والآن لنأتي لطرق إيجاد الوسيط.

أ- في حالة المفردات

لإيجاد الوسيط في حالة المفردات والتي عددها n، نرتب هذه المشاهدات تصاعدياً ويكون :

الوسيط = { المشاهدة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ إذا كان n فردياً
الوسط الحسابي للمشاهدتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ ، $\frac{n}{2}+1$ زوجيا }

مثال:

أوجد الوسيط للمفردات 18 ,10 ,7 ,16 ,9 ,7 ,1

الحل:

نرتب المشاهدات تصاعدياً كما يلي: 18 ,16 ,10 ,9 ,7 ,7 ,1

لاحظ أن عدد المشاهدات n=7، أي أن الوسيط هو المشاهدة التي ترتيبها

$$\frac{7+1}{2}=4$$

إذن فالوسيط هو المشاهدة الرابعة وهيMe=9.

مثال:

أوجد الوسيط للمفردات: 20 ,16 ,12 ,9 ,6 ,5 ,4

الحل: المشاهدات مرتبة تصاعدياً

n=8 ⇐ الوسيط هو الوسط الحسابي للمشاهدتين $\frac{8}{2}+1$,$\frac{8}{2}$

أي أن الوسيط هو الوسط الحسابي للمشاهدتين الرابعة والخامسة

$$Me=\frac{9+12}{2}=10.5$$

ب- في حالة الجداول التكرارية

لحساب الوسيط في الجداول التكرارية نحسب المئين 50

مثال: أوجد الوسيط للجدول التكراري التالي:

Class	10-14	15-19	20-24	25-29	Total
Frequency	4	8	5	3	20

الحل:

Upper Boundary	**Cumulative Frequency**
Less than 14.5	4
Less than 19.5	12
Less than 24.5	17
Less than 29.5	20

$$C.F(Me) = \frac{50}{100} \times 20$$

$= 10$

تقع بين 4، 12

$$5 \left[\begin{array}{l} 14.5 \ldots\ldots\ldots\ldots 4 \\ Me=P50 \ldots\ldots 10 \\ 19.5 \ldots\ldots\ldots\ldots 12 \end{array} \right. \quad 6, \quad 8$$

$$Me = 14.5 + \frac{6}{8} \times 5$$

$= 14.5 + 3.75$

$= 18.25$

- **سؤال** : أوجد الوسيط في المثال السابق بيانياً.

تعريف : الفئة التي تحوي الوسيط تسمى الفئة الوسيطية.

- **سؤال** : في المثال السابق أوجد الفئة الوسيطية؟

ثالثاً: المنوال **Mode**

المنوال (Mo) هو المقياس الثالث من مقاييس النزعة المركزية وهو المفردة (المشاهدة) الأكثر تكراراً.

أ- إيجاد المنوال في حالة المفردات

إذا كان لدينا مجموعة من المفردات فيكون منوالها هو المفردة الأكثر تكرارا.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 3 ,2 ,4 ,5 ,9 ,7 ,2

الحل:

$Mo = 2$

إذا وجد أكثر من مشاهدة لها نفس التكرار، ويزيد عن باقي تكرارات المشاهدات الأخرى فتكون هذه المشاهدات منوالات.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 9 ,2 ,5 ,7 ,10 ,2 ,9 ,7 ,1

الحل: يوجد ثلاثة منوالات هي 9 ,7 ,2

إذا كانت جميع المشاهدات لها نفس العدد من التكرارات فنقول أنه لا يوجد منوال.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 7 , 16 , 8 ,10 , 2

الحل:

لا يوجد منوال.

مثال:

أوجد المنوال للمفردات 7 ,9 ,5 ,5 ,9 ,7 ,9 ,5 ,7

الحل:

لا يوجد منوال.

ب- إيجاد المنوال للجداول التكرارية

المنوال للجداول التكرارية هو مركز الفئة التي تقابل أكبر تكرار، وتلك الفئة تسمى الفئة المنوالية.

مثال:

أوجد المنوال للجدول التكراري التالي:

Class	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	Total
Frequency	10	10	15	8	7	50

الحل:

الفئة المنوالية هي 44-40 فيكون

$$Mo = \frac{40 + 44}{2}$$

$= 42$

مثال:

أوجد المنوال للجدول التكراري التالي:

Class	2-4	5-7	8-10	11-13	14-16	Total
Frequency	2	9	3	9	7	30

الحل:

يوجد منوالان هما $\frac{11+13}{2}$, $\frac{5+7}{2}$

أي أن المنوالان هما 12 , 6

تعريف: التوزيعات التي لها منوال واحد تسمى أحادية المنوال، والتي لها منوالان تـسمى ثنائيـة المنـوال والتي لها أكثر من منوالين تسمى عديدة المنوالات. أو متعددة المنوالات.

العلاقة الخطية بين الوسط والوسيط والمنوال

في التوزيعات أحادية المنوال لوحظ أن هنالك علاقة خطية تربط مقـاييس النزعـة المركزيـة. مـع التأكيد أن هذه العلاقة مبينة على التجربة والملاحظة. أي أن هذه العلاقة ليست دقيقة ولكنها تقريبية وهذه العلاقة هي:

(Mean-Mode) = 3(Mean-Median)

وبالرموز $\left(\overline{X} - Mo\right) = 3\left(\overline{X} - Me\right)$

أي أن بعد الوسط الحسابي عن المنوال ثلاثة أمثال بعده عن الوسيط.

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع أحادي المنوال يساوي 60 والمنوال 50 فأوجد تقدير الوسيط لهذا التوزيع؟

$$\left(\overline{X} - Mo\right) = 3\left(\overline{X} - Me\right)$$

$$(60 - 50) = 3(60 - Me)$$

$$10 = 180 - 3\ Me$$

$$3Me = 170$$

$$\Rightarrow Me = \frac{170}{3}$$

$$= 56.7$$

العزوم والالتواء والتفرطح **Moments, Skewness and Kurtosis**

تعريف: إذا كان لدينا المشاهدات x1,x2, … , xn

وكان a عدداً حقيقياً فإن العزم الرائي (rth moment)حول العدد a

$$mr(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - a\right)^r}{n} \qquad r \in \{1,2,3,\ldots\}$$

العزم الرائي حول نقطة الأصل (the origin)

$$mr(o) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right)^r}{n}$$

العزم الرائي حول الوسط الحسابي $\left(\overline{X}\right)$ هو:

$$mr(\overline{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^r}{n}$$

تعريف:

إذا كان لدينا جدول تكراري مراكز فئاته x1,x2, … , xn والتكرارات المقابلة لتلك الفئات f1, f2, …, fn على الترتيب فإن العزم الرائي حول العدد الحقيقي a يعرف بالقانون:

$$mr(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال:

المشاهدات 1, 2, 3, 4, 5

احسب

a) m1(0) b) m3(4) c) $m_2(\overline{X})$

الحل:

a) $$M_1(0) = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i)^1}{5}$$

$$= \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$$

b) $$M_3(4) = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - 4)^3}{5}$$

$$M_3(4) = \frac{(1-4)^3 + (2-4)^3 + (3-4)^3 + (4-4)^3 + (5-4)^3}{5}$$

$$M_3(4) = \frac{-27-8-1+0+1}{5}$$

= -7

c) $\bar{x} = 3$

$$M_2(\overline{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - 3)^2}{5}$$

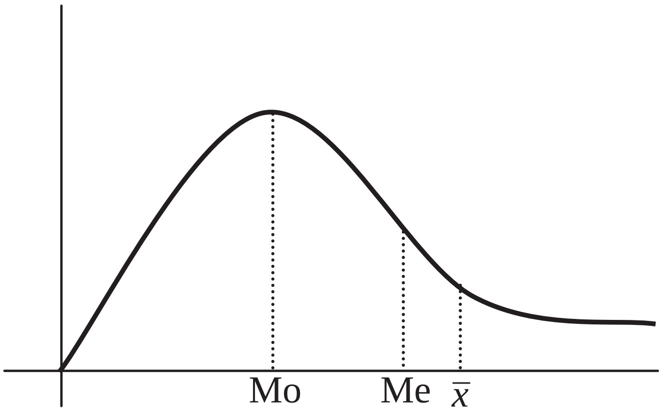
$$= \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5}$$

$$= \frac{4+1+0+1+4}{5}$$

= 2

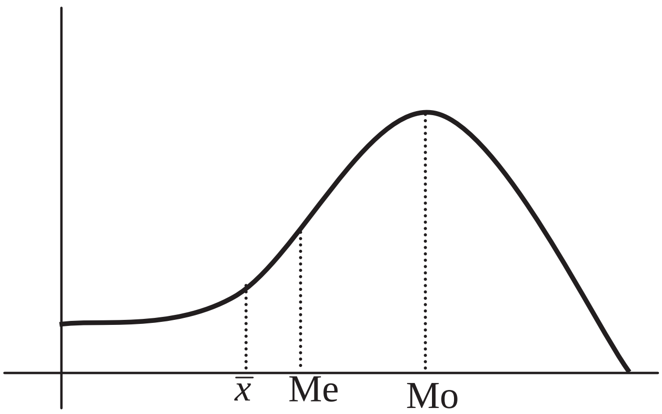
سنوضح الالتواء Skewness من خلال الأشكال الثلاثة التالية:

1- ملتوي نحو اليمين (موجب الالتواء) (Skewed to the right)



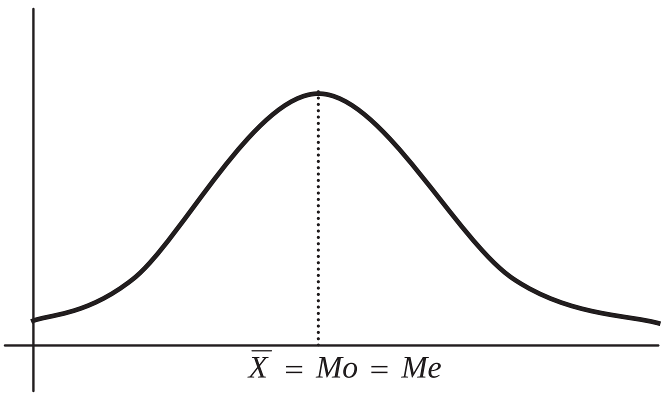
يكون المنوال ≤ الوسيط ≤ الوسط الحسابي

2- أما في التوزيعات الملتوية نحو اليسار (Skewed to the left) (سالبة الالتواء) كما في الشكل التالي:



يكون الوسط الحسابي ≤ الوسيط ≤ المنوال

3- وفي حالة التوزيعات المتماثلة كما في الشكل التالي:



أي أن الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

تعريف: يعرف مقياس الالتواء بالقانون التالي:

$$L_3 = \frac{m_3(\bar{x})}{\left(\sqrt{m_2(\bar{x})}\right)^3}$$

ويوجد مقاييس أخرى للالتواء منها

معامل الالتواء الربيعي = $\dfrac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$

مثال:

للجدول التكراري التالي: احسب معامل الالتواء (L3)

Class	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
Frequency	1	3	5	9	2

$$L_3 = \frac{m_3(\bar{x})}{\left(\sqrt{m_2(\bar{x})}\right)^3}$$

$$m_3(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 f_i}{\sum f_i}$$

$$m_2(\bar{x}) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{\sum f_i}$$

Class make (xi)	*Frequency fi*	*fixi*	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^3 f_i$
12	1	12	-12	-1728	-1728
17	3	51	-7	-343	-1029
22	5	110	-2	-8	-40
27	9	243	3	27	243
32	2	64	8	512	1024
Total	20	480			-1530

$$\overline{X} = \frac{480}{20} = 24$$

$$m_3(\overline{x}) = \frac{-1530}{20}$$

= - 76.5

$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 f_i$
144	144
49	147
4	20
9	81
64	128
	520

$$m_2(\overline{X}) = \frac{520}{20}$$

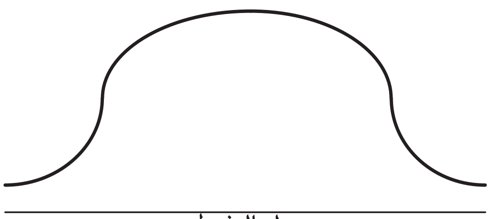
= 26

$$L_3 = \frac{-67.5}{(\sqrt{26})^3}$$

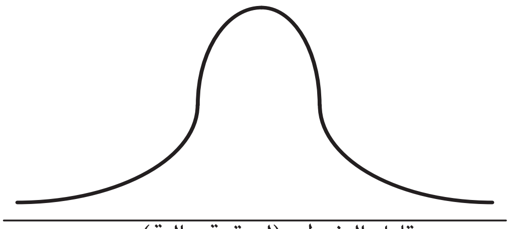
= -0.58

تمرين: ماذا تعني الإشارة السالبة في الجواب؟

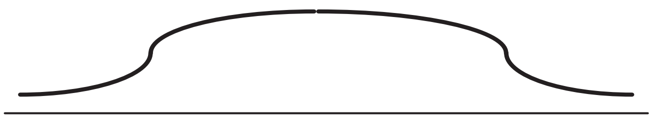
أما التفرطح فسنوضحه من خلال الأشكال التالية:



معتدل التفرطح



قليل التفرطح (له قمة عالية)



كبير التفرطح

ومقياس التفرطح هو:

$$K_4 = \frac{m_4(\bar{x})}{(m_2(\bar{x}))^2}$$

تمرين: في المثال السابق جد قيمة (K4)

ملاحظة عامة:

جميع مقاييس النزعة المركزية وهي الوسط الحسابي والوسيط والموال تتأثر بجميع العمليات الحسابية الأربع فإذا ضربت كل مشاهدة بالعدد الحقيقي a ثم أضيف العدد الحقيقي b فإن:

المقياس بعد التعديل = a x المقياس قبل التعديل +b

فإذا رمزنا للمقياس قبل التعديل (mx) ورمزنا للمقياس بعد التعديل (my) فإن

$$\boxed{my = amx + b}$$

مثال:

إذا كان الوسيط للمفردات x1, x2,...,xn يساوي (50) جد الوسيط للمفردات , ... ,80-x1 , 80-x2 80-xn

الحل:

$$Me = 80 - 50$$

$= 30$ (بعد التعديل)

تمارين

1- إذا كان سعر السهم لشركة ما في سوق عمان المالي بالدينار على مدار أسبوع كما يلي: 5.5, 5.3, 5.2, 5.3, 5 , 5.1, 5.1

فأوجد:

أ- الوسط الحسابي لسعر السهم في ذلك الأسبوع $(\overline{x})$.

ب- الوسيط. (Me)

ج- المنوال. (Mo)

2- إذا اخترنا عينة عشوائية من الأسر حجمها (10) وأخذ دخل كل أسرة بالدينار فكانـت 150, 170, 200, 250, 130, 120, 130, 100, 110, 190

فأوجد:

أ- الوسط الحسابي لدخل الأسرة في هذه العينة.

ب- الوسيط.

ج- المنوال.

3- الجدول التالي يبين فئات أطوال 50 طالباً في إحدى المدارس الأساسية:

Class	100-109	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	Total
Frequency	1	2	7	20	15	5	50

أوجد :

أ- الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي

ب- الوسيط.

ج- المنوال

د- المئين 60.

هـ- الرتبة المئينية للطول 125.

و- جد الطول الذي يزيد عنه 35 طالباً وماذا نسمي هذا الطول؟

4- إذا كان عدد الطلاب المتقدمين لمادة مبادئ الإحصاء (20) طالباً وعدد الطالبات (30) طالبة. فإذا علمت أن الوسط الحسابي للطلاب (70) والوسط الحسابي للطالبات (75). فاحسب الوسط الحسابي لجميع الطلبة المتقدمين لهذه المادة؟

5- إذا كانت أعمار (40) شخصاً موزعة كما في الجدول التالي:

Class	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	Total
Frequency	6	8	10	9	7	40

فأوجد

أ- الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص.

ب- الوسيط.

ج- المنوال.

د- العشير 7.

هـ- الربيع الأدنى.

و- الربيع الأعلى.

ز- العشير الرابع بيانياً.

6- إذا كان الوسط الحسابي لخمسين طالبا هو (70). فراجع المعلم طالبان فزادت علامة الأول بمقدار (10) ونقصت علامة الآخر بمقدار (5). احسب الوسط الحسابي لجميع الطلبة بعد عملية المراجعة؟

7- إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع أحادي المنوال هو 50 وكان المنوال هو (40). فأوجد الوسيط.

8- إذا كانت مبيعات أحد المتاجر لشهر نيسان من عام 1998. بمئات الدنانير هي:

4	7	5	9	12	17
6	16	11	18	7	19
12	10	14	20	8	13
4	20	13	14	11	6
9	8	19	18	13	15

أ- كوّن جدول توزيع تكراري بخمس فئات ومنه جد الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

ب- جد المئين 80 لمبيعات هذا المتجر.

9- إذا كانت الأوساط الحسابية لعلامات مادة الإحصاء لثلاث شعب أ، ب، جـ هي 70، 80، x على الترتيب وكانت أعداد هذه الشعب على التوالي 20، 30، 50، احسب قيمة (x) إذا علمت أن الوسط الحسابي المرجح لهذه الشعب هو 75.5؟

10- احسب مجموع علامات 50 طالباً الوسط الحسابي لعلاماتهم 85؟

11- إذا كانت انحرافات خمس قيم عن وسطها الحسابي هي a,8 – 2a, 2-a , 4a , 3a جد قيمة a؟

12- إذا كانت مجموع انحرافات خمسون قيمة عن الوسط الفرضي (20) هو (70). فجد الوسط الحسابي لهذه القيم؟

13- مستشفى فيه ثلاثون ممرضا وعشرة أطباء. إذا كان معدّل رواتب الممرضين (200) ديناراً ومعدّل رواتب الأطباء (700) ديناراً وقررت إدارة المستشفى زيادة رواتب الأطباء عشرون ديناراً. وزيادة رواتب الممرضين 10% من رواتبهم احسب:

أ- معدل رواتب الأطباء بعد الزيادة.

ب- معدّل رواتب الممرضين بعد الزيادة.

ج- معدّل رواتب الأطباء والممرضون معا قبل وبعد الزيادة.

14- إذا كانـت x1, x2, ..., xn مجموعـة مـن المـشاهدات وسـطها الحـسابي $\left(\overline{X}\right)$ فأثبـت أن $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right) = 0$.

15- إذا كان لدينا جدول تكراري فيه m من الفئات، مراكزها هي x1, x2, ..., xm والتكـرارات المقابلـة لكل فئة هي f1, f2, ..., fm على الترتيب فأثبت أن $\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}\right)f_i = 0$

16- إذا كان لدينا x1, x2, ..., xn مجموعـة مـن المـشاهدات، وسـطها الحـسابي$\left(\overline{X}\right)$ ، وعـدّلت هـذه المشاهدات حسب العلاقة y = ax+b حيث a, b عددان حقيقيـان، x المـشاهدة قبـل التعـديل، y المشاهدة بعد التعديل. فأثبت أن $\overline{y} = a\overline{x} + b$

17- إذا كان لدينا المشاهدات x1, x2, ..., xn

بين أن:

$$m_1\left(0\right) = \overline{x}$$

18- للجدول الوارد في تمرين (5) جد ما يلي:

أ- M2(30)

ب- M4 (0)

ج- L3

3

الوحدة الثالثة

مقاييس التشتت

Measures of Dispersion

مقاييس التشتت

Measures of Dispersion

تستخدم مقاييس التشتت لإعطاء صورة عن مدى تقارب (تجانس) المشاهدات أو تباعدها (تشتتها) من بعضها البعض. فكلما زادت قيمة مقياس التشتت كلما ازداد تشتت المشاهدات وكلما قلت قيمته كلما زاد التجانس بين المشاهدات.

وجميع قيم مقاييس التشتت غير سالبة، ومن مقاييس التشتت المدى، نصف المدى الربيعي، الانحراف المتوسط، الانحراف المعياري.

أولاً: المـــــدى **Range**

أ- للمشاهدات المفردة:

تعريف: المدى في حالة المفردات هو أكبر مشاهدة -أصغر مشاهدة والبعض يسميه المدى المطلق.

Range = max. Observation-min. observation

مثال:

أوجد المدى للمفردات 4 ,5 ,16 ,10 ,4 ,5, 2,9.

الحل:

Range = 16 – 2 = 14

ملاحظة: المدى يتأثر بالقيم الشاذة "المتطرفة"، فبعض الأحيان لا يعطي صورة حقيقية عن واقع المشاهدات لهذا السبب.

ب- للجداول التكرارية:

تعريف:

Range = Upper boundary of the last class – lower boundary of the first class

مثال:

أوجد المدى للجدول التكراري التالي:

الفئات	19-10	29-20	39-30	49-40	59-50	المجموع
التكرارات	5	10	20	15	10	60

الحل:

Range = 59.5 – 9.5

= 50

ثانياً: نصف المدى الربيعي **Semi-inter quartile range**

$$\text{semi}-\text{inter quartile range} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال:

أوجد نصف المدى الربيعي للجدول التالي:

Class	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	Total
Frequency	2	4	7	2	5	20

الحل: نحول الجدول التكراري إلى جدول تكراري تراكمي.

Upper boundary	**Cumulative frequency**
Less than 19.5	2
Less than 29.5	6
Less than 39.5	13
Less than 49.5	15
Less than 59.5	20

لإيجاد Q3 :

$$C.R = \frac{75}{100} \times 20$$

=15

وبالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن Q3= 49.5

لإيجاد Q1:

$$C.R = \frac{25}{100} \times 20$$

$$= 5$$

بالنظر للجدول التكراري التراكمي نجد أن هذه القيمة تقع بين التكرارين التراكميين 2، 6

4	3	2 .... 19.5	10
		5 .... Q1	
		6.................. 29.5	

$$Q_1 = 19.5 + \frac{3}{4} \times 10$$

$$= 19.5 + 7.5$$

$$= 27$$

$$\therefore \quad \text{semi} - \text{interquartile range} = \frac{49.5 - 27}{2}$$

$$= 11.25$$

ملاحظة: البعض يستخدم المدى الربيعي كمقياس تشتت بدلا من نصف المدى الربيعي.

حيث Quartile Range = Q3-Q1

ثالثاً: الانحراف المتوسط **Mean deviation**

أ- في حالة المفردات

تعريف: إذا كانت x1, x2 , ..., xn، مجموعة من المفردات وسطها الحسابي $\bar{x}$ فيعرف الانحراف المتوسط (Mean Deviation M.D) بالعلاقة التالية:

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

وبشكل مختصر

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

مثال:

أوجد الانحراف المتوسط للمفردات 2, 4, 7, 5, 2.

الحل:

$$\bar{X} = \frac{2+4+7+5+2}{5}$$

$$\bar{X} = 4$$

$$\therefore M.D = \frac{|2-4| + |4-4| + |7-4| + |5-4| + |2-4|}{5}$$

$$= \frac{2+0+3+1+2}{5}$$

$$\text{M.D} = \frac{8}{5} = 1.6$$

ب- في حالة الجداول التكرارية

تعريـف: إذا كانـت x1, x2,...,xn مراكـز فئـات جـدول تكـراري عـدد فئاتـه m. f1,f2, ..., fm التكرارات المقابلة لهذه الفئات على الترتيب فيعرف الانحراف المتوسط لهذا الجدول بالعلاقة التالية:

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

وبشكل مختصر

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f}$$

ملاحظة: نفس القانون السابق يستخدم في حالة المفردات المتكررة. بحيث تمثل x قيمة المفردة بدلاً من مركز الفئة.

مثال:

أوجد الانحراف المتوسط للجدول التكراري التالي:

class	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	Total
Frequency	3	2	5	6	4	20

الحل:

$$M.D = \frac{\sum |x - \bar{x}| f}{\sum f}$$

class	frequency	Class-mark (x)	xf	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - \bar{x} \rvert f$
5-9	3	7	21	11.5	34.5
10-14	2	12	24	6.5	13
15-19	5	17	85	1.5	7.5
20-24	6	22	132	3.5	21
25-29	4	27	108	8.5	34
Total	20		370		110

$$\bar{X} = \frac{370}{20}$$

$= 18.5$

$$M.D = \frac{110}{20}$$

$= 5.5$

مثال:

أوجد الانحراف المتوسط للجدول التالي:

Observation	5	6	8	15	20
frequency	6	3	4	4	3