الفصل السادس

6

المصفوفات

الرياضيات

في العلوم الإدارية والاقتصادية

الفصل السادس
المصفوفات
Matrices

6-1 مقدمة Introduction:

سيتناول هذا الفصل مفهوم المصفوفات Matrices ونظرية المصفوفات Matrices Theory من بداية تعريفها Their Definitions إلى الرموز الخاصة بالمصفوفات Notation and Terminology of Matrices، إيجاد المبدلة Transpose والمحددات Determinants ومعكوس المصفوفة The Inverse. ويتضمن الفصل جميع العمليات الجبرية للمصفوفات من جمع وطرح Add and Subtract والضرب في ثابت وضرب مصفوفتين Multiplications، وكذلك يتضمن الفصل حل أنظمة المعادلات الخطية بواسطة المصفوفات Use Matrices to Solve Systems of Linear Equations وسيتضمن الفصل العديد من الأمثلة Examples والأمثلة التطبيقية Applied Examples وسيتضمن أيضاً في نهايته على العديد من الأسئلة Exercises.

يتألف هذا الفصل من المباحث التالية: المبحث 6-2 المصفوفات matrices والمبحث 6-3 الجمع والطرح للمصفوفات Addition and subtraction of matrices والمبحث 6-4 ضرب المصفوفات multiplication of matrices والمبحث 6-5 المصفوفة الأحادية (المتماثلة) identity matrix والمبحث 6-6 ضرب المصفوفة في نفسها والمبحث 6-7 قوانين على المصفوفات Rules for matrices والمبحث 6-8 المحددات determinants والمبحث 6-9 المبدلة للمصفوفة Transpose of matrix والمبحث 6-10 معكوس المصفوفة Inverse of a matrix وأخيراً المبحث 6-11 حل المعادلة الخطية باستخدام المصفوفات solving system of linear equations using matrices.

6-2 المصفوفات Matrices:

لو فرضنا هناك مصنع firm لإنتاج ثلاثة أنواع من السلع Three Types of Goods وهـي g_1 ، g_2 ، g_3 والتـي تباع إلى اثنان من الشركات المستهلكة Two Customers c_1 ، c_2. وكانت المبيعات الشهرية مدرجة في جدول رقم (1) التالي:

		Goods		
		g_1	g_2	g_3
Customers	C_1	5	4	7
	C_2	6	8	10

جدول رقم (1)

مبيعات ثلاث سلع لشركتين

حيث يتضح أنه خلال الشهر باع المصنع 5 وحدات من النوع الأول g_1 إلى المسـتهلك الأول c_1، وباع 10 وحدات من النوع الثالث g_3 إلى المستهلك الثاني c_2 وهكذا لقراءة بقية القيم.

عـرض البيانات في هذا الشكل للجدول المرتب والذي يمثل شكل مستطيلي Rectangular Array وإذا تـم إلغـاء العـناوين مـن الجدول سوف نحصل على مستطيل مرتب من الأرقام والذي يمثل المصفوفة Matrix بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

وبصـورة عامة، أي مستطيل من البيانات محاط بزوج من الأقواس يدعى مصـفوفة Matrix. ومفـردات الأرقام التي تكون هذا المستطيل تدعى بالعناصر Elements أو المفـردات Entries، والمصفوفة تتألف من صفوف Rows وأعمدة Columns.

المصـــفوفة أعـــلاه تـــتكون من صفين Two Rows وثلاثة أعمدة Three Columns وبالتالـــي نقـــول بأن هذه المصفوفة من الدرجة Order 3 × 2، ونعني بالدرجـــة order هنا حجم المصفوفة من عدد صفوفها وعدد أعمدتها. ويتضح مما سبق أنه يمكن تعريف المصفوفة كالآتي:

Matrix:

Is a rectangular array of numbers. The numbers are called elements, and the general form of matrix, say A, is:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يتضح أن المصفوفة هي مستطيل من الأرقام الحقيقية المرتبة ومغلقة بأقواس كبيرة، وبصورة عامة المصفوفات تعرف بالحروف بالكبيرة مثل A ، B و C.

وتعـــرف درجـــتها Order بحاصـــل ضرب الصفوف في الأعمدة m × n، ويعـــرف كـــل عنصر Element من عناصر المجموعة بحرف صغير a_{ij} ورقمين صغيرين الأول i يمثل رقم الصف والثاني j يمثل رقم العمود.

والتالي أمثلة مختلفة للمصفوفات:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ويتضح أن A تحتوي على ثلاث صفوف وعمودين وبالتالي فإن درجتها Order هي 2 × 3 حيث أن عناصر الصف الأول Elements in First Row (5 ، 4) وعناصر العمود الأول Elements in First Column (1 0 4). المصفوفة B هي مصفوفة مربعة Square Matrix وذلك لتساوي عدد الصفوف وعدد الأعمدة، أي أن درجتها order هو 2 × 2. والمصفوفة C تسمى مصفوفة عمودية Column Matrix وذلك لكونها تحتوي على عمود واحد وثلاثة صفوف وأن درجتها order هو 3 × 1. أما المصفوفة D فتتكون من قيمة واحدة. وأخيراً فإن المصفوفة E هي مصفوفة صفية row matrix وأن درجتها order هو 5 × 1 وذلك لكونها تحتوي على صف واحد وخمسة أعمدة.

وسنقوم الآن بالتعرف على بعض المصفوفات المعروفة بأسماء معينة وبأشكال محددة كالآتي:

المصفوفة المربعة Square Matrix: وهي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة ودرجتها n × n أو m × m، مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ويمكن أن نقول أن A من الدرجة n ونكتب A_n للمصفوفة المربعة.

المصفوفة الصفرية zero matrix: وهي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار zero، ويرمز لها عادة بالرمز 0 وتكتب بالشكل التالي:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفات المتساوية equal matrices: وهي المصفوفات التي تحتوي على نفس العدد من الصفوف والأعمدة أو أن درجتيهما متساوية $m_1 \times n_1 = m_2 \times n_2$

وأن كـل عنصـرين لهما نفس الموقع يكونان متساويين، مثلاً المصفوفتان B و C متساويتان equal matrices إذا كانتا كما يلي:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

العناصـر القطـرية diagonal elements: وهي العناصر التي تظهر على القطـر الرئيسـي للمصفوفة والتي ظهرت في كتابة الشكل العام للمصفوفة. وهي العناصر a_{11} , a_{22} , ... , a_{nn}، أي هي تلك العناصر التي تقع على نفس رقم الصف والعمود. مثلاً العناصر القطرية للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

هي العناصر: $a_{11} = 1$ ، $a_{22} = 5$ ، $a_{33} = 9$

المصفوفة القطرية diagonal matrix: هي المصفوفة المربعة square التي يكـون جمـيع عناصرها أصفار zero باستثناء عناصر القطر الرئيسي diagonal elements. ويمكن كتابة المصفوفة القطرية بالشكل التالي:

$$\text{diag}\,(a_{11} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{nn})$$

ومن أمثلة المصفوفات القطرية، المصفوفة B التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حيث أنها مصفوفة قطرية من الدرجة 3 × 3 والتي يمكن كتابتها بالشكل الآخر التالي:

$$B = \text{diag} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6-3 الجمع والطرح للمصفوفات:

Addition and subtraction of matrices

يمكن إجراء عملية جمع عدة مصفوفات أو عملية طرح لمصفوفتين إذا كان لهما نفس الحجم أو الدرجة the same size or order إذا كانت المصفوفتان B,A من نفس الدرجة، ولتكن m × n، فإن مجموعهما A + B، ونطلق عليه اسم C، سيكون من الدرجة m × n والعناصر نحصل عليها من جمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين.

If A and B are both of the same size or order. Then, the sum A + B is the matrix obtained by adding the elements of B to the corresponding elements of A. Similarly, we can obtain A-B

وسيتم توضيح هذه العملية الواضحة من خلال المثال التالي:

مثال 1

$$\text{Let } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ and}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Find, if possible A + B , B + A , A − B , B − A , A + C , B − C

يمكن هنا ملاحظة أن درجة order المصفوفة A هو 3 × 2 وكذلك درجة المصفوفة B، أما المصفوفة C فإن درجتها هو 2 × 2 وبالتالي يمكننا جمع

المصــفوفتين A و B وكذلك طرحهما أما أي عملية جمع أو طرح لأي منهما مع المصفوفة C فلا يمكن ذلك، وبالتالي فإن النتائج ستكون كما يلي:

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+3 & 3+2 & 5+4 \\ 10+4 & 7+3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B + A \begin{bmatrix} 3+4 & 2+3 & 4+5 \\ 4+10 & 3+7 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 14 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ هنا أن $A + B = B + A$

أما عن طرح المصفوفات فلدينا:

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-3 & 3-2 & 5-4 \\ 10-4 & 7-3 & 6-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B - A \begin{bmatrix} 3-4 & 2-3 & 4-5 \\ 4-10 & 3-7 & 2-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $A - B = -(B - A)$

6.4 ضرب المصفوفات Multiplication of matrices:

لتوضـــيح عملية الضرب سنبدأ بتوضيح عملية ضرب مصفوفة في ثابت ثم ضرب مصفوفة صفية في مصفوفة عمودية ثم ضرب مصفوفتين كالآتي:

6-4-1 ضرب مصفوفة في ثابت Scalar multiplication:

ويعنـــي ضـــرب كـــل عنصر من عناصر المصفوفة، ولتكن A، في الثابت الحقيقي، وليكن c، لنحصل على الناتج بالشكل cA ويمثل مصفوفة من نفس درجة المصـــفوفة A، أما عناصرها فناتجة عن ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة A بالثابت c.

If A is any matrix and C is any constant (scalar). Then, the product cA is the matrix obtained by multiplying each element of A by c.

والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال 2

$$\text{Let } B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, \quad \text{and } c = 5,\ d = \frac{1}{5}$$

Find, if possible cB and dB

واضح أن ناتج الضربين cB و dB كالآتي:

$$cB = 5 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 25 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$dB = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 2/5 & 5/5 \\ 1/5 & 0/5 \end{bmatrix}$$

ويتضح من أعلاه أن عملية الضرب أو عملية القسمة لمصفوفة مع ثابت scalar يتم بتغيير جميع عناصر المصفوفة بالضرب أو القسمة على ذلك الثابت.

6-4-2 ضرب مصفوفية صفية في مصفوفة عمودية:

Multiplication of a row by a column

افترض أن هناك مصنع ينتج أربعة أنواع من السلع وكل سلعة تحتاج إلى عدد من الوحدات الأولية وكما معرف في المصفوفة الصفية row matrix، A، التالية:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} D & R & N & Q \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

وهذا يعني أن البضاعة D تحتاج إلى 6 وحدات والبضاعة R تحتاج إلى 5 وحـــدات والبضـــاعة N تحـــتاج إلـــى 4 وحدات أما البضاعة Q فتحتاج إلى 10 وحـــدات. وإذا كان كل وحدة من هذه الوحدات المختلفة لهذه السلع هي كما موضح في المصفوفة العمودية column matrix، B وهي:

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

فـــإن كلفة كل وحدة من وحدات D هو 7 وكلفة كل وحدة من وحدات R هو 8 وكلفة كل وحدة من وحدات N هو 5 أما كلفة كل وحدة من وحدات Q فهو 3.

فلإيجاد كلفة تصنيع هذه السلع الأربعة للمصنع سيكون:

$$Cost = AB = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (6)(7) + (5)(8) + (4)(5) + (10)(3)$$
$$= 42 + 40 + 20 + 30$$
$$= 132$$

وبالإشارة إلى الأرقام السابقة فقد قمنا بضرب الرقم الأول من المصفوفة A فـــي الرقم الأول من المصفوفة B والرقم الثاني من A بالرقم الثاني من B والرقم الثالث من A بالرقم الثالث من B والرقم الرابع من A بالرقم الرابع من B. وبعدها قمنا بجمع هذه النواتج الأربعة لنحصل على قيمة واحدة هي 132.

وهـذه الطريقة لصيغة الضرب يمكن تطبيقها لضرب أي صف row بعمود column وهذه الطريقة من الضرب يمكن تلخيصها كالآتي:

إذا كان لدينا الصف i من الدرجة 1 × p بالشكل التالي:

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{ip}]$$

ولدينا العمود j من الدرجة p × 1 بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} b_{ij} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{bmatrix}$$

فإن حاصل الضرب هو قيمة واحدة one value نحصل عليها كالآتي:

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{ip}] \begin{bmatrix} b_{ij} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pi} \end{bmatrix} = a_{i1}\, b_{ij} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$$

مثال 3

إذا كانت لدينا المصفوفات التالي:

Given the following matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \text{ and } D = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Find AB and CD

لإيجاد حاصل الضرب AB لدينا:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = (3)(2) + (0)(6) + (4)(5)$$
$$= 6 + 0 + 20 = 26$$

ولإيجاد حاصل الضرب CD لدينا:

$$CD = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = (10)(2) + (7)(5) + (8)(3) + (4)(6)$$
$$= 20 + 35 + 24 + 24 = 103$$

ويجدر بنا هنا ذكر الملاحظات المهمة التالية والتي يجب مراعاتها عند ضرب المصفوفات وهي:

1) يجب أن نضع مصفوفة الصف أولاً على جهة اليسار Left ومصفوفة العمود على جهة اليمين Right كما في المثال السابق.

2) يجب أن تكون عدد المفردات أو العناصر number of elements في مصفوفة الصف تساوي عدد العناصر في مصفوفة العمود كما في المثال السابق، ولهذا لا يمكن ضرب AD أو CB لكونها غير معرفة not defined.

3-6-4 ضرب مصفوفتين Multiplication of two matrices:

يمكن توسيع طريقة الضرب السابق ذكرها لتشمل ضرب المصفوفات التي تحتوي على أكثر من صف rows أو أكثر من عمود columns بالاعتماد على طريقة ضرب الصف في العمود لتتكرر إلى ضرب صفوف المصفوفة الأولى بأعمدة المصفوفة الثانية.

وبصـــورة عامة in general، افرض لدينا المصفوفة C الناتجة عن ضرب المصـــفوفتين A و B بالشكل AB، أي أن C = AB، فإن العناصر elements C_{ij} للمصـــفوفة C هـــي حاصـــل ضرب الصف i من المصفوفة A في العمود j من المصـــفوفة B. ولـــذلك فـــإن الضرب السابق والذي تم إيضاحه وعمله في الفقرة الســـابقة يسمى الضرب الداخلي inner product وذلك لأن بتكرار عملية الضرب الداخلي لصفوف المصفوفة A وأعمدة المصفوفة B نحصل على عناصر مصفوفة حاصـــل الضـــرب C. مـــع الإشارة إلى أن عملية الضرب تلك تحتاج إلى الشرط التالـــي وهـــو أن عـــدد الأعمـــدة j في المصفوفة A يساوي عدد الصفوف i في المصفوفة B، وبغير ذلك لا نستطيع الضرب.

وبالتالي يمكن تلخيص عملية ضرب المصفوفتين A و B كالآتي:

إذا كانت المصفوفة A من الدرجة m × p والمصفوفة B من الدرجة p × n فـــإن حاصـــل الضرب AB، وليكن المصفوفة C، هو من الدرجة m × n وتحدد عناصـــرها بأن يكون العنصر في الصف i و العمود j من المصفوفة C ناتج عن عملية ضرب الصف i من المصفوفة A بالعمود j من المصفوفة B.

If A is an m × n matrix and B is an p × n matrix. Then, the product AB is the m × n matrix whose elements are defined as follows: To find the element in row i and column j of AB, single out row i from A and column j from B and multiply them using inner product.

وسيتم فيما يلي توضيح عملية الضرب عن طريق الأمثلة التالية:

مثال 4

اضرب المصفوفات التالية:

Find the product AB and BA, if possible

where $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

يجب علينا أولا التحقق من شرط مساواة عدد الأعمدة columns في المصفوفة A مع عدد الصفوف rows في المصفوفة B.

وهنا قد تحقق الشرط، حيث أن عدد الأعمدة في A هو 3 وعدد الصفوف في المصفوفة B هو 3 أيضاً ولهذا نستطيع إيجاد AB.

أما عن عملية الضرب فلدينا:

سوف تكون أبعاد المصفوفة اا

$$A_{2\times3}\ B_{3\times2} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

يجب أن يكونا متساويين

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

وهنا نلاحظ أن ضرب الصف الأول في العمودين يعطينا الصف الأول للمصفوفة الجديدة، وضرب الصف الثاني في العمودين يعطينا الصف الثاني للمصفوفة الجديدة وكما يلي:

$$AB = \begin{bmatrix} (4)(1)+(3)(0)+(2)(4) & (4)(-1)+(3)(2)+(3)(2) \\ (5)(1)+(6)(0)+(0)(4) & (5)(1)+(6)(2)+(0)(3) \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$AB_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

عدد الصفوف في المصفوفة الجديدة يساوي عدد الصفوف في المصفوفة A وعدد الأعمدة في المصفوفة الجديدة يساوي عدد الأعمدة في المصفوفة B،

أما عن الضرب BA فلدينا:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

2×3

3×2 الداخل يجب أن تكون

متساوي، وهي كذلك بضربها

أبعاد المصفوفة الجديدة

$BA_{3\times 3}$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [1\ \ -1]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & [1\ \ 1-]\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & [1\ \ -1]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [0\ \ 2]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & [0\ \ 2]\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & [0\ \ 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [4\ \ 3]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} & [4\ \ 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} & [4\ \ 3]\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$BA_{3\times3} = \begin{bmatrix} (1)(4)+(-1)(5) & (1)(3)+(-1)(6) & (1)(2)+(-1)(0) \\ (0)(4)+(2)(5) & (0)(3)+(2)(6) & (0)(2)+(2)(0) \\ (4)(4)+(3)(5) & (4)(3)+(3)(6) & (4)(2)+(3)(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 10 & 12 & 0 \\ 31 & 30 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ولهـذا مـن خـلال المثال (4) أعلاه نجد إن المصفوفة الناتجة من ضرب المصـفوفة A فـي B أي AB لا تسـاوي المصفوفة الناتجة من ضرب B في A والتي هي BA، وكما تلاحظ أن أبعاد المصفوفة AB هو 2 × 2 أما أبعاد BA فهو 3 × 3.

والملاحظة الثانية نلاحظ أن الصف للمصفوفة الأولى يكون ثابت أي نضرب جميع أعمدة المصفوفة B في صف واحد من A وهكذا لكل صف؛ ويمكن ملاحظة يكـون كل عمود ثابت على مستوى العمود فالعمود الأول يضرب بجميع صفوف المصـفوفة الأولـى ومنه يكون عمود المصفوفة الجديدة، فالعمود الأول ينتج منه العمود الأول للمصفوفة الجديدة والعمود التالي للمصفوفة B ينتج منه العمود الثاني للمصفوفة الجديدة وهكذا.

مثال 5

اضرب المصفوفات التالية C و D، أي إيجاد CD و DC إذا كان كلاً منهما كما يلي:

Find the product of the matrices C and D, or find CD and DC if C and D as:

$$C_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad D_{-3\times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$C_{1\times 3}\,D_{3\times 1}$ = we can product them (3=3)

الداخل

الخارج

$$CD = \begin{bmatrix} (5)(3) + (0)(3) + (-1)(2) \end{bmatrix} = 16$$

أما لإيجاد حاصل الضرب CD فلدينا:

$$D_{3\times 1}\,C_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الداخل

الخارج

$$DC_{3\times 3} = \begin{bmatrix} (5)(3) & (5)(0) & (5)(-1) \\ (3)(3) & (3)(0) & (3)(-1) \\ (2)(3) & (2)(0) & (2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$DC = \begin{bmatrix} 19 & 0 & -5 \\ 9 & 0 & -3 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ويمكن ملاحظة كيف يؤثر العمود من المصفوفة الثانية C في المصفوفة الجديدة DC فإذا كان العمود يحتوي على zero فيكون جميع قيم العمود الجديد تساوي zero. وأيضاً نلاحظ عندما يكون هناك عمود إشارته سالبة فيكون العمود الجديد جميع قيمه سالبة. ويمكن أيضاً أن نلاحظ أن ضرب صف في عمود يكون الناتج قيمة واحدة ويكون هناك ثلاث أعمدة وثلاث صفوف وإذا غيرنا ترتيب ضرب المصفوفات كما في DC حيث تم احتساب مفردات العمود على أنها صفوف ومفردات الصف على أنها أعمدة وكانت النتيجة المصفوفة DC في أبعادها 3 × 3.

7

اضرب المصفوفات التالية إذا أمكن C , B , A

Find the product of the following matrices A, B , C, if possible.

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

لا يمكن ضرب المصفوفات التالية وذلك:

It is impossible to multiply the matrices:

$\underset{2\times2 \neq 3\times2}{A \times B}$ لعدم تساوي أعمدة A مع صفوف B

The product AB is not defined

$\underset{2\times2 \neq 3\times3}{A \times C}$ لعدم تساوي أعمدة A مع صفوف C

The product AC is not defined

$\underset{3\times2 \neq 3\times3}{B \times C}$ لعدم تساوي أعمدة B مع صفوف C

The product BC is not defined

6-5 المصفوفة الأحادية (المتماثلة) Identity Matrix:

تدعى المصفوفة المربعة square matrix مصفوفة أحادية أو متماثلة إذا كان جميع عناصرها على القطر diagonal يساوي واحد وجميع العناصر elements خارج القطر تساوي صفراً zero. والمصفوفات التالية تمثل مصفوفات أحادية متماثلة identity matrices للأحجام 2 × 2 و 3 × 3، وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وتعرف المصفوفة الأحادية المتماثلة بالحرف I عندما يكون حجمها أو ترتيبها معروف بدون غموض.