2

الوحدة الثانية

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

مقاييس النزعة المركزية

Measures of Central Tendency

المقدمة

مقياس النزعة المركزيةMeasure of Central Tendency هو تلك القيمة التي نجدها من مجموعة البيانات (Data) التي لدينا والتي تمثل هذه البيانات بشكل مقبول.

وهنالك عدة مقاييس للنزعة المركزية منها الوسط الحسابي Mean والوسيط Median والمنوال Mode. ونفضل واحد منها على الآخر حسب البيانات التي لدينا.

وقبل أن نبدأ بطرق إيجاد تلك المقاييس، سنتعرف على موضوع المئينات Percentiles والرتب المئينية والعشيرات Deciles والربيعات Quartiles أولا وذلك من أجل التسلسل في العرض.

المئينــات **Percentiles**

تعريف: المئين k هو تلك المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها k% من المشاهدات. وسنرمز للمئين k بالرمز Pk.

فمثلاً: P60 هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها 60% من المشاهدات، وطبعا يزيد عنها 40% من المشاهدات.

مثال:

ما هي المشاهدة التي يزيد عنها $\frac{1}{4}$ المشاهدات.

الحل:

المشاهدة التي يزيد عنها $\frac{1}{4}$ المشاهدات هي تلك المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{3}{4}$ المشاهدات. أي يقل عنها أو يساويها 75% من المشاهدات أي تلك المشاهدة هيP75.

ولإيجاد المئينات Percentiles للجداول التكرارية سنتبع خطوات موضحة في المثال التالي.

مثال: إذا كان لدينا التوزيع التالي:

Class	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	Total
Frequency	1	5	8	4	2	20

أوجد:P50.

الحل:

أولاً: نكتب الجدول التكراري التراكمي للتوزيع.

Upper boundaries	**Cumulative Frequency**
Less than or equal 14.5	1
Less than or equal 19.5	6
Less than or equal 24.5	14
Less than or equal 29.5	18
Less than or equal 34.5	20

ثانياً: التكرار التراكمي Cumulative Frequency للمئين 50:

$$C.F(P_{50}) = \frac{50}{100} \times Total\ \ frequency$$

$$C.F(P_{50}) = \frac{50}{100} \times 20$$

$$= 10$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن 10 تقع بين التكـرارين التراكميـين 6، 14 فيكـون P50 واقعاً بين الحدين الفعليين 19.5 ، 24.5.

19.5............................6

5 P_{50} 10 4 8

24.5..........................14

ثالثاً: بالنسبة والتناسب نجد قيمة P50

$$P50 = 19.5 + \frac{4}{8} \times 5$$

$$= 22$$

ملاحظة: تسمى الفئة التي تحوي المئين k بالفئة المئينية لذلك المئين. ففي مثالنا السابق تكون الفئة المئينية للمئين 50 هي 24.5 – 19.5

Class	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	Total
Frequency	7	13	30	19	11	80

أوجد: 1) P25 2) P60 3) P75

الحل:

نحول الجدول إلى جدول تكراري تراكمي.

Upper Boundaries	Cumulative Frequency
Less than 19.5	7
Less than 29.5	20
Less than 39.5	50
Less than 49.5	69
Less than 59.5	80

1- نجد الترتيب التراكمي للمئين 25:

$$C.F\left(P_{25}\right) = \frac{25}{100} \times 80 = 20$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نرى أن هذه القيمة تقابل 29.5.

$\therefore$ P25 = 29.5

2- نجد الترتيب التراكمي للمئين 60:

$$C.F\left(P_{60}\right) = \frac{60}{100} \times 80 = 48$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن هذه القيمة تقع بين التكرارين التراكميين 20، 50.

إذن P60 واقعاً بين 29.5 ، 39.5.

وبالنسبة والتناسب نجد P60.

	29.5 20	28	30
10	P60 48		
	39.5 50		

$$P_{60} = 29.5 + \frac{28}{30} \times 10$$

$= 29.5 + 9.3$

$= 38.8$

3- نجد الترتيب التراكمي للمئين 75 :

$$C.F\left(P_{75}\right) = \frac{75}{100} \times 80 = 60$$

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن هذه القيمة واقعة بين التكرارين التراكميين 50، 69.

	39.5 50	10	19
10	P75 60		
	49.5 69		

$$P_{75} = 39.5 + \frac{10}{19} \times 10$$

$= 39.5 + 5.26$

$= 44.76$

تعريف: الرتبة المئينية Percentile Rank لمشاهدة ما هي النسبة المئوية للتكرار التراكمي المقابل لتلك المشاهدة بالنسبة إلى مجموع التكرارات.

ولإيجاد الرتبة المئينية نتبع خطوات نوضحها في المثال التالي:

مثال:

للجدول التكراري Frequency Distribution التالي

Class	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	Total
Frequency	7	9	20	8	6	50

أوجد الرتبة المئينية

a- للمشاهدة 32   b- للمشاهدة 21

الحل:

a-

أولاً: نحول الجدول إلى جدول تكراري تراكمي

Upper Boundaries	**Cumulative Frequency**
Less than 24.5	7
Less than 29.5	16
Less than 34.5	36
Less than 39.5	44
Less than 44.5	50

ثانياً: نبحث عن موقع المشاهدة (Observation) 32 في الجدول التكراري التراكمي، وضمن الحدود الفعلية للفئات وليس ضمن التكرارات التراكمية.

فنجد أن هذه القيمة واقعة بين الحدين الفعليين 29.5 ، 34.5.

ثالثاً: وبطريقة النسبة والتناسب نجد التكرار التراكمي المقابل لتلك المشاهدة.

$$\begin{array}{cc|l|c}
 & & 29.5 \ldots\ldots\ldots\ldots 16 & \\
5 & 2.5 & 32 \ldots\ldots\ldots\ldots C.F(32) & 20 \\
 & & 24.5 \ldots\ldots\ldots\ldots 36 &
\end{array}$$

حيث التكرار التراكمي للمشاهدة (32)

$$C.F(32) = 16 + \frac{2.5}{5} \times 20$$

$= 16 + 10$

$= 26$

رابعاً: تكون الرتبة المئينية للمشاهدة 32: P.R(32)

$$P.R(32)=\frac{C.F(32)}{\text{Totalof frequency}}\times 100\%$$

$$=\frac{26}{50}\times 100\%$$

$$=52\%$$

b- نلاحظ هنا أن المشاهدة (21) أقل (24.5) لذلك نضيف فئة سابقة حدها الفعلي الأعـلى (19.5) ويكـون التكرار التراكمي الذي أقل من أو يساوي 19.5 هو (Zero).

$$\begin{array}{c|c|l|c}
 & & 19.5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Zero & \\
5 & 1.5 & 21\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C.F(21) & 7 \\
 & & 24.5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7 &
\end{array}$$

$$\therefore C.F(21)=7\times\frac{1.5}{5}+0$$

$$=2.1$$

$$\therefore P.R(21)=\frac{2.1}{50}100\%$$

$$=4.2\%$$

مثال:

إذا كانت رواتب (60) عاملاً في مصنع ما موزعة كما في الجدول التالي:

فئات الرواتب بالدينار	80-89	90-99	100-109	110-119	120-129	Total
التكرارات	6	14	20	13	7	60

أوجد:

1. الرتبة المئينية للراتب 95.
2. الرتبة المئينية للراتب 109.5.
3. الرتبة المئينية للراتب 117.

الحل:

نحول الجدول إلى جدول تكراري تراكمي

Upper Boundary	Cumulative Frequency
Less then 89.5	6
Less then 99.5	20
Less then 109.5	40
Less then 119.5	53
Less then 129.5	60

1. الراتب 95 يقع بين الحدين الفعليين 89.5 ، 99.5.

الآن بطريقة النسبة والتناسب نجد التكرار التراكمي المقابل للراتب 95

$$\begin{array}{cclcl}
 & & 89.5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 6 & \\
10 & 5.5 & 95 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & C.F(95) & 14 \\
 & & 99.5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 20 &
\end{array}$$

$$C.F(95) = \frac{5.5}{10} \times 14 + 6$$

$$= 7.7 + 6$$

$$= 13.7$$

$$P.R(95) = \frac{13.7}{60} \times 100\%$$

$$= 22.83\%$$

لاحظ أن النسبة 22.83% تعني أن 22.83 من العمال رواتبهم تقل عن أو تساوي 95 دينار.

2. ننظر للجدول التكراري التراكمي فنجد أن الراتب 109.5 يقابل تكرار تراكمي مقداره 40 لذا فإن

$$P.R\,(109.5) = \frac{40}{60} \times 100\%$$

$$= 66.67\%$$

❖ **سؤال:** ماذا نعني بالنسبة 66.67%؟

3. بالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن الراتب 117 يقع بين الحدين الفعليـين 109.5 ، 119.5 وبالنسبة والتناسب.

$$10\left[\begin{array}{l} 7.5\left[\begin{array}{l} 109.5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 40 \\ 117 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C.F(117) \end{array}\right. \\ \quad 119.5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 53 \end{array}\right]13$$

نجد أن التكرار التراكمي المقابل للراتب 117 =

$$C.F\,(117) = 40 + \frac{7.5}{10} \times 13$$

$$= 40 + 9.75$$

$$= 49.57$$

$$P.R(117) = \frac{49.75}{60} \times 100\%$$

$$= 82.92\%$$

❖ **سؤال:** ماذا نعني بالنسبة 82.92%.

إيجاد المئينات بيانياً Finding Percentiles by using graphs

لتوضيح عملية إيجاد المئينات بيانياً لنأخذ المثال التالي:

مثال:

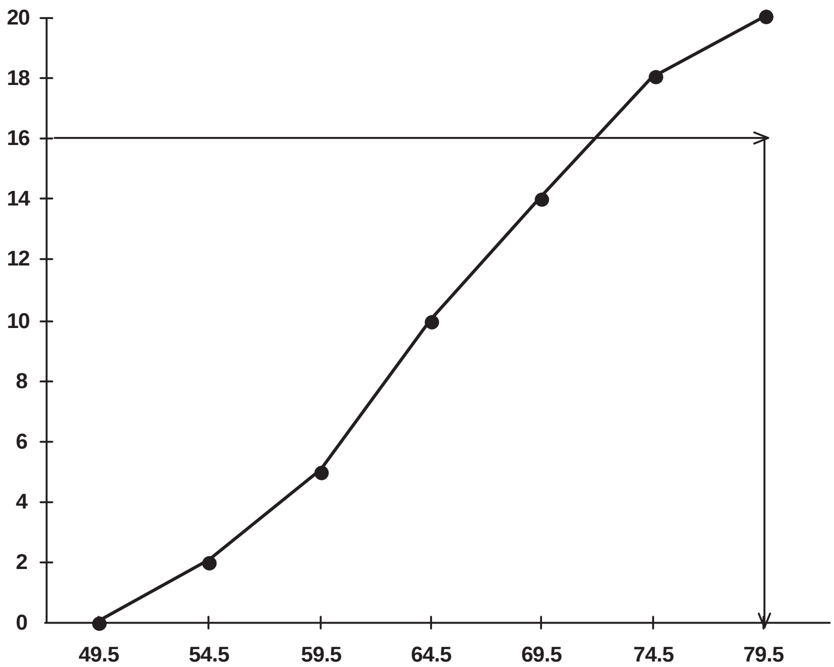
أوجد P80 للجدول التكراري التالي بيانياً.

Class	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	Total
Frequency	2	3	5	4	4	2	20

الحل:

أولاً: نرسم المنحنى التكراري التراكمي. بعد كتابة الجدول التكراري التراكمي:

Upper boundary	**Cumulative Frequency**
Less then 54.5	2
Less then 59.5	5
Less then 64.5	10
Less then 69.5	14
Less then 74.5	18
Less then 79.5	20



لاحظ: عند رسم المنحنى التكراري التراكمي يكون التكرار التراكمي المقابل للحد الفعلي 49.5 مساوياً 0.

ثانياً:
$$C.F(80)=\frac{80}{16}\times 20$$
$$=16$$

ثالثاً: على المحور الرأسي Vertical axis وعند القيمة 16 نقيم عمود، فيقطع المنحنى التكراري التراكمي في نقطة ما، ومن تلك النقطة نسقط عمود على المحور الأفقي، فيقطع المحور الأفقي Horizontal axis عند القيمة 72 فتكون هذه القيمة هي المئين 80.

$\therefore$ P80=72.

لاحظ أن عملية إيجاد المئين بهذه الطريقة تعتمد على دقة الشخص في عملية الرسم لذلك فالجواب يكون تقريبياً.

العشيرات والربيعات **Deciles and Quartiles**

تعريف: العشير (decile) k هو المشاهدة التي تقل عنها أو يساويها $\frac{k}{10}$ من مجموع التكرارات.

وسنرمز للعشير k بالرمز Dk.

فمثلاً العشير الثاني هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{2}{10}$ من مجموع التكرارات وهو نفس المئين P20.(أي D2=P20)

كذلك العشير السادس هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{6}{10}$ من مجموع التكرارات وهو نفس المئين P60. (أي D6=P60)

إذن فيمكننا القول أن العشير k هو المئين 10K. (Dk=P10k)

تعريف (Definition):

1- **الربيع الأول (First Quartile):** هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{1}{4}$ مجموع التكرارات وسنرمز له بالرمز Q1. ويسمى كذلك بالربيع الأدنى. (Lower Quartile)

2- **الربيع الثاني(Second Quartile):** هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{2}{4}$ مجموع التكرارات وسنرمز له بالرمز Q2. ويسمى كذلك بالربيع الأوسط.Midle Quartile

3- **الربيع الثالث (Third Quartile):** هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها $\frac{3}{4}$ مجموع التكرارات وسنرمز له بالرمز Q3. ويسمى كذلك الربيع الأعلى (Upper Quartile).

لاحظ أن المشاهدة التي يقل عنها $\frac{1}{4}$ مجموع التكرارات هي نفس المشاهدة التي يقل عنها 25% من مجموع التكرارات أي أن:

Q1=P25 وكذلك Q2=P50، وأيضاً Q3=P75

وبعد التعرف على العشيرات والربيعات يمكننا القول أنه لحساب العشيرات والربيعات نستخدم الطريقة المتبعة في حساب المئينات.

مقاييس النزعة المركزية **Measures of Central Tendency**

أولاً: الوسط الحسابي **Arithmatic Mean**

أ- في حالة المشاهدات المفردة:

تعريف: إذا كان لدينا المفردات x1 , x2, ... , xn فيعرف الوسط الحسابي $(\overline{x})$ لهذه المفردات بالعلاقة

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

حيث n عدد المفردات

أو باستخدام رمز المجموع

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

وبشكل مختصر أكثر

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n}$$

مثال:

أوجد الوسط الحسابي للمفردات 3، 7، 6، 5، 9؟

الحل:

$$\bar{x} = \frac{3+7+6+5+9}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{30}{5}$$

$$\bar{x} = 6$$

مثال:

إذا كان مجموع ما مع سبعة طلاب (105) دنانير، فـما هـو الوسـط الحـسابي لما مـا مـع هـؤلاء الطلبة من الدنانير؟

$$\sum x = 105 , \qquad n = 7$$

$$\therefore \ \bar{x} = \frac{105}{7} = 15$$

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي (Mean) لعلامات عدد من الطـلاب هـو (63)، وكـان مجمـوع علامـاتهم (1071). فما عدد هؤلاء الطلبة؟

الحل:

نفرض أن عدد هؤلاء الطلبة n فيكون

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\Rightarrow 63 = \frac{1071}{n}$$

$$\Rightarrow n = 17$$

ب- في حالة المشاهدات المتكررة: (Weighted mean) الوسط الموزون

تعريف: إذا كان لدينا $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مجموعة من المشاهدات وكانت تكرارات هذه المشاهدات $f_1, f_2, \ldots, f_n$ فيعرف الوسط الحسابي لها بالعلاقة

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

أو بشكل مختصر $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ ويسمى هذا الوسط بالوسط المرجح (الموزون).

مثال:

إذا كانت علامات طالب في (10) مواد موزعة كما في الجدول التالي

العلامة (x)	60	70	85	90	Total
عدد المواد (f)	2	3	4	1	10

احسب الوسط الحسابي لعلامات هذا الطالب؟

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$\bar{x} = \frac{60 \times 2 + 70 \times 3 + 85 \times 4 + 90 \times 1}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{760}{10}$$

$$\bar{x} = 76$$

مثال:

إذا كان معدل رواتب عمال ثلاثة مصانع معطاة كالآتي:

	معدل الرواتب	عدد العمال
المصنع أ	150 دينار	60
المصنع ب	140 دينار	50
المصنع جـ	100 دينار	90

جد معدل رواتب العمال في المصانع الثلاثة معا؟

الحل:

$$\bar{x}\ (\text{معدل الرواتب}) = \frac{90\times100+50\times140+60\times150}{90+50+60}$$

$= 125$ J.D.

جـ- في حالة التوزيعات التكرارية Frequency distributions

في هذه الحالة سنجد الوسط الحسابي بطريقتين وهما

1- الطريقة العامة لإيجاد الوسط الحسابي

تعريف: إذا كان لدينا جدول تكراري فيه m من الفئات مراكزها (Class-marks) هي x1, x2, ..., xm وتكراراتها المقابلة f1, f2, ..., fm على الترتيب فنعرف الوسط الحسابي.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

أو بشكل مختصر $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$ حيث x هي مركز الفئة

مثال:

أوجد الوسط الحسابي للجدول التكراري التالي:

Class	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	Total
Frequency	9	17	20	9	5	60

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

حيث x: مركز الفئة

f: تكرار الفئة

class	f	Class mark(x)	xf
20-24	9	22	198
25-29	17	27	459
30-34	20	32	640
35-39	9	37	333
40-44	5	42	210
Total	60		1840

$$\therefore \bar{x} = \frac{1840}{60}$$

$$\bar{x} = 30.67$$

2- طريقة الوسط الفرضي Assumed mean

لو أخذنا الأعداد 21، 22، 23، 24، 25 وطلبنا منك أن تجد الوسط الحسابي لها. فيمكنك إيجاده بطريقة غير مباشرة وهي أن تطرح من كل عدد من هذه الأعداد (20) فتصبح الأعداد هي 1، 2، 3، 4، 5 على الترتيب ثم تجد لهذه الأرقام الوسط الحسابي وهو $\frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ثم تضيف إلى هذه القيمة (20) فتصبح 23 وهو الوسط الحسابي للأعداد المطلوبة.

هذه الطريقة في إيجاد الوسط الحسابي تسمى طريقة الوسط الفرضي.

ويكون قانون الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي (A) للمشاهدات المفردة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو.

$$\bar{x} = A + \frac{\sum di}{n}$$

حيث $di = xi - A$

تمرين:

في المناقشة السابقة اطرح من كل مشاهدة العدد 15 (A=15) واتبع نفس الأسلوب المستخدم لتجد الوسط الحسابي للأعداد المطلوبة؟ ولاحظ هل يتغير الجواب؟

والآن لنكتب القانون المستخدم في حساب الوسط الحسابي للجداول التكرارية بطريقة الوسط الفرضي.

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

حيث: A الوسط الفرضي

d= x-A

أي أن d هي انحراف مركز الفئة عن الوسط الفرضي.

وبالنسبة لكيفية اختيار A فلا يوجد عليها أية قيود ولكن لتسهيل العمليات الحسابية نختار A مركز إحدى الفئات ذات الموقع المتوسط وتكرارها كبيراً نوعاً ما.

مثال:

أوجد الوسط الحسابي للجدول التكراري التالي بطريقة الوسط الفرضي.

Class	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	Total
Frequency	3	4	6	7	6	4	30

الحل:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

الآن نكتب الجدول التكراري بعد إيجاد مراكز فئاته. ولتكن A=54.5

Class	f	D= X-A	fd
20-29	3	-30	-90
30-39	4	-20	-80
40-49	6	-10	-60
50-59	7	0	0
60-69	6	10	60
70-79	4	20	80
Total	30		-90

$$\bar{x} = 54.4 + \frac{-90}{30}$$

$= 54.5 - 3$

$= 51.5$

ملاحظة: لا تتغير قيمة الوسط الحسابي بتغير الوسط الفرضي.

تمريـــن:

احسب الوسط الحسابي للجدول التكراري في المثال السابق بالطريقة العامة؟

أهم خصائص الوسط الحسابي

1- الوسط الحسابي يتأثر بالعمليات الحسابية الأربع: فمثلاً إذا كان لدينا المفردات x1, x2, …, xn وسطها الحسابي $\bar{x}$ وعدلت هذه المفردات حسب العلاقـة y= ax+b ، حيـث a , b عـددان حقيقيـان، x المفـردة قبـل التعـديل، y المفـردة بعـد التعـديل، فـإن $\bar{y} = a\bar{x} + b$ ، حيـث $\bar{y}$ الوسـط الحـسابي للمفردات بعد التعديل.

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعـة مـن المفـردات 60 وعـدّلت جميـع المفـردات حـسب العلاقـة y=200-2x. فأوجد الوسط الحسابي بعد التعديل؟

الحل: ليكن

الوسط الحسابي بعد التعديل = $\bar{y}$

الوسط الحسابي قبل التعديل = $\bar{x}$

فيكون $\bar{y} = 200 - 2\bar{x}$

$\bar{y} = 200 - 2\ (60)$

$= 200 - 120$

$= 80$ (الوسط بعد التعديل)

2- مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي (Zero).

فمثلاً إذا كان لدينا المفردات x1, x2, …, xn وسطها الحسابي $\bar{x}$ فإن $\sum(x-\bar{x}) = 0$

الحل:

$$\bar{x} = \frac{1+4+7+5+3}{5}$$

$$= \frac{20}{5} = 4$$

$$\sum(x-\bar{x}) = (1-4)+(4-4)+(7-4)+(5-4)+(3-4)$$

$$= 0$$

مثال:

إذا كانت انحرافات 3 قيم عن وسطها الحسابي هي 2 , 3 , a فأوجد قيمة a؟

الحل:

$2+3+a = 0 \Rightarrow a = -5$

3- الوسط الحسابي يتأثر بالقيم الشاذة "المتطرفة"

فمثلاً إذا كان لدينا ثلاثة أشخاص معهم بالدينار، 2، 4، 900 فيكون الوسط الحسابي لما ما مع هؤلاء الأشخاص هو $302 = \frac{2+4+900}{3}$ دينار وهذا لا يعطي صورة واقعية لما ما مع هؤلاء الأشخاص. لذلك نلجأ إلى مقاييس أخرى لا تتأثر بالقيم المتطرفة مثل الوسيط وغيره.

ثانياً: الوسيط **Median**

الوسيط (Me) هو مقياس آخر من مقاييس النزعة المركزية وهو المشاهدة التي يكون مجموع التكرارات التي تسبقها مساوياً لمجموع التكرارات التي تليها وبلغة المئينات يكون الوسيط هو المئين خمسين.

أي أن الوسيط = المئين 50 = العشير 5= الربيع الثاني.

وإذا رمزنا للوسيط بالرمز Me فإن

Me = P50 = D5= Q2