-3 , 5)

بافتراض أن $(x_1,y_1) = (-3,-1)$ وأن $(x_2,y_2) = (-3,5)$ هو فإن الميل هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-1)}{-3-(-3)} = \frac{5+1}{-3+3} = \frac{6}{0} \qquad \text{not defined}$$

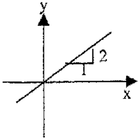
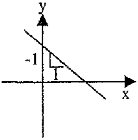
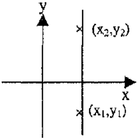
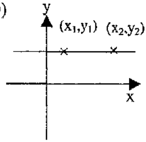
ويعنـــي هـــذا أن المـــيل غيـــر معرف والسبب أن $x_1 = x_2$ أي أن المستقيم عمودي vertical

c) (6 , 4) , (2 , 2)

بافتراض أن $(x_1 , y_1) = (2 , 2)$ وأن $(x_2 , y_2) = (6 , 4)$ فإن الميل هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

بصـــورة عامـــة يمكـــن أن يكون ميل المستقيم موجب positive أو سالب negative أو صـــفر zero وهـــي حالة أن لا يوجد ميل للمستقيم أو يمكن أن يكون الميل غير معرفاً undefined. وهذه الحالات موضحة بأشكالها في الجدول التالي:

Line	Slope	Example
1) Rising	Positive (m>0)	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$
2) Failing	Negative (m<0)	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$
3) Vertical	Not defined	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{0}$ undefined
4) Horizontal	Zero (m = 0)	 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{zero}{\Delta x} = zero$

جدول رقم (1)

الحالات المختلفة لقيم الميل