التكرار النسبي والاحتمال **(Relative Frequency and Probability)**

تعريف:

إذا كان n عدد مرات إجراء تجربة عشوائية، m عدد مـرات الحـصول عـلى الحـادث E فـإن $\frac{m}{n}$ تدعى بالتكرار النسبي للحادث أو الاحتمال التجريبي للحادث.

وعندما تصبح قيمة n كبيرة جداً $(n\rightarrow\infty)$ فإن التكرار النسبي يقترب من قيمـة محـددة سـنرمز لها بالرمز p(E) وتسمى الاحتمال النظري للحادث E.

نشاط:

لتكن n عدد مرات إلقاء قطعة نقد، m عدد مرات ظهور الصورة.

أكمل الفراغ في الجدول التالي بعد إجراء التجربة عمليا.

عدد مرات إجراء التجربة (n)	**عدد مرات الحصول على الصورة (m)**	**التكرار النسبي** $\frac{m}{n}$
10	....	....
20	....	....
50	....	....
100	....	....
200	....	....

في النشاط السابق لو أصبحت قيمة (n) كبيرة جداً فإن $\left(\frac{m}{n}\right)$ ستقترب من القيمة $\frac{1}{2}$، وبالتالي فإن $P(\{H\}) = \frac{1}{2}$

تعريف:

إذا كانت Ω فضاء عينيا وكان كل حادث بسيط في Ω له نفس فرصة الحدوث. وكان E حادثـا في Ω فإن

احتمال الحادث (E) = $\frac{\text{عدد عناصر } E}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ ويسمى هذا الاحتمال النظري للحادث E:

$$P(E) = \frac{\#(E)}{\#(\Omega)}$$

حيث # تعني عدد العناصر.

وتسمى Ω في هذه الحالة بالفضاء العيني المنتظم (Uniform space).

تعريف: لأي فضاء عيني Ω (منتظم أو غير منتظم) يعرّف اقتران الاحتمال

$P:P(\Omega)\rightarrow R$، حيث $P(\Omega)$ مجموعة كافة حوادث Ω، R مجموعة الأعداد الحقيقية.

من خلال المسلمات التالية:

1- لأي حادث $E \subset \Omega$ $\quad P(\Omega) = 1 \quad , \quad P(E) \geq 0,$

2- إذا كان E_1، E_2 حادثين منفصلين في Ω فإن

$P(E_1 \cup E_2) = \quad P(E_1) + P(E_2)$

3- إذا كان E_1، E_2، ... حوادث في Ω بحيث

$E_i \cap E_j = \phi$

$i \neq j$ لأي

$P(E_1 \cup E_2, \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$

ملاحظة: تقرأ $P(E)$ احتمال الحادث E. (Probability of E)

خواص الاحتمال (Properties of probability):

إذا كانت Ω فضاء عينا فإنه

1- إذا كان E_1، E_2 حادثين في Ω، $E_1 \subset E_2$ فإن $P(E_1) \leq P(E_2)$

2- لأي حادث E، $0 \leq P(E) \leq 1$

3- $P(\phi) = 0$

4- $P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$

5- $P(E_1 \cap \overline{E}_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة إذا كان:

$E_1=\{1,2\}$

$E_2 = \{1,4,5\}$

E_3=أن يكون الوجه الظاهر عدداً فردياً فأوجد

(a) $P(E_1)$ (b) $P(E_2)$ (c) $P(E_3)$

(d) $P(E_1 \cup E_2)$ (e) $P(E_1 \cap E_2)$

الحل:

لاحظ أن عدد عناصر Ω =6

a- $$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b- $$P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c- $$P(E_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

d- $$E_1 \cup E_2 = \{1,2,4,5\} \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

e- $$E_1 \cap E_2 = \{1\} \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$$

مثال:

صندوق يحوي (7) كرات سوداء، 3 كرات بيـضاء، سـحبت مـن الـصندوق كـرة واحـدة عـشوائياً (Raudomly)أوجد:

a- احتمال أن تكون سوداء (Black).

b- احتمال أن تكون بيضاء (White).

c- احتمال أن تكون حمراء (Red).

الحل:

a- $$P(\text{Black}) = \frac{7}{10}$$

b- $P(\text{White}) = \dfrac{3}{10}$

c- $P(\text{Red}) = p(\phi) = 0$

مثال:

إذا كان $P(E_1)=0.4$ ، $P(E_1 \cap E_2) = 0.3$ جد $P(E_1 - E_2)$

الحل:

$$P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$$

$= 0.4 - 0.3$

$= 0.1$

تعريف: إذا كان E حادثا في الفراغ العيني Ω، فعدم وقوع E يعرف بأنه متمم الحادث E (Complement of E) ويرمز له بالرمز $\overline{E}$ ويكون:

$$\mathbf{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$

مثال:

إذا كان $P(E)=0.8$

فأوجد $P(\overline{E})$

الحل:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

$= 1 - 0.8$

$= 0.2$

تعريف: إذا كانت $E_1, E_2, \dots, E_n$ حوادث في Ω بحيث أن

1- $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = \Omega$

2- $E_i \cap E_j = \phi$ لكل $i \neq j$

فإن هذه الحوادث تسمى حوادث متباعدة وشاملة.

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، إذا كان

$E_1 = \{1,6\}$ ، $E_2 = \{3,4,5\}$ ، $E_3 = \{3\}$

فهل هذه الحوادث متباعدة وشاملة؟

الحل:

$$E_2 \cap E_3 = \phi \quad ، \quad E_1 \cap E_3 = \phi \quad ، \quad E_1 \cap E_2 = \phi$$

أي أن E_1، E_2، E_3 منفصلة مثنى. (Mutualy exclusive)

$$\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$\therefore$ E_1، E_2، E_3 حوادث متباعدة وشاملة.

نظرية: إذا كانت $E_1, E_2, \ldots, E_n$ حوادث متباعدة وشاملة فإن:

$$\mathbf{P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1}$$

مثال:

إذا كانت E_1, E_2, E_3, E_4 حوادث متباعدة وشاملة وكان

$P(E_1) = 0.2, \quad P(E_2) = 0.5, \quad P(E_3) = 0.1$

فأوجد $P(E_4)$؟

الحل:

E_1, E_2, E_3, E_4 حوادث متباعدة وشاملة

$$\therefore P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) = 1$$

$$0.2 + 0.5 + 0.1 + P(E_4) = 1$$

$$P(E_4) = 0.2$$

قانون جمع الاحتمالات

نظرية: إذا كان E_1, E_2 حادثين في Ω، فإن احتمال وقوع (E_1) أو (E_2) هو

$$\mathbf{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

حيث $P(E_1 \cap E_2)$ هي احتمال حدوث الحادثين معا.

مثال:

إذا كان $P(A)=0.4$ ، $P(B)=0.8.$ ، $P(A \cap B) = 0.35$

فأوجد $P(A \cup B)$

الحل:

$$P(A\cup B)= P(A) + P(B)-P(A\cap B)$$
$$=0.4 + 0.8 - 0.35$$
$$= 0.85$$

مثال:

إذا كانت نسبة الأشخاص الذين عيونهم سوداء في مدينة عمان 70% وكانت نسبة الأشخاص الذين شعرهم أسود 40%، ونسبة الأشخاص الذين عيونهم سوداء وشعرهم أسود 30%. فإذا اخترنا شخصا عشوائيا من مدينة عمان فأوجد احتمال:

a- أن تكون عيونه سوداء أو شعره أسود.

b- أن لا يكون ذو عيون سوداء.

c- أن يكون ذو شعر أسود وعيونه ليست سوداء.

الحل:

لنفرض أن الحادث E_1 هو الحادث الذي يكون فيه الشخص الذي تم اختياره ذو عيون سوداء.

E_2 هو الحادث الذي يكون فيه الشخص الذي تم اختياره ذو شعر أسود.

فيكون $P(E_1)= 0.7 , P(E_2)=0.4, P (E_1\cap E_2)=0.3$

a- $P(E_1\cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1\cap E_2)$

$$=0.7 + 0.4 - 0.3 = 0.8$$

b- $P(\overline{E}_1) = 1- P(E_1)$

$$= 1 - 0.7$$
$$= 0.3$$

c- $P(\overline{E}_1 \cap E_2) = P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$= 0.4 - 0.3$$
$$= 0.1$$

مثال:

إذا كان E_1,E_2 حادثين منفصلين في Ω وكان

$$P(E_1)=\frac{3}{7}\ ,P(E_2)=\frac{2}{7}$$

فأوجد $P(E_1 \cup E_2)$

الحل:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
$$= P(E_1) + P(E_2)$$
$$P(E_1 \cup E_2)=\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

الحوادث المستقلة **(Independent Events)** "قانون ضرب الاحتمالات"

تعريف: إذا كان $E_1 ، E_2$ حادثين في Ω فيدعى E_1, E_2 حادثين مستقلين إذا كان أحـدهما لا يتأثر بوقوع الآخر. وبصفة رياضية يكون E_1, E_2 مستقلين إذا كان

$$\mathbf{P(E_1 \cap E_2)=P(E_1)P(E_2)}$$

مثال:

إذا كـــــــان $E_1 ، E_2$ حــــــــادثين في Ω، وكــــــــان $P(E_1)=0.9$ ، $P(E_2)=0.5$ ، $P(E_1 \cap E_2)=0.45$ فهل $E_1 ، E_2$ مستقلان؟

الحل:

$$P(E_1)P(E_2)=(0.9)(0.5)$$
$$=0.45$$
$$=P(E_1 \cap E_2)$$

إذن $E_1 ، E_2$ حادثين مستقلين.

مثال:

إذا كان $E_1 ، E_2$ حادثين مستقلين في Ω وكان $P(E_1)=0.6$ ، $P(E_2)=0.5$

فأوجد:

a- $P(E_1 \cap E_2)$

b- $P(E_1 \cup E_2)$

الحل:

a- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$= (0.6)\ (0.5)$

$= 0.3$

b- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$= 0.6+0.5 - 0.3$

$= 0.8$

مثال:

أطلق صيادان نحو هدف فإذا كان احتمال إصابة الأول للهدف 0.8 واحتمال إصابة الثاني للهدف 0.6 فأوجد احتمال

a- إصابة الاثنين معا للهدف.

b- إصابة الهدف.

الحل:

E_1 : أن يصيب الأول الهدف $\Leftarrow$ $P(E_1) = 0.8$

E_2 : أن يصيب الثاني الهدف $\Leftarrow$ $P(E_2) = 0.6$

a- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$= (0.8)\ (0.6)$

$= 0.48$

b- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$= 0.8 + 0.6 - 0.48$

$= 0.92$

مثال:

صندوق يحوي (6) كرات سوداء (Black)، (4) كرات حمراء (Red) سحب من الصندوق كرتان على التوالي مع الإرجاع، أوجد احتمال.

a- أن تكون الكرتان سوداوين.

b- أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية حمراء.

c- أن تكون إحدى الكرتين سوداء.

d- أن تكون الكرتان من نفس اللون.

الحل:

السحب هنا على التوالي مع الإرجاع فذلك يعني أن السحبة الثانية لا تتأثر بالسحبة الأولى فهذا يعني حوادث مستقلة.

(B)	(R)
6	4

a- $$P(B,B)=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}$$
$$=\frac{36}{100}$$

b- $$P(B,R)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}$$
$$=\frac{24}{100}$$

c- P(إحدى الكرتين سوداء) = $P(B,R)+P(R,B)$
$$=\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}$$
$$=\frac{48}{100}$$

d- P (الكرتان نفس اللون) = $P(B,B)+P(R,R)$
$$=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}$$
$$=\frac{52}{100}$$

تمرين: أعد حل المثال السابق إذا كان السحب دون إرجاع.

نظرية: إذا كان E_1 ، E_2 حادثين مستقلين في Ω فإن

1- E_1 ، $\overline{E}_2$ مستقلان.

2- $\overline{E}_1$ ، E_2 مستقلان.

3- $\overline{E}_1$ ، $\overline{E}_2$ مستقلان.

مثال:

إذا كان E_1 ، E_2 حادثين مستقلين في Ω ، $P(E_1) = 0.3$ ، $P(E_2) = 0.4$

فأوجد:

a- $P(E_1 \cap E_2)$

b- $P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)$

c- $P(\overline{E}_1 \cap E_2)$

d- $P(\overline{E}_1 \cup E_2)$

الحل:

a- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$= (0.3)\ (0.4)$

$= 0.12$

b- $P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) = P(\overline{E}_1)P(\overline{E}_2)$

$= (0.7)\ (0.6)$

$= 0.42$

c- $P(\overline{E}_1 \cap E_2) = P(\overline{E}_1)\, P(E_2)$

$= (0.7)\ (0.4)$

$= 0.28$

d- $P(\overline{E}_1 \cup E_2) = P(\overline{E}_1) + P(E_2) - P(\overline{E}_1 \cap E_2)$

$= 0.7 + 0.4 - 0.28$

$= 0.82$

الاحتمال المشروط ونظرية بيز

(Conditional Probability and Bay's Theorm)

تعريف:

إذا كان E_1 ، E_2 حادثين في Ω فإن احتمال حدوث E_1 بشرط حدوث E_2 يرمز له بالرمز

$$P(E_1/E_2)=\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad , \quad P(E_2)\neq 0$$

مثال:

إذا كان $P(E_1) = 0.7$ ، $P(E_2) = 0.8$ ، $P(E_1 \cap E_2) = 0.6$

فأوجد:

a) $P(E_1/E_2)$ b) $P(E_2/E_1)$ c- $P(E_1/\overline{E}_2)$

d) $P(\overline{E}_1/E_2)$ e) $P(\overline{E}_1/\overline{E}_2)$

الحل:

a- $$P(E_1/E_2)=\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

$$=\frac{0.6}{0.8}$$

$$=\frac{3}{4}$$

b- $$P(E_2/E_1)=\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

$$=\frac{0.6}{0.7}$$

$$=\frac{6}{7}$$

c- $$P\left(E_1/\overline{E}_2\right)=\frac{P\left(E_1\cap\overline{E}_2\right)}{P\left(\overline{E}_1\right)}$$

$$=\frac{P\left(E_1\right)-P\left(E_1\cap E_2\right)}{1-P\left(E_2\right)}$$

$$=\frac{0.7-0.6}{1-0.8}$$

$$=\frac{1}{2}$$

d- $$P\left(\overline{E}_1/E_2\right)=\frac{P\left(\overline{E}_1\cap E_2\right)}{P\left(E_2\right)}$$

$$=\frac{P\left(E_2\right)-P\left(E_1\cap E_2\right)}{P\left(E_2\right)}$$

$$P\left(\overline{E}_1/E_2\right)=\frac{0.8-0.6}{0.8}$$

$$=\frac{1}{4}$$

e- $$P\left(\overline{E}_1/\overline{E}_2\right)=\frac{P\left(\overline{E}_1\cap\overline{E}_2\right)}{P\left(\overline{E}_2\right)}$$

$$=\frac{P\left(\overline{E_1\cup E_2}\right)}{P\left(\overline{E}_2\right)}$$ قانون ديمورغان

$$\therefore\quad P\left(\overline{E}_1/\overline{E}_2\right)=\frac{1-P\left(E_1\cup E_2\right)}{1-P\left(E_2\right)}$$

$$=\frac{1-0.9}{1-0.8}=\frac{1}{2}$$

مثال:

إذا كان $P(E_2)=0.45$ ، $P(E_1/E_2)=0.3$

أوجد

a- $P(E_1 \cap E_2)$

b- $P(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2)$

الحل:

a- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1/E_2)P(E_2)$

$= 0.3 \times 0.45$

$= 0.135$

b- $P(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2) = P(\overline{E_1 \cap E_2})$

$= 1 - P(E_1 \cap E_2)$

$= 1 - 0.135$

$= 0.865$

مثال:

إذا كان احتمال قبول صفاء في جامعة البلقاء 0.9 واحتمال قبـول هيفـاء في نفـس الجامعـة 0.8 واحتمال قبول الاثنتين معا 0.75 احسب:

a- احتمال قبول صفاء إذا قبلت هيفاء.

b- إذا قبلت صفاء فما احتمال قبول هيفاء.

c- إذا لم تقبل صفاء فما احتمال قبول هيفاء.

الحل:

E_1: أن تقبل صفاء $\Leftarrow$ $P(E_1) = 0.9$

E_2: أن تقبل هيفاء $\Leftarrow$ $P(E_2) = 0.8$

$\therefore\ P(E_1 \cap E_2) = 0.75$

a- $$P(E_1/E_2)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_2)}$$

$$=\frac{0.75}{0.8}$$

$$=\frac{15}{16}$$

b- $$P(E_2/E_1)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_1)}$$

$$=\frac{0.75}{0.9}$$

$$=\frac{5}{6}$$

c- $$P(E_2/\overline{E}_1)=\frac{P(\overline{E}_1\cap E_2)}{P(\overline{E}_1)}$$

$$=\frac{P(E_2)-P(E_1\cap E_2)}{1-P(E_1)}$$

$$=\frac{0.8-0.75}{1-0.9}$$

$$=0.5$$

ملاحظة: إذا كان E_1 ، E_2 حادثين مستقلين في Ω فإن

$$P(E_1/E_2)=P(E_1)$$
$$P(E_2/E_1)=P(E_2)$$

مثال:

صندوق يحوي ست كرات بيضاء وأربع كرات سوداء سحب من الصندوق كرتين على التوالي دون إرجاع احسب:

a- احتمال أن تكون الثانية سوداء إذا كانت الأولى بيضاء.

b- احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية سوداء.

c- احتمال أن تكون الكرتان مختلفتان في اللون.

الحل:

سوداء	بيضاء
(B)	(W)
4	6

a- $P(B/W) = \frac{4}{9}$

b- $P(W \cap B) = P(B/W)P(W)$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{6}{10}$$

$$= \frac{4}{15}$$

c- p (مختلفتان في اللون)= $P(B,W) + P(W,B)$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9}$$

$$= \frac{8}{15}$$

نظرية بيز **Bay's Theorem**

إذا كانت E_1 ، E_2 ، ...، E_n حوادث متباعدة وشاملة في الفضاء العيني Ω.

$E \subset \Omega$ فإن:

1. $P(E) = P(E/E_1)P(E_1) + P(E/E_2)P(E_2) + \ldots + P(E/E_n)P(E_n)$

2. $p(E_m/E) = \frac{P(E/E_m)P(E_m)}{P(E)} \quad , \ m = 1,2,\ldots,n.$

مثال:

يذهب رجل إلى عمله مستخدماً إحدى الوسائل التالية باص، سيارة، قطار مستخدما هذه الوسائل بنسبة مئوية 60%، 30%، 10% من الأيام على التوالي، فإذا كان احتمال أن يتأخر عن عمله إذا استخدم الباص 15% من الأيام وإذا استخدم

السيارة 8%، وإذا استخدم القطار 20%. فإذا اخترنا أحد الأيام التي يذهب فيها إلى العمل عشوائياً:

a- احسب احتمال أن يتأخر عن عمله في ذلك اليوم؟

b- إذا كان متأخراً عن عمله في ذلك اليوم ما احتمال أن يكون قد استخدم القطار؟

الحل:

E_1: أن يستخدم الباص $\Leftarrow$ $P(E_1) = 0.6$

E_2: أن يستخدم السيارة $\Leftarrow$ $P(E_2) = 0.3$

E_3: أن يستخدم القطار $\Leftarrow$ $P(E_3) = 0.1$

E: أن يتأخر الرجل عن عمله.

$$P(E/E_1) = 0.15 \quad , \quad P(E/E_2) = 0.08 \quad , \quad P(E/E_3) = 0.2$$

a- $$P(E) = P(E/E_1)P(E_1) + P(E/E_2)P(E_2) + P(E/E_2)P(E_3)$$

$$= (0.15)\ (0.6) + (0.08)\ (0.3) + (0.2)\ (0.1)$$

$$\therefore\ P(E) = 0.134$$

b- $$P(E_3/E) = \frac{p(E/E_3)P(E_3)}{P(E)}$$

$$P(E_3/E) = \frac{(0.2)(0.1)}{0.134}$$

$$= \frac{10}{67}$$

مثال:

صندوقانA، B متشابهان، في A خمس كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء، في B تسع كرات بيضاء وأربع كرات سوداء. فإذا اختير أحد الصندوقان عشوائيا ثم سحب منه كرة عشوائيا احسب احتمال أن تكون من الصندوق A إذا كانت بيضاء.

الحل:

E_1 : اختيار الصندوق A $\Leftarrow P(E_1) = \frac{1}{2}$

E_2 : اختيار الصندوق B $\Leftarrow P(E_2) = \frac{1}{2}$

E: أن تكون الكرة بيضاء.

$$P(E/E_1) = \frac{5}{8}$$

$$P(E/E_2) = \frac{9}{13}$$

$$P(E_2/E) = \frac{p(E/E_2)P(E_2)}{P(E)}$$

$$= \frac{p(E/E_2)P(E_2)}{P(E/E_1)P(E_1) + P(E/E_2)P(E_2)}$$

$$= \frac{\frac{9}{13} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{13} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{72}{137}$$

المتغيرات العشوائية **(Random Variables)**

تعريف: المتغير العشوائي هو اقتران (Function) (X) مجالــه الفـضاء العينــي (Sample Space) Ω ومداه $X(\Omega)$ هو مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

أي أن $X: \Omega \to \mathbf{R}$

وإذا كان مداه مجموعة جزئية من الأعداد النسبية **Q** يدعى متغيراً عـشوائياً منفـصلاً (discrete random variable).

أما إذا كان مداه يحوي فترة من الأعداد الحقيقية **(R)** فيدعى متغيراً عشوائياً متصلاً (continuous random variable).

والآن سندرس كل نوع من المتغيرات العشوائية على حده.

المتغير العشوائي المنفصل **(Discrete Random Variable)**

تعريف: إذا كان X متغـيراً عـشوائياً منفـصلاً فـإن الاقـتران f(x) يـدعى اقـتران احـتمال (Probability Function)أو اقتران توزيع (Distribution Function) إذا كان

$$f(x) = P\ (X= x) \qquad x \in X\ (\Omega)$$

وتسمى المجموعة $\{(x,f(x)): x \in X\ (\Omega)\}$ بالتوزيع الاحتمالي (Probability distribution).

مثال:

في تجربة رمى ثـلاث قطـع نقـد، إذا عرّفنـا المتغـير العـشوائي X عـلى أنـه عـدد الـصور (Heads) الظاهرة، أوجد

a- $X\ (H,H,T)$

b- $X\ (T,T,T)$

c- (مدى X) $X(\Omega)$

الحل:

a- $X\ (H,H,T) = 2$

b- $X\ (T,T,T) = 0$

c- $X(\Omega) = \{0,1,2, 3\}$

مثال:

كيس فيه ثلاث كرات بيضاء (White Balls) وأربع كرات سـوداء (Black Balls). فـإذا سـحب مـن الكـيس خمس كرات على التـوالي (one after another) دون إرجـاع (without replacement). فـإذا عرفنـا المتغـير العشوائي X على أنه عدد الكرات السوداء، أوجد مدى X

الحل:

$$X(\Omega) = \{2,3,4\}$$

مثال:

في تجربة رمي قطعتي النقد، إذا عرفنا المتغير العشوائي X على أنه عدد الـصور الظـاهرة، اكتـب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

الحل:

التوزيع الاحتمالي = $\{(x,f(x)) : x \in X(\Omega)\}$

$$X(\Omega) = \{0,1,2\}$$

فيكون التوزيع الاحتمالي

$$\left\{\left(0,\frac{1}{4}\right) , \left(1,\frac{1}{2}\right) , \left(2,\frac{1}{4}\right)\right\}$$

ملاحظة: إذا كان $f(x)$ اقتران احتمال (Probability Function) للمتغـير العـشوائي X الـذي مـداه $X(\Omega)$ فيكون

1. $f(x) \geq 0 \qquad x \in X(\Omega)$
2. $\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1$

تعريف:

1- إذا كان X متغيراً عشوائياً فإن الوسط الحسابي (Mean) للمتغير العشوائي (X) هو

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} X \; f(x)$$

كذلك يسمى الوسط الحسابي بالتوقع (Expectation) للمتغير العشوائي X.

2- يعرف العزم K (k^{th} moment) بأنه

$$E\left(X^k\right)=\sum_{x\in X(\Omega)} X^k f(x)$$

3- الانحراف المعياري (Standard deviation) للمتغير العشوائي (X) هو

$$\sigma=\sqrt{E(X^2)-\left(E(X)\right)^2}$$

ويسمى مربع الانحراف المعياري

$$\sigma^2=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

بالتباين (Variance).

مثال:

إذا كان X متغير عشوائياً يأخذ قيمة في المجموعة $x(\Omega)=\{1,2,3\}$ وكان اقتران الاحتمال له هو

$$f(x)=\frac{x}{6}$$

احسب:

1- التوزيع الاحتمالي.
2- توقع X
3- العزم الثاني للمتغير العشوائي X
4- Variance (x)

الحل:

1) التوزيع الاحتمالي: $\left\{\left(1,\frac{1}{6}\right),\left(2,\frac{1}{3}\right),\left(3,\frac{1}{2}\right)\right\}$

2) $$E\left(X\right)=\sum_{x=1}^{3} Xf(x)$$

E(X) = 1f(1) + 2f(2) + 3f(3)

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{7}{3}$$

3) $E(X^2)$ = العزم الثاني

$$E\left(X^2\right) = \sum_{x=1}^{3} X^2 f(x)$$

$$= (1)^2 f(1) + (2)^2 f(2) + (3)^2 f(3)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6}$$

$$= \frac{36}{6}$$

$$= 6$$

4) $$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 6 - \left(\frac{(7)}{3}\right)^2$$

$$= 6 - \frac{49}{9}$$

$$= \frac{54 - 49}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

مثال:

في تجربة رمي حجري الـنرد (Tossing two die) إذا عرّفنـا المتغـير العـشوائي X عـلى أنـه مجمـوع الوجهين الظاهرين،أوجد التالي:

1- $X(\Omega)$

2- E(X)

3- Variance (X)