ولإيجاد الرتب نجد رتب كل متغير على حده فمثلاً لإيجاد رتب المتغير x نعطي أكبر مشاهدة الرتبة (1) والتي تليها الرتبة (2) وهكذا. أما إذا تساوت أكثر من قيمة نعطي كل قيمة معدل رتب هذه القيم.

مثال:

أوجد معامل ارتباط الرتب للجدول التالي والذي يمثل رتب عشرة طلاب في موضعين دراسيين. (x, y).

Ox	6	7	10	8	9	1	2	5	3	4
Oy	8	5	9	7	10	2	6	4	1	3

الحل:

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

Ox	Oy	di	di2
6	8	-2	4
7	5	2	4
10	9	1	1
8	7	1	1
9	10	-1	1
1	2	-1	1
2	6	-4	16
5	4	1	1
3	1	2	4
4	3	1	1
			34

$$r = 1 - \frac{6 * 34}{(10)\left((10)^2 - 1\right)} = 1 - \frac{204}{990} = 0.794$$ (طردية قوية)

مثال:

أوجد معامل ارتباط سبيرمان للجدول التالي والذي يمثل تكاليف الدعاية لنوع من البضائع وقيمة المبيعات بمئات الدنانير:

تكاليف الدعاية (X)	8	10	6	4	12	13	5	11	9
المبيعات (Y)	150	160	150	130	165	180	120	160	150

الحل:

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

تكاليف الدعاية (X)	المبيعات (y)	Ox	Oy	di	di2
8	150	6	6	0	0
10	160	4	3.5	0.5	0.25
6	150	7	6	1	1
4	130	9	8	1	1
12	165	2	2	0	0
13	180	1	1	0	0
5	120	8	9	-1	1
11	160	3	3.5	-0.5	0.25
9	150	5	6	-1	1
					4.5

$$r = 1 - \frac{6 * 4.5}{9(9^2 - 1)}$$

= 1-0.0375

= 0.9625

أثر التحويلات الخطية على معامل الارتباط:

إذا كان rمعامل الارتباط بين المتغيرين x , y. وأجرينا تعديلاً على كل من قيم x, y كالآتي:

عددان حقيقيان a, b $X^* = ax + b \, , \, a \neq 0$

عددان حقيقيان c, d $Y^* = cy + d \, , \, c \neq 0$

فإن معامل الارتباط لا يتأثر إذا اتفقت a, c في الإشارة، وتتغير إشارته فقط إذا اختلفتا في الإشارة.

مثال:

إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين x,y هو r = 0.9 وعدلت قيم x وفق المعادلة $X^* = 2x+6$ كما عدلت قيم y وفق المعادلة $y^* = 8-3y$ فما هو معامل الارتباط بين x^* , y^* بعد التعديل.

الحل:

معامل الارتباط الجديد هو 0.9- وذلك لأن معامل x ومعامل y مختلفان في الإشارة.

مثال:

احسب معامل ارتباط بيرسون للجدول التالي:

X	38	41	36	34	37	36
Y	53	57	51	48	52	51

الحل:

نستطيع تعديل المشاهدات حسب المعادلتين $X^* = x-30$

$Y^* = y-45$ دون أن يؤثر ذلك على معامل الارتباط فتصبح القيم كالآتي:

$r_{x,y} = r_{x^*,y^*}$

$$r = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y^2 - n\bar{y}^2}}$$

x^*	y^*	x^*y^*	$(x^*)2$	$(y^*)2$
8	8	64	64	64
11	12	132	121	144
6	6	36	36	36
4	3	12	16	9
7	7	49	49	49
6	6	36	36	36
42	42	329	322	338

$$\left(\bar{x}^*\right) = \frac{42}{6} = 7$$

$$\left(\bar{y}^*\right) = \frac{42}{6} = 7$$

$$r = \frac{329 - 6*7*7}{\sqrt{322 - 6*7^2}\,\sqrt{338 - 6*7^2}}$$

$$= \frac{35}{\sqrt{28}\,\sqrt{44}} = 0.997$$

تمريــن

أعد حل المثال باستخدام القيم الأصلية؟

الانحدار **Regression**

تعريف: معادلة خط الانحدار (regression line equation): هي معادلة خطية بـين متغـيرين x, y وتستخدم في التنبؤ بقيم متغير إذا عرف المتغير الآخر.

وهناك صورتان لمعادلة خط الانحدار وهما:

أ- معادلة خط انحدار Y على X وهي:

$$Y = b + ax$$

حيث $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r$ ويسمى (a) معامل الانحدار

σx = الانحراف المعياري لقيم x.

σy = الانحراف المعياري لقيم y.

r = معامل الارتباط بين x, y

ويمكن الحصول على قيمة a باستخدام طريقة المربعات الصغرى لتكون

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

أما قيمة b فنجدها من المعادلة $\bar{y} = a\bar{x} + b$ أي أن

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

والمعادلة y = b+ax تستخدم للتنبؤ بقيمة y إذا علمت قيمة x.

مثال:

حسب معامل الارتباط بين نتائج الطلبة في الامتحان (x) والامتحان (y) فكانت r = 0.8 ، وكانت $\bar{x} = 59$ ، $\sigma x=14$ ، $\bar{y} = 66$ ، $\sigma y=7$ فأوجد معادلة خط انحدار y على x ثم أوجد نتيجة الطالب المتوقعة في الامتحان y إذا حصل على علامة 65 في الامتحان x.

الحل:

y = b +ax

نحسب قيمة a من المعادلة

$$a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r$$

$$= \frac{7}{14}.(0.8) = 0.4$$

b = 66 – 0.4 (59)

= 42.4

فتكون معادلة خط الانحدار هي:

$$y = 42.4 + 0.4x$$

نتيجة الطالب المتوقعة في الامتحان y إذا كانت علامته في الامتحان x = 65 تساوي (65) هي

$$\hat{y} = 42.4 + 0.4 \times 65 = 68.4$$

مثال:

في شركة لتجارة السيارات يمثل الجدول التالي عدد السيارات المباعة x في السنوات 2000-2004 والربح y بآلاف الدنانير.

X	50	40	45	55	60
Y	75	63	50	72	80

فأوجد:

1- معادلة خط انحدار y على x.

2- لو ا فترضنا أن الشركة ستبيع 50 سيارة في عام 2005 فما الربح المتوقع لها في هذه السنة.

الحل:

1- لإيجاد معادلة خط الانحدار y = b+ax

نجد أولاً قيمة a, b

x	*y*	*xy*	*x2*
50	75	3750	2500
40	63	2520	1600
45	50	2250	2025
55	72	3960	3025
60	80	4800	3600
250	340	17280	12750

$$\bar{x} = \frac{250}{5} = 50$$

$$\bar{y} = \frac{340}{5} = 68$$

$$a = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{17280 - 5 \times 50 \times 68}{12750 - 5(50)^2}$$

$$= \frac{280}{250} = 1.12$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$= 68 - 1.12 \times 50$

$= 68 - 56 = 12$

$\therefore$ معادلة خط الانحدار

$y = 12+1.12x$

2- الربح المتوقع للشركة إذا باعت 50 سيارة في عام 2005 هو:

$\hat{y} = 12 + 1.12x$

$= 12 + 1.12 \times 50 = 68$

أي 68000 J.D

ب - معادلة خط انحدار X على Y وهي:

$x = d + cy$

$$c = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} r$$

$$c = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum y^2 - n\bar{y}^2}$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y}$$

وتستخدم معادلة خط انحدار x على y للتنبؤ بقيمة x إذا علمت قيمة y.

مثال:

إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين y،x هي x = 106+5y وكانت σx=18، σy=3 ، فـما هـو معامل الارتباط بين x,y.

الحل:

نعلم من معادلة خط انحدار x على y أن

$$c = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}.r$$

$$\Rightarrow r = c\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

$$= 5 * \frac{3}{18} = \frac{15}{18} = 0.833$$

مثال:

في امتحان تحصيلي لستة طلاب في مادتي الرياضيات (x) والإحصاء (y) كانت النتائج كالتالي:

الرياضيات (x)	60	75	50	40	63	72
الإحصاء (y)	80	83	55	70	60	78

أوجد :

أ- معادلة خط انحدار x على y.

ب- إذا حصل طالب على علامة (60) في الإحصاء فماذا تكون علامته في الرياضيات.

الحل:

أ- معادلة خط انحدار x على y هي x= d+cy =

حيث

$$c = \frac{\sum xy - n\overline{x}\overline{y}}{\sum y^2 - n\overline{y}^2}$$

الرياضيات (x)	الإحصاء (y)	xy	y2
60	80	4800	6400
75	83	6225	6889
50	55	2750	3025
40	70	2800	4900
63	60	3780	3600
72	78	5616	6084
360	426	25971	30898

$$\bar{x} = \frac{360}{6} = 60$$

$$\bar{y} = \frac{426}{6} = 71$$

$$c = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum y^2 - n\bar{y}^2}$$

$$= \frac{25971 - 6 * 60 * 71}{30898 - 6(71)^2}$$

$$= \frac{411}{652} = 0.63$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y}$$

$= 60 - 0.63 \times 71$

$= 15.27$

∴ معادلة خط الانحدار هي $x = 15.27 + 0.63y$

ب- إذا حصل الطالب على علامة (60) في الإحصاء (y) فإن علامته المتوقعة في الرياضيات (x) تكون:

$\hat{X} = 15.7 + 0.63 \times 60$

$= 53.07$

تعريف: الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها

e= actual vale (θ) - estimated value of θ

i.e: $e = \theta - \hat{\theta}$

ففي المثال السابق الفرع (ب)

يكون الخطأ في التنبؤ

$$e = x - \hat{x}$$

e = 63-53.07

= 9.93

مثال:

إذا كانت معادلة خـط انحـدار y عـلىx هـي y = 10+0.7x وكانـت قيمـة y التـي تقابـل القيمـة (x=20) هي 25 فما هو الخطأ في التنبؤ بقيمة y.

الحل:

قيمة y المتنبأ بها هي: $\hat{y}$ = 10+0.7 × 20

=24

الخطأ في التنبؤ

$$e = y - \hat{y}$$

ملاحظات:

إذا كانت (x1, y1) , (x2, y2) … (xn, yn) مجموعة من الأزواج المرتبة لقيم x، y. واستخدمت لإيجاد:

أ- معادلة انحدار y على x وهي y = b+ax

ب- معادلة انحدار x على y وهي x = d+cy

فإنه

1- إذا مثلـت المعـادلتين في نفـس المـستوى البيـاني تكـون نقطـة تقـاطع خطـي الانحـدار هي$(\bar{x}, \bar{y})$.

2- a, c لهما نفس الإشارة وهي إشارة معامل الارتباط r.

3- $r^2 = a * c \Rightarrow r = \pm\sqrt{ac}$

مثال:

إذا كانت معادة انحدار y على x هي y =8-0.9x وكانت معادلة انحـدار x عـلى y هـي x= 9-0.4y، احسب معامل الارتباط بين المتغيرين x، y؟

الحل:

$$r2 = -0.9 \times -0.4$$
$$= 0.36$$
$$\Rightarrow r = \pm 0.6$$
$$\Rightarrow r = -0.6$$

وقد أخذت الإشارة السالبة لأن معاملي الانحدار سالبين.

معامل التحديد The Coefficient of Determination

يمثل معامل التحديد نسبة لانخفاض في الأخطاء عنـد اسـتخدام معادلـة خـط الانحـدار، وتفـسر تباين المشاهدات التي تفسر بمعادلة خط الانحدار ويرمز له بالرمز (R2) ونجده باستخدام القانون:

$$R^2 = \frac{a\left(\sum \chi_i y_i - n\overline{x}\overline{y}\right)}{\sum y_i^2 - n\overline{y}^2}$$

وتكون قيمته محصورة بين صفر و (1).

مثال:

إذا كانت معادلة خط الانحدار هي:

$$y = 12 + 1.12x$$

وكان $\sum \chi_i y_i = 17280, \overline{x} = 50, \overline{y} = 68$

$$\sum y^2 = 23678\,, n = 5$$

جد معامل التحديد

الحل:

$$R^2 = \frac{1.12(17280 - 5(50)(86))}{23678 - 5(68)^2}$$

$$R^2 = \frac{313.6}{558} = 0.562$$

تمرين: اثبت أن معامل التحديد (R2) = مربع ارتباط بيرسون

تمارين

1- يمثل الجدول التالي الأطوال (x) والأوزان (y)لعشرة طلاب في إحدى كليات المجتمع.

X cm	170	172	165	175	168	180	160	158	173	167
Y kg	70	72	73	72	70	77	68	65	71	70

أ- أرسم لوحة الانتشار.

ب- احسب معامل ارتباط بيرسون بين أطوال وأوزان الطلبة.

ج- احسب معامل ارتباط سبيرمان بين الأطوال والأوزان.

د- أوجد معادلة خط انحدار y على x.

2- إذا كان لدينا المجاميع التالية:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 1134 \qquad \sum_{i=1}^{30} y_i = 1154$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 44564 \qquad \sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 45636$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i y_i = 44931$$

a- احسب معامل ارتباط بيرسون.

b- أوجد معادلة خط انحدار x على y.

3- إذا كان معامل الارتباط بين x، y هو r = 0.7 وعدلت حسب المعادلتين

$x^* = 2.5x+7$

$y^* = 3y-6$

فما هو معامل الارتباط بين x^*, y^*.

4- إذا كان معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) بين متغيرين x، y هو r = 0.8 وكان عدد أزواج المشاهدات يساوي 40، فأوجد مجموع مربعات فروق الرتب بين x,y.

-5 إذا كانت معادلة خط الانحدار y= 7+0.5x وكان

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 640 \qquad \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 250$$

أوجد معامل الارتباط (r) بين x,y.

-6 للجدول التالي:

X	2	4	6	8	10
Y	15	9	12	6	3

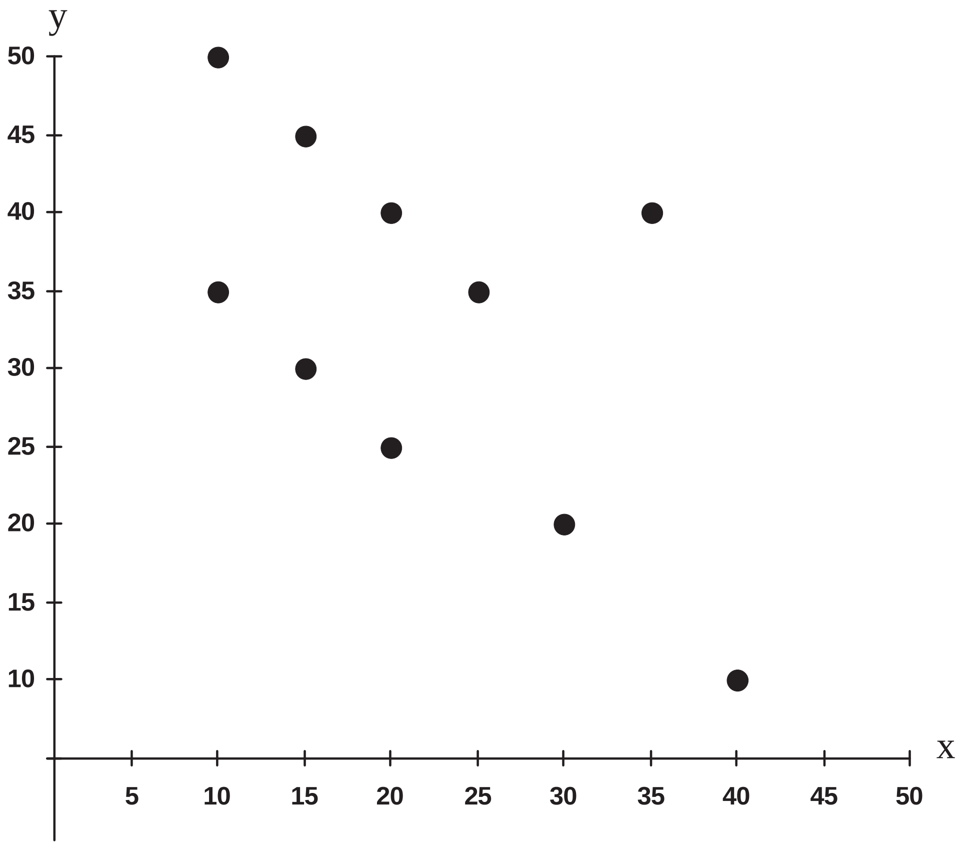
a- جد معامل ارتباط بيرسون بين قيم x، y؟
b- معادلة انحدار y على x؟
c- معادلة انحدار y على x؟
d- ارسم معادلتي الانحدار في نفس المستوى وتأكد أن نقطة تقاطعهما هي $(\bar{x},\bar{y})$ ؟
e- هـ- احسب الخطأ في التنبؤ بقيمة y إذا علمت أن x=8؟
f- احسب الخطأ في التنبؤ بقيمة x إذا علمت أن قيمة y=6؟

-7 إذا كانـت معادلـة انحـدار y عـلى x هـي y = -15+2x وكانـت r = 0.8، $\bar{x} = 50$ ، فجـد معادلـة انحدار x على y؟

-8 إذا كانت معادلة انحدار y على x هي y =-2+1.2x ومعادلـة انحـدار x عـلى y هـي x = 11+0.7y جد الوسط الحسابي لكل من قيم x, y؟

-9 إذا حُسب معامل ارتباط سبيرمان باستخدام الأزواج المرتبة (x1, y1) , (x2, y2) … (xn, yn)فكان (0.4). وكان مجموع مربعـات فـروق الرتـب لقـيم x، y هـو (99)، فما قيمة n؟

-10 الشكل التالي هو شكل الانتشار لقيم x,y.



جد:

أ – معامل ارتباط بيرسون.

ب- معامل ارتباط سبيرمان.

5

الوحدة الخامسة

نظرية الاحتمال

Probability Theory

نظرية الاحتمال

Probability Theory

نظرية الاحتمالات تهتم بما يسمى بالتجارب العشوائية، والتجارب العشوائية هـي تلـك التجـارب التي يمكن حصر نتائجها مسبقاً ولكن لا يمكن الجزم ماذا ستكون النتيجة. فمـثلاً إذا ألقينـا قطعـة نقـد فنكون عالمين سلفاً بأن النتيجة قد تكون صورة أو كتابة لكننا لا نجـزم عـلى أنهـا صـورة أو أنهـا كتابـة. والآن نبدأ بعرض بعض مفاهيم نظرية الاحتمالات.

الفضاء العيني (أو الفراغ العيني) والحادث **Sample space and Event**

تعريف: الفضاء العيني هو مجموعة كافة النتائج المتوقعة للتجربة العـشوائية. وسـنرمز للفـضاء العيني بالرمز Ω "ويقرأ أوميغا".

الآن سنعطي أمثلة على فراغات عينية شائعة في موضوع الاحتمالات، لتكون مرجعية للقارئ عند حاجته لها.

1- تجربة رمي قطعة نقد مرة واحدة تكون $\Omega = \{H , T\}$

حيث

صورة H: Head

كتابة T: Tail

2- تجربة رمي قطعتي نقد مرة واحدة (أو قطعة مرتين)

$$\Omega= \{(H , H) , (H , T) , (T , H) , (T , T)\}$$

3- تجربة رمي ثلاث قطع نقدية مرة واحدة (أو قطعة ثلاث مرات).

$$\Omega = \{(H,H,H) , (H,H,T) , (H,T,H) , (T,H,H), (H,T,T), (T,H,T), (T,T,H), (T,T,T)\}$$

4- رمي حجر نرد مرة واحدة $\Omega = \{1,2,3,4,2,5,6\}$

5- رمي حجر نرد وقطعة نقد.

Ω= {(1,H) , (2,H), (3,H) , (4,H) , (5,H) , (6,H) ,
(1,T) , (2,T) , (3,T) , (4,T), (5,T) , (6,T)}

6- رمي حجري نرد مرة واحدة (أو رمي حجر مرتين)

Ω= { (1,1) , (1,2) , (1,3), (1,4) , (1,5), (1,6)
(2,1) , (2,2) , (2,3), (2,4) , (2,5), (2,6)
(3,1) , (3,2) , (3,3), (3,4) , (3,5), (3,6)
(4,1) , (4,2) , (4,3), (4,4) , (4,5), (4,6)
(5,1) , (5,2) , (5,3), (5,4) , (5,5), (5,6)
(6,1) , (6,2) , (6,3), (6,4) , (6,5), (6,6)}

تعريف:

1- إذا كانت Ω فضاء عينيا لتجربة عشوائية ما فإن أية مجموعة جزئيـة مثـل E مـن Ω ($E\subset\Omega$)تدعى حادثا(event).

2- إذا كان E حادثا في Ω يتكون من عنصر واحد فإنه يسمى حادثا بسيطاً Simple event.

3- وإذا كان E حادثا فيه أكثر من عنـصر مـن عنـاصر Ω فيـسمى حادثـا مركبـاً Compound event.

4- $\phi \subset \Omega$ وبالتالي فإن ϕ حادثـا في Ω، يـسمى هـذا الحـادث بالحـادث المـستحيل. (Null event)

5- $\Omega \subset \Omega$ وبالتالي فإن Ω حادثا في Ω، يسمى هذا الحادث بالحادث الأكيد.(Sure event).

بالرجوع إلى الفراغ العيني Ω لتجربة رمي قطعتي نقد إذا كان

E_1= {(H,T) , (T,H)} حادث في Ω فإنه حادث مركب

أما E_2= {(T,T)} حادث بسيط في Ω.

أيضاً يمكنك إعطاء أمثلة على حوادث مختلفة بسيطة ومركبة لنفس التجربة.

مثال:

في تجربة رمي حجري النرد ليكن

E_1: هو الحادث الذي يكون مجموع الوجهين الظاهرين فيه (4).

E_2: هو الحادث الذي يكون مجموع الوجهين الظاهرين فيه (10).

E_3: هو الحادث الذي يكون الوجه الأول فيه فرديا (odd) والوجه الثاني زوجي (even).

E_4: هو الحادث الذي يكون مجموع الوجهين الظاهرين فيه أكبر من (10).

E_5: الوجه الأول يقبل القسمة على (divisible by)الوجه الثاني.

اكتب هذه الحوادث صريحة.

الحل:

$E_1= \{(1,3) , (3,1), (2,2)\}$

$E_2= \{(4,6) , (6,4), (5,5)\}$

$E_3= \{(1,2), (1,4) , (1,6) , (3,2), (3,4) , (3,6) , (5,2) , (5,4) , (5,6)\}$

$E_4= \{(5,6) , (6,5), (6.6)\}$

$E_5= \{(1,1), (2,1), (3,1) , (4,1), (5,1), (6,1), (2,2), (3,3), (4,4) , (5,5), (6,6), (4,2), (6,2), (6,3)\}$

تعريف: إذا كان E_1، E_2 حادثين في الفراغ العيني Ω بحيث لا يوجد بينهما عناصر مشتركة أي $E_1 \cap E_2=\phi$ فيسمى الحادثين بحادثين منفصلين (disjoint events).

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة إذا كان

$E_1 = \{1,2,3\}$ $E_2=\{1,3,5\}$ $E_3=\{2,4\}$

فأي أزواج الحوادث التالية منفصلة:

a) E_1,E_2 b) E_1,E_3 c) E_2,E_3

الحل:

a- $E_1\cap E_2= \{1,3\}$ وبالتالي E_1,E_2 ليسا منفصلين.

b- $E_1\cap E_3= \{2\}$ وبالتالي E_1,E_3 ليسا منفصلين.

c- $E_2\cap E_3 = \phi$ وبالتالي E_2,E_3 منفصلان.