44) $2x_1 - 11x_2 - 3x_3 = 2$ and $x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$
and $x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -1$

45) $6x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -17$ and $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -5$
and $3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -8$

46) $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$ and $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -7$
and $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 6$

47) $x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$ and $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5$
and $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$

48) $2x_1 - x_2 + 5x_3 = -3$ and $-x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1$
and $x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$

49) $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -9$ and $x_1 - 3x_3 = -6$
and $2x_1 + x_3 = -5$

50) $x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$ and $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10$
and $x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$

الفصل الخامس

5

الدوال والرسوم

الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل الخامس
الـدوال والرســوم
Function and Graphs

5-1 مقدمة Introduction:

ســيتم فــي هــذا الفصل تعريف الدالة Function وتحديد كثير من المفاهيم الرياضية Mathematical Concepts المتعلقة بدراسة الدوال ومنها المنطلق والمدى للدالة Domain and Range of a Function، وكيفية التعامل مع دوال جديدة ناتجة عــن عمليات جبرية على الدوال Combinations of Functions. وكذلك سيتم في هــذا الفصل دراسة وتمييز أنواع مختلفة من الدوال Kinds of Functions. وسيتم التعــرف علــى رسوم الدوال Graphs of Function وكيفية التعامل معها. وكذلك ســيتم حل كثير من الأمثلة Examples والتعرف على العديد من الأمثلة التطبيقية Applied Examples لتوضيح آلية وأهمية وكيفية تطبيق الدوال في الحياة العملية، وسيحتوي الفصل في نهايته على كثير من الأسئلة Exercises.

سيتضمن هذا الفصل عدة مباحث منها هي المبحث 2–5 الدوال Functions والمــبحث 3–5 رسم الدوال Graphs of Functions والمبحث 4–5 أنواع الدوال: الــدوال التربيعية والقطع المكافئ Kinds of Functions: Quadratic Functions and Parabolas وأخيــراً المــبحث 5–5 تــركيب الــدوال Combinations of Functions.

5-2 الدوال Functions:

مفهــوم الدالة Function هو أحد المفاهيم الأساسية والمهمة في الرياضيات، وقــد أصــبح من الضروري إعطاء هذا المفهوم الأهمية المناسبة لتعريفه ودراسته واســتخدامه في التطبيقات المختلفة. وبصورة عامة الدالة تعطي فكرة اعتماد أحد المعطيات على معطيات أخرى.

A function expresses the idea of one quantity depending on or being determined by another.

ومن أمثلة ذلك:

- أن مساحة الدائرة تعتمد على نصف قطرها.
- التكاليف الشهرية لمنتج معين يعتمد على عدد القطع المنتجة.
- الأرباح التي تحققها شركة معينة تعتمد على المبيعات لتلك الشركة.

وغيرها من العديد من الأمثلة التطبيقية والتي سنتناول العديد منها ضمن متن هذا الفصل وحسب المفاهيم التي سيتم دراستها.

وعندما تكون هناك علاقة ولتكن f تربط عناصر مجموعة مثل A بعناصر مجموعة أخرى مثل B عندئذ تسمى العلاقة f اقتراناً أو دالة function. وبذلك يمكن تعريف الدالة كالآتي:

Function:

Let A and B are two nonempty sets. Then, a function, say f, from A to B is a rule that assigns to each element in A a unique element in B.

وتستخدم عادة الرموز f, g , F, or G للدالة.

Let f denote a given function, The set A for which f assigns a unique value in B is called the Domain of the function f, The corresponding set of values in B is called the range of the function.

إذا كانت العلاقة f تربط كل عنصر من A بعنصر وحيد من B عندئذ نسمي المجموعة A بمنطلق الدالة Domain ونسمي المجموعة الثانية B بالمدى للدالة Range، ويرمز للدوال عادة بالرمز $y = f(x)$، حيث يقال عن المتغير X بالمتغير المستقل Independent variable ويقال عن المتغير Y بالمتغير التابع Dependent variable وأن لكل قيمة من قيم المتغير X هناك قيمة مقابلة للمتغير Y. وبذلك فإن المنطلق Domain هو المجموعة التي تمثل المتغير المستقل X، أما مدى الدالة Range فهو المجموعة التي تمثل قيم المتغير التابع Y بعد التعويض في الدالة عن قيم المتغير X.

If for each x their exists exactly one value of y, we say that y is a function of x, and we write $y = f(x)$.

for example $y = 4x + 1$, then for each value of x in the real line there is a value for y which is also must be in the real line.

We usually write $f(x) = x^2$ to define a function that associates the x^2 value with the number x.

Thus,

$f(3) = 3^2 = 9$, so f associate 9 with 3

$f(-2) = (-2)^2 = 4$, so f associate 4 with -2

$f(0) = 0^2 = 0$, so f associate 0 with 0

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$, so f associate 2 with $\sqrt{2}$

This formula does not involve a dependent variable.

في كثير من الأحيان، المتغير المستقل x للدالة f (x) لا يكون حراً في قيمه. بمعنى آخر، هناك بعض القيود على تلك القيم وبذلك علينا تعريف وتفسير ما يعرف بالمنطلق للدالة Domain of a function كالآتي:

Domain:

If the function f and $y = f(x)$, then the domain of f can be viewed as the set of allowable values for the independent variable x.

وما يعني بتعريف مفهوم المنطلق Domain أنه إذا كانت الدالة هي f وبالشكل $y = f(x)$ فإن منطلق تلك الدالة هي القيم المناسبة للمتغير المستقل X.

أما القيم التي نحصل عليها من التعويض في الدالة $y = f(x)$ بقيم المتغير x فهي قيم المتغير التابع Y وتسمى المجموعة بالمجال أو المدى للدالة Range of a function.

If x is a number in the domain of f, then the number f (x) that f associates with x is called the value of f at x or the image of x under f.

Thus, if $f(x) = x^2$, then the value of f at $x = 3$ is $f(3) = 9$, (i,e) 9 is the image of 3 under f.

وبالتالي يمكن تعريف مجال الدالة كالآتي:

Range:

Is the set of all possible values of f (x) as x varies over the domain of f.

ويمكن حصر النقاط الواجب مراعاتها لتحديد منطلق الدالة بالتالي:

Restrictions on the indep. Variable that determine the domain of a function generally come about in one of three ways:

1) Physical or geometic considerations.

2) Natural restrictions that result from a formula used to define a function.

3) Artificial restrictions imposed by a problem solver for one purpose or another.

النقاط الثلاثة أعلاه يمكن توضيحها بالأمثلة المحددة عند عرض الأمثلة التالية لتحديد منطلق دالة معينة.

مثال 1

أوجد منطلق الدوال التالية:

Find the domain for the following functions:

a) $f(x) = 4x + 1$

يلاحظ هنا أنه لا توجد أي شروط لتحديد منطلق هذه الدالة وبالتالي فإن المنطلق هو جميع الأعداد الحقيقية $\Re$، أي أن:

Domain is $\Re = (-\infty , +\infty)$

b) $f(x) = x^2$

وهنا أيضاً يمكن ملاحظة أنه لا توجد أي شروط لتحديد منطلق هذه الدالة باعتبار أنه يمكن تربيع القيم الموجبة والسالبة وبالتالي فإن المنطلق هو جميع الأعداد الحقيقية $\Re$، أي أنه:

Domain is $\Re = (-\infty , +\infty)$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

في هذه الحالة يلاحظ أن هناك شروط لتحديد منطلق هذه الدالة هو من الشكل Natural domain، حيث أنه يمكن جذر القيم الموجبة ولا يمكن جذر القيم

السـالبة للحصـول علـى أعداد حقيقية، بمعنى أن الجذور السالبة تسمى وكما تم تعـريفه سابقاً بالأعداد الخيالية imaginary وبالتالي فإن منطلق هذه الدالة هو فقط القيم الموجبة، أي أن:

Domain is $\{x \mid x \geq 0\}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

وكـذلك يلاحـظ هـنا أن هناك شروط لتحديد منطلق هذه الدالة من الشكل Natural domain وهـي أنـه لا يمكن القسمة على صفر وذلك لحصولنا على قيم غير معرفة. وهذه الحالة تكون عندما x = 1 أو x = 3 وبذلك فإن منطلق هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا القيمتين 1 و 3، أي أن:

Domain is $\{x \mid x \neq 1, 3, x \text{ is Reals}\}$

or Domain is $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$

e) $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}, \quad x \neq 0$

But if we write $y = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$

then, h (x) is defined at x – 2, since

$h(2) = 2 + 2 = 4$

Thus, we must write $h(x) = x + 2, \ x \neq 2$

وفـي هذه الحالة نلاحظ أنه عند تطبيق العمليات الجبرية وبواسطة استخدام طـريقة الحـد المشـترك common factor وبعد حذفه من البسط والمقام فإن هذه العملية (تبتر) قطع alter للمنطلق الحقيقي للدالة.

أمـا عـن تحديـد مدى الدالة Range of a function فيتم بصورة عامة من الملاحظـة Often, the Range of a function is evident by inspection وسـيتم عرض ذلك بالمثال التالي:

2

حدد مدى الدوال التالية Determine the Range of the following:

a) $f(x) = x^2$

وبالـــرجوع للمثال (1) السابق فإن المنطلق الطبيعي لهذه الدالة هو الأعداد الحقيقـــية $(-\infty , \infty) = \Re$. ولكـــن بما أن تربيع القيمة الموجبة وكذلك تربيع القيم الســـالبة هـــو قيمة موجبة دائماً positive values لذلك فإن مدى هذه الدالة سيكون فقط القيم الموجبة، أي أن:

Range is $\{x \mid x \geq 0\}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

منطلق هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 1$ والتي تجعل المقام صفراً. ولذلك فلإيجاد القيم المناسبة والتي ستمثل المدى Range فعلينا تحديد شكل معـــين لإيجاد تلك القيم. والطريقة المناسبة هو حل المعادلة والتي تمثل الدالة $f(x)$ والتـــي ســـيرمز لها بالرمز y بدلالة المتغير X وسنحاول تغيير هذه الدالة لتصبح بالشكل أن المتغير X هو بدلالة المتغير y وكالآتي:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y(x-1) = x+1$$

$$xy - y = x + 1$$
$$xy - x = y + 1$$

$$x(y-1) = y+1$$

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

وبالتالي فإن المدى للدالة الأصلية $f(x)$ هو جميع القيم ما عدا $y = 1$

5

ويلاحـــظ من المثال السابق أن الدالة تظهر بشكل معين لمجموعة محددة من القـــيم ولكن يمكن أن تظهر الدالة بأكثر من شكل لمجاميع مختلفة من القيم. وعندئذ تعـــرف الدالـــة بالوصـف functions defined piecewise والتي تظهر في المثال التالي:

مثال 3

Recognize the following function:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 2 \\ 4, & x \le 2 \end{cases}$$

وهذه الدالة لها شكل أن تكون $x + 2$ للقيم x أكبر من 2 ولها شكل أن تكون بشكل الثابت 4 للقيم x أقل من أو تساوي 2.

$$b)\ f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \le -1 \\ 4, & -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2, & x \ge 3 \end{cases}$$

وهـــذه الدالـــة لها ثلاثة أشكال مختلفة حسب المجموعات المختلفة والمؤلف منها منطلق هذه الدالة.

وببســـاطة يتضح من التعامل مع تعريف الدالة والأمثلة السابقة أنه إذا كانت الدالة معرفة لمجموعة من الحدود والذي يمثل منطلق تلك الدالة فإن قيم الدالة يمكن إيجادهـــا بعد التعويض في الدالة لإيجاد قيمة الدالة value of the function والمثال التالي سيوضح ذلك.

مثال 4

Let $f(x) = 2x + 1\ ,\ 0 \le x \le 1$

Find: $f(0)\ ,\ f(1)\ ,\ f(\frac{1}{2})\ ,\ f(a)\ ,\ f(a+h)\ ,\ \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

ويلاحظ هنا أن المطلوب في هذا المثال إيجاد قيمة الدالة:

$f(x) = 2x + 1$

لقيم مختلفة من المتغير x وبذلك فإنه عندما x = 0 فإن:

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

وعندما x = 1 فإن:

$f(1) = 2(1) + 1 = 3$

أما عندما $x = \frac{1}{2}$ فإن:

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + 1 = 2$

وعندما x = a فإن:

$f(a) = 2a + 1$

وعندما x = a + h فإن:

$f(a + h) = 2(a + h) + 1 = 2a + 2h + 1$

وأخيراً إيجاد:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2a+2h+1-(2a+1)}{h} = \frac{2a+2h+1-2a-1}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

5-3 رسم الدوال Graphs of Functions:

عملية تحديد قيم المتغير X والتي تسمى منطلق الدالة Domain of function وإيجاد قيم الدالة Y بعد التعويض والتي تسمى بمدى الدالة Range of function يعطينا جدول من القيم والذي يمثل قيم x وقيم y أو f (x) المقابلة. وبتحديد هذه القيم على المستوى xy يمكننا رسم النقاط التي تمثل تلك الدالة وبإيصال هذه النقاط نحصل على رسم للدالة.

الأمثلة التالية ستوضح ذلك:

مثال 5

ارسم الدوال التالية Graph the following functions:

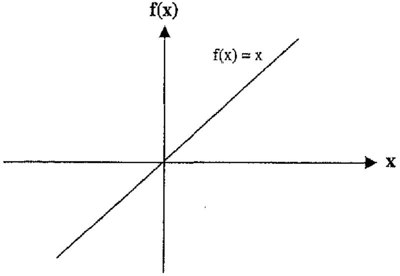
a) f (x) = x

بعمـــل جـــدول للقيم x والتي تعود للأعداد الحقيقية سنحصل على قيم f (x) والتي تعود للأعداد الحقيقية كالآتي:

x : … , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …

f (x): … , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …

وبذلك فإن رسم الدالة هي الخط الأفقي القطري الذي يظهر بالشكل رقم (1) التالي:



الشكل رقم (1)

رسم الدالة f (x) = x

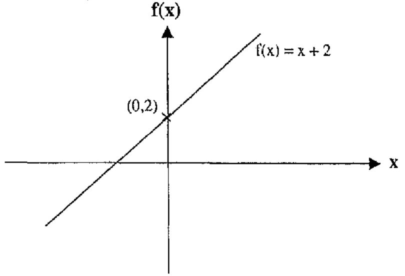
b) f (x) = x + 2

بالاســتعانة بالرســـم السابق والذي يمثل الشكل f (x) = x بإضافة الثابت 2 نحصل على الجدول:

x : … , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …

f (x): … , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , …

بمعنى أنه بزيادة ذلك الثابت قيم المتغير التابع y ازدادت بمقدار ذلك الثابت عن الدالة الأصلية والتي تم رسمها في الفرع (a) أعلاه. وبذلك فإن رسم هذه الدالة سيظهر في الشكل رقم (2) أدناه:



الشكل رقم (2)

رسم الدالة $f(x) = x + 2$

ويلاحظ من هذا الفرع (b) من المثال أنه بإضافة أو طرح ثابت معين لدالة فإن الرسم سيكون مشابه للرسم الأصلي ولكن بإضافة أو طرح الثابت من قيم الدالة.

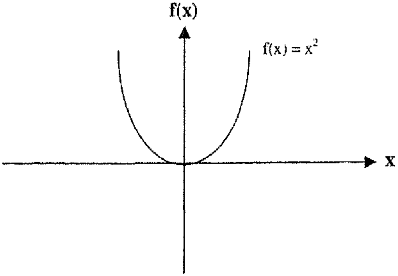
c) $f(x) = x^2$

الجدول المناسب لرسم هذه الدالة هو:

$x : \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

$f(x): \ldots, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, \ldots$

بمعنى أن قيم الدالة جميعها موجبة وذلك لأن تربيع القيم الموجبة والسالبة للمتغير x ستعطينا قيمة موجبة للمتغير y. وبالتالي فإن الرسم سيظهر بالشكل رقم (3) التالي:



الشكل رقم (3)

رسم الدالة $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

بمـــا أنه لا يمكن جذر القيم السالبة لذلك فيجب أن تكون قيم x هي فقط قيم موجبة بمعنى أن منطلق هذه الدالة Domain هو القيم الموجبة. ونكتب بذلك:

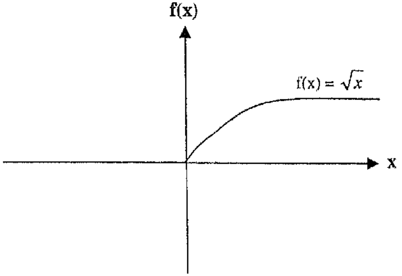
$f(x) = \sqrt{x}$, $\qquad x \geq 0$

وعن جدول قيم هذه الدالة لدينا:

x : 0 , 1 , 2 , 3 , ...

f (x): 0 , 1 , 4 , 9 , ...

وبالتالي فإن رسم هذه الدالة هو بالشكل رقم (4) التالي:



الشكل رقم (4)

رسم الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

يلاحظ من خلال المثال (5) السابق أن جميع الدوال التي تم رسمها هي لها شكل واحد لمنطلق معين. أما في المثال (6) التالي سنعرض كيفية رسم الدوال التي لها أكثر من شكل لأكثر من منطلق محدد.

مثال 6

ارسم الدوال التالية Graph the following functions:

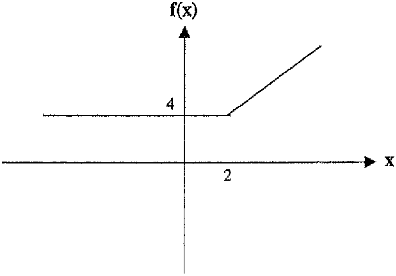
$$a)\ f(x) = \begin{cases} 4, & x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

لرسم هذه الدالة وبالاستعانة بجدول القيم لدينا الجدول التالي:

x : ... –2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ...

f (x): ... 4 , 4 , 4 , 4 , 4 , 5 , 6 , 7 ...

حيث تم التعويض في الشكل الثابت للدالة وهو 4 لجميع القيم للمتغير x أقل مـن 2 أما عندما أصبح x يساوي 2 أو أكثر تم التعويض في الشكل الآخر للدالة وهو x + 2. وبذلك فإن رسم هذه الدالة يظهر في الشكل رقم (5) التالي:



الشكل رقم (5)

رسم الدالة في المثال (6) الفرع (a)

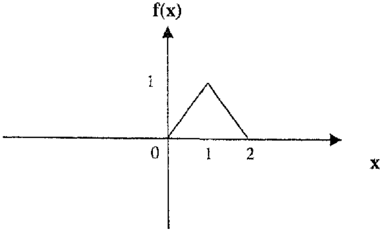
$$b)\ f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

وبعمل جدول عن طريق التعويض في الشكل المناسب نحصل على:

x : ... −1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ...

f (x): ... 0 , 0 , 1 , 0 , 0 , ...

وبالتالي فإن الشكل رقم (6) التالي هو رسم هذه الدالة:



الشكل رقم (6)

رسم الدالة في المثال (6) الفرع (b)

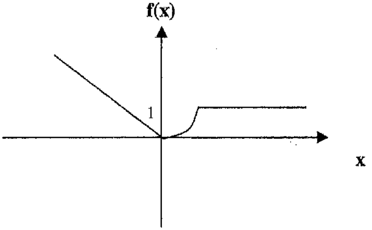
$$c)\ f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

جدول قيم هذه الدالة هو:

x : ... , −2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ...

f (x): ... , 2 , 1 , 0 , 1 , 1 , 1 , ...

وبذلك فإن رسم هذه الدالة يظهر في الشكل رقم (7) التالي:



الشكل رقم (7)

رسم الدالة في المثال (6) الفرع (c)

5.4 أنواع الدوال Kinds of Functions:

الدالة التربيعية والقطع المكافئ Quadratic Functions and Parabolas

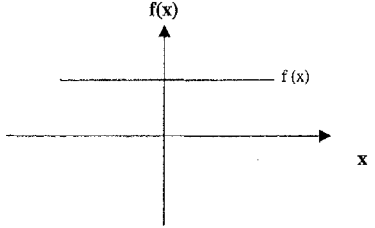
سنعرض في هذا المبحث أنواع الدوال بتسمياتها المختلفة كلاً حسب تعريفها وشكل الدالة الخاصة بها ورسمها وكذلك التطبيقات المختلفة لهذه الدوال.

We will present all kinds of functions with their definitions, graphs, and all applications as follows.

a) Constant Functions:

$f(x) = a$, where a is a real constant

for example, $f(x) = 2$ and it's graph is:



الشكل رقم (8)

رسم الدالة الثابتة $f(x) = 2$

تعتبـــر دالة العائد الحدي Marginal Revenue (MR) من الأمثلة الاقتصادية المهمة للدالة الثابتة، حيث أن العائد الإضافي المستحصل من بيع وحدة إضافية من الناتج هو الذي يمثل العائد الحدي. فإذا كانت جميع الوحدات تباع بنفس السعر فإن العائد الحدي سيساوي السعر الذي تباع به وحدة الناتج.

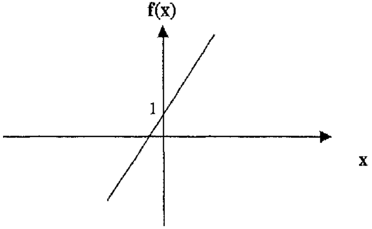
b) Linear Function

$f(x) = a x + b$, where a and b are real constants, $a \neq 0$

وهــذه الدوال الخطية والتي تتمثل بشكل معادلة خط مستقيم $f(x) = a x + b$

حيث أن a , b هي ثوابت حقيقية.

for example, $f(x) = 2x + 1$ and it's graph is:



الشكل رقم (9)

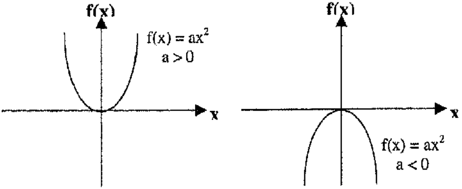
رسم الدالة الخطية $f(x) = 2x + 1$

c) Quadratic Functions:

$f(x) = a x^2 + b x + c$, where a , b and c are real constants , $a \neq 0$

أمــا عن رسم هذه الدوال التربيعية فهي عبارة عن منحنى معين حسب شكل الدالة

for example, $f(x) = a x^2$ and it's graph is:



الشكل رقم (10)

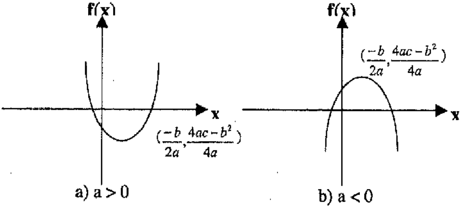
رسم الدالة التربيعية $f(x) = ax^2$

Theorem:

The graph of the quadratic function $f(x) = a x^2 + b x + c$ $(a \neq 0)$ is a parabola that opens upward if $a > 0$ and downward if $a < 0$. Its vertex (which is the lowest point when $a > 0$ and the highest point when $a < 0$) is at the point.

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad \text{and} \qquad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

وعـن رسـم الدالـة التربيعية بتعيين نقطة الرأس أو نقطة الذروة vertex سيكون بالشكل رقم (11) التالي:



الشكل رقم (11)

رسم الدالة التربيعية وتعيين نقطة الرأس vertex

ويجب ملاحظة النقاط التالي في رسم x تعريف الدوال التربيعية كالتالي:

1) If $b = c = 0$, the quadratic function reduces to $f(x) = a x^2$, and the coordinates of the vertex given by the above theorem reduce to $x = y = 0$.

2) To get the y-axis of the vertex, it is easier to substitute the value $x = \frac{-b}{2a}$ into the equation of the parabola instead of remembering the formula.

3) The parabola is symmetrical about the vertical line through the vertex.

الأمثلة التالية ستوضح استخدام هذه النقاط في رسم الدوال التربيعية كالآتي:

مثال 7

ارسم الدالة التربيعية التالية وحدد نقطة الرأس أو الذروة.

Graph the following function and find its vertex.

$f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

بمقارنة هذه الدالة مع الشكل العام للدالة التربيعية نجد أن:

$a = 2 \quad , \quad b = -8 \quad , \quad c = 5$

وبالتالي لتحديد نقطة الرأس vertex علينا التعويض لإيجاد قيمة كل من y , x كالتالي:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

ويمكن التعويض المباشر في الدالة عن قيمة x = 2 لإيجاد قيمة y أي f(x) بالشكل:

$$y = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 5$$
$$= 8 - 16 + 5 = -3$$

أو يمكن إيجاد قيمة y بالتعويض في القانون المحدد بالنظرية للحصول على نفس القيمة كالآتي:

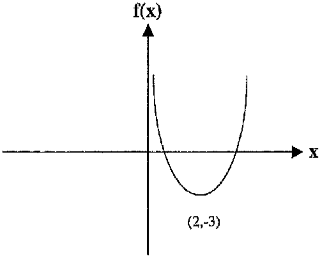
$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{(4)(2)(5)(-8)^2}{4(2)} = \frac{40 - 64}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

ويمكـــن بسهولة ملاحظة أن التعويض المباشر أسهل وأسرع من التعويض الآخر.

أمـــا عن رسم الدالة فيظهر في الشكل (12) التالي بعد عمل الجدول التالي لقيم الدالة:

x : ... , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , ...

f (x) : ... , 5 , -1 , -3 , -1 , 5 , ...



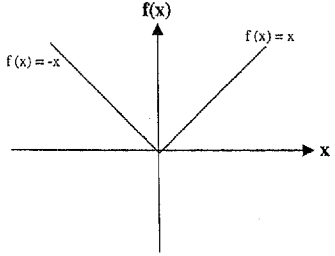
الشكل رقم (12)

رسم الدالة للمثال رقم (7)

b) Absolute value function:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

وعـــن رسم هذه الدالة والتي تسمى دالة القيم المطلقة فلدينا الشكل رقم (13) التالي:



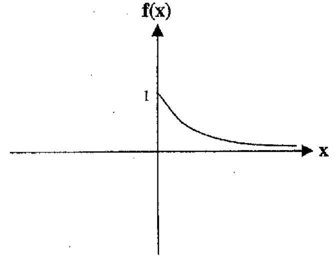
الشكل رقم (13)

رسم دالة القيمة المطلقة

e) Exponential function:

$f(x) = e^{g(x)}$

for example, $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$ and its graph is:



الشكل رقم (14)

رسم الدالة الأسية

f) Logarithmic Function:

$$f(x) = \ln x$$

ومـــن المعروف أن هناك بعض الخصائص للوغاريتمات والتي من الممكن الاستفادة منها للتعامل مع الدوال اللوغاريتمية وهي:

1) $\ln x y = \ln x + \ln y$

2) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

3) $\ln x^n = n \ln x$

4) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

ومن المعروف أيضاً أن الدالة الأسية هي معكوس الدالة اللوغاريتمية. وعادة ما يتم التعامل مع الدوال اللوغاريتمية بعد تحويلها إلى دوال أسية، حيث أن:

$$Y = e^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln e \quad \Rightarrow \quad x = \ln y$$

وســـيتم الآن وبعد التعرف على المفاهيم السابقة وعلى أنواع الدوال وكيفية رســـم تلـــك الدوال الدخول في بعض الأمثلة التطبيقية والتي لها أهمية كبيرة لفهم وتحديد الدور الأساسي للمفاهيم الرياضية في الحياة العملية.

مثال 8

إحـــدى شـــركات صـــناعة التلفـــزيون تدعي بأن الكلفة الكلية لإنتاج x من الأجهزة يمكن أن توصف حسب الدالة التالية:

A company produces t.v.'s claims that total production cost for x t.v.'s can be described by:

$$c(x) = 1000 + 200x$$

Find: a) The constant cost — الكلفة الثابتة

b) Graph the function — رسم الدالة

c) The total cost to produce 100 t.v.'s — كلفة إنتاج 100 جهاز

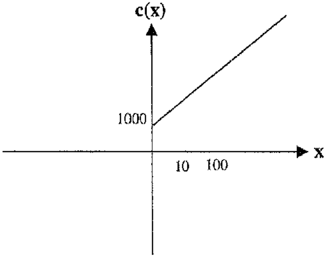
للـتعامل مع هذه الدالة الخطية علينا مقارنتها مع الشكل العام للدالة الخطية وبالتالي فإن:

$$a = 200 \quad , \quad b = 1000$$

وبذلك فإن الكلفة الثابتة هي $c(0) = 1000$

أمـا عن رسم الدالة الخطية فيمكن ذلك باستخدام الدول التالي والرسم الذي يظهر في الشكل رقم (15) التالي:

x :	0	10	100	1000	...
c (x) :	1000	3000	21000	201000	...



الشكل رقم (15)

رسم الدالة الخطية $C(x) = 1000 + 200x$

وأخيراً فإن كلفة صنع 100 جهاز هو:

$$c(100) = 1000 + 200(100)$$
$$= 21000$$

مثال 9

مجمـــع سكني يحوي على خزان وقود لتزويد المجمع بالوقود. يتم تعبئة هذا الخـــزان في الأول من كانون الثاني ولا توجد أية إضافة للوقود حتى نهاية الشهر. لنفـــرض أن t يمـــثل عـــدد الأيـــام بعد الأول من كانون الثاني وأن y يمثل عدد الغالونات من الوقود في الخزان. من خلال سجل المصروفات لوحظ وجود علاقة بين t و y تتمثل تقريباً بالمعادلة التالية:

Fuel conception for a block is given by:

$y = 30000 - 400\,t$, where t is # of days after Dec. 1 st and y is # callon's of fuel

Graph the function and find number of callon's of fuel remains after 20 days of conception.

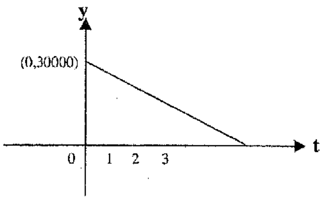
هذه الدالة الخطية لمصروفات الوقود تكتب بالشكل التالي:

$y = 30000 - 400\,t \quad , \quad 0 \le t \le 31$

وبذلك فإن جدول القيم هو:

x :	0	1	2	3	… 31
y :	30000	29600	29200	28800	

وأن رسم الدالة يظهر في الشكل رقم (16) التالي:



الشكل رقم (16)

رسم الدالة للمثال رقم (9) $y = 30000 - 400t$

وأخيراً فإن ما تبقى من الوقود بعد مرور 20 يوماً هو:

$$y = 30000 - 400\ (20) = 30000 - 8000 = 2200$$

مثال 10

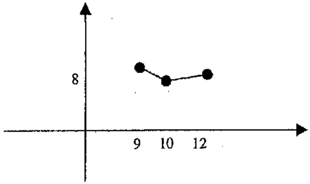
إحدى الشركات الصناعية الصغيرة طاقتها الإنتاجية محدودة y ويرتبط معدل الكلفة بحجم الإنتاج. وقد لوحظ أن معدل كلفة إنتاج 9 وحدات هو 8.5 دينار ومعدل كلفة إنتاج 10 وحدات هو 8 دنانير وأما معدل كلفة إنتاج 12 وحدة فهو 8.25. أوجد العلاقة الدالية التي تربط معدل الكلفة والإنتاج وارسم تلك الدالة.

A small factory with limited resources has the following data:

# products :	9	10	12
cost :	8.5	8	8.25

State and graph the function that relates # of products with cost

واضح هنا أن جدول عدد الوحدات المنتجة والكلفة هو عبارة عن دالة تربط هذين المتغيرين وبذلك فإن رسم هذه الدالة سيظهر في الشكل رقم (17) التالي:



الشكل رقم (17)

رسم الدالة للمثال رقم (10)

والمخطط يشير إلى أن الدالة تتناقص ثم تتزايد وبذلك فإن هذه العلاقة تصف دالة تربيعية Quadratic function.

مثال 11

أحـــد محـــلات بيع الأصباغ يبيع الغالون الواحد من الدهان بـــ4 دنانير إذا كانت طلبية المستهلك أقل من 100 غالون. ويبيع بسعر 3 دنانير للغالون إذا كانت الطلبـــية علـــى الأقـــل 100 غالون، بالإضافة لذلك فقد منح صاحب المحل خصم مقـــداره 50 ديـــناراً لمن يشتري على الأقل 500 غالون من الدهان. ما هي قائمة المبـــيعات $f(x)$ باعتـــبارها دالـــة لعدد الغالونات المباعة x ثم أوجد قائمة بيع 50 غالون، 200 غالون و1000 غالون من الدهان.

A small company for selling paints sells each gallon by 4 J.D. if the order less than 100 gallon. And sells each gallon by 3 J.D. if the order is at least 100 gallon. Also, the owner gives a discount by 50 J.D. for those buying at least 500 gallons. Write the function and find the price for selling 500 gallon, 200 gallons, and 1000 gallons.

لنفرض أن عدد الغالونات المباعة هي x بسعر 4 دنانير للكمية أقل من 100 غالون وبسعر 3 دنانير للكمية على الأقل 100 غالون، بالإضافة إلى الخصم الثابت بالمقدار 50 ديناراً والذي يجب أن يطرح من سعر البيع إذا كانت الكمية على الأقل 500 غالون وبالتالي فإن الدالة ستكون:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \le x < 100 \\ 3x, & 100 \le x < 500 \\ 3x - 50, & x \ge 0 \end{cases}$$

وعليه فإن قائمة بيع 50 غالون ستكون:

$f(50) = 4(50) = 200$

وقائمة بيع 200 غالون هي:

$f(200) = 3(200) = 600$

أما قائمة بيع 1000 غالون فهي:

$f(1000) = 3(1000) - 50 = 2950$

5-5 تركيب الدوال Combinations of functions:

سنعرض هنا في هذا المبحث كيفية تركيب دوال جديدة من الدوال الأصلية عن طريق استخدام بعض العمليات والتي يمكن تلخيصها على مجاميع مختلفة كالآتي:

1) Arithmetic operations on functions:

If f (x) and g (x) are two functions on the same variable x. Then:

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

c) $(f . g)(x) = f(x) . g(x)$

d) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$

ويتضح من الأشكال أعلاه أن العمليات الجبرية من جمع وطرح وضرب وقسمة على الدوال معرفة وموجودة إن كانت الدوال موجودة للحصول على دوال جديدة باسم f+g ، f-g ، f.g ، $\frac{f}{g}$.

أما عن منطلق الدوال الجديدة هذه فهو عبارة عن مجموعة التقاطع لمنطلقي الدالتين الأصليتين مع مراعاة عدم إدخال القيم التي تجعل منطلق الدالة $\frac{f}{g}$ غير معرفاً من خلال القسمة.

The domain of the functions f+g , f-g , f.g is defined to be the intersection of the domains of f and g. for $\frac{f}{g}$ the domain is the intersection of f and g with the points where g (x) = 0 excluded.

وسيتم من خلال الأمثلة التالية تعريف هذه العمليات الرياضية كالآتي:

مثال 12

Let f (x) = x and g (x) = x^2 . Find (f+g) (x) , (f-g) (x) , (f.g) (x), $(\frac{f}{g})(x)$ and state the domains.

عندما تكون:

f (x) = x and g (x) = x^2 then:

(f+g) (x) = f(x) + g(x) = x + x^2

(f-g) (x) = f(x) - g(x) = x - x^2

(f.g) (x) = f(x) . g(x) = x . x^2 = x^3

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^x} = \frac{1}{x}$$

وواضح أن منطلق الدوال الناتجة هو جميع الأعداد الحقيقية $\Re$ باعتبار أن منطلق الدالة f هو $\Re$ ومنطلق الدالة g هو $\Re$ ما عدا أن منطلق الدالة الأخيرة $\frac{f}{g}(x)$ هو $\Re$ ما عدا القيمة x = 0 والتي تجعل المقام صفراً.

مثال 13

Let f (x) = 1 + $\sqrt{x-2}$ and g (x) = x − 1

Find (f+g) (x) , (f-g) (x) , (f.g) (x) , $\frac{f}{g}(x)$ and state the domains.

بافتراض أن:

f (x) = 1 + $\sqrt{x-2}$

فإن منطلق الدالة f هو: $[2 , \infty)$

وبافتراض أن:

g (x) = x - 1

فإن منطلق الدالة g هو: $(-\infty , \infty)$

وبذلك فإن:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 1 = x + \sqrt{x-1}$$

$$\begin{aligned}(f-g)(x) = f(x) - g(x) &= 1 + \sqrt{x-2} - (x-1) \\ &= 1 + \sqrt{x-2} - x + 1 \\ &= 2 - x + \sqrt{x-2}\end{aligned}$$

$$(f.g)(x) = f(x)\,g(x) = (1 + \sqrt{x-2})(x-1)$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1+\sqrt{x-2}}{x-1}$$

واضح أن منطلق جميع الدوال f+g ، g−f و f.g هو:

$[2, \infty) \cap (-\infty, \infty) = [2, \infty)$

وكـذلك هـو منطلق الدالة الأخيرة $\frac{f}{g}$ والسبب أن القيمة التي تجعل المقام صفراً لهذه الدالة هو x = 1 والذي هو ليس موجودة في منطلق الدالة أصلاً.

2) Composition of functions:

ويطلق على هذا المفهوم تركيب الدالة من دالة أو دوال أخرى بالشكل:

$f \circ g(x) = f(g(x))$

and $g \circ f(x) = g(f(x))$

والتـي تخص دالتين f و g ويمكن من أعلاه إيجاد الدالة f للدالة g أو إيجاد الدالة g للدالة f.

وسيتم توضيح المعنى من خلال الأمثلة التالية:

مثال 14

Let $f(x) = x - 7$, and $g(x) = x^2$

Find $f \circ g(x)$ and $g \circ f(x)$

إذا كان:

$f(x) = x - 7$, and $g(x) = x^2$

فإن:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2) \\ &= x^2 - 7 \end{aligned}$$

وكذلك فإن:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x - 7) \\ &= (x - 7)^2 \end{aligned}$$

مثال 15

Let $f(x) = x - 1$, and $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

Find $f \circ g(x)$ and $g \circ f(x)$

إذا كان:

$f(x) = x - 1$, and $g(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

فإن:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(1 + \sqrt{x-2}) \\ &= 1 + \sqrt{x-2} - 1 = \sqrt{x-2} \end{aligned}$$

وأن:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x - 1) \\ &= 1 + \sqrt{x-1-2} \\ &= 1 + \sqrt{x-3} \end{aligned}$$