4-6 صيغة الميل والنقطة Point – Slope Formula:

افرض أن المستقيم الذي ميله m يمر بنقطة ثابتة (x_1,y_1)، ولو كانت النقطة (x,y) هي أي نقطة أخرى يمر خلالها هذا المستقيم. فإن الميل m هو:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ونستطيع أن نضع صيغة الميل m بضرب الوسطين والطرفين كما يلي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

وهذه الصيغة تسمى معادلة الميل والنقطة point-slope formula للخط المستقيم وهذه المعادلة مهمة جداً ونستطيع من خلالها إيجاد معادلة الخط المستقيم عن طريق معرفة ميل ذلك الخط وأي نقطة تقع على ذلك الخط المستقيم. وكذلك نستطيع من خلالها إيجاد معادلة الخط المستقيم المار بنقطتين. والمثال التالي يوضح هاتين الحالتين كالآتي:

مثال 7

أوجد معادلة الخط المستقيم Find the equation for the line:

a) passing through (-4,4) with slope $\frac{1}{4}$

يمر بالنقطة (4، –4) والميل $\frac{1}{4}$ واكتبها بالشكل النهائي:

$$AX + BY = C$$

باستخدام الصيغة $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

وبافتراض أن $(x_1\,,\,y_1) = (-4,4)$ وأن $m = \frac{1}{4}$ لدينا:

$$y - 4 = \frac{1}{4}\,(x - (-4))$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}\,(x + 4)$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}\ x + \frac{4}{4}$$

$$y - 4 = \frac{1}{4}\ x + 1$$

$$y - \frac{1}{4}\ x = 5$$

b) passing through the points (-3,3) and (-4,4)

لإيجـــاد معادلـــة الخط المار بالنقطتين $(x_1,y_1) = (-4,4)$ و $(x_2,y_2) = (-3,3)$ علينا أولاً إيجاد ميل المستقيم المار خلال النقطتين وهو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{-3-(-4)} = \frac{-1}{-3+4} = \frac{-1}{1} = -1$$

وباستخدام هذا الميل $m = -1$ وأي من النقطتين ولتكن $(x_1,y_1) = (-3,3)$ فإن معادلة الخط المستقيم ستكون:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - 3 = 1-\ (x - (-3))$$

$$y - 3 = -(x + 3)$$

$$y - 3 = -x - 3$$

$$y = -x$$

4-7 المعادلات للخطوط أو المستقيمات الأفقية والعمودية:
Equations for Horizontal and vertical lines

وكمـــا تم ذكره سابقاً فإن الخط الأفقي horizontal line هو الخط الذي يكتب بالشـــكل $y = c$ والـــذي يمـــثل خطاً موازياً للإحداثي السيني x-axis عند القيمة c ويســـمى معامل تقاطع y y-intercept وهذه الخطوط بصورة عامة يكون ميلها m يساوي صفر، أي أن المعادلة هي $y = 0x + c$. أما الخط العمودي فهو الخط الذي يكتب بالشكل $x = c$ والذي يمثل خطاً موازياً للإحداثي الصادي y-axis عند القيمة c ويســـمى معامل تقاطع x x-intercept، وهذه الخطوط بصورة عامة عندما يكون

معامــل y يساوي صفرا، أي أن المعادلة هي $x + 0y = c$. والأمثلة التالية توضح معنى وأهمية مثل هذه الخطوط.

مثال 8

معادلة الخط المستقيم الأفقي Horizontal line والذي يمر بالنقطة (-3,4) هي $y = 4$ ومعادلــة الخط المستقيم العمودي vertical line والذي يمر بنفس النقطة هي $x = -3$.

مثال 9

إذا علمــت أن المعادلة الخطية هي $4y + 6x = 12$. أوجد الميل m ومعامل تقاطع y لرسم المعادلة.

Given the linear equation $4y + 6x = 12$. Find the slope and y-intercept of its graph.

لإيجــاد المــيل ومعامــل تقاطــع y يجب وضع المعادلة بالصيغة الخاصة $y = mx + b$ وبالتالي علينا حل المعادلة المعطاة لإيجاد y بدلالة x كالآتي:

$$4y + 6x = 12$$
$$4y = 12 - 6x$$
$$y = 3 - \frac{3}{2}x$$

وبالتالي فإن $m = -\frac{3}{2}$ وأن معامل تقاطع y هو $b = 3$.

4-8 الخطوط المستقيمة المتوازية والمتعامدة:
Parallel and perpendicular lines

في هذا المبحث سيتم ملاحظة الحالتين عندما يكون الخطان متوازيان أي لا يلتقــيا مهما امتدا أو أن يكون أحدهما عمودي على الآخر وكما هو موضح لاحقاً بالإنجليزي والعربي.

Let L_1 and L_2 be two given lines, where m_1 is the slope of L_1 and m_2 is the slope of L_2. Then, L_1 and L_2 are said to be parallel, written as

$L_1 \parallel L_2$, if and only if $m_1 = m_2$. On the other hand, L_1 and L_2 are said to be perpendicular, written as $L_1 \perp L_2$, if and only if $m_1m_2 = -1$ or $m_2 = \frac{-1}{m_1}$.

ويتضـــح مـــن ذلك أن معنى أن يكون الخطان المستقيمان متوازيان فهو أن يكـــون مـــيلهما متساوي ($m_1 = m_2$). أما أن يكون الخطان متعامدان فهو أن يكون حاصل ضرب ميلهما يساوي -1 ($m_1m_2 = -1$). وبالتالي نستطيع من خلال هاتين العلاقتـــين تحديـــد ميل أحد المستقيمات إذا علمنا أنه موازي أو متعامد مع مستقيم آخـــر معلـــوم الميل وغيرها من التطبيقات التي تعتمد على هذا المعنى وسيتم من خلال الأمثلة توضيح ذلك كالآتي:

مثال 10

لتكن $x - 2y = 4$ معادلة خط مستقيم. أوجد معادلة الخطان المستقيمان اللذان يمـــران بالـــنقطة (2,-3) ويكون أحدهما موازي والآخر متعامد مع الخط المستقيم المعلوم.

Given the equation line as $x - 2y = 4$. Find the equation of a line that passes through (3,-3) and is:

a) Parallel to the given line.

b) Perpendicular to the given line.

لإيجاد ميل الخط المستقيم المعلوم $x - 2y = 4$ علينا أولاً تحويله إلى الصيغة العامة $y = mx + b$ ونحصل على:

$$x - 2y = 4$$
$$-2y = 4 - x$$
$$y = -2 + \frac{1}{2}x$$
$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

ويعني هذا أن ميل الخط المستقيم المعلوم $m = \frac{1}{2}$.

فإن كان هذا الخط موازياً للخط المستقيم المطلوب فإن ميل الخطان متساوي وبالتالي فإن ميل الخط المطلوب هو $m = \frac{1}{2}$ وبما أنه يمر بالنقطة (3,-3) لذلك فإن معادلة الخط المستقيم يمكن إيجادها كما يلي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{1}{2}\,(x - 3)$$

$$y + 3 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

وهي معادلة الخط المطلوب في الفرع (a) أعلاه.

وإن كان الخط متعامداً مع الخط المستقيم المطلوب فإن حاصل ضرب ميلهما هو -1 وبالتالي فإن ميل الخط المطلوب هو: $m_2 = \frac{1-}{m_1}$ أي أن:

$$M_2 = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

وبمـــا أن هذا الخط يمر بالنقطة (3,-3) لذلك فإن معادلة الخط المستقيم يمكن إيجادها كما يلي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -2\,(x - 3)$$

$$y + 3 = -2x + 6$$

$$y = -2x + 3$$

وهي معادلة الخط المطلوب في الفرع (b) أعلاه.

مثال 11

أوجد معادلات الخطوط المستقيمة التي تمر بالنقطة (2,3) وهي:

أ) موازي للمستقيم الخاص بالمعادلة $4x + 3y = 6$

ب) متعامد مع المستقيم الخاص بالمعادلة $x - 3y + 1 = 0$

Fine the equations of the lines passing through (2,3) that are:

a) parallel to the line $4x + 3y = 6$

b) perpendicular to the line $x - 3y + 1 = 0$

لحـل الفـرع (a) يجب علينا أولاً إيجاد ميل الخط المعلوم بعد تحويله إلى الصيغة العامة $y = mx + b$ كالآتي:

$$4x + 3y = 6$$

$$3y = 6 - 4x$$

$$y = 2 - \frac{4}{3}x$$

وبالتالـي فإن $m = \frac{-4}{3}$ وإن كان هذا الخط موازياً للخط المطلوب فإن ميل الخط المطلوب هو أيضاً $m = \frac{-4}{3}$ والذي يمر بالنقطة (2,3) وبالتالي يمكن إيجاد معادلته كالآتي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-4}{3}\,(x - 3)$$

$$y - 3 = \frac{-4}{3}x + 4$$

$$y = \frac{-4}{3}x + 7$$

وهي معادلة الخط المطلوب في الفرع (a) أعلاه.

أما لحل الفرع (b) فيجب علينا إيجاد ميل الخط المعلوم بعد تحويله للصيغة العامة $y = mx + b$ كالآتي:

$$x - 3y + 1 = 0$$

$$-3y = -x - 1$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

وبالتالي فإن $m = \frac{1}{3}$ وإن كان هذا الخط متعامداً مع الخط المطلوب فإن ميل الخـــط المطلـــوب $m_2 = \frac{-1}{1/3} = -3$ والذي يمر بالنقطة (2,3) وبالتالي فإن معادلته يمكن إيجادها كالآتي:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 3 = -3\,(x - 2)$$

$$y - 3 = -3x + 6$$

$$y = -3x + 9$$

وهي معادلة الخط المستقيم للفرع (b) أعلاه.

مثال 12

حدد إن كانت أزواج المستقيمات التالية متوازية أم متعامدة أم غير ذلك:

Determine whether the following pairs of lines are parallel, perpendicular, or neither:

a) $2x + 3y = 6$ and $3x - 2y = 6$

b) $2y + 4x + 1 = 0$ and $y - 2 + 2x = 0$

لتحديد فيما إذا كان المستقيمان متوازيان أم متعامدان أم غير ذلك علينا أولاً تحديد ميل كل منهما ثم تحديد الحالة المعينة. ولذلك فلدينا:

لإيجاد ميل المعادلة الأولى لدينا:

a) $2x + 3y = 6$

$$3y = 6 - 2x$$

$$y = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$\therefore m_1 = -\frac{2}{3}$$

ولإيجاد ميل المعادلة الثانية لدينا:

$$3x - 2y = 6$$

$$-2y = 6 - 3x$$

$$y = -3 + \frac{3}{2}x$$

$$\therefore m_2 = \frac{3}{2}$$

وعند مقارنة الميلين $m_1 = \frac{-2}{3}$ and $m_2 = \frac{3}{2}$ ، يتبين أنهما المقلوب السالب لكلاً منهما، أي أن حاصل ضربهما هو -1 فهما $m_1m_2 = -1$ لذلك فإنها خطوط لمعادلات مستقيمة متعامدة فيما بينها.

The pair of lines are perpendicular

b) وباتباع نفس الأسلوب سنجد ميل كل من المعادلتين كالآتي

لإيجاد ميل المعادلة الأولى لدينا:

$$2y + 4x - 1 = 0$$

$$2y = -4x + 1$$

$$y = -2x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore m_1 = -2$$

لإيجاد ميل المعادلة الثانية لدينا:

$$y - 2 + 2x = 0$$

$$y = -2x + 2$$

$$\therefore m_2 = -2$$

وبمقارنـــة الميلـــين $m_1 = -2$ and $m_2 = -2$ ، يتبين أنهما متساويان، أي أن $m_1 = m_2$ لذلك فهما خطوط لمعادلات مستقيمة متوازية مع بعضها

The pair of lines are parallel.

4.9 تطبيقات رسم المعادلات الخطية:
Applications and Graphing Linear Equations

من خلال الوصف السابق لأنواع المعادلات الخطية والمعادلات الخاصة بها ومحاولـــة رســـم قسم منها نستطيع في هذا المبحث تلخيص جميع الأشكال ورسم المعادلات الخطية كالآتي:

Equations of straight line:

1) General formula $AX + BY + C = 0$
(A, B, C are constants, and A,B are both non zero)

2) Slope – Intercept formula $Y = mx + b$

3) Point – slope formula $y - y_1 = m(x - x_1)$

4) Horizontal $y = b$ $(m = 0)$

5) Vertical $x = a$ (m is undefined)

وجمـــيع هـــذه الأشكال يمكن رسمها عن طريق عمل جدول من القيم (x,y) حـــيث أنـــه وبافتـــراض قيم x نحصل على قيم y من التعويض في أي من أشكال المعـــادلات، كما ويمكن الاستعانة بالمساقط intercepts لتحديد نقطتين على أي من الأشـــكال ثم رسم الخط المستقيم الواصل بينها. والأمثلة التالية لتوضيح عملية رسم المعادلات الخطية كالآتي:

مثال 13

ارسم معادلة الخط المستقيم التالية:

Graph the following linear equation:

$$2x - 3y = 6$$

وكما تم وسبق ذكره يمكن الاستعانة بنقطتي المساقط intercepts إن وجدت ثـم رسم الخط المستقيم الواصل بينها. ويمكن أن نجد نقطة ثالثة للتأكد من صحة الحل. وهنا لدينا:

عندما $x = 0$ لدينا:

$$2x - 3y = 6$$
$$2(0) - 3y = 6$$
$$-3y = 6$$
$$y = -2$$

لذلك فإن النقطة الأولى $(x_1 , y_1) = (0 , -2)$

أما عندما $y = 0$ فلدينا:

$$2x - 3y = 6$$
$$2x - 3(0) = 6$$
$$2x = 6$$
$$x = 3$$

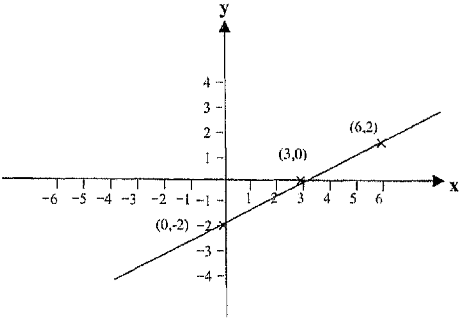
لذلك فإن النقطة الثانية $(x_2 , y_2) = (3 , 0)$

أما النقطة الثالثة فلتكن عندما $y = 2$ ولدينا:

$$2x - 3y = 6$$
$$2x - 3(2) = 6$$
$$2x - 6 = 6$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

لذلك فإن النقطة الثانية $(x_2 , y_2) = (6 , 2)$

ولهذا سيكون رسم المعادلة كما في الشكل رقم (7) التالي:



الشكل رقم (7)

رسم المعادلة $2x - 3y = 6$

مثال 14

ارسم المعادلة الخطية التالية:

Graph the following equation:

$$4y + x - 8 = 0$$

وبنفس الأسلوب السابق يمكن إيجاد نقطتي المساقط كالآتي:

عندما $x = 0$ لدينا:

$4y - 8 = 0$

$y = 2$

أما عندما $y = 0$ فلدينا:

$x - 8 = 0$

$x = 8$

ولتكن $x = 4$ لدينا:

$4y + 4 - 8 = 0$

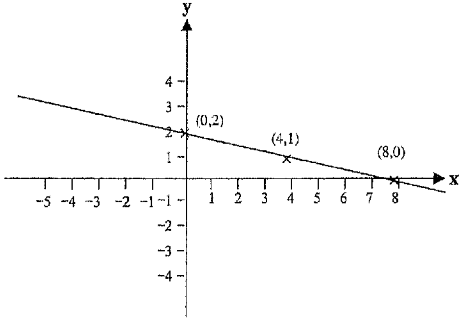
$$4y - 4 = 0$$

$$y = 1$$

لذلك فإن النقاط الثلاث بشكل جدول هي:

X	0	4	8
Y	2	1	0

وبالتالي نحصل على الشكل رقم (8) لرسم المعادلة كالآتي:



الشكل رقم (8)

رسم المعادلة $4y + x - 8 = 0$

أمـــا عـــن الأمـــثلة التطبيقية Applied examples للمعادلات الخطية وكيفية الـــتعامل معهـــا ورسمها فسيتم من خلال الأمثلة القادمة، حيث أن تطبيقات نموذج الكلفـــة الكلية Linear cost model سيظهر في المثال رقم (15) والمثال رقم (16) والمثال رقم (17)، أما علاقة العرض والطلب Supply and Demand فسيظهر في المثال رقم (18) كالآتي:

مثال 15

الكلفة الثابتة في اليوم الواحد هي 100$ والكلفة المتغير لعمل باوند واحد من الشاي هي أما أو 0.6$. حدد معادلة الكلفة وارسمها ثم أوجد كلفة عمل 500 باوند من الشاي في اليوم الواحد.

The fixed costs per day are \$100, and the variable cost of processing 1 pound of tea is ar \$0.6. Give the linear cost equation and graph it. Then, find the cost of processing 500 pounds of tea in one day.

لنفرض أن c تمثل الكلفة بالدولار لعمل x باوند من الشاي لليوم الواحد. لهذا فإن الكلفة الكلية Total cost تتمثل بالمعادلة الخطية التالية:

$C = mx + b$

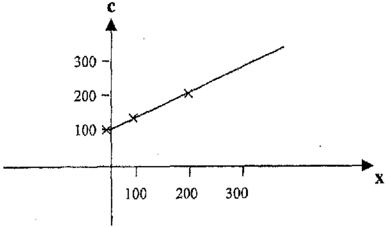
حيث أن: m يمثل الكلفة المتغيرة variable cost لكل وحدة (لكل بواند)

b تمثل الكلفة الثابتة fixed cost

ومن معديات هذا المثال لدينا العلاقة التالية:

$C = 0.6\,x + 100$

ولرسم هذه المعادلة يمكننا استخدام نقطتين كالآتي: لنفرض أن $x = 100$ فإن $c = 160$ ونفرض أن $x = 200$ فإن $c = 220$. وبالتالي فإن النقطتين هما: (100 , 160) و (200 , 220) وسيكون الرسم كما في الشكل رقم (9) التالي:



الشكل رقم (9)

رسم المعادلة للمثال رقم (15)

أما لإيجاد كلفة إنتاج 500 وحدة لدينا:

$$C = 0.6\,(500) + 100 = 400$$

أي أن إنتاج وتهيئة 500 باوند يكلف 400$.

مثال 16

أوجد معادلة الكلفة C لنموذج العلاقة الخطية إذا كانت الكلفة الثابتة هي 400$ لليوم الواحد وكلفة إنتاج 20 وحدة من المنتج هي 600$.

Find an equation for C as a linear cost model of the fixed cost is \$400 per day and it costs \$600 to produce 20 units.

المعادلة الخطية للكلفة هي:

$$C = mx + b$$

وعند التعويض في هذه المعادلة بالقيمة التالية: b=400 ، x= 20 و C= 600 نحصل على:

$$600 = 20m + 400$$

$$200 = 20m$$

$$m = \frac{200}{20} = 10$$

والذي يمثل ميل slope للمعادلة الخطية المطلوبة. وبالتالي فإن معادلة الكلفة المطلوبة هي:

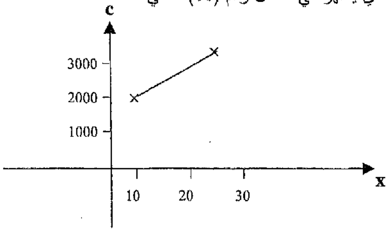
$$c = 10x + 400$$

مثال 17

كلفة إنتاج 10 حاسبات في اليوم الواحد هي 2000$ بينما الكلفة هي 3500$ لإنتاج 25 حاسبة في اليوم الواحد. افترض الموديل الخطي للكلفة، حدد العلاقة التي تمثل معادلة الكلفة c لإنتاج x حاسبة في اليوم الواحد وارسم المعادلة.

The cost of manufacturing 10 computers per day is $2000, while it costs $3500 to produce 25 computers per day. Assuming a linear cost model determine the relationship representing the total cost c of producing x computers per day and graph the equation.

من المعلومات المتوفرة في هذا التطبيق لدينا نقطتين تمثلان العلاقة بين عدد الـوحدات المنـتجة x وكلفة الإنتاج y هما (10,2000) و (25,3500). وعند رسم هاتـين النقطتـين وإيصالهما بالخط المستقيم فهو يمثل الرسم بالنسبة لمعادلة الكلفة الخطية c والذي يظهر في الشكل رقم (10) التالي:



الشكل رقم (10)

رسم العلاقة في المثال رقم (17)

أما الميل m للخط المستقيم الذي يربط بين هاتين النقطتين هو:

$$M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3500 - 2000}{25 - 10} = \frac{1500}{15} = 100$$

وباســتخدام صيغة النقطة والميل فإن المعادلة الخطية للكلفة المطلوبة للخط المستقيم Linear cost model والذي ميله m = 100 ويمر بالنقطة (10,2000) هي:

$C - C_1 = m (x - x_1)$

$c - 2000 = 100 (x - 10)$

$c = 100x + 1000$

وهي معادلة العلاقة المطلوبة.

مثال 18

تاجر للسيارات يستطيع أن يبيع 10 سيارات في اليوم الواحد بسعر $5000 للسيارة الواحدة ولكنه يستطيع أن يبيع 15 سيارة في اليوم إذا كان السعر $4500 للسيارة الواحدة. حدد معادلة الطلب وافترض أنها معادلة خطية.

A car dealer can sell 10 cars per day at $5000 per car, but he can sell 15 cars if the price is $4500 per car. Determine the demand equation, assuming it is linear.

نفترض أن x يمثل كمية الطلب demand quantity والذي يمثل المحور الأفقي x-axis أما السعر p للوحدة price per unit فيمثل المحور العمودي y-axis وبالتالي فإن النقطتين على منحنى الطلب demand curve هما (10,5000) و (15,4500).

وبما أن معادلة الطلب هي معادلة خطية demand equation is liner فإن هذه المعادلة هي معادلة خط مستقيم يمر بالنقطتين أعلاه. لذلك فإن الميل m لهذه المعادلة هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4500 - 5000}{15 - 10} = \frac{-500}{5} = -100$$

وباستخدام صيغة الميل m = -100 والنقطة (10,5000) نستطيع إيجاد العلاقة الخطية كالآتي:

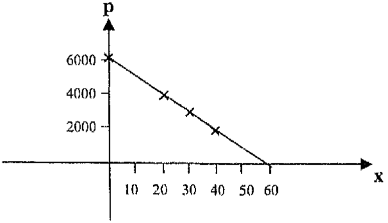
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$p - 5000 = -100(x - 10)$$

$$p - 5000 = -100x + 1000$$

$$p = -100x + 6000$$

وهي معادلة الطلبة المطلوبة والشكل رقم (11) يمثل رسم المعادلة:



الشكل رقم (11)

رسم المعادلة للمثال رقم (18)

4-10 أنظمة المعادلات الخطية لمتغيرين:
Systems of Linear Equations in two variables

لقد تم تعريف المعادلة الخطية Linear equation وكذلك تم التعرف على كيفية حلها للحصول على قيمة المتغير فيها. وسيتم هنا تعريف نظام من المعادلات الخطية عندما تكون لدينا أكثر من معادلة خطية ولنفس المتغيرات ويراد منها الحصول على قيم المتغيرات فيها.

النظام الذي يحتوي على معادلتين خطيتين وبمتغيرين هو النظام الذي له الشكل العام التالي:

$$A_1X + B_1Y = C_1$$
$$A_2X + B_2Y = C_2$$

حيث أن A_1,A_2 و B_1,B_2 و C_1,C_2 جميعها ثوابت حقيقية ويسمى System of two equations and two variables

وهناك العديد من المشاكل في الاقتصاد والمالية والإدارة Business and Economics تقود إلى ما يعرف بأنظمة المعادلات الخطية Systems of linear equations والمطلوب هو حل هذه الأنظمة والتوصل إلى النتائج.

أما عن طرق حل أنظمة المعادلات الخطية بمتغيرين فهي:

1) Graph Method. طريقة الرسم

2) Elimination by Addition. طريقة الحذف

3) Substitution. طريقة التعويض

وسيتم التعرف على هذه الطرق المختلفة وكيفية استخدامها لحل الأمثلة التطبيقية كالآتي:

مثال 19

إذا كانت كلفة 2 قميص للكبار وقميص واحد للأطفال هي 9$. وكانت كلفة قميص واحد للكبار وثلاث قمصان للأطفال هي 12$. ما هو سعر كل قميص.

Suppose that the cost of two adult shirts and one child shirt is $9 and if one adult shirt and three child shirt cost $12. What is the price for each.

لنفرض أن x يمثل سعر القميص للكبار

وأن y يمثل سعر القميص للصغار

وبالتالي فإن:

$$2x + y = 9 \qquad \ldots (1)$$

$$x + 3y = 12 \qquad \ldots (2)$$

وهاتان المعادلتان تكونان نظاماً من معادلتين خطيتين ومتغيرتين (مجهولين) هما x و y

System of two equations and two variables

ولأجل حل هذا النظام لدينا:

a) Graph Method:

نقوم برسم المعادلتين في مكان واحد والنقطة التي يتقاطع فيها الخطان المستقيمان للمعادلتين هو حل هاتين المعادلتين، بمعنى أنه حل للنظام.

وكما تم رسم المعادلة الخطية سابقاً سنقوم برسم هاتين المعادلتين بعد عمل جدول بقيم كل منها كالآتي:

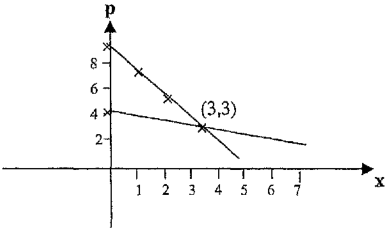
المعادلة (1) $2x + y = 9$

X:	0	1	2	3
Y:	9	7	5	3

المعادلة (2) $x + 3y = 12$

X:	0	3	6
Y:	4	3	2

ورسم المعادلتين يظهر في الشكل رقم (12) التالية:



الشكل رقم (12)

رسم المعادلتين في المثال رقم (19)

ويلاحـــظ مـــن الشـــكل أعلاه أن نقطة التقاطع هي (3,3) وبالتالي فإن سعر قميص الكبار \$3 وسعر قميص الأطفال هو \$3.

b) Elimination by Addition:

والآن ســـنقوم بحل نفس المثال باستخدام الطريقة الثانية وهي طريقة الحذف بالإضافة وسيتم عرضها كالآتي:

إذا ضربنا المعادلة (1) في (3−) وجمعنا المعادلتين نستطيع حذف y

وإذا ضربنا المعادلة (2) في (2−) وجمعنا المعادلتين نستطيع حذف x

$$2x + y = 9 \qquad \dots (1)$$
$$-2x - 6y = -24 \qquad \dots (2)$$

جمع المعادلتين وحذف x

$$-5y = 15$$
$$y = 3$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة (1) لإيجاد قيمة x كما يلي:

$$2x + 3 = 9$$
$$2x = 9$$
$$x = 3$$

وبالتالي فإن قيمة x هي 3 وقيمة y هي 3. وذلك يعني أن سعر قميص الكبار 3$ وسعر قميص الأطفال هو 3$.

وهذه النتيجة متفقة تماماً مع الطريقة الأولى.

c) Substitution:

والآن سيتم حل نفس المثال بالطريقة الثالثة وهي طريقة التعويض باستخدام المعادلة (1) نجد قيمة y بدلالة x كالآتي:

$$y = 9 - 2x \qquad \dots (3)$$

ثم يتم تعويض ذلك في المعادلة (2) ليصبح لدينا:

$$x + 3\,(9 - 2x) = 12$$
$$x + 27 - 6x = 12$$
$$-5x = -15$$
$$x = 3$$

وأخيراً نعوض عن قيمة x بالمقدار 3 في المعادلة (3) لنجد أن:

$$y = 9 - 2\,(3)$$
$$y = 3$$

وهذا يعني أن سعر قميص الكبار 3$ وسعر قميص الأطفال هو 3$. وهذه النتيجة متفقة تماماً مع الطريقتين السابقتين.

مثال 20

أحـــد أصـــحاب معــارض السيارات رغب بتوسيع عمله لشراء نوعين من الســيارات الحديثة أحدهما صغيرة الحجم وكل سيارة تكلف 3000$ والنوع الثاني كبيرة الحجم وكل سيارة تكلف 4000$. السيارة من النوع الصغير تستغل مساحة مـــن المعـــرض مقداره 40 قدم مربع أما السيارة من النوع الكبير فتستغل مساحة مقـدارها 50 قدم مربع من المعرض. فإذا كان المالك يملك فقط 200000$ لهذه الصفقة ولديه مساحة مقدارها 2600 قدم مربع في المعرض الخاص بالسيارات. ما هي العدد المطلوب شراءه من كل نوع لاستخدام المبالغ والمساحة المتوفران أفضل استغلال.

A car dealar wants to expand his business by buying and displaying two types of cars, that have recently appeared on the market. Each car of the first type costs \$3000 and each car of the second type costs \$4000. Each car of the first type occupies 40 square feet of floor space, where as each car of the second type occupies 50 square feet of the floor space. How many cars of each type should he bought and displayed to make fullure of the available \$200000 for capital and 2600 square feet for space.

افترض أن المالك اشترى x سيارة صغيرة و y سيارة كبيرة

فإن المعادلة الأولى والتي تمثل الكلفة هي:

$$3000\,x + 4000\,y = 200000$$

أما المعادلة الثانية والتي تمثل المساحة فهي:

$$40\,x + 50\,y = 2600$$

وبذلك فإن النظام هو:

$$3000\,x + 4000\,y = 200000 \quad \dots (1)$$

$$40\,x + 50\,y = 2600 \quad \dots (2)$$

وللحـــل بطريقة الحذف بالإضافة elimination by addition سنقوم بضرب المعادلة (2) في (80-) للحصول على:

$$3000x + 4000y = 200000$$
$$-3200x - 4000y = -208000$$

جمع المعادلتين

$$-200x = -8000$$
$$X = 40$$

وبالتعويض في المعادلة (2) نحصل على:

$$40(40) + 50y = 2600$$
$$1600 + 50y = 2600$$
$$50y = 1000$$
$$y = 20$$

وبعني ذلك أن العدد المطلوب من السيارات ذات الحجم الصغير هو 40 وذات الحجم الكبير هو 20 سيارة.

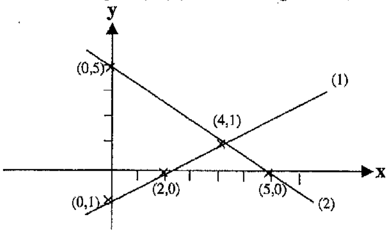
مثال 21

حل كلاً من أنظمة المعادلات التالية بالطرق الثلاث:

a) $x - 2y = 2$ ... (1)

$x + y = 5$ ... (2)

الحل بالرسم وبالرجوع إلى الشكل رقم (13) التالي:



الشكل رقم (13)

رسم مثال (21) الفرع (a)

فإن الحل هو $x = 4$ و $y = 1$

الحل بالحذف:

$x - 2y = 2 \quad \ldots (1)$

$x + y = 5 \quad \ldots (2)$

نضرب المعادلة (1) في (1−) لنحصل على:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -2 \\ x + y &= 5 \\ \hline 3y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

جمع المعادلتين

نعوض عن قيمة y في المعادلة (2) لنحصل على:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

أما عن الحل بالتعويض فلدينا من المعادلة (2) $x = 5 - y$

ونعوض عن ذلك في المعادلة (1) لنحصل على:

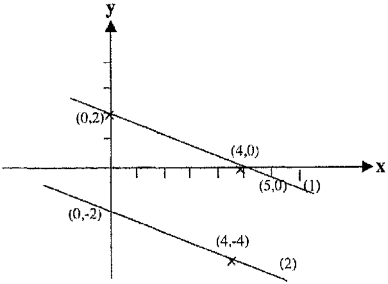
$$\begin{aligned} (5 - y) - 2y &= 2 \\ 5 - y - 2y &= 2 \\ -3y &= -3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

ويلاحظ بأن الطرق الثلاث تتفق في النتيجة والحل وهو $x = 4$ و $y = 1$

b) $x + 2y = -4 \quad \ldots (1)$

$2x + 4y = 8 \quad \ldots (2)$

الحل بالرسم يتم في الشكل رقم (14) التالي:



الشكل رقم (14)

رسم المثال (21) الفرع (b)

وبمـــا أن الخطين متوازيين parallel lines فلا توجد نقاط تقاطع ويعني ذلك عدم وجود حل للمعادلتين.

أما عن حل النظام نفسه بطريقة الحذف لدينا:

$$x + 2y = 4 \quad \ldots (1)$$
$$2x + 4y = 8 \quad \ldots (2)$$

جمع المعادلتين

$$-2x - 4y = 8$$
$$2x + 4y = 8$$

zero = zero

لا يوجد حل لهاتين المعادلتين أو لهذا النظام.

4-11 أنظمة المعادلات الخطية لثلاث متغيرات:
Systems of linear equations in three variables

بعد أن تعرفنا على نظام المعادلات الخطية لمتغيرين يمكن تعميم كتابة النموذج وحل الأنظمة لأكثر من متغيرين. وسيتم في هذا المبحث الحديث عن الأنظمة الخطية لثلاث متغيرات والتي تكتب بالشكل العام التالي:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3$$

حيث أن x , y , z هي المتغيرات variables أو المجاهيل unknown وأن a_1 , a_2 , a_3 وكذلك b_1 , b_2 , b_3 وأيضاً c_1 , c_2 , c_3 و k_1 , k_2 , k_3 جميعها ثوابت حقيقية Real constants.

أما عن حل هذه الأنظمة فيتم باتباع طريقة الحذف Elimination السابق تطبيقها مع تعديل معين للتعامل مع المعادلات الثلاث كالآتي:

1) نختار أي معادلتين من النظام ونقوم بحذف أحد المتغيرات الثلاث بواسطة الحذف Elimination والنتيجة تعطي معادلة واحدة لمتغيرين two variables.
2) نختار أي معادلتين أخرى لنقوم بحذف نفس المتغير الذي تم حذفه في الخطوة رقم (1) لإيجاد معادلة ثانية لنفس المتغيرين السابقين.
3) نستخدم المعادلتين الناتجتين من الخطوتين (1) و(2) أعلاه لتكوين نظام من المعادلات الخطية بمتغيرين System of two Variables ونقوم بحل هذا النظام باتباع الطرق السابق ذكرها في المبحث السابق لإيجاد قيم المتغيرين المجهولين.
4) نعوض في أي من المعادلات الأصلية للنظام من الثلاث معادلات عن قيم المتغيرين اللذين تم حلهما في الخطوة رقم (3) لإيجاد المتغير الثالث

والـــذي تـــم حذفـــه سابقا. وبالتالي يصبح لدينا حل للنظام و المعادلات الثلاث.

ولتطبيق الخطوات السابقة يمكن اتباع خطوات حل الأمثلة التالية:

مثال 22

حل المعادلات التالية Solve the following Equations:

$$3x - 2y + 4z = 6 \qquad \ldots (1)$$
$$2x + 3y - 5z = -8 \qquad \ldots (2)$$
$$5x - 4y + 3z = 7 \qquad \ldots (3)$$

يلاحـــظ هنا أنه تم ترقيم المعادلات وذلك لأن اتباع خطوات حل هذا النظام يكون أسهلاً وأوضح عند ذكر رقم المعادلة التي يراد التعامل معها.

وباختيار حذف المتغير y، وذلك لأن معاملاته 2−، 3+، 4− في المعادلات الثلاث أبسط في التعامل من معاملات المتغيران الآخران x أو z.

باســـتخدام المعادلتـــين (1) و(2) وبضرب المعادلة رقم (1) في 3 وضرب المعادلة رقم (2) في 2 نحصل على ما يلي:

$$9x - 6y + 12z = 18$$
$$4x + 6y - 10z = -16$$

وبجمع المعادلتين

$$13x + 2z = 2 \qquad \ldots (4)$$

وهنا قمنا بترقيم المعادلة الأخيرة بالمعادلة رقم (4)

وباســـتخدام المعادلتـــين (1) و(3) وبضـــرب المعادلة رقم (1) في 2− أما المعادلة رقم (3) فتبقى على حالها نحصل على ما يلي:

$$-6x + 4y - 8z = -12$$
$$5x - 4y + 3z = 7$$

وبجمع المعادلتين

$$-x - 5z = -5 \qquad \ldots (5)$$

وهنا قمنا بترقيم المعادلة الأخيرة بالمعادلة رقم (5).

أمــا الآن فسنضع المعادلتين (4) و(5) مع بعضهما ليكونا نظاماً خطياً من متغيرين كالآتي:

$$13x + 2z = 2 \qquad \ldots (4)$$
$$-x - 5z = -5 \qquad \ldots (5)$$

ونختــار الآن حــذف أحــد المتغيرين x أو z بملاحظة معاملات كل منهم وباتباع نفس الخطوات السابق ذكرها لحل الأمثلة في المبحث السابق.

وبضــرب المعادلة رقم (5) في 13 وإضافتها للمعادلة رقم (4) نقوم بحذف المتغير x والحصول على ما يلي:

$$13x + 2z = 2$$
$$-13x - 65z = -65$$

وبجمع المعادلتين

$$-63z = -63$$
$$z = 1$$

والآن نقــوم بالتعويض عن z بالقيمة (1) في أي من المعادلتين (4) أو (5) لإيجاد قيمة المتغير x. وباستخدام المعادلة رقم (5) نحصل على:

$$-x - 5z = -5$$
$$-x - 5(1) = -5$$
$$-x = 0$$
$$x = 0$$

وأخيــراً نقــوم بالــتعويض عن z بالقيمة (1) وعن x بالقيمة (0) بأي من المعــادلات (1)، (2) أو (3) لإيجــاد قــيمة المتغيــر الثالث والأخير y كالآتي. وباستخدام المعادلة رقم (1) نحصل على:

$$3x - 2y + 4z = 5$$
$$3(0) - 2y + 4(1) = 6$$

$$-2y = 2$$
$$y = -1$$

وبالتالي فإن حل النظام المطلوب من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات هو:

$x = 0$, $y = -1$, and $z = 1$

وللـــتأكد من صحة الحل نستطيع التعويض عن قيم المتغيرات في المعادلات الثلاث للحصول على ما يلي:

$$3x - 2y + 4z = 6$$
$$3(0) - 2(-1) + 4(1) = 6$$
$$2 + 4 = 6$$
$$6 = 6$$

وذلك يعني أن قيم المتغيرات تحقق المعادلة رقم (1)

$$2x - 3y - 5z = -8$$
$$2(0)\ 3(-1) - 5(1) = -8$$
$$-3 - 5 = -8$$
$$-8 = -8$$

وذلك يعني أن قيم المتغيرات تحقق المعادلة رقم (2)

$$5x - 4y + 3z = 7$$
$$5(0) - 4(-1) + 3(1) = 7$$
$$4 + 3 = 7$$
$$7 = 7$$

وبمـــا أن قـــيم المتغيـــرات تحقق المعادلات الثلاث فإن ذلك يعني أن الحل صحيح وهو:

$x = 0$, $y = -1$, $z = 1$

مثال 23

حل نظام المعادلات الخطية التالية:

Solve the following system of linear equations:

$x + 3y - z = 4 \qquad \dots (1)$

$2x + y + 2z = 10 \qquad \dots (2)$

$3x - y + z = 4 \qquad \dots (3)$

وباتباع نفس الخطوات السابق ذكرها سيكون الحل كالآتي:

وباختيار المعادلتين (1) و(2) بعد ضرب المعادلة رقم (1) بالقيمة 2− وجمعها مع المعادلة رقم (2) نحصل على:

باستخدام المعادلتين (1) و(2) وبضرب المعادلة رقم (1) في 3 وضرب المعادلة رقم (2) في 2 نحصل على ما يلي:

$$\begin{array}{l} -2x - 6y + 2z = -8 \\ \underline{\;2x + y + 2z = 10\;} \\ \quad -5y + 4z = 2 \qquad \dots (4) \end{array}$$

وبجمع المعادلتين

وباختيار المعادلتين (1) و(3) بعد ضرب المعادلة رقم (1) بالقيمة 3− وجمعها مع المعادلة رقم (3) نحصل على:

$$\begin{array}{l} -3x + 9y + 3z = -12 \\ \underline{\;3x - y + z = 4\;} \\ \quad -10y + 4z = -8 \qquad \dots (5) \end{array}$$

وبجمع المعادلتين

نحصل على نظام من المعادلتين (4) و(5) وبمتغيرين y و z كالآتي:

$-5y + 4z = 2 \qquad \dots (4)$

$-10y + 4z = -8 \qquad \dots (5)$

وبضرب المعادلة رقم (4) في 2− وجمعها مع المعادلة رقم (5) نحصل على:

$$10y - 8z = -4$$
$$-10y + 4z = -8$$

وبجمع المعادلتين

$$-4z = -12$$
$$z = 3$$

وبالتعويض في المعادلة رقم (4) نحصل على:

$$-5y + 4z = 2$$
$$-5y + 5(3) = 2$$
$$-5y = -10$$
$$y = 2$$

وأخيراً بالتعويض في المعادلة رقم (1) نحصل على:

$$x + 3y - z = 4$$
$$x + 3(2) - 3 = 6$$
$$x + 3 = 4$$
$$x = 1$$

وبذلك فإن حل النظام هو:

$x = 1$, $y = 2$, and $z = 3$

وللتأكد من صحة الحل نعوض في المعادلات الأصلية ويكفي بالتعويض في أحدهما ولتكن المعادلة رقم (2):

$$2x + y + 2z = 10$$
$$2(1) + 2 + 2(3) = 10$$
$$2 + 2 + 6 = 10$$
$$10 = 10$$

وبالتالي فإن الحل صحيح.

وكـذلك غالـبا مـا نسـتخدم طـريقة التعويض Substitution لحل أنظمة المعادلات لثلاث متغيرات وكما في الأمثلة التالية:

The method of substitution can also often be used to solve systems of equations with three or more variables, as in there two examples

24

حل نظام المعادلات التالية:

Solve the following system of linear equations:

$$X_1 - X_2 - X_3 = 1 \qquad \dots (1)$$

$$-4X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 6 \qquad \dots (2)$$

$$2X_1 + X_2 + 3X_3 = 6 \qquad \dots (3)$$

لحل هذا النظام بطريقة التعويض لدينا ما يلي:

نوجد قيمة X_1 كما في المعادلة (4) باستخدام المعادلة (1) كالآتي:

$$X_1 = (X_2 + X_3 + 1) \qquad \dots (4)$$

نعوض الآن بما يساوي X_1 في المعادلتين (2) و(3).

Now we substitute this expression for X into the remaining two equations.

$$-4\,(X_2 + X_3 + 1) - 2X_2 + 3X_3 = 6$$

$$2\,(X_2 + X_3 + 1) + X_2 + 3X_3 = 6$$

الآن نقوم بتبسيط المعادلتين لإيجاد قيم X_2 و X_3 وكما يلي:

$$-4X_2 - 4X_3 - 4 - 2X_2 + 3X_3 = 6$$

$$-6X_2 - X_3 = 10 \qquad \dots (5)$$

$$2X_2 + 2X_3 + 2 + X_2 + 3X_3 = 6$$

$$3X_2 + 5X_3 = 4 \qquad \dots (6)$$

الآن نحل المعادلتين (5) و(6) كالآتي:

$$-6X_2 - X_3 = 10 \qquad \dots (5)$$

$2\,(3X_2 + 5X_3 = 4)$ ... (6)

$-\cancel{6}X_2 - X_3 = 10$ ... (5)

$\cancel{6}X_2 + 10X_3 = 8$ ... (6)

$9X_3 = 18$

$X_3 = 2$

الآن نعوض في المعادلة (5) قيمة X_3 لنحصل على:

$-6X_2 - 2 = 10$

$-6X_2 = 12$

$X_2 = -2$

الآن نعوض في المعادلة (4) لإيجاد قيمة X_1:

$X_1 = (-2 + 2 + 1)$

$X_1 = 1$

وللتحقيق من نتيجة الحل نعوض في المعادلة (1):

$X_1 - X_2 - X_3 = 1$

$1 + 2 - 2 \quad = 1$

الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن.

مثال 25

حل نظام المعادلات التالية:

Solve the following system of equations:

$X_1 + X_2 + X_3 = 6$ ... (1)

$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 9$ ... (2)

$-X_1 + 2X_2 + X_3 = 6$ ... (3)

للحل أولاً نجد قيمة X_1 وكما في المعادلة (4) باستخدام المعادلة (1) لنحصل على:

$X_1 = (6 - X_2 - X_3)$ ... (4)

الآن نعوض في المعادلتين الباقية وكما يلي:

$$2\,(6 - X_2 - X_3) - X_2 + 3X_3 = 9$$

$$12 - 2X_2 - 2X_3 - X_2 + 3X_3 = 9$$

نقوم بعملية التبسيط للمعادلات:

$$-3X_2 + X_3 = -3 \qquad \dots (2)$$

$$-(6 - X_2 - X_3) + 2X_2 + X_3 = 6 \qquad \dots (3)$$

نوجد المتغيرات:

$$3\cancel{X_2} + 2X_3 = 12 \qquad \dots (3)$$

$$-3\cancel{X_2} + X_3 = -3 \qquad \dots (2)$$

$$3X_3 = 9$$

$$X_3 = 3$$

نعوض في المعادلة (3) لإيجاد قيمة X_2 وكما يلي:

$$3X_2 + 2X_3 = 12$$

$$3X_2 = 12 - 6$$

$$3X_2 = 6$$

$$X_2 = 2$$

الآن نعوض في المعادلة (4) لإيجاد قيمة X_1:

$$X_1 = (6 - 2 - 3)$$

$$X_1 = 1$$

الآن قيم المتغيرات: $X_1 = 1$ ، $X_2 = 2$ ، $X_3 = 3$

للتأكد من الحل نعوض في المعادلة (1):

$$X_1 + X_2 + X_3 = 6$$

$$1 + 2 + 3 = 6$$

الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن، إذن الحل صحيح.