b- احتمال نجاح الطالب في الامتحان إذا كانت علامة النجاح 70%.

c- توقع عدد الإجابات الصحيحة.

19- إحدى شركات الكمبيوتر، ترسل رسائل عبر شبكة الإنترنت، فإذا كان احتمال وجود خطأ في أية رسالة 2%، وأرسلت الشركة في أحد الأيام (300) رسالة، احسب:

a- احتمال عدم وجود خطأ في 200 رسالة.

b- توقع عدد الرسائل التي تحوي أخطاء.

20- شرطي مرور يقف على تقاطع طرق يومياً من الساعة العاشرة صباحاً حتى الثانية عشرة ظهراً. فإذا كان يلاحظ مرور (5) سيارات سياحية يومياً خلال هذه الفترة. احسب احتمال مرور ست سيارات سياحة في نفس الفترة في يوم ما.

21- احسب:

a) t [4, 0.005]

b) t [45, 0.1]

c) t [25 , 0.95]

22- احسب

a) χ^2 [7, 0.05]

b) χ^2 [42, 0.99]

c) χ^2 [1, 0.1]

7

الوحدة السابعة

التقدير واختبار الفرضيات

Estimation and Testing

Hypothesis

التقدير واختبار الفرضية
Estimation and Testing Hypothesis

سنتناول في هذه الوحدة موضوعين هامين في الاستدلال الإحصائي (Statistical inference) وهما:

أولاً: التقدير الإحصائي **(Statistical Estimation)**

كثير من الأحيان نحتاج إلى معلمة إحصائية متعلقة بالمجتمع الإحصائي. ولكن لأسباب مختلفة لا يمكننا الحصول عليها مباشرة فنلجأ إلى تقديرها باستخدام عينة مأخوذة من المجتمع فمثلاً إذا أردنا معرفة معدل عمر تشغيل بطاريات جافة من نوع معين فلا يمكننا إيجاد الوسط الحسابي لعمر صلاحية هذه البطاريات، لذلك نأخذ عينة مناسبة من خلالها تقدر الوسط الحسابي للعمر التشغيلي لها. وقد نقدر هذا الوسط بقيمة معينة كأن نقول العمر التشغيلي (20) ساعة. أو قد نعطي فترة تقديرية لهذا الوسط فنقول أن العمر التشغيلي يقع ضمن الفترة [15, 25].

والآن وقبل أن نتعرف على كيفية التقدير سواءً بقيمة أو بفترة. سنتعرف على المصطلحات التالية:

- **المعلمة الإحصائية (Statistical Parameter)**

وفي موضوعنا ستكون المعلمة الإحصائية هي أحد مقاييس المجتمع مثل الوسط الحسابي للمجتمع (μ) وتباين المجتمع ($\sigma 2$) ونسبة المجتمع (P).

والتي تقابل مقاييس العينة وهي على الترتيب $\overline{x}$ ، S2 ، $\hat{p}$

- **مستوى الثقة (Confedence level):**

وهي احتمال وقوع المعلمة الإحصائية ضمن فترة معينة تسمى فترة الثقة (Confidence interval)

- **المجتمع الإحصائي (Statistical population)**

هو موضوع الدراسة وسنعتبره في هذه الوحدة يأخذ توزيعاً طبيعياً.

أ- التقدير النقطي Point Estimation

وهنا نقدر معالم المجتمع بمقاييس العينة فيقدر الوسط الحسابي للمجتمع (μ) بـ الوسط الحسابي للعينة $\left(\overline{x}\right)$ وتباين المجتمع ($\sigma 2$) بتباين العينة ($S2$) ونسبة المجتمع (p) بنسبة العينة $\left(\hat{p}\right)$

ولكن هذا التقدير يكتنفه بعض السلبيات حيث لا يكون دقيقاً باحتمال يمكن الاعتماد عليه.

مثال:

أخذت عينة من مجتمع إحصائي وسطه الحسابي (μ) وانحرافه المعياري (σ) حيث كان الوسط الحسابي للعينة هو $\left(\overline{x} = 5\right)$، وتباينها (S2=4). قدّر وسط المجتمع وانحرافه المعياري.

الحل: يقدر وسط المجتمع بـ $\mu = \overline{x}$

أي أن $\mu = 5$

ويقدر انحرافه المعياري بـ $\sigma = s$

أي أن $\sigma = 2$

مثال:

أخذت عينة من طلبة جامعة البترا حجمها (200) طالباً وكان عدد الطلبة المغتربين فيها (60) طالباً. قدر نسبة الطلبة المغتربون في الجامعة.

الحل:

$$p = \hat{p}$$

$$p = \frac{60}{200} = 0.3$$

ب- التقدير بفترة Interval Estimation

1- للعينات الكبيرة $(n \geq 30)$

- **تقدير الوسط الحسابي (μ)**

يقدر الوسط الحسابي بفترة الثقة

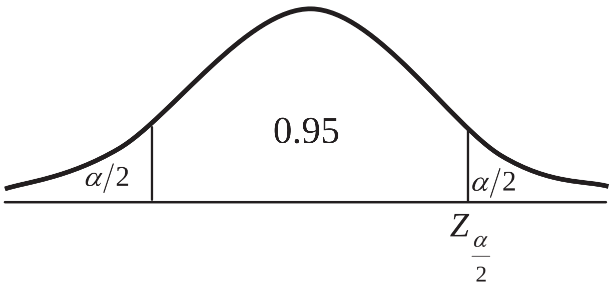
$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ملاحظة: إذا كان تباين المجتمع غير معلوم تقدر σ بـ s.

مثال:

أخذت عينة حجمها (49) ووسطها (45) من مجتمع إحصائي يتخذ توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري (3.5). جد فترة 95% ثقة لوسط المجتمع.

الحل:



نجد في البداية قيمة $Z_{\alpha/2}$.

حيث $\alpha = 1-0.95$

$= 0.05$

فتكون $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

ونجد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ بالاستفادة من جدول

التوزيع الطبيعي المعياري حيث تكون القيمة المقابلة للمساحة 0.475

$$\therefore \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

وبذلك تكون فترة الثقة عند مستوى دلالة 95% هي

$$45 - 1.96\frac{3.5}{\sqrt{49}} \leq \mu \leq 45 + 1.96\frac{3.5}{\sqrt{49}}$$

$$45 - 0.98 \leq \mu \leq 45 + 0.98$$

$$44.02 \leq \mu \leq 45.98$$

وهذا يعني أن احتمال وقوع وسط المجتمع بين القيمتين 45.98 , 44.02 هو 95%.

لتسهيل حل مسائل من هذا النوع سنعطي قيم $Z_{\alpha/2}$ لفترات الثقة عند مستويات دلالة شائعة ونلخصها في الجدول التالي:

Confidence Level	$Z_{\alpha/2}$
80%	1.28
90 %	1.645
95%	1.96
98%	2.33
99%	2.576

مثال:

إذا كان معدّل السحب اليومي بالدينار لوحدة الصراف الآلي في أحد فروع البنك العربي مساوياً (385) دينار بانحراف معياري (27) دينار أوجد فترة 99% ثقة لمجتمع الأشخاص الذين يستخدمون وحدة الصراف الآلي في ذلك الفرع. إذا علمت أن حجم العينة قيد الدراسة (900) عميل.

الحل:

بما أن حجم العينة كبيراً نستخدم (S) بدلاً من σ في القانون. فيصبح القانون على الصورة

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

فتكون الفترة المطلوبة هي

$$385 - (2.576)\frac{27}{\sqrt{900}} \leq \mu \leq 385 + (2.576)\frac{27}{\sqrt{900}}$$

$$385 - 2.318 \leq \mu \leq 385 + 2.318$$

$$382.682 \leq \mu \leq 387.318$$

- **تقدير الفرق بين وسطين ($\mu 1$-$\mu 2$) (Estimation of mean difference)**

إذا كـان لـدينا مجتمعـين مـستقلين يتخـذان توزيعـاً طبيعيـاً وسـطيهما الحـسابيين $\mu 1$ ، $\mu 2$ وانحرافيهما σ_1^2 ، σ_2^2 على الترتيب. فإن فترة %(1-α) ثقة للفرق بين وسطي المجتمعين $\mu 1$-$\mu 2$ هي

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

حيث n1، n2 حجم كل من العينتين على الترتيب

مثال:

أخذت عينتان من مشتركي شركتي اتصالات خلوية وأعطت المعلومات التالية:

تباين مجتمع الدقائق المستخدمة	معدل الدقائق المستخدمة	حجم العينة (ni)
$\sigma_1^2 = 15$	$\bar{x}_1 = 75$	n1=100
$\sigma_2^2 = 8$	$\bar{x}_2 = 80$	n2 = 81

جد فترة 90% ثقة للفرق بين وسطين المجتمعين

الحل:

$$(75-80) - (1.645)\sqrt{\frac{15}{100} + \frac{8}{81}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (75-80) + (1.645)\sqrt{\frac{15}{100} + \frac{8}{81}}$$

$$-5 - 0.822 \le \mu 1 - \mu 2 \le -5 + 0.823$$

$$-5.823 \le \mu 1 - \mu 2 \le -4.177$$

ملاحظة: إذا كانت $\sigma 1$ ، $\sigma 2$ غير معلومتين يمكن الاستعاضة عنهما بـ s1، s2.

- **فترة الثقة لنسبة المجتمع (p)**

(Interval Estimation of Population Proportion)

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}$$

ملاحظة:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

مثال:

أخذت عينة حجمها (500) طالبة من مجتمع طالبات الجامعات الأردنية فكان عدد المحجبات منهن (280) طالبة. أوجد فترة 95% ثقة لنسبة الطالبات المحجبات في الجامعات الأردنية.

الحل:

n = 500

$$\hat{p} = \frac{280}{500} = 0.56$$

فتكون الفترة المطلوبة هي:

$$0.56 - 1.69\sqrt{\frac{(0.56)(0.44)}{500}} \le p \le 0.56 + 1.69\sqrt{\frac{(0.56)(0.44)}{500}}$$

$0.56 - 0.044 \le p \le 0.56 + 0.044$

$0.516 \le p \le 0.604$

- **تقدير فترة الثقة للفرق بين نسبتين**

(Interval estimation for proportion difference)

لمجتمعين مستقلين تكون فترة $(1-\alpha)$% ثقة للفرق بين نسبتين المجتمعين هي:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \le p_1 - p_2 \le (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

مثال:

مصنعين لأجهزة التلفزيون، أخذت عينة من إنتاج المصنع الأول حجمها (40) جهازاً وكانت نسبة المعيب فيها (2%) وأخذت عينة أخرى من إنتاج المصنع الثاني حجمها (60) جهازاً فكانت نسبة المعيب فيها 1.5% .

أوجد فترة 98% ثقة للفرق بين نسبتي الأجهزة الصالحة بين المصنعين.

الحل:

$$\hat{p}_1 = 0.98 \qquad \hat{p}_2 = 0.985$$

$$n_1 = 40 \qquad n_2 = 60$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.98)(0.02)}{40}+\frac{(0.985)(0.015)}{60}}$$

$$= 0.027$$

فتكون فترة الثقة المطلوبة هي:

$$(0.98-0.985) - (2.33)\,(0.027) \le p1\text{-}p2 \le (0.98-0.985) + (2.33)\,(0.027)$$

$$-0.005 - 0.063 \le p1 - p2 \le -0.005 + 0.063$$

$$-0.068 \le p1 - p2 \le 0.058$$

2- للعينات الصغيرة (n<30)

- **فترة الثقة للوسط الحسابي**

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

ملاحظة: إذا كانت σ معلومة نستخدم توزيع (Z) بدلاً من توزيع t (مثل حالة العينات الكبيرة)

مثال:

أخذت عينة حجمها (9) عبوات من إنتاج إحدى آلات تعبئة العصير للمصنع ما فكان حجم العصير في كل منها بالمليمتر 245، 248، 251، 247، 253، 243، 249، 253، 252.

أوجد فترة 95% ثقة لمعدل حجم إنتاج الآلة.

الحل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 249$$

$$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}$$

$$s = \sqrt{12.75} = 3.57$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t\left[n-1\ ,\frac{\alpha}{2}\right]$$

$= t\ [8\ ,\ 0.025]$

$= 2.306$

فتكون فترة الثقة المطلوبة:

$$249 - 2.306\frac{3.57}{\sqrt{9}} \le \mu \le 249 + 2.306\frac{3.57}{\sqrt{9}}\ 249$$

$249 - 2.74 \le \mu \le 249 + 2.74$

$246.26 \le \mu \le 251.74$

- **فترات الثقة للفرق بين وسطين**

لمجتمعين مستقلين تكون فترة الثقة للفرق بين وسطني بمستوى ثقة $(1-\alpha)\%$ هي

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}\ S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}\ S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

حيث

$$S^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t\left[n_1+n_2-2\ ,\frac{\alpha}{2}\right]$$

مثال:

أخذت عينتان من مجتمعين متجانس تباينهما وأعطت النتائج التالية:

	العينة الأول	العينة الثانية
حجم العينة	n1 = 17	n2=25
الوسط الحسابي	$\overline{x}_1 = 120$	$\overline{x}_2 = 112$
الانحراف المعياري	$s_1 = \sqrt{10}$	$s_2 = 5$

أوجد فترة 90% ثقة للفرق بين وسطي المجتمعين.

الحل:

نحسب

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{(16)(10) + (24)(25)}{40}$$

S2 = 19 $\Rightarrow$ S = 4.36

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t\left[n_1 + n_2 - 2 \ , \frac{\alpha}{2}\right]$$

= t [40 , 0.05] = 1.684

$$S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = (4.36)(0.314) = 1.37$$

فتكون فترة الثقة المطلوبة

(120–112) – (1.684) (1.37) $\leq$ μ1–μ2 $\leq$ (120–112)+(1.684) (1.37)

8 – 2.31 $\leq$ μ1–μ2 $\leq$ 8 + 2.31

5.69 $\leq$ μ1–μ2 $\leq$ 10.31

ثانياً: اختبار الفرضيات **(Testing Hypotheses)**

يعتبر موضوع اختبار الفرضيات من المواضيع الهامـة في الإحصـاء الاسـتدلالي حيـث يحتاجـه كـل باحث مهما كان تخصصه وفي العادة تستخدم فرضيتان الأولى تسمى الفرضية الصـفرية (العـدم) (null hypothesis) وعادة يرمز لهـا بـالرمز (H0) والأخـرى تسـمى الفرضـية البديلـة (alternative hypothesis) ويرمز لها بالرمز (H1). ويكون القرار الإحصائي بقبول أو رفض الفرضية الصفرية.

والفرضية الصفرية تكون بالوضع المحايد.

أنواع الخطأ

1- الخطأ من النوع الأولى (type I error)

وهو رفض الفرضية الصفرية عندما تكون صحيحة.

2- الخطأ من النوع الثاني (Type II error)

وهو قبول الفرضية الصفرية وهي خاطئة.

هنالك عدة اختبارات منها ما هو متعلـق بالوسـط أو الفـرق بـين وسـطين، النسـبة والفـرق بـين نسبتين. وسندرس هذه الاختبارات بشيء من التفصيل تالياً.

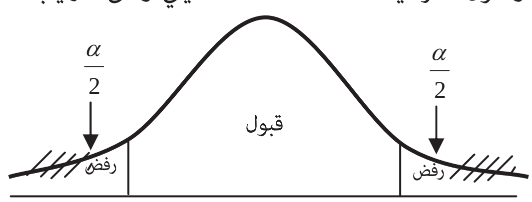
- **اختبار الفرضيات المتعلق بالوسط الحسابي**

ويكون الهدف منه اختبار فيما إذا كان الوسط الحسابي يساوي أو أكبر أو أصغر من قيمة ما.

وتكون الفرضيات هذه الحالات كما يلي وعلى الترتيب

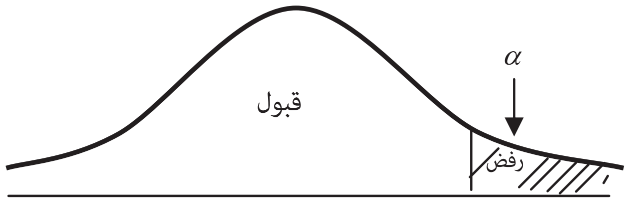
1) H0 : $\mu = \mu_0$

H1 : $\mu \neq \mu_0$



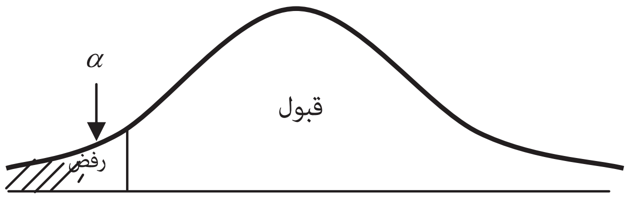
2) $H0 : \mu = \mu 0$

$H1 : \quad \mu > \mu 0$



3) $H0 : \mu = \mu 0$

$H1 : \quad \mu < \mu 0$



حيث تمثل α: احتمال رفض الفرضية الصفرية وتسمى **مستوى الدلالة.**

أ- اختبار الوسط للعينات الكبيرة

لإجراء هذا الاختبار بمستوى دلالة α

1. نكتب الفرضيات الإحصائية المناسبة.
2. نجد قيمة الإحصائية Z بالقانون.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

3. نحدد منطقة الرفض والقبول باستخدام قيمة Z الحرجة (Critical point). وتسمى أيضا Z الجدولية.
4. وإذا وقع الإحصائي Z في منطقة القبول نقبل الفرضية الصفرية ونرفض البديلة. وغير ذلك نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة.

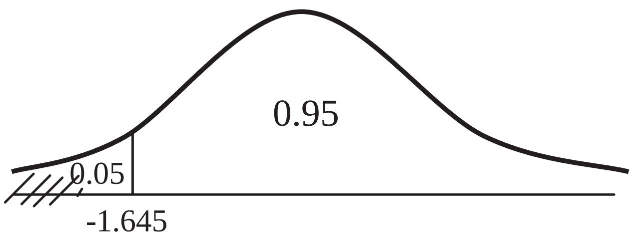
مثال:

إذا حددت مديرية المواصفات والمقاييس وزن رغيف الخبز بـ (200gm). بانحراف معياري (10gm) فإذا أخذ أحد المفتشين عينة من مخبز معين مكونة من (100) رغيف فكان الوسط الحسابي لأوزانها (197gm).

فهل هذا المخبز يعتبر مخالف للمواصفات والمقاييس عند مستوى دلالة (α=0.05)؟

الحل:

سنعتبر أن الشخص مخالف إذا كان وزن الرغيف أقل من (200gm).



H0 : $\mu = \mu_0$

H1 : $\mu < \mu_0$

$Z\alpha = -1.645$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$= \frac{197 - 200}{10 / \sqrt{100}} = -3$$

وتقع قيمة الإحصائي ضمن منطقة الرفض لذلك نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة أي أن وزن الرغيف يقل عن الوزن المقرر من مديرية المواصفات والمقاييس عند مستوى الدلالة المعطى لذلك فهو مخالف.

مثال:

ينتج مصنع أقراص مرنة (floppy disk) للحاسوب ذات القطر (3.500 inch) بانحراف معياري (0.02inch). أخذت عينة من إنتاج المصنع مكونة من (64) قرصاً وقيست أقطارها فأعطت متوسط حسابي مقداره 3.505. فهل تعتبر هذه العينة ملائمة لهذا النوع من الأقراص عند مستوى دلالة (α=0.01).

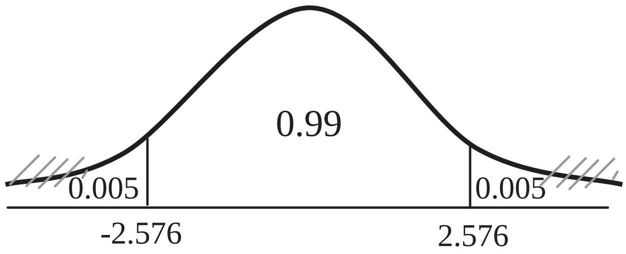
الحل:

H0 : $\mu = 3.500$

H1 : $\mu \neq 3.500$

$$Z = \frac{3.505 - 3.500}{0.02/\sqrt{64}}$$

Z = 2



تقع هـذه القيمـة في منطقـة القبـول. فلـذلك نقبـل الفرضـية الـصفرية ونـرفض البديلـة. أي أن الأقراص ملائمة عند مستوى الدلالة المعطى.

ملاحظـة: إذا كانـت σ غـير معلومـة نـستخدم (S) كقيمـة تقديريـة حيـث تـصبح قيمـة الإحصائي:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

ب- اختبار الوسط في حالة العينات الصغيرة وتباين المجتمع غير معلوم:

نستخدم هنا توزيع t بدرجات حرية (n-1) بدلاً من Z. ويكون الإحصائي

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

مثال:

إذا كان معدل نسبة النيكوتين المثبتة على أحد أنواع السجائر هي (0.7 mlg). أخـذ (16) سـيجارة من هذا النوع فكان الوسط الحسابي لنسبة النيكوتين تساوي (0.75mlg) بـانحراف معيـاري (0.04 mlg). فهل تعتبر هذه السجائر ذات معدل نسبة نيكوتين أعلى من المثبت عـلى علبـة الـسجائر عنـد مـستوى دلالة (α=0.05).

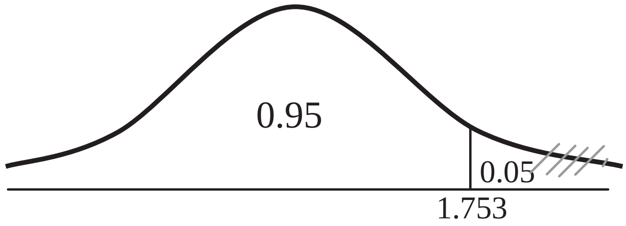
الحل:

H0 : $\mu = 0.7$

H1 : $\mu > 0.7$

$t\,\alpha = t\,[15\,,\,0.5]$

$= 1.753$



$$t=\frac{0.75-0.7}{0.04/\sqrt{16}}=5$$

وتقع في منطقة الرفض أي أن معدل نسبة النيكوتين أعلى من المثبت على علبة الدخان.

- **اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطين**

أ- العينات الكبيرة:

إذا كان لدينا مجتمعين مستقلين تباين كل منهما على الترتيب $\sigma 1,\sigma 2$ بوسطين حسابيين $\mu 1, \mu 2$ فيمكن أن نختبر إحدى الحالات التالية:

1) H0 : $\mu 1=\mu 2 \Leftrightarrow \mu 1-\mu 2=0$

H1 : $\mu 1\neq \mu 2 \Leftrightarrow \mu 1-\mu 2\neq 0$

2) H0 : $\mu 1=\mu 2 \Leftrightarrow \mu 1-\mu 2=0$

H1 : $\mu 1> \mu 2 \Leftrightarrow \mu 1-\mu 2> 0$

3) H0 : $\mu 1=\mu 2 \Leftrightarrow \mu 1-\mu 2=0$

H1 : $\mu 1< \mu 2 \Leftrightarrow \mu 1-\mu 2< 0$

ويكون الإحصائي في جميع الحالات

$$Z=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

or $$Z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

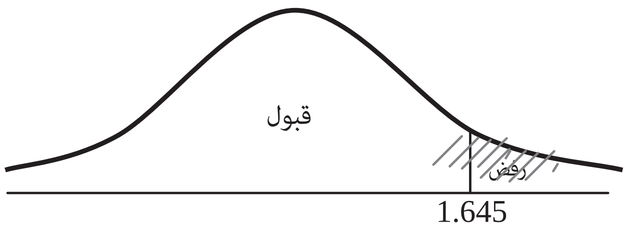
مثال:

يدعي أحد الباحثين أن متوسط علامات طلبة الجامعات الحكومية في مادة الإحصاء أفضل من طلبة الجامعات الخاصة في نفس المادة. فإذا أخذت عينتان من الجامعات الحكومية والخاصة وأعطت النتائج التالية:

	عينة الجامعات الحكومية	عينة الجامعات الخاصة
حجم العينة	n1 = 81	n2 =100
الوسط الحسابي	$\bar{x}_1 = 75$	$\bar{x}_2 = 70$
التباين	$s_1^2 = 18$	$s_2^2 = 10$

اختبر ادعاء الباحث على مستوى دلالة (α=0.05).

الحل:



H0 : $\mu_1 = \mu_2$

H1 : $\mu_1 > \mu_2$

$Z_\alpha = 1.645$

$$Z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{75 - 70}{\sqrt{\frac{18}{81} + \frac{10}{100}}}$$

$\therefore$ Z = 8.82

وتقع هذه القيمة في منطقة الرفض أي أن ادعاء الباحث صحيح.

> ملاحظة: في المثال السابق استخدم S_1^2، S_2^2 بدلاً من σ_1^2، σ_2^2 على الترتيب مع استخدام الإحصائي Z وذلك لأن العينتان كبيرتان.

ب- للعينات الصغيرة والتباين غير معلوم

إذا أخذت عينتان صغيرتان (اقل من 30) مستقلتان من مجتمعين وسطيهما على الترتيب μ_1, μ_2، وتباينهما غير معلومين فإننا نستخدم توزيع t بدلاً من Z بدرجات حرية (n1+n2-2) ويكون الإحصائي هو

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

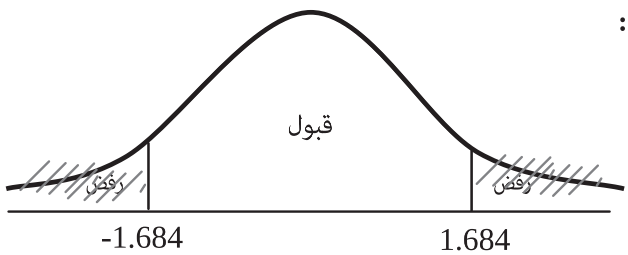
مثال:

أخذت عينتان من إنتاج مصنعين لأجهزة التلفزيون وأعطت النتائج التالية:

	عينة المصنع الأول	عينة المصنع الثاني
حجم العينة	n1 = 25	n2 =16
متوسط العمر التشغيلي بالسنة	$\bar{x}_1 = 17$	$\bar{x}_2 = 15$
الانحراف المعياري	$s_1 = 2.5$	$s_2 = 2$

بناء على العينتين هل يوجد فرق بين متوسطي العمر التشغيلي لإنتاج المصنعين على مستوى دلالة (α=0.1).

الحل:



H0 : $\mu 1 = \mu 2$

H1 : $\mu 1 \neq \mu 2$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t[39 \ , 0.05]$$

$= 1.684$

$$S^2 = \frac{(25-1)(2.5)^2 + (16-1)(2)^2}{25+16-2}$$

$= 5.38$

$\therefore S = 2.32$

$$\therefore t = \frac{17 - 15}{2.32\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{16}}}$$

$$= \frac{2}{(2.32)(0.32)}$$

$t = 2.7$

وتقع في منطقة الرفض

إذن يوجد فرق ذو دلالة بين متوسطي العمر التشغيلي لإنتاج المصنعين.

ملاحظة: إذا كان تباينا المجتمعين معلومين نستخدم توزيع Z بدلاً من t.

- **اختبار الفرضيات المتعلق بالنسبة**

في هذه الحالة تكون الفرضيات الممكنة

1) H0 : $P = P0$
   H1 : $P \neq P0$

2) H0 : $P = P0$
   H1 : $P > P0$

3) H0 : $P = P0$
   H1 : $P < P0$

الإحصائي يكون

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

مثال:

مدير يعاقب سكرتيرته إذا كانت نسبة الخطأ في الكتب التي تطبعها أكثر من 5% فإذا أخذت عينة مكونة من 50 كتاب من طباعة السكرتيرة ووجد أن ثلاث كتب منها تحوي أخطاء.

فهل هذا يعني أن السكرتيرة تستحق العقاب عند مستوى دلالة (α=0.05).