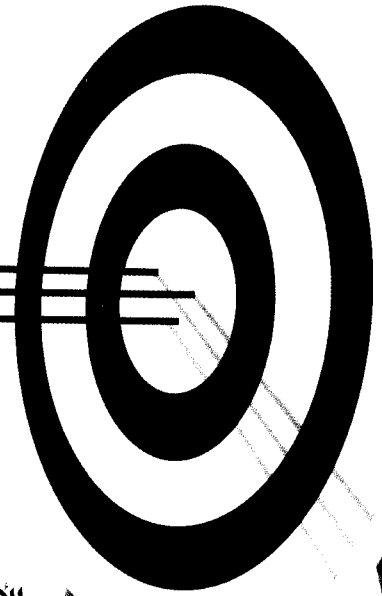


الاقتصاد القياسي

الأستاذ الدكتور حسين علي بخيت
الدكتورة سحر فتم الله

الاقتصاد القياسي

الأستاذ الدكتور حسين علي بخيت
الدكتورة سحر فتم الله



المحتويات

13-7	المحتويات
16-15	تمهيد
33-17	الفصل الاول: المقدمة.
18	1.1 تعريف الاقتصاد القياسي.
19	2.1 أهداف الاقتصاد القياسي.
20	3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى.
22	4.1 النموذج الاقتصادي.
25	5.1 أنواع النماذج.
26	6.1 مكونات النموذج.
27	7.1 منهجية الاقتصاد القياسي.
31	8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي.
33	9.1 الأسئلة والتمارين.
78-34	الفصل الثاني: الانحدار الخطي البسيط، Simple Linear Regression
36	1.2 المقدمة.
38	2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي.
41	3.2 طريقة المربعات الصغرى، OLS.
45	1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:
46	1.1.3.2 طريقة الحذف والتعويض
47	2.1.3.2 طريقة المحددات.
50	3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.

53	4.1.3.2 طريقة المصفوفات.	
59	2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى.	
59	1.2.3.2 الخاصية الخطية.	
64	2.2.3.2 خاصية عدم التحيز.	
67	3.2.3.2 خاصية أفضل مقدر.	
74	4.2 تقدير تباين حد الخطأ العشوائي.	
78	5.2 الأسئلة والتمارين.	
132-80	الفصل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypotheses Testing.	
81	1.3 المقدمة.	
82	2.3 اختبار قيمة t ، t -Value Test.	
87	3.3 معامل التحديد، R^2 ، Determinant Coefficient.	
91	4.3 اختبار إحصائية F ، F -Statistics.	
96	5.3 معامل الارتباط البسيط، r ، Simple Correlation Coefficient.	
104	6.3 حدود الثقة لمعاملات الانحدار.	
108	7.3 التنبؤ.	
127	8.3 الأسئلة والتمارين.	
186-133	الفصل الرابع: الانحدار الخطي المتعدد، Multiple Linear Regression.	
134	1.4 المقدمة.	
135	2.4 النموذج الخطي المتعدد.	
136	3.4 فرضيات النموذج الخطي المتعدد.	
139	4.4 طرق تقدير معلمات النموذج.	
142	1.4.4 طريقة المحددات	

144	2.4.4 طريقة الانحرافات.	
155	5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS.	
161	6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد.	
161	1.6.4 اختبار معنوية المعالم (t).	
164	2.6.4 معامل التحديد المتعدد، R^2 .	
168	3.6.4 اختبار إحصائية F.	
171	7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA.	
179	8.4 قياس حدود الثقة.	
182	9.4 الأسئلة والتمارين.	
227-187	الفصل الخامس: مشكلة الارتباط الذاتي، The Autocorrelation Problem	
188	1.5 المقدمة.	
189	2.5 مسببات الارتباط الذاتي.	
190	3.5 تحليل الارتباط الذاتي.	
195	4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي.	
195	1.4.5 طريقة اختبار إحصائية D-W.	
196	2.4.5 طريقة THEIL-NAGAR.	
196	3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT.	
197	4.4.5 طريقة DURBIN.	
198	5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي.	
198	6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي.	
201	7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.	
202	1.7.5 طريقة التحويل، Transformation Method.	

204	2.7.5 طريقة التكرار، Iterative Method.	
206	3.7.5 طريقة الفرق العام، The Generalized Difference Method.	
207	4.7.5 طريقة الفرق الأول، The First Difference Method.	
225	8.5 الأسئلة والتمارين.	
256-228	الفصل السادس: مشكلة التعدد الخطي، The Multicollinearity Problem	
229	1.6 المقدمة.	
230	2.6 طبيعة التعدد الخطي.	
231	3.6 أسباب حدوث ظاهرة التعدد الخطي.	
232	4.6 أنواع التعدد الخطي:	
232	1.4.6 غياب التعدد الخطي، Absence of Multicollinearity.	
233	2.4.6 التعدد الخطي التام، Exact Multicollinearity.	
234	3.4.6 التعدد الخطي غير التام، No Exact Multicollinearity.	
236	5.6 النتائج المترتبة على وجود التعدد الخطي.	
237	6.6 طرق اختبار وجود التعدد الخطي:	
237	1.6.6 اختبار Firsch.	
244	2.6.6 طريقة FARRAR-GLAUBER.	
244	1.2.6.6 اختبار مربع كاي، χ^2 .	
248	2.2.6.6 اختبار إحصاء F.	
249	3.2.6.6 اختبار إحصاء t.	
250	3.6.6 اختبار كلاين.	

251	7.6 طرق معالجة مشكلة التعدد الخطي.	
253	8.6 الأسئلة والتمارين.	
286-257	الفصل السابع: مشكلة عدم تجانس تباين المتغير العشوائي، The Heteroscedasticity Problem	
256	1.7 المقدمة.	
258	2.7 طبيعة مشكلة عدم تجانس حد الخطأ.	
263	3.7 أسباب عدم تجانس حد الخطأ.	
264	4.7 اكتشاف عدم تجانس حد الخطأ.	
264	1.4.7 اختبار كولدفيلد وكوانت.	
269	2.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.	
274	3.4.7 اختبار بارثليت.	
277	4.4.7 طريقة كليجر.	
277	5.4.7 اختبار بارك.	
279	5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين.	
282	6.7 الأسئلة والتمارين	
335-287	الفصل الثامن: نماذج المعادلات الآتية، Simultaneous Equations Models	
286	1.8 طبيعة المعادلات الآتية.	
288	2.8 مشكلة التحيز الآتي.	
291	3.8 نماذج المعادلات الآتية في النظرية الاقتصادية.	
291	1.3.8 نموذج العرض والطلب.	
297	2.3.8 النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي.	
300	3.3.8 نموذج فيلبس الأجر النقدي-السعر.	
301	4.8 الشكل المختزل.	

312	5.8 تقدير نموذج المعادلات الآتية.	
312	1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، ILS.	
316	2.5.8 طريقة المتغير الاداتي، IV.	
323	3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، TSLS.	
329	6.8 الأسئلة والتمارين.	
351-336	الفصل التاسع: مشكلة التشخيص، Identification Problem	
335	1.9 المقدمة.	
337	2.9 طبيعة مشكلة التشخيص.	
339	3.9 شروط التشخيص.	
348	4.9 الأسئلة والتمارين.	
376-352	الفصل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنياً، The Lagged Variables	
351	1.10 المقدمة.	
351	2.10 مفهوم النموذج المرتد زمنياً.	
354	3.10 أسباب وجود الارتداد الزمني.	
355	4.10 تقدير النموذج المرتد زمنياً:	
355	1.4.10 نموذج كويك، KOYCH.	
359	2.4.10 نموذج التوقع لـ CAGAN.	
366	3.4.10 نموذج التعديل الجزئي لـ نيرلوف، NERLOV.	
370	4.4.10 نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لـ المون، ALMON.	
372	5.10 الأسئلة والتمارين.	
402-377	الفصل الحادي عشر: المتغيرات الوهمية، Dummy Variables	
376	1.11 المقدمة.	

377	2.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد.	
383	3.11 نموذج الانحدار المتضمن أكثر من متغير وهمي مستقل.	
389	4.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي تابع.	
396	5.11 الأسئلة والتمارين.	
409-403	تمصادر.	
400	أولاً: المصادر العربية.	
402	ثانياً: المصادر الانكليزية.	
440-410	تملاحق.	

تمهيد:

قد يكون من الغريب القول ان الأسلوب الأمثل للوصول إلى الغاية من دراسة اقتصاد القياسي هو معرفة ما هو مطلوب من دراسة العلوم المقاربة له للتمكن من تمييزه عنها، ونعني بالعلوم المقاربة هي الإحصاء الاقتصادي والاقتصاد الرياضي.

وبينما يهتم الاقتصاد الرياضي بالنظرية الاقتصادية وصياغتها بأسلوب رياضي، يتوقف عند هذا الحد، لأن ذلك يتم بدون إجراء اختبار لمعرفة مدى مطابقتها منطق الاقتصادي، يهتم الإحصاء الاقتصادي بالمقابل بتجميع وتبويب البيانات الاقتصادية، وهو أيضا لا يعير أية أهمية لتحليل نتائج هذه البيانات، ولكن الذي يميز اقتصاد القياسي عن الإحصاء الاقتصادي والاقتصاد الرياضي هو اهتمامه بالأسس الخيسية والاختبارات التجريبية للفرضيات الاقتصادية. غير ان العلاقة بين هذه العلوم وضدة، حيث نجد أثر ذلك عندما يستخدم الاقتصاد القياسي ما متاح من البيانات التي يفرها الإحصاء الاقتصادي بغية تحديد العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وتفسيرها ثم استخدام النتائج المتحققة للتنبؤ والتحليل. وهو بالمقابل يعتمد -أي الاقتصاد الخيسي- على الاقتصاد الرياضي في وصفه للفرضيات التي تعتمد على التسبيب نظري بشكل رقمي أو عددي، ومن ثم تقييمها.

وبعبارة موجزة فان الاقتصاد القياسي يحاول الاستفادة من عملية الجمع الحاصلة بين النظرية الاقتصادية والأساليب الرياضية، في إطار الاقتصاد الرياضي، ثم الاستفادة بالطرق الإحصائية للحصول على تقديرات كمية لاستخدامها في عمليات اتخاذ القرار والتنبؤ ودراسة التغيرات الهيكلية.

وقد تم عرض نظرية الاقتصاد القياسي في هذا الكتاب في أحد عشر فصلا، ضمن الفصل الأول منه مقدمة للتعريف بالاقتصاد القياسي وأهدافه وعلاقته بالعلوم الأخرى. أما الفصل الثاني فقد تم فيه التطرق إلى تحليل الانحدار الخطي البسيط

بطريقة المربعات الصغرى واختبار الفرضيات في فصل ثالث، ليتخصص الفصل الرابع في وصف الانحدار الخطي المتعدد واختبار فرضياته. أما مشاكل النموذج الخطي والمتمثلة بمشكلة الارتباط الذاتي ومشكلة التعدد الخطي ومشكلة عدم ثبات تجانس التباين فقد تم استعراضها في الفصول الخامس والسادس والسابع على التوالي. ولبيان طبيعة المعادلات الآنية ومشكلة التحيز الآني وطرق التقدير كان الفصل الثامن بعنوان نماذج المعادلات الآنية، ليكون الفصل التاسع وقفة لعرض مشكلة التشخيص وبيان طبيعة المشكلة وشروط التشخيص، أما الفصل العاشر فقد تم فيه استعراض المتغيرات المرتدة زمنياً بشكل مفصل، ليكون الفصل الحادي عشر محطة أخيرة لعرض ثلاثة من نماذج الانحدار تتضمن متغيرات وهمية عنوانه المتغيرات الوهمية.

الدكتورة سحر فتح الله
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة بغداد

الأستاذ الدكتور حسين علي بخيت
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة بغداد/جامعة الزيتونة الاردنية حالياً

2006

الفصل الأول: المقدمة

- 1.1 تعريف الاقتصاد القياسي.
- 2.1 أهداف الاقتصاد القياسي.
- 3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى.
- 4.1 النموذج الاقتصادي.
- 5.1 أنواع النماذج.
- 6.1 مكونات النموذج.
- 7.1 منهجية الاقتصاد القياسي.
- 8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي.

الفصل الأول: المقدمة

1.1 تعريف الاقتصاد القياسي، Definition of Econometrics:

يعد الاقتصاد القياسي، econometrics، أسلوب من أساليب التحليل الاقتصادي يهتم بالتقدير العددي (الكمي) للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية معتمداً في ذلك على النظرية الاقتصادية، Economic Theory، والرياضيات، Mathematics، والإحصاء، Statistics، للوصول إلى هدفه الخاص باختبار الفروض والتقدير ومن ثم التنبؤ بالظواهر الاقتصادية.

هذا يعني ان الاقتصاد القياسي يحاول الاستعانة أولاً بالنظرية الاقتصادية لتحديد المشكلة المراد دراستها ولأهم المتغيرات الاقتصادية والاجتماعية التي تؤثر فيها، ومن ثم يستعين بالاقتصاد الرياضي لتوصيف العلاقات القائمة بين المتغيرات في شكل رموز ومعادلات، وأخيراً يستعين بعلم الإحصاء فيستفيد منها في تطوير واستنباط طرق القياس لتقدير معالم الصيغ المقترحة واختبار الفروض ومن ثم الوصول إلى النتائج الدقيقة التي يمكن الاعتماد عليها في التنبؤ بالمشكلة المدروسة.

بذلك يمكن القول بأن الاقتصاد القياسي هو تكامل للنظرية الاقتصادية مع الرياضيات والأساليب الإحصائية بهدف اختبار الفروض عن الظواهر الاقتصادية، وتقدير معاملات العلاقات الاقتصادية، والتنبؤ بالقيم المستقبلية للظواهر الاقتصادية.

عليه يمكن تعريف الاقتصاد القياسي بأنه علم اجتماعي تستخدم فيه أدوات النظرية الاقتصادية والرياضيات والإحصاء لتحليل الظواهر الاقتصادية، وأنه يتكون من كلمتين أصلهما إغريقي Economy، اقتصاد، و Metrics والتي تعني قياسات.

2.1 أهداف الاقتصاد القياسي، The Goals of Econometrics:

يمكن التعرف على ثلاث أهداف أساسية للاقتصاد القياسي هي:

أولاً: تحليل واختبار النظريات الاقتصادية المختلفة:

إن تحليل واختبار النظريات الاقتصادية، يعد هدفاً رئيساً من أهداف الاقتصاد القياسي، ولا يمكن عدّ النظرية الاقتصادية صحيحة ومقبولة ما لم تجتاز اختباراً كمياً عديداً يوضح قوة النموذج ويفسر قوة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

ثانياً: رسم السياسات واتخاذ القرارات:

يساهم الاقتصاد القياسي برسم السياسات واتخاذ القرارات عن طريق الحصول على قيم عددية لمعاملات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات لتساعد رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات الحالية من حيث توفيره لصيغ وأساليب مختلفة لتقدير لمرونة والمعلومات الفنية والتكلفة الحدية والإيرادات الحدية، والميل الحدي للاستهلاك والادخار والاستثمار وغير ذلك. وتأسيساً على ذلك فإن معرفة القيم العددية لمعاملات النموذج المقدّر تساعد على إجراء المقارنات واتخاذ القرار المناسب سواءً على مستوى المنشأة أو الدولة.

ثالثاً: التنبؤات بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل:

يساعد الاقتصاد القياسي رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات من خلال توفير القيم العددية لمعاملات، Parameters، المتغيرات الاقتصادية والتنبؤ بما ستكون عليه الظاهرة الاقتصادية مستقبلاً. إن هذه التنبؤات تمكن واضعي السياسة ومتخذي القرار لتنظيم الحياة الاقتصادية واتخاذ إجراءات معينة للتأثير في متغيرات اقتصادية معينة، مثال ذلك، لو أرادت الحكومة معرفة الآثار المحتملة للسياسة النقدية على التضخم والبطالة، وما هو الأثر المتوقع لزيادة أسعار السلع البديلة أو المكملة

على الكمية المطلوبة من السلعة الأصلية، حيث ان الاقتصاد القياسي سوف يحدد مستوى الكمية فيما إذا كان مرتفعاً أو منخفضاً وهكذا لبقية الظواهر الاقتصادية وما يتعلق بها مستقبلاً.

3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى:

للاقتصاد القياسي علاقة وثيقة بالنظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي، الإحصاء الاقتصادي، والإحصاء الرياضي، ان هذه الفروع تتكامل من أجل توفير قيم عديدة لمعلومات المتغيرات الاقتصادية المختلفة، إلا ان أياً من هذه الفروع لا يعد بديلاً عن الاقتصاد القياسي، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

1- تقوم النظرية الاقتصادية بدراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية فتتص النظرية الاقتصادية الجزئية مثلاً على ان زيادة سعر سلعة ما تسبب انخفاضاً في الطلب عليها، فتفترض هذه النظرية وجود علاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة من السلعة، ولكنها لم تعط أي قياس عددي للعلاقة بين هذين المتغيرين فلم تبين مقدار الانخفاض للكمية المطلوبة المصاحب لتغير معين في السعر فتصبح هذه المهمة من مهمات الاقتصاد القياسي بعد توصيفه رياضياً.

بذلك يمكن القول ان العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المستوحاة من النظرية الاقتصادية تبقى مسألة مجردة ما لم يتم تقديرها أي تقدير معالمها في ضوء البيانات الإحصائية الواقعية والتي هي من مهمات القياس الاقتصادي (تحديد الطابع الكمي للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية الجارية في واقع معين وذلك بالاسترشاد بالنظرية الاقتصادية).

2- يهتم الاقتصاد الرياضي بإعادة صياغة العلاقة التي تم تحديدها بالاعتماد على النظرية الاقتصادية رياضياً أي على هيئة معادلات ورموز رياضية بدون قياس

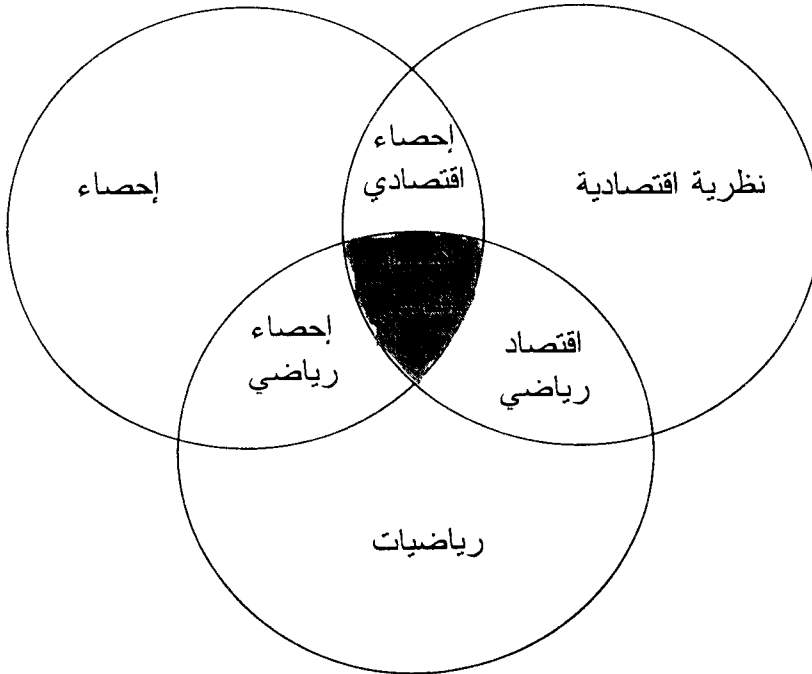
أو برهنة عددية لتلك الصياغات، فالقياسات والبرهنة العددية هي من مهمات القياس الاقتصادي.

3- الإحصاء الاقتصادي يقتصر دوره على تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية التي تتكون منها العلاقات المحددة في (1) و(2) أعلاه وتسجيلها وجدولتها أو رسمها وينصب دور القياس الاقتصادي على تحليل واختبار نوع العلاقة بين المتغيرات بهدف معرفة مدى مطابقة النتائج مع منطوق النظرية الاقتصادية.

4- أما مادة الإحصاء الرياضي فهي تجهز الباحث بأدوات تحليلية يستخدمها في دراسة العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وبطرق خاصة لمعالجة أخطاء التقدير تمهيداً لاستخدامها في تحقيق أهداف القياس الاقتصادي.

لذلك يمكن النظر إلى علم القياس الاقتصادي على أنه نقطة التقاء ثلاث علوم رئيسة هي الاقتصاد والرياضيات والإحصاء كما مبين في الشكل (1.1).

الشكل (1.1): الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى.



يتضح مما تقدم ان النظرية الاقتصادية تعطينا فكرة عامة حول شكل العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ويأتي دور الاقتصاد القياسي لتحديد المقدار الكمي لتلك العلاقة بالاعتماد على الاقتصاد الرياضي الذي يحاول تصوير العلاقة المذكورة بشكل معادلة رياضية، وطرق الإحصاء الرياضي لملائمتها لطبيعة العلاقة القائمة، كل ذلك يتحقق بالاعتماد على الإحصاء الاقتصادي الذي يغذي القياس الاقتصادي بالمادة الأولية اللازمة للتحليل في صورة بيانات مجمعة ومبوبة وبدون هذه البيانات تصبح عملية القياس أمراً مستحيلاً.

4.1 النموذج الاقتصادي، Economic Model:

يعرف النموذج الاقتصادي بأنه مجموعة من العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية لتمثيل ظاهرة معينة بصورة خالية من التفاصيل والتعقيدات ولكنها ممثلة للواقع بهدف تحليلها أو التنبؤ بها والسيطرة عليها. وقد يتكون من معادلة واحدة، Single Equation، مثل معادلة الطلب أو معادلة العرض ويسمى عندئذ النموذج بكونه نموذج ذات معادلة منفردة، أو من مجموعة من المعادلات وتسمى بالمعادلات الأنية، Simultaneous Equation، كنموذج السوق.

وقد يكون الهدف من النموذج هو تقدير قيم عددية لمعاملات علاقة بين متغيرات اقتصادية بغية التنبؤ أو تحليل هيكل اقتصادي أو تقييم سياسة اقتصادية. ويستخدم النموذج الاقتصادي الرموز الرياضية فمثلاً تفترض النظرية الاقتصادية بأن الاستهلاك C، دالة في الدخل Y، أي ان:

$$C = f(Y) \quad \dots(1.1)$$

تُمثل C المتغير الاستجابة، Dependent variable، أما Y فيُمثل المتغير التوضيحي، Independent variable، وتحكم العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية عدد من الصيغ أبسطها الصيغة الخطية، فبتحويل العلاقة (1.1) إلى صيغتها الخطية تكون:

$$C = B_0 + B_1 Y \quad \dots(2.1)$$

حيث تُمثل B_0 ، B_1 المعلمات، Coefficients، ويمكن ان توضح من الناحية رياضية على النحو الآتي:

B: تُمثل معامل التقاطع وهي عبارة عن المسافة العمودية المحصورة بين نقطة الأصل ونقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور العمودي، وتمثل B_0 قيمة C عندما تكون قيمة Y مساوية للصفر ويطلق عليها بالاستهلاك الذاتي.

B: تُمثل ظل الزاوية التي يصنعها خط الانحدار مع مستوى الأفق وتسمى بالميل، Slope، الحدي لخط الانحدار، وتمثل قيمة B_1 الزيادة الحاصلة في قيمة المتغير التابع، C، نتيجة زيادة المتغير التوضيحي، Y، بمقدار وحدة واحدة. بعبارة أخرى - زاد الدخل Y بمقدار وحدة واحدة من Y_1 إلى Y_2 يصبح قيمته (Y_1+1) يترتب على ذلك زيادة في قيمة الاستهلاك، C، من C_1 إلى C_2 ولنفترض بمقدار ΔC . - بإمكان إثبات ان الزيادة في المتغير التابع ΔC يساوي قيمة الميل B_1 رياضياً رياضياً.

رياضياً:

$$C = B_0 + B_1 Y$$

عندما يزداد المتغير المستقل Y بمقدار وحدة واحدة، نحصل على:

$$C + \Delta C = B_0 + B_1 (Y + 1)$$

$$C + \Delta C = B_0 + B_1 Y + B_1$$

نعوض عن قيمة C بما يعادلها:

$$B_0 + B_1 Y + \Delta C = B_0 + B_1 Y + B_1$$

وبعد الاختصار ، نحصل على:

$$\Delta C = B_1$$

وفي ضوء ذلك يمكن القول ان الميل الحدي للاستهلاك يمثل مقدار الزيادة الحاصلة في C بنسبة زيادة Y بمقدار وحدة واحدة، أي ان:

$$B_1 = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

وبما ان:

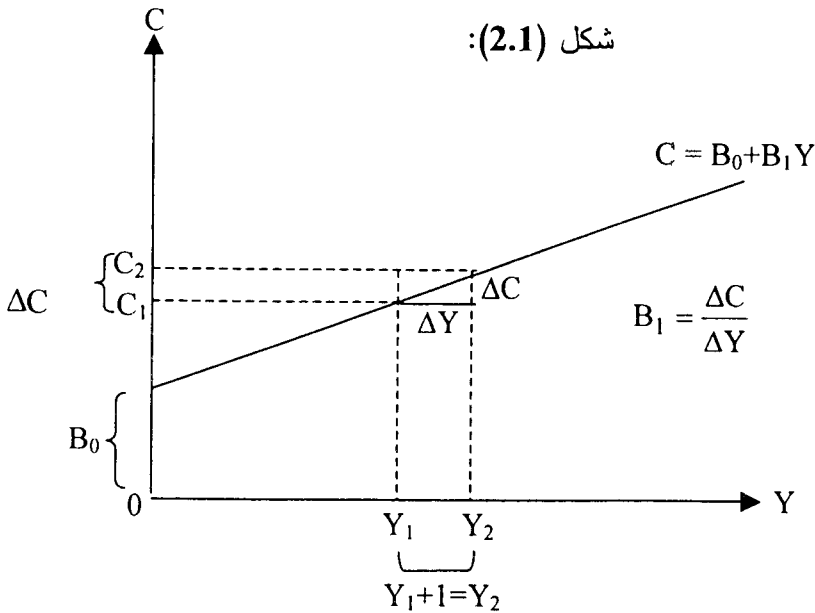
$$\Delta Y = 1$$

إذن:

$$\therefore B_1 = \Delta C$$

ب- بيانياً:

شكل (2.1):



وتأسيساً على ذلك هناك عدة خصائص مرغوب فيها لأي نموذج اقتصادي منها:

- 1- مطابقته للنظرية الاقتصادية، بحيث يصف الظاهرة الاقتصادية بشكل صحيح.
- 2- قدرته على توضيح المشاهدات الواقعية، بحيث يكون متناسقاً مع السلوك الفعلي للمتغيرات الاقتصادية التي تحدد العلاقة بين هذه المتغيرات.
- 3- دقته في تقدير المعلمات، ان هذه التقديرات يجب ان تكون أفضل تقريب للمعلمات الحقيقية. وتأتي هذه الدقة من اتصاف هذه التقديرات بصفات مرغوبة يحددها الاقتصاد القياسي مثل خاصية عدم التحيز، Unbaise، وكفاءتها.
- 4- قدرة النموذج الاقتصادي على التنبؤ، بحيث يعطي تنبؤات مرضية للقيم المستقبلية للمتغيرات المعتمدة.
- 5- خاصية البساطة، إذ ان النموذج الاقتصادي يجب ان يبرز العلاقات الاقتصادية بأقصى حد ممكن من البساطة، فكلما قلّت عدد المعادلات وكان شكلها الرياضي أبسط اعتبر النموذج الاقتصادي أفضل من غيره شريطة ان لا يكون على حساب الدقة في التقدير.

5.1 أنواع النماذج:

هناك عدة أنواع من النماذج التي يمكن تصنيفها كالاتي:

1- النماذج الاقتصادية الكلية والجزئية:

- أ- النماذج الاقتصادية الكلية: وهي النماذج التي تتعامل مع المتغيرات الاقتصادية التي تخص الاقتصاد الكلي أي تتصل بالسلوك العام والبنية العامة للاقتصاد كالدخل القومي، الاستثمار العام،...الخ.
- ب- النماذج الاقتصادية الجزئية: وهي النماذج التي تتعامل مع المتغيرات الاقتصادية التي تخص الوحدات الاقتصادية الجزئية كعلاقة العرض والطلب على سلعة معينة.

2- النماذج الاقتصادية الساكنة والمتحركة:

أ- النماذج الاقتصادية الساكنة: وهي النماذج التي لا يكون الزمن أحد متغيراتها أو مؤثراً في تغيير قيم أحد المتغيرات الداخلة فيها، أي بدون فترة ارتداد زمني، وهذا يعني ان لكل متغير قيمة معينة في السنة التي يقع فيها، فمثلاً تكون دالة الطلب الساكنة كالآتي:

$$D_t = f(P_t)$$

ب- النماذج الاقتصادية المتحركة: وهي النماذج التي يكون الزمن أحد متغيراتها أو مؤثراً في أحد متغيراتها، ان هذه النماذج توضح كيفية تأثير الزمن في المتغيرات الاقتصادية، وتعد هذه النماذج أكثر واقعية، فمثلاً تكون دالة العرض المتحركة كالآتي:

$$S_t = f(P_{t-1})$$

أي ان العرض في السنة الحالية (t) تعتمد على سعر السلعة في السنة السابقة (t-1) ويسمى المتغير الحركي بمتغير مرتد زمنياً مثل (P_{t-1}) .

6.1 مكونات النموذج:

أولاً: معادلات النموذج:

يتكون النموذج الاقتصادي من مجموعة من المعادلات تسمى هذه بالمعادلات الهيكلية لأنها توضح الهيكل الأساس للنموذج المراد بناؤه، وتختلف عدد المعادلات من نموذج لآخر تبعاً لنوع النموذج والهدف من بنائه. وتنقسم المعادلات الهيكلية إلى:

- المعادلات السلوكية: هي المعادلات التي تعبر عن العلاقات الدالية بين المتغيرات الاقتصادية ويمكن التعبير عنها بدالة ذات متغير مستقل واحد أو عدة متغيرات مستقلة.

- المعادلات التعريفية أو المتطابقات: هي المعادلات التي تعبر عن علاقة اقتصادية ناتجة عن تعاريف متفق عليها أو هي العلاقة التي تحدد قيمة المتغير التابع بتحديد تعريف له في صورة علاقة مساواة.

ثانياً: متغيرات النموذج:

تتكون معادلات النموذج من عدد من المتغيرات يمكن تصنيفها إلى عدة فروع وكما يأتي:

- المتغيرات الداخلية: وهي المتغيرات التي تؤثر في النموذج وتتأثر به، وتتحدد قيمتها من داخل النموذج عن طريق المعاملات وقيم المتغيرات الخارجية وتسمى هذه المتغيرات (الداخلية) أيضاً بالمتغيرات التابعة.

- المتغيرات الخارجية: وهي المتغيرات التي تؤثر في النموذج ولا تتأثر به، وتتحدد قيمتها بعوامل خارجية عن النموذج وفي بعض الأحيان تتحدد قيمها عن طريق نموذج آخر مختلف عن النموذج الأصلي وتسمى هذه المتغيرات (الخارجية) بالمتغيرات المستقلة.

- المتغيرات المرتدة زمنياً: وهي المتغيرات التي تنتمي إلى فترة زمنية سابقة أو التي تؤخذ قيمها من الفترة السابقة مثل (Y_{t-1}) التي تمثل دخل السنة الماضية.

7.1 منهجية الاقتصاد القياسي، Methodology of Economics

يهتم الاقتصاد القياسي بقياس معاملات، Coefficients، النموذج المستخدم في التقدير والتنبؤ لقيم المتغيرات الاقتصادية، وهذا يتطلب إتباع منهجية معينة في بحث، لأن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية سببية، Causal، أي بمعنى أن التغير

ففي بعض المتغيرات يحدث أثراً في المتغيرات الأخرى، ويمكن تحديد هذه المنهجية بالخطوات الآتية:

1- مرحلة التوصيف، Specification Stage:

تعد مرحلة توصيف (صياغة) النموذج من أهم مراحل بناء النموذج وأصعبها وذلك من خلال ما تتطلبه من تحديد للمتغيرات التي يجب ان يشتمل عليها النموذج أو التي يجب استبعادها منه. وفي هذه المرحلة يتم الاعتماد على النظرية الاقتصادية الاقتصاد الرياضي لتحويل العلاقة المذكورة إلى معادلات رياضية باستخدام الرموز في تحديد نوع واتجاه العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية، كما يتم الاعتماد على الرياضية مثل العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما (D_x) والسعر (P_x) والدخل (Y) حيث تصاغ العلاقة أعلاه كالآتي:

$$D_x = B_0 + B_1 P_x + B_2 Y \quad \dots(3.1)$$

فمن نظرية الطلب يتوقع الحصول على إشارة سالبة للمعامل B_1 وذلك لوجود علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها حسب النظرية الاقتصادية وإشارة موجبة للمعامل B_2 لوجود علاقة طردية بين الكمية المطلوبة ودخل المستهلك، كما يتم هنا جمع البيانات الخاصة بمتغيرات النموذج.

2- مرحلة التقدير، Estimation Stage:

في هذه المرحلة يتم جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة الاقتصادية (المشكلة) قيد الدراسة ، ومن ثم يتم تقدير معالم العلاقة التي تم وصفها وصياغتها رياضياً في المرحلة الاولى، أي تقدير قيم رقمية للمعالم B_0 ، B_1 ، B_2 في دالة الطلب أعلاه كما

يجب في هذه المرحلة تقييم المعالم المقدرة من النواحي الاقتصادية والإحصائية والقياسية.

فمن الناحية الاقتصادية تجري عملية مقارنة بين قيم وإشارات معالم النموذج التي تم تقديرها مع القيم والإشارات المتوقعة لهذه المعالم في ضوء النظرية الاقتصادية.

ومن الناحية الإحصائية يتم حساب الانحرافات الكلية والجزئية في المتغيرات التي يتكون منها النموذج واختبار معنوية المعالم من خلال اختبار (t) ومعامل التحديد (R²).

أما من الناحية القياسية فيتم اختبار مدى انسجام وتحقق الفروض الخاصة بالمتغير العشوائي على النموذج القياسي المقترح حيث ان وجود الاختلاف يعني وجود مشاكل منها مشكلة الارتباط الذاتي، التعدد الخطي، وعدم ثبات تجانس التباين والتي سيتم التعرف على كلا منها بشكل مفصل وبفصل خاص لكل منها في الفصول اللاحقة.

3- مرحلة الاختبار، Testing Stage:

في هذه المرحلة يتم اختبار قوة ومعنوية النموذج المقدر باعتماد طرق إحصائية معينة للتأكد من صلاحية النموذج وقدرته على التنبؤ. وقد يواجه الباحث هنا عدة مشاكل منها مشكلة تغاير حد الخطأ أو الارتباط الذاتي أو الازدواج الخطي وغيرها من المشاكل، وعلى الباحث ان يعالج هذه المشاكل قبل البدء بعملية التقييم.

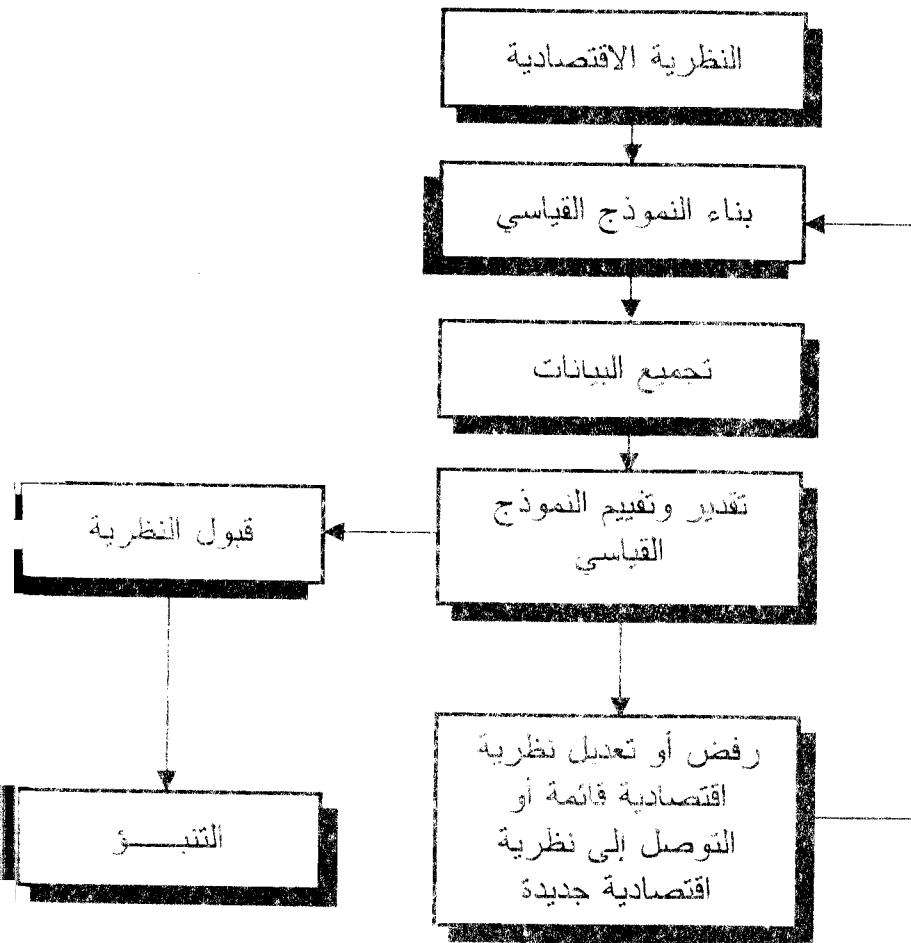
4- مرحلة التنبؤ، Prediction Stage:

لا يوجد من يعترض على ضرورة التنبؤ بالمستقبل والتعرف عليه مسبقاً قبل فهمه وعلى مختلف المستويات- الكلية والجزئية- وفي مختلف المجالات الاقتصادية والاجتماعية ولمختلف المدد القصيرة والمتوسطة والطويلة، عليه يتم في هذه المرحلة

أعداد تقديرات مستقبلية للمتغيرات المدروسة كحجم الطلب على السلعة (D_x) في مثالنا السابق.

ولكن قبل استخدام النموذج المقدر في التنبؤ يجب التأكد من جودة الأداء العام للنموذج المقدر، وبعدئذ يتم تطبيق النتائج التي تم التوصل إليها على الواقع واستخدامها في عملية التنبؤ. ويمكن توضيح منهجية البحث في الاقتصاد القياسي كما مبين في الشكل (2.1).

الشكل (3.1): منهجية البحث في الاقتصاد القياسي.



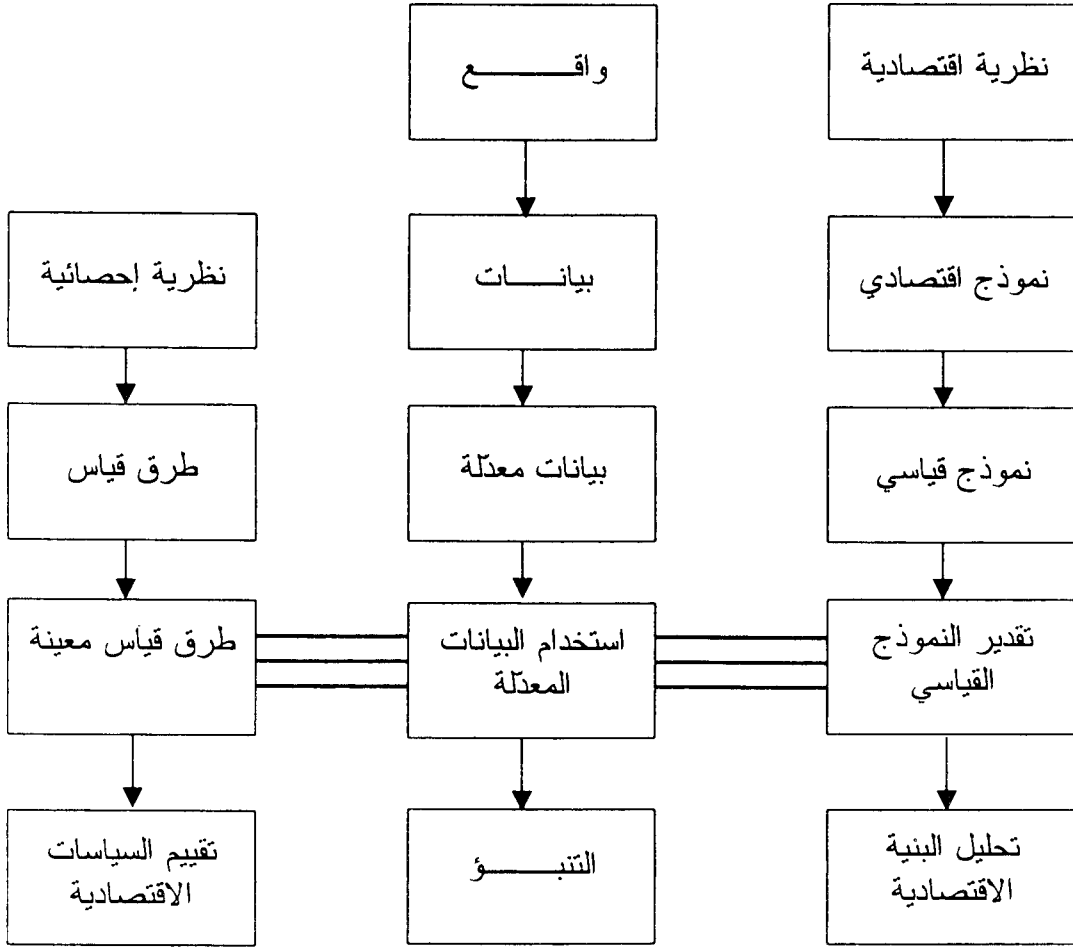
8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي، Econometrics Approach:

يعتمد أسلوب الاقتصاد القياسي على النظرية الاقتصادية التي تزوده بالنماذج الاقتصادية التي تستخدم في تكوين النماذج القياسية، ولغرض تقدير أو تقييم النماذج. نسبة ووضعها في شكل كمي، يعتمد الاقتصاد القياسي على الواقع الذي تستقي منه معومات والبيانات اللازمة لعملية التقدير ومن ثم يقوم بعملية التصحيح أو تعديل بيانات المستقاة من الواقع وتهيئتها للاستخدام.

وبعدها يعود الاقتصاد القياسي إلى نظرية الإحصاء بغرض تطوير واستساخ طرق قياس وبذلك يكون تحت التصرف نموذج قياسي مع بيانات صالحة للاستخدام مع طرق القياس ومن ثم يتم استخدام هذه الإمكانيات في تقدير معلمات أو معاملات نموذج القياسي الذي يجسد العلاقات الاقتصادية.

ومن ثم يمكن استخدام هذا النموذج الذي تم تقديره ، أما في تحليل البنية الاقتصادية أو في التنبؤ أو في تقييم السياسات الاقتصادية، ويمكن عرض ذلك بشكل صحيح من خلال الشكل (4.1).

الشكل (4.1): أسلوب الاقتصاد القياسي.



أسئلة الفصل الأول

سؤال 1.1: ناقش الخصائص المرغوبة في النموذج الاقتصادي القياسي مستعيناً بالمعادلات كلما كان ذلك ممكناً.

سؤال 2.1: ما هي وظائف مادة الاقتصاد القياسي؟ وكيف تختلف عن وظائف المواد القريبة منها.

سؤال 3.1: ما هو أسلوب الاقتصاد القياسي؟

سؤال 4.1: ما هي منهجية البحث في الاقتصاد القياسي.

الفصل الثاني: الانحدار الخطي البسيط

Simple Linear Regression

1.2 المقدمة.

2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي.

3.2 طريقة المربعات الصغرى، OLS.

1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:

1.1.3.2 طريقة الحذف.

2.1.3.2 طريقة المحددات.

3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.

4.1.3.2 طريقة المصفوفات.

2.3.2 الخصائص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى.

1 الخاصية الخطية.

2 خاصية عدم التحيز.

3.2.3.2 خاصية أفضل مقدر.

دبر تباين حد الخطأ العشوائي.

سئلة والتمارين.

الفصل الثاني: الانحدار الخطي البسيط

Simple Linear Regression

1.2 مقدمة:

ان دراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية يتطلب تحديد المتغيرات المؤثرة في تلك العلاقة ومن ابسط واسهل أنواع العلاقات في التقدير والتحليل الإحصائي والاقتصادي، العلاقة بين متغيرين أحدهما المتغير التابع، Dependent Variable، والثاني المتغير المستقل، Independent Variable، وإذا رمزنا للمتغيرين بـ Y و X وعلى التوالي، فإن العلاقة الدالية التي تجمعهما تكون كالآتي:

$$Y = F(x) \quad \dots(1.2)$$

حيث يشير الرمز F الى كون المتغير التابع Y يعتمد على المتغير المستقل X. ولتحديد شكل العلاقة هذه - ما إذا كان خطياً أم غير خطي - يمكن الاستعانة بالنظرية الاقتصادية، كما يستعان بالاقتصاد الرياضي والإحصاء لصياغة العلاقة واختبار المتغيرات، كما لا بد من تحديد شكل العلاقة هذه إذ تحكم العلاقة بين المتغيرات بعدد من الأشكال (الصيغ) أبسطها وأكثرها شيوعاً الصيغة الخطية، وتسمى العلاقة الخطية بـمتغيرين بالانحدار الخطي البسيط، Simple Linear Regression، فالعلاقة الخطية بين X ولتكن دخل الأسرة و Y ولتكن الأنفاق على سلعة معينة يمكن ان تكتب بالصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i \quad \dots(2.2)$$

حيث :

B_0 و B_1 عبارة عن معلمات مجهولة القيم وثوابت يُشرحان من وجهة النظر الرياضية كالآتي:

B_0 : تمثل تقاطع خط الانحدار مع المحور العمودي وهي عبارة عن القيمة التي تتخذها Y عندما تكون قيمة X مساوية للصفر.

B_1 : تمثل الميل.

ومن وجهة النظر الاقتصادية تمثل (E_0) حالة الكفاف و (B_1) الميل الحدي للاستهلاك، وقيمة الميل عبارة عن مقدار الزيادة المتحققة في قيمة المتغير التابع Y نتيجة زيادة المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

غير ان العلاقة أعلاه (2.2) لا يمكن ان تشرح العلاقة بين المتغيرين بشكل دقيق، فهناك أسباب مهمة تجعل هذه المعادلة غير معبرة عن العلاقة بين X و Y تعبيراً كاملاً فقد يكون هناك انحراف بين العلاقة الحقيقية والمعادلة الإحصائية التي تمثلها نتيجة أخطاء في القياسات أو في اختيار المتغير المستقل، مما يتطلب إضافة متغير جديد يسمى بالحد العشوائي، Random Variable ويرمز له عادة بالرمز (U) ودوره امتصاص العوامل غير القابلة للقياس، وكذلك أخطاء القياس، عليه فان العلاقة من الصيغة (2.2) يجب ان تعدل لكي تضم حد الخطأ العشوائي حيث يصبح:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad \dots(3.2)$$

$$\sum U_i = \sum Y_i - \sum Y_i + B_1 \sum X_i - B_1 \sum X_i$$

$$\sum U_i = 0$$

$$E(U_i) = 0$$

2- ان المتغير العشوائي (U_i) يتوزع توزيعاً طبيعياً، Normally distributed، حول القيمة المتوقعة أو حول الوسط الحسابي المساوي للصفر عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل X أي بشكل جرس.

3- ان تباين، Variance، المتغير العشوائي (حد الخطأ)، حول الوسط الحسابي مقدار ثابت عند كل قيمة من قيم X أي:

$$\text{var}(U_i) = E[U_i - E(U_i)]^2$$

$$\therefore E(U_i) = 0$$

$$\therefore \text{var}(U_i) = E(U_i)^2 = 6^2$$

وإذا كان تباين الخطأ غير ثابت عندئذ تظهر مشكلة تسمى مشكلة عدم تجانس التباين، Heteroscedasticity، والتي سنتناولها بشيء من التفصيل لاحقاً.

الفرضيات الثلاث السابقة يمكن جمعها بشكل مختصر وتمثيلها كالآتي:

$$U_i \sim N(0, \sigma^2)$$

أي بمعنى ان الخطأ العشوائي، U_i ، يتوزع، $\sim$ ، توزيعاً طبيعياً، N ، بوسط حسابي مساوي للصفر، 0، وتباين ثابت قيمته σ^2 .

4- أن قيم U_i غير مرتبطة بأي من المتغيرات المستقلة، أي انعدام التباين المشترك Covariance بين U_i و X_i أي:

2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي:

1- ان المتغير العشوائي (U_i) هو متغير تعتمد قيمته في أية فترة زمنية على عامل الصدفة، فقد تكون اكبر أو اصغر أو مساوية إلى الصفر، إلا أنها في المتوسط تساوي صفر، أي $E(U_i) = 0$ ، ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad \dots(4.2)$$

$$U_i = Y_i - B_0 - B_1 X_i \quad \dots(5.2)$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة 5.2:

$$\sum U_i = \sum (Y_i - B_0 - B_1 X_i)$$

$$\sum U_i = \sum Y_i - nB_0 - B_1 \sum X_i \quad \dots(6.2)$$

$$\therefore B_0 = \bar{Y} - B_1 \bar{X}$$

نعوض عن B_0 بما يساويها في المعادلة (6.2):

$$\sum U_i = \sum Y_i - n(\bar{Y} - B_1 \bar{X}) - B_1 \sum X_i \quad \dots(7.2)$$

$$\therefore \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}, \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

وبحاصل ضرب الطرفين في الوسطين نحصل:

$$\sum Y_i = n\bar{Y}, \quad \sum X_i = n\bar{X}$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (7.2) تكون:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i Y_i + B_1 \sum X_i^2 - B_1 \sum X_i^2$$

وبعد الحذف والتبسيط يكون:

$$\sum X_i U_i = 0$$

5- القيم المختلفة للمتغير العشوائي (U_i) تكون مستقلة عن بعضها البعض بعبارة أخرى التباين المشترك لـ U_i مع U_j مساوية للصفر، وعليه فإن قيمة العنصر العشوائي في أي فترة لا تعتمد على قيمته في فترة أخرى أي:

$$\text{Cov}(U_i, U_j) = E(U_i U_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j)$$

وإذا حدث وجود ارتباط بينها تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الذاتي، Autocorrelation، وسيتم شرحها لاحقاً.

6- انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة وفي حالة وجود علاقة قوية بينها تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الخطي المتعدد، Multicollinearity، والتي سيتم تناولها فيما بعد.

3.2 طريقة المربعات الصغرى،

:The Ordinary Least Squares (OLS)

بالرجوع إلى العلاقة الخطية بين دخل الأسرة X وانفاقها على سلعة معينة Y .

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad \dots(11.2)$$

يتبين لنا بأن تأثير الدخل في الأنفاق على السلعة موضوع البحث يتحدد من خلال العلاقة المنتظمة $(B_0 + B_1 X_i)$ ، أما تأثير العوامل الأخرى فإنه متجسد في (U_i) . وعليه فإنه لمعرفة العلاقة الحقيقية بين دخل الأسرة وانفاقها على السلعة في القطر يتطلب احتساب B_0 و B_1 ، إلا أن احتساب المعالم المذكورة لا يمكن أن يتم إلا في حالة الحصول على دخل وانفاق جميع الأسر في ذلك القطر وهذا أمر غير ممكن

$$\text{Cov}(U_i, X_i) = E(U_i X_i)$$

$$\text{Cov}(U_i, X_i) = X_i E(U_i)$$

$$\therefore E(U_i) = 0$$

$$\therefore \text{Cov}(U_i, X_i) = 0$$

ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad \dots(8.2)$$

$$U_i = Y_i - B_0 - B_1 X_i \quad \dots(9.2)$$

وبضرب طرفي المعادلة بـ $\sum X_i$:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - B_0 \sum X_i - B_1 \sum X_i^2$$

$$\therefore B_0 = \bar{Y} - B_1 \bar{X}$$

و عند تعويض ذلك:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i (\bar{Y} - B_1 \bar{X}) - B_1 \sum X_i^2 \quad \dots(10.2)$$

$$\therefore \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}, \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

وبتعويض ذلك يكون:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i \left(\frac{\sum Y_i}{n} - B_1 \frac{\sum X_i}{n} \right) - B_1 \sum X_i^2$$

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i \left(\frac{\sum Y_i - B_1 \sum X_i}{n} \right) - B_1 \sum X_i^2$$

بسبب صعوبة العملية الإحصائية اللازمة ولتسهيل العمل تسحب عينة من أسر القطر،
ومن ثم تقدر قيم المعالم ويتم التقدير بواسطة المعادلة:

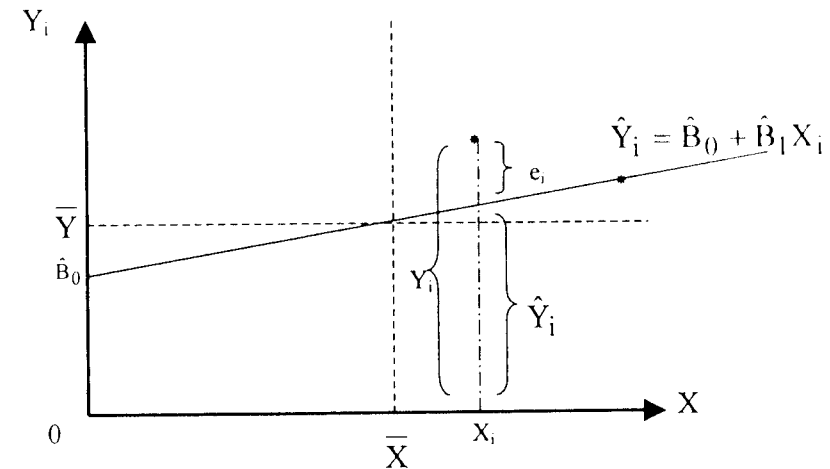
$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i + e_i \quad \dots(12.2)$$

ولتقدير تأثير الدخل بصورة مستقلة في الإنفاق فإنه يتم بواسطة المعادلة التالية:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \quad \dots(13.2)$$

تسمى المعادلة (13.2) بمعادلة خط الانحدار، وتشير العلامة (^) إلى كون القيم تقديرية وليست حقيقية وكل نقطة من نقاطه ($\hat{Y}_i$) تمثل القيمة التقديرية لمتوسط إنفاق جميع العوائل ذات الدخل البالغ X . ويتبين من المعادلتين (12.2) و (13.2) بأن قيم المشاهدات الفعلية Y_i تحرف عن القيم التقديرية ($\hat{Y}_i$) بمقدار e_i وكما مبين في الشكل الآتي:

شكل (1.2)



من الشكل يتبين ان:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

حيث يمكن للبواقي، e_i ، ان تكون سالبة أو موجبة حسب موضع نقطة المشاهدة من الخط المقدر. ولإيجاد افضل خط مستقيم لعينة مشاهدات Y ، X من بين خطوط لا نهائية العدد تصف المعادلة الخطية، تستخدم طريقة المربعات الصغرى (OLS)، ويتضمن ذلك في محاولة جعل مجموع مربع انحرافات القيم الحقيقية Y_i عن القيم التقديرية $\hat{Y}_i$ اقل ما يمكن، أي جعل مجموع مربعات الأخطاء العشوائية عند نهايتها الصغرى وبما ان طريقة OLS تشترط تصغير القيمة ($\sum e_i^2$) إلى الحد الأدنى فإنها عبارة عن مشكلة النهايات الصغرى أي:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^n e_i^2$$

حيث ان:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

إن:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

بما ان معادلة الخط المستقيم الحقيقية غير المعروفة هي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i$$

فان معادلة الخط المستقيم التقديرية تكون:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

بالتعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها نحصل:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)^2$$

وكشروط رياضي لتصغير $\sum e_i^2$ تؤخذ المشتقات الجزئية لكل من $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ومساواة كل منها بالصفر.

بمعوضهما في المعادلتين (14.2) و (15.2) وبحلها آنياً نحصل على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ اللتان تمثلان مقدرتان للمعلمتين الحقيقيتين B_0 و B_1 .

1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:

ولتقدير معاملات النموذج B_0 و B_1 نستعين بعدة طرق منها:

1- طريقة الحذف والتعويض.

2- طريقة المحددات.

3- طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.

4- طريقة المصفوفات.

وسنبين هذه الطرق من خلال المثال الآتي، من دون تكرارها هنا وهناك.

مثال 1.2: الجدول الآتي يمثل عدد سنوات الخدمة (X_i) ومعدل الأجر السنوي (Y_i) بآلاف الدنانير لعينة تمثل (8) موظفين في أحد الدوائر.

X_i	Y_i	$X_i Y_i$	X_i^2
4	25.6	102.4	16
8	32.7	261.6	64
12	45.4	544.8	144
16	53.9	862.4	256
20	59.0	1180	400
24	62.6	1502.4	576
28	65.0	1820	784
32	65.5	2105.6	1024
$\sum X_i = 144$ $\bar{X} = 18$	$\sum Y_i = 410$ $\bar{Y} = 51.25$	$\sum X_i Y_i = 8379.2$	$4 \sum X_i^2 = 3264$

وان الشرط الجوهري للتصغير هو اخذ التفاضل الجزئي لمجموع المربعات بالنسبة لمعاملات، Coefficient، النموذج $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ومساواة المشتقة الأولى بالصفر.

أي بتطبيق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_0} = 2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)(-1) = 0$$

$$-2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس ونرتب المعادلة نحصل على:

$$\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

$$\sum Y_i - n\hat{B}_0 - \hat{B}_1 \sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \quad \dots(14.2)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)(-X_i) = 0$$

$$-2 \sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

بالقسمة على (2) نحصل على:

$$\sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

$$\sum X_i Y_i - \hat{B}_0 \sum X_i - \hat{B}_1 \sum X_i^2 = 0$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \quad \dots(15.2)$$

تسمى المعادلتين (14.2) و (15.2) بالمعادلتين الطبيعيين (الآنيتين) حيث (n) عدد المشاهدات، X_i و Y_i هي معلومة دائماً باعتبارهما قيم المشاهدات الحقيقية وبمجرد

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144(1.486904762)$$

$$410 = 8\hat{B}_0 + 214.1142857$$

$$410 - 214.1142857 = 8\hat{B}_0$$

$$195.8857143 = 8\hat{B}_0$$

$$\hat{B}_0 = \frac{195.8857143}{8} = 24.48571429$$

وعليه فإن المعادلة المقدرة ، Estimated ، للعلاقة بين عدد سنوات الخدمة X_i ومعدل الأجر السنوي Y_i للعينة المعنية تكون:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

تشير المعادلة التقديرية إلى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع Y_i الذي يمثل معدل الأجر السنوي للموظف والمتغير المستقل X_i الذي يمثل عدد سنوات الخدمة فزيادة خدمته الوظيفية بمقدار سنة واحدة يزداد معدل أجره السنوي بمقدار 1486 دينار.

2.1.3.2 طريقة المحددات، Determinates Method

ويمكن الحصول على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ باعتماد المحددات (قاعدة كرامير) وذلك بإعادة كتابة المعادلتين الطبيعيين (16.2) و (17.2) في صيغة مصفوفة وعلى النحو الآتي:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

المطلوب: تقدير خط الانحدار بواسطة المعادلتين الطبيعيين أعلاه.

1.1.3.2 طريقة الحذف والتعويض، Substitution Method

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \quad \dots(16.2)$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \quad \dots(17.2)$$

وبتعويض القيم من الجدول في المعادلتين 16.2، 17.2 نحصل على:

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1 \quad \dots(18.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \quad \dots(19.2)$$

وبضرب المعادلة (18.2) في 18 نحصل:

$$7380 = 144\hat{B}_0 + 2592\hat{B}_1 \quad \dots(20.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \quad \dots(21.2)$$

و بطرح معادلة (20.2) من (21.2) نحصل:

$$999.2 = 672\hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{999.2}{672} = 1.486904762$$

للحصول على قيمة $\hat{B}_0$ نعوض عن قيمة $\hat{B}_1$ في أحد المعادلتين الرئيسيتين ولتكن معادلة (18.2).

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1$$

بالرجوع إلى بيانات المثال (1.2) وباعتماد المحددات نحصل على قيم $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_0$ وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|D| = (8)(3264) - (144)(144)$$

$$|D| = 26112 - 20736$$

$$|D| = 5376$$

$$|A_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 410 & 144 \\ 8379.2 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|A_0| = (410)(3264) - (144)(8379.2)$$

$$|A_0| = 1338240 - 1206604.8$$

$$|A_0| = 131635.2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 410 \\ 144 & 8379.2 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = (8)(8379.2) - (410)(144)$$

$$|A_1| = 67033.6 - 59040$$

$$|A_1| = 7993.6$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|A_0|}{|D|} = \frac{131635.2}{5376} = 24.48571429$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

ولتقدير $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ ينبغي تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i)$$

$$|A_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|A_1|}{|D|} = \frac{n(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|A_0|}{|D|} = \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)}{n(\sum X_i^2) - (\sum X_i)^2}$$

or

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X}$$

$$\hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \bar{X} \quad \dots(26.2)$$

$$\hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_1 \bar{X}$$

$$\hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{B}_1 (X_i - \bar{X})$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i \quad \dots(27.2)$$

$$\because e_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$e_i = y_i - \hat{B}_1 x_i \quad \dots(28.2)$$

وبإدخال $\sum$ وتربيع الطرفين:

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{B}_1 x_i)^2 \quad \dots(29.2)$$

بإيجاد المشتقة الجزئية لـ $\hat{B}_1$ ومساواتها بالصفر:

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2 \sum (y_i - \hat{B}_1 x_i)(-x_i) = 0 \quad \dots(30.2)$$

$$- 2 \sum x_i (y_i - \hat{B}_1 x_i) = 0$$

وبالقسمة على (-2):

$$\sum x_i (y_i - \hat{B}_1 x_i) = 0$$

$$\sum x_i y_i - \hat{B}_1 \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i y_i = \hat{B}_1 \sum x_i^2$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|\Lambda_1|}{|D|} = \frac{7993.6}{5376} = 1.486904762$$

وبذلك تكون المعادلة التقديرية:

$$\therefore \hat{Y}_i = 24.4857 + 1.486 X_i$$

3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط:

كما يمكن تقدير $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ بواسطة انحرافات المتغيرين Y_i و X_i عن وسطهما الحسابي $\bar{Y}$ و $\bar{X}$ باستخدام فكرة البواقي e_i فبقسمة المعادلة الطبيعية رقم (1) على n نحصل:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \quad \dots(22.2)$$

$$\frac{\sum Y_i}{n} = \hat{B}_0 \frac{n}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\bar{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X} \quad \dots(23.2)$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X} \quad \dots(24.2)$$

و لإيجاد $\hat{B}_1$ نعود إلى معادلة الخط المستقيم التقديرية حيث:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \quad \dots(25.2)$$

وبطرح المعادلة رقم (23.2) من (25.2) نحصل على:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{999.2}{672} = 1.486904762$$

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X}$$

$$\hat{B}_0 = 51.25 - (1.486904762)(18)$$

$$\hat{B}_0 = 51.25 - 26.76428572$$

$$\hat{B}_0 = 24.48571428$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 24.485 + 1.486 X_i$$

4.1.3.2 طريقة المصفوفات، Matrices Method:

إضافة إلى الطرق السابقة فإنه يمكن تقدير قيم $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_0$ باعتماد صيغة المصفوفات حيث يمكن كتابة المعادلات الطبيعية على شكل مصفوفات، Matrices ومتجهات، Vectors، وكما يلي:

نفترض ان هناك علاقة تحتوي على i من المشاهدات من $1 \leftarrow n$ وان هناك عدد من المتغيرات من $1 \leftarrow K$.

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{i1} + U_i \quad \dots(32.2)$$

$$Y_1 = B_0 + B_1 X_{11} + B_2 X_{12} + \dots + B_k X_{1k} + U_1$$

$$Y_2 = B_0 + B_1 X_{21} + B_2 X_{22} + \dots + B_k X_{2k} + U_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$Y_n = B_0 + B_1 X_{n1} + B_2 X_{n2} + \dots + B_k X_{nk} + U_n$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad \dots(31.2)$$

حيث ان:

$\sum x_i y_i$ تمثل مجموع حاصل ضرب انحرافات القيم عن الوسط الحسابي للمتغيرين X_i و Y_i ، وان $\sum x_i^2$ تمثل مجموع مربع الانحرافات لقيم المتغير X_i عن وسطه الحسابي. وعليه فان المعادلتين (24.2) و (31.2) هي المعادلات الأساسية التي تستخدم في إيجاد قيم $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_0$ بموجب طريقة الانحرافات.

وبالرجوع إلى بيانات الجدول (1.2) والتعبير عنها بصيغة انحرافات يمكن الحصول على قيم $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_0$ كما يأتي:

X_i	Y_i	x_i	Y_i	$x_i y_i$	x_i^2
4	25.6	-14	-25.65	359.1	196
8	32.7	-10	-18.55	185.5	100
12	45.4	-6	-5.85	35.1	36
16	53.9	-2	2.65	-5.3	4
20	59.0	2	7.75	15.5	4
24	62.6	6	11.35	68.1	36
28	65.0	10	13.75	137.5	100
32	68.5	14	14.55	203.7	196
$\sum X_i = 144$ $\bar{X} = 18$	$\sum Y_i = 410$ $\bar{Y} = 51.25$	$\sum x_i = 0$ $x_i = X - \bar{X}$	$\sum y_i = 0$ $y_i = Y - \bar{Y}$	$\sum x_i y_i = 999.2$	$\sum x_i^2 = 672$

$$e'e = (Y' - \hat{B}'X')(Y - X\hat{B})$$

$$e'e = Y'Y - \hat{B}'X'Y - Y'X\hat{B} + \hat{B}'X'X\hat{B} \quad \dots(35.2)$$

بما ان الحد الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة، كما وان كل حد يمثل مبدلة للأخر فأن:

$$[\hat{B}'X'Y = (\hat{B}'X'Y)' = \hat{B}'XY']$$

$$\therefore e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B} \quad \dots(36.2)$$

$$\hat{B}' = (\hat{B}')' = \hat{B} \quad \text{ولما كانت}$$

وبأخذ المشتقة الجزئية لـ $\hat{B}'$ ومساواتها بالصفر:

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{B}'} = 2X'Y + 2X'X\hat{B} = 0$$

$$2X'X\hat{B} = 2X'Y$$

وبقسمة طرفي المعادلة على (2) نحصل:

$$X'X\hat{B} = X'Y$$

وبضرب طرفي المعادلة بالمعكوس $(X'X)^{-1}$ نحصل:

$$(X'X)^{-1}X'X\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وبما ان حاصل ضرب المعكوس $(X'X)^{-1}$ في المصفوفة $X'X$ يساوي مصفوفة الوحدة، I ، إذن المعادلة أعلاه تصبح:

$$\therefore \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y \quad \dots(37.2)$$

يمكن تمثيل هذه المعادلات بصيغة رمز المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

$$Y = XB + U \quad \dots(33.2)$$

حيث ان:

Y: متجه عمودي أبعاده (nx1) يحتوي على n مشاهدة للمتغير التابع Y.

X: مصفوفة أبعادها (n x k+1) تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة X. وعمودها

الأول يحتوي على قيم الواحد صحيح لأخذ الثابت بنظر الاعتبار.

B: متجه عمودي أبعاده (k+1x1) تحتوي المعالم المجهولة.

U: متجه عمودي أبعاده (n x 1) يحتوي الخطأ العشوائي.

وللحصول على تقديرات المربعات الصغرى العادية لمتجه المعلمات يمكن

كتابة المعادلة المقدرة التي يراد الحصول عليها وبصيغة المصفوفات كما يلي:

$$Y = \hat{Y} + e$$

$$Y = X\hat{B} + e$$

$$\therefore e = Y - X\hat{B} \quad \dots(34.2)$$

وباستخدام المبدلة لـ e .

$$e'e = (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

$$|X'X| = \begin{bmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{bmatrix} = (8)(3264) - (144)(144)$$

$$|X'X| = 26112 - 20736$$

$$|X'X| = 5376$$

$$\text{adj}X'X = \begin{bmatrix} 3264 & -144 \\ -144 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{5376} \begin{bmatrix} 3264 & -144 \\ -144 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.607142857 & -0.026785714 \\ -0.026785714 & 0.001488095 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25.6 \\ 32.7 \\ 45.4 \\ 53.9 \\ 59.0 \\ 62.6 \\ 65.0 \\ 65.8 \end{bmatrix}$$

حيث ان:

$\hat{B}$: تمثل معاملات الانحدار المطلوب تقديرها.

$(X'X)^{-1}$: تمثل معكوس المصفوفة $(X'X)$.

$X'Y$: تمثل المتجه.

وبالرجوع إلى البيانات الواردة في الجدول (1.2) وباعتماد صيغة المصفوفات يمكن

الحصول على قيم $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ وكالاتي:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 12 \\ 1 & 16 \\ 1 & 20 \\ 1 & 24 \\ 1 & 28 \\ 1 & 32 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \text{adj}X'X$$

2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى:

في كل تقدير يتم الحصول عليه، هناك خصائص عدة مرغوب فيها لذلك التقدير، ومن هذه الخصائص خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز، Best Linear Unbiased Estimator (BLUE)، فكل مقدر ($\hat{B}$) يمكن التعبير عنه كدالة خطية بالنسبة لملاحظات المتغير التابع (Y)، أي أن:

$$\hat{B} = K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + \dots + K_n Y_n$$

حيث أن:

K_i ، ($i=1,2,\dots,n$) عبارة عن أوزان أو قيم ثابتة. ومن بين جميع المقدرات الخطية نبحث عن المقدرات غير المتحيزة، ونقصد بعدم التحيز هو أن يكون الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر وقيمة المعلمة الحقيقية يساوي صفر، أي:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

وأفضل مقدر هو ذلك المقدر الذي يكون تباينه حول الوسط الحسابي اقل ما يمكن فإذا كان B^* ، $\hat{B}$ مقدرات خطية غير متحيزة فإن $\hat{B}$ أفضل مقدر إذا تحققت العلاقة الآتية:

$$\text{var}(\hat{B}) < \text{var}(B^*)$$

وسوف نتناول أدناه هذه الخصائص بشيء من التفصيل:

1.2.3.2 الخاصية الخطية، Linearity Property:

مقدرات المربعات الصغرى خطية في المتغير التابع حيث نلاحظ أن تلك المقدرات يمكن وصفها في صورة دالة أو ترتيب خطي من قيم المتغير Y ، أي:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 410 \\ 8379.2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.607142857 & -0.026785714 \\ -0.026785714 & 0.001488095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 410 \\ 8379.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 248.9285714 + (-224.4428547) \\ -10.98214274 + 12.46904562 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.48571 \\ 1.48690 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 24.485 + 1.486 X_i$$

نسمح مما سبق بأن النتائج التي تم التوصل إليها في المعادلة التقديرية هي نفسها تماماً بالطرق الأربعة الأنفة الذكر.

$$K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$\hat{B}_1$ مجموع مرجح لقيم المتغير التابع، Y_i

$$\therefore \hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$$

$$\therefore \hat{B}_1 = F(Y_i)$$

إذا $\hat{B}_1$ هو مقدر خطي.

خصائص الأوزان، Weighted Properties:

وبما ان الأوزان تعتمد على قيم X الثابتة فقط فأنها تعتبر ثابتة أيضاً،
وتخضع K_i للشروط الآتية:

1- مجموع الأوزان يساوي صفر، أي ان:

$$\sum_{i=1}^n K_i = 0$$

$$\therefore K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

إذن:

$$\sum K_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore \sum x_i = \sum (X_i - \bar{X}) = 0$$

وبالتعويض، فإن:

$$\therefore \sum K_i = \frac{0}{\sum x_i^2} = 0$$

$$\hat{B}_1 = K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + \dots + K_n Y_n$$

$$\therefore \hat{B}_1 = \sum_{i=1}^n K_i Y_i$$

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

وان:

$$y_i = Y_i - \bar{Y}$$

للمشاهدة الواحدة

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} - \frac{\bar{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore \sum x_i = \sum (X_i - \bar{X}) = 0$$

$$\therefore \frac{\bar{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2} = 0$$

لذلك تكون:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum \left[\frac{x_i}{\sum x_i^2} Y_i \right]$$

ولما كانت قيم X ثابتة، نجد ان $\frac{x_i}{\sum x_i^2}$ هي مقادير ثابتة، ويمكن ان نرمز لها بالرمز K_i وهي ثابتة في كل العينات، أي:

$$\sum_{i=1}^n K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

وبما ان:

$$K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} = \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

وعند تربيع الطرفين، ثم جمعا، يكون:

$$\sum K_i^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{[\sum (X_i - \bar{X})^2]^2}$$

وبعد الاختصار والترتيب:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

وبطريقة مماثلة يمكن البرهنة بان $\hat{B}_0$ دالة خطية من قيم المتغير Y .

$$\hat{B}_0 = W_1 Y_1 + W_2 Y_2 + \dots + W_n Y_n$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \sum_{i=1}^n W_i Y_i$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X}$$

وان:

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}, \quad \hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$$

2- مجموع حاصل الضرب للأوزان (K_i) في قيم المتغير المستقل (X_i) او في انحرافاتاها عن متوسطها الحسابي (x_i) يساوي الواحد صحيح، أي:

$$\sum_{i=1}^n K_i X_i = \sum_{i=1}^n K_i x_i = 1$$

$$\begin{aligned} \sum K_i x_i &= \sum K_i (X_i - \bar{X}) \\ &= \sum K_i X_i - \bar{X} \sum K_i \end{aligned}$$

وقد بينا سابقاً ان:

$$\therefore \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i x_i = \sum K_i X_i$$

وبما ان:

$$\therefore K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

إذن:

$$\sum K_i x_i = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} x_i$$

لذلك تكون:

$$\sum K_i x_i = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = 1$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n K_i x_i = \sum_{i=1}^n K_i X_i = 1$$

3- مجموع مربعات الأوزان، $\sum K_i^2$ ، يساوي معكوس مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، $\frac{1}{\sum x_i^2}$ ، أي ان:

$$\hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$$

من خاصية الخطية

وباستحضار المعادلة:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وبتعويض ذلك في أعلاه:

$$\hat{B}_1 = \sum K_i (B_0 + B_1 X_i + U_i)$$

وبفتح القوس نحصل:

$$\hat{B}_1 = B_0 \sum K_i + B_1 \sum K_i X_i + \sum K_i U_i \quad \dots(38.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان فإن:

$$\sum K_i = 0$$

$$B_0 \sum K_i = 0$$

$$\sum K_i X_i = 1$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (38.2)، نحصل:

$$\therefore \hat{B}_1 = B_1 + \sum K_i U_i \quad \dots(39.2)$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_1) = B_1 + \sum K_i E(U_i)$$

من فرضيات الخطأ العشوائي

$$\therefore E(U_i) = 0$$

$$\therefore E(K_i U_i) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}_1) = B_1 \quad \dots(40.2)$$

وبعني ذلك ان $\hat{B}_1$ هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، B.

$$\therefore \hat{B}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \bar{X} \sum K_i Y_i$$

ومن خلال إعادة الترتيب، نحصل:

$$\hat{B}_0 = \sum \left[\frac{1}{n} - \bar{X} K_i \right] Y_i$$

ولما كانت $\bar{X}$ ، K_i مقادير ثابتة، نرمز لها بالرمز W_i ، أي ان:

$$W_i = \left[\frac{1}{n} - \bar{X} K_i \right]$$

وبتعويض ذلك في المعادلة أعلاه، نجد ان $\hat{B}_0$ تعتمد على قيم Y_i فقط، بعبارة أخرى:

$$\hat{B}_0 = \sum W_i Y_i$$

$$\therefore \hat{B}_0 = F(Y_i)$$

إذن $\hat{B}_0$ هو مقدر خطي.

2.2.3.2 خاصية عدم التحيز، Unbiasedness Property:

نقصد بعدم التحيز هو ان يكون الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر $E(\hat{B})$ وقيمة المعلمة الحقيقية للمجتمع الإحصائي (B)، يساوي صفر، أي:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

بعبارة أخرى يعتبر المقدر غير متحيز إذا كان وسطها يساوي القيمة الحقيقية للمعلمة:

$$E(\hat{B}) = B$$

ولاثبات خاصية عدم التحيز بالنسبة $\hat{B}_1$ نتبع ما يلي:

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_0) = B_0 + \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right) E(U_i)$$

$$\therefore E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right) E(U_i) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}_0) = B_0 \quad \dots(43.2)$$

وبمعنى ذلك أن $\hat{B}_0$ هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، B_0 .

3.2.3.2 خاصية أفضل مقدر (أقل تباين)، Best Minimum Variance:

أن مفهوم تباين المعالم يُحدد بواسطة الانحراف بين المعالم المقدرة لـ $\hat{B}$ وقيمها المتوقعة $E(\hat{B})$.
فبالنسبة لـ $\hat{B}_1$ فأن:

$$\text{var}(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - E(\hat{B}_1)]^2 \quad \dots(44.2)$$

$$\therefore E(\hat{B}_1) = B_1 \quad \text{من خاصية عدم التحيز}$$

$$\text{var}(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - B_1]^2 \quad \dots(45.2)$$

بالرجوع إلى المعادلة (39.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة بـ $\hat{B}_1$ نجد أن:

$$\hat{B}_1 = B_1 + \sum K_i U_i$$

$$\hat{B}_1 - B_1 = \sum K_i U_i$$

بترتيب الطرفين:

إثبات خاصية عدم التحيز لـ $\hat{B}_0$:

وبنفس المنهجية يمكن البرهنة بأن $\hat{B}_0$ تعتبر مقدرة غير متحيزة للمعلمة الحقيقية B_0 .

من الخاصية الخطية يتبين لنا:

$$\hat{B}_0 = \sum W_i Y_i$$

$$W_i = \left[\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right]$$

وأن:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وعند التعويض نحصل:

$$\therefore \hat{B}_0 = \sum \left[\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right] [B_0 + B_1 X_i + U_i]$$

وعند فك الأقواس والتعويض، نحصل:

$$\hat{B}_0 = B_0 - B_0 \bar{X} \sum K_i + B_1 \bar{X} - \bar{X} B_1 \sum K_i X_i + \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right) U_i \quad \dots(41.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان:

$$\therefore \sum K_i = 0$$

$$\therefore B_0 \bar{X} \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i X_i = 1$$

$$\therefore \hat{B}_0 = B_0 + \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right) U_i \quad \dots(42.2)$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = E[\hat{B}_0 - E(\hat{B}_0)]^2 \quad \dots(48.2)$$

من خاصية عدم التحيز:

$$\therefore E(\hat{B}_0) = B_0$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = E[\hat{B}_0 - B_0]^2$$

وبالرجوع إلى المعادلة (42.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة بـ $\hat{B}_0$ نجد ان:

$$\hat{B}_0 = B_0 + \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right) U_i$$

$$\hat{B}_0 - B_0 = \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right) U_i$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = E \left[\sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right) U_i \right]^2$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = \sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right)^2 E(U_i)^2$$

$$\therefore E(U_i)^2 = \sigma^2$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2 \left[\sum \left(\frac{1}{n} - \bar{X}K_i \right)^2 \right]$$

وبفك القوس نحصل:

$$(\hat{B}_1 - B_1)^2 = (\sum K_i U_i)^2$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_1 - B_1)^2 = E(\sum K_i U_i)^2$$

$$\text{var}(\hat{B}_1) = E[\sum K_i U_i]^2 \quad \dots(46.2)$$

وبفك القوس، نحصل:

$$\text{var}(\hat{B}_1) = \sum K_i^2 E(U_i)^2 + 2 \sum_{i < j} \sum K_i K_j E(U_i U_j)$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي ان :

$$E(U_i)^2 = \sigma^2$$

وان:

$$E(U_i U_j) = 0 \quad \text{For all } i \neq j.$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) = \sum K_i^2 \sigma^2 \quad \dots(47.2)$$

$$\therefore K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\sum K_i^2 = \frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) = \frac{1}{\sum x_i^2} \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

وبالأسلوب نفسه يمكن تحديد التباين لـ $\hat{B}_0$ على النحو الآتي:

$$B_1^* = \sum C_i (B_0 + B_1 X_i + U_i) \quad \dots(50.2)$$

$$B_1^* = B_0 \sum C_i + B_1 \sum C_i X_i + \sum C_i U_i$$

ولكي تكون B_1^* غير متحيزة أي $E(B_1^*) = B_1$ يجب ان نتصف C_i بالصفات الآتية:

$$a: \quad \sum C_i = 0$$

أو

$$\sum K_i + \sum d_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i = 0$$

$$\sum d_i = 0$$

$$\therefore \sum C_i = 0$$

معروفة مسبقاً

أي إن:

$$b: \quad \sum C_i X_i = 1$$

أو

$$\therefore \sum K_i X_i + \sum d_i X_i = 1$$

معروفة مسبقاً

$$\therefore \sum K_i X_i = 1$$

أي ان:

$$\sum d_i X_i = 0$$

$$\therefore \sum C_i X_i = 1 + 0 + 1$$

$$B_1^* = B_1 + \sum C_i U_i$$

$$\dots(51.2)$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{2\bar{X}}{n} \sum K_i + \bar{X}^2 \sum K_i^2 \right)$$

وباستخدام شروط الأوزان:

$$\sum K_i = 0$$

$$\therefore \frac{2\bar{X}^2}{n} \sum K_i = 0$$

وان:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum X_i^2}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum X_i^2} \right)$$

ولاثبات ان مقدرات (OLS) هي افضل مقدرات خطية غير متحيزة أي أنها تتسم

بالكفاءة ، ونتيجة لنسبية معيار الأفضلية فأنا نقوم بتعريف مقدره أخرى ولتكن B_1^*

تختلف عن مقدره OLS، $\hat{B}_1$ ، حيث سيتضح لاحقاً ان تباين تلك المقدره B_1^* لابد

و ان يفوق تباين مقدره OLS، $\hat{B}_1$ ، وبالتالي نفضل المقدره الأخيرة $\hat{B}_1$ صاحبة التباين الأقل.

$$B_1^* = \sum C_i Y_i \quad \dots(49.2)$$

$$C_i = K_i + d_i$$

وان $d_i \neq 0$ ، حيث d_i كميات ثابتة.

$$\therefore Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sum C_i^2 E(U_i)^2 + 2 \sum_{i>j} C_i C_j E(U_i U_j)$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي:

$$E(U_i)^2 = \sigma^2$$

وان

$$E(U_i U_j) = 0$$

$$\therefore \text{var}(\dot{B}_1) = \sum C_i^2 \sigma^2 \quad \dots(54.2)$$

ولما كانت

$$C_i = K_i + d_i$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sum (K_i + \sum d_i)^2 \sigma^2$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sigma^2 [\sum K_i^2 + \sum d_i^2 + 2 \sum K_i d_i]$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 + 2\sigma^2 \sum K_i d_i$$

$$\therefore \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i d_i = 0$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 \quad \dots(55.2)$$

$$E(B) = B_1 + \sum C_i E(U_i)$$

$$\therefore E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum C_i E(U_i) = 0$$

$$E(B_1) = B_1 \quad \dots(52.2)$$

هنا المقدر $\dot{B}_1$ غير متحيز ولتحديد تباين هذه المقدرة الخطية غير المتحيزة فأنا نعوض في قانون var.

$$\text{var} \dot{B}_1 = E \left[\dot{B}_1 - E(B_1) \right]^2$$

من المعادلة رقم (52.2)

$$\therefore E(\dot{B}_1) = B_1$$

$$\text{var} \dot{B}_1 = E \left[\dot{B}_1 - B_1 \right]^2$$

وباستخدام المعادلة رقم (51.2)

$$\dot{B}_1 = B_1 + \sum C_i U_i$$

$$\dot{B}_1 - B_1 = \sum C_i U_i$$

$$\text{var}(\dot{B}_1) = E \left[\sum C_i U_i \right]^2 \quad \dots(53.2)$$

وبفك القوس، نحصل على:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \quad \dots(58.2)$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة:

$$\sum \hat{Y}_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

وبالقسمة على n :

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{n}{n} \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\bar{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X} \quad \dots(59.2)$$

و بطرح المعادلة (59.2) من المعادلة (58.2) نحصل:

$$\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \bar{X}$$

و بعد الاختصار، نحصل:

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_1 \bar{X}$$

أذن:

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 (X_i - \bar{X})$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i \quad \dots(60.2)$$

$$\therefore e_i = y_i - \hat{y}_i$$

وبالتعويض من المعادلة (60.2):

$$\therefore e_i = y_i - \hat{B}_1 x_i$$

و بتربيع طرفي هذه المعادلة:

$$e_i^2 = (y_i - \hat{B}_1 x_i)^2$$

ولما كانت:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\text{var}(\hat{B}_1) = \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} + \sigma^2 \sum d_i^2 \quad \dots(56.2)$$

$$\therefore \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} = \text{var}(\hat{B}_1)$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) = \text{var}(\hat{B}_1) + \sigma^2 \sum d_i^2 \quad \dots(57.2)$$

$$\sum d_i^2 > 0 \quad \text{وحيث ان:}$$

عليه فأن:

$$\text{var}(\hat{B}_1) > \text{var}(\hat{B}_1^*)$$

ومن ثم فأننا نرى ان مقدرة OLS الخاصة بالمعلمة $\hat{B}_1$ تتميز بأصغر تباين من بين المقدرات الخطية غير المتحيزة للمعلمة B_1^* .

4.2 تقدير تباين حد الخطأ العشوائي:

يستعمل تباين $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ في إجراء الاختبارات المعنوية الخاصة بتلك المقدرات، غير ان تباين المقدرات يحتوي على معلمة مجهولة هي (σ^2) تباين حد الخطأ العشوائي الذي يرمز له بالرمز (S_e^2) و يمكن اشتقاقه كالآتي:
بما ان المعادلة التقديرية تأخذ الصيغة الآتية:

وإذا رمزنا إلى التقدير الخطي غير المتحيز لتباين الخطأ بالرمز (S_e^2) ، فإن:

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

ذلك يعني أن S_e^2 أفضل مقدر غير متحيز لتباين المتغير العشوائي أو حد الخطأ، u_i .

و عند فك الأقواس، نحصل:

$$e_i^2 = y_i^2 + \hat{B}_1^2 x_i^2 - 2\hat{B}_1 x_i y_i$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1^2 \sum x_i^2 - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i \quad \dots(61.2)$$

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

وان حاصل ضرب الطرفين في الوسطين لذلك سيكون:

$$\hat{B}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

وبالتعويض في المعادلة (61.2) بما يساويها:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1 \sum x_i y_i - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i$$

وبعد الاختصار نحصل:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i \quad \dots(62.2)$$

وقد جرى تعريف σ^2 على أنها:

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وبالتعويض عن البسط من المعادلة 62.2 ، نحصل:

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i}{n-2} \quad \dots(63.2)$$

وهذا يعني ان تباين أخطاء العينة تمثل النسبة بين مجموع مربعات انحرافات القيم المشاهدة عن خط انحدار العينة إلى درجة الحرية للخطأ.

أسئلة الفصل الثاني

السؤال 1.2 ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

السؤال 2.2: لنموذج الانحدار الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t$$

$$U_t \sim N(0, \sigma^2 U) , E(U_t, U_t) = 0$$

علماً بأن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير (Y_t) و (X_t) كانت كالآتي:

$$\sum_{t=1}^5 Y_t = 30 , \sum_{t=1}^5 Y_t^2 = 190 , \sum_{t=1}^5 X_t = 12 ,$$

$$\sum_{t=1}^5 Y_t^2 = 34 , \sum_{t=1}^5 X_t Y_t = 74$$

المطلوب: تقدير كل من B_0 و B_1 .

السؤال 3.2: ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

السؤال 4.2: ما هو المتغير العشوائي، ولماذا يستخدم في النموذج الاقتصادي.

الفصل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypotheses Testing

1.3 المقدمة.

2.3 اختبار قيمة t ، t-Value Test

3.3 معامل التحديد، R^2 ، Determinant Coefficient

4.3 اختبار إحصائية F ، F-Statistics

5.3 معامل الارتباط البسيط، Simple Correlation Coefficient, r

6.3 حدود الثقة لمعاملات الانحدار.

7.3 التنبؤ.

8.3 الأسئلة والتمارين.

الفصل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypothesis Testing

1.3 المقدمة:

تناولنا في الفصل السابق، دراسة العلاقة بين متغيرين (الانحدار الخطي البسيط)، وقد بينا صيغ اشتقاق معلمات النموذج بطريقة OLS، وطرق تقدير هذه المعلمات. ولكن المنطق يحتم علينا عدم قبول هذا النموذج إلا بعد إجراء تقييم لهذه النتائج من الناحية الاقتصادية والإحصائية. ويتم هذا باستخدام نتائج التقدير في اختبار النظريات أو اتخاذ القرارات أو وضع السياسات.

سنتناول في هذا الفصل، تقييم نموذج الانحدار المقدر، ولتحقيق ذلك سيتم اختبار المعنوية الاقتصادية والإحصائية لنتائج تقدير نموذج الانحدار.

اختبار الفرضيات، Test of hypothesis:

تعرف الفرضية بأنه ادعاء قابل لأن يكون صحيحاً أو غير صحيح، وتثبت صحتها فقط من خلال الاختبار (Test). وقبل البدء بدراسة الكيفية التي يتم على أساسها اختبار الفرضية، لابد من دراسة العلاقة الاقتصادية التي تستند إلى مجموعه من الفروض الخاصة بالنظرية الاقتصادية، كالعلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعر تلك السلعة. وحسب منطق النظرية الاقتصادية تعكس دالة الطلب علاقة عكسية (سالبة) بين المتغير المستقل (السعر) والكمية المطلوبة (المتغير المعتمد).

أما إذا أخذنا العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي والدخل، فإن منطق النظرية يشير إلى أن الميل الحدي للاستهلاك (MPC) يكون موجباً ولكنه أقل من الواحد الصحيح، $0 < MPC < 1$ ، وإن هناك حد أدنى للاستهلاك في الأمد القصير، ولكن لا يمكن الجزم بصحة أو عدم صحة ذلك إلا بعد أخذ البيانات وقياس العلاقة الاقتصادية واختبارها. وهذا ما سنتناوله في المباحث القادمة.

$$S_{ei}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

حيث أن:

t: هو اختبار (t) عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية (n-k) حيث (n)

عدد المشاهدات في العينة و (k) عدد المعالم.

$\hat{B}_1$: القيمة التقديرية لـ B_1 الحقيقية.

$S\hat{B}_1$: الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة $\hat{B}_1$.

$S_{\hat{B}_1}^2$: تباين $\hat{B}_1$.

S_{ei}^2 : تباين الخطأ.

ب- بالنسبة لـ $\hat{B}_0$ فإن:

$$t_{\hat{B}_0} = \frac{\hat{B}_0}{S\hat{B}_0} \quad \dots(2.3)$$

حيث أن:

$$S\hat{B}_0 = \sqrt{S_{\hat{B}_0}^2}$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S_{ei}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$S_{ei}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

ويختبر نموذج الانحدار قبل كل شيء العلاقة بين المتغير المستقل (X) والتابع (Y) وذلك للتثبت من وجودها من خلال اختبار المعنوية الإحصائية للمعاملات المقدرة $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ كلاً على انفراد وفي هذا المجال توجد فرضيتان:

1- فرضية العدم: وتنص على عدم وجود علاقة بين المتغيرين X و Y أي أن:

$$H_0: B_0 = 0 \\ B_1 = 0$$

2- الفرضية البديلة: وتنص على وجود علاقة بين X و Y ، أي أن:

$$B_0 \neq 0 \quad H_1: \\ B_1 \neq 0$$

2.3 اختبار قيمة t، t-Value Test:

ولأجل اختبار ما إذا كانت $B_0 = 0$ ، $B_1 = 0$ أم لا، يستخدم اختبار (t) عدد مستوى معنوية معينة ودرجة حرية (n-k) والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

أ- بالنسبة لـ $\hat{B}_1$:

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S\hat{B}_1} \quad \dots(1.3)$$

حيث أن:

$$S\hat{B}_1 = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2}$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{ei}^2}{\sum x_i^2}$$

ولاختبار معنوية المعلمات المقدرة $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ نعود الى بيانات المثال الوارد في (1.2)، وباعتماد الصيغة الرياضية للاختبار، فأننا نحتاج الإحصاءات الآتية:

$\hat{Y}_i$	e_i	e_i^2
30.43333334	-4.83333334	23.36111118
36.38095239	-3.68095239	13.5494105
42.32857143	3.07142857	9.433673461
48.27619048	5.62380952	31.62723352
54.22380953	4.77619047	22.81199541
60.17142858	2.42857142	5.897959142
66.11904763	-1.11904763	1.252267598
72.06666667	-6.26666667	39.27111115
$\sum \hat{Y}_i = 410$	$\sum e_i = 0$	$\sum e_i^2 = 147.204762$

أ- بالنسبة الى $\hat{B}_1$:

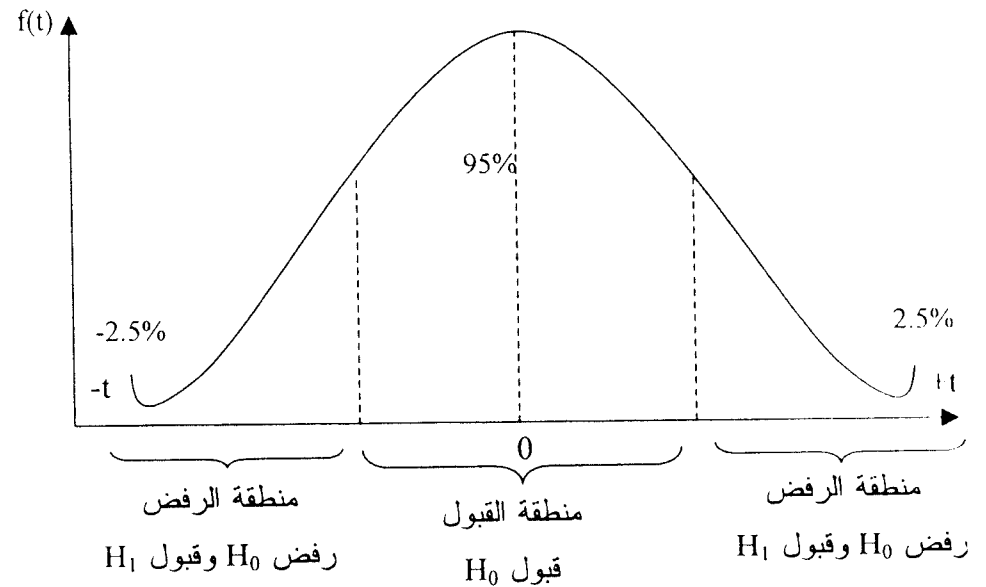
$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} = \frac{147.204762}{8 - 2} = 24.534127$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{e_i}^2}{\sum x_i^2} = \frac{24.534127}{672} = 0.036509117$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.036509117} = 0.191073592$$

وبعد احتساب قيمة t نقارن مع قيمتها الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية $(n-2)$ ومستوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم. فإذا كانت قيمة t المحسوبة اكبر من قيمة t الجدولية ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، بمعنى ان المعلمة ذات معنوية إحصائية. وبالعكس في حالة كون t المحسوبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم وترفض الفرضية البديلة أي عدم معنوية المعلمة المقدرة. ويمكن توضيح ذلك بالشكل (1.3).

شكل 1.3: قبول أو رفض الفرضية



وبما ان قيمة (t) المحتسبة عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) هي (6.344) وهي اكبر من مثلثتها الجدولية البالغة (2.45)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{B}_0$ عالية.

3.3 معامل التحديد، (R^2) :Coefficient of Determination

هو مقياس يوضح نسبة التغير في المتغير التابع (Y) الذي سببها التغير في المتغير المستقل (X). أي نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار الى الانحرافات الكلية. ويمكن حساب هذا المعامل حسب الصيغ الآتية:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} \quad \dots(3.3)$$

أو

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$$

أو

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

أو

$$R^2 = r^2$$

أو

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} = \frac{1.486904762}{0.191073592} = 7.781843354$$

وبما ان قيمة (t) المحتسبة والبالغة (7.781) اكبر من قيمة (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{B}_1$.

ب- بالنسبة إلى $\hat{B}_0$:

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k} = \frac{147.204762}{8 - 2} = 24.534127$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = S_{e_i}^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$= 24.534127 \left[\frac{1}{8} - \frac{(18)^2}{672} \right]$$

$$= 24.534127 [0.125 - 0.482142857]$$

$$= 14.89571996$$

$$S_{\hat{B}_0} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{14.89571996} = 3.859497372$$

$$t_{\hat{B}_0} = \frac{\hat{B}_0}{S_{\hat{B}_0}} = \frac{24.48571429}{3.859497372} = 6.344275415$$

وان $R^2 = 0$ (أو تقترب منه) عندما يكون خط انحدار العينة خطأً أفقياً أي $\hat{Y}_i = \bar{Y}$ ، ومعنى ذلك لا توجد علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

وكل من هاتين الحالتين نادرة الحدوث، ففي الأحوال العادية يفسر خط الانحدار جزءاً من التغيرات في Y وبالتالي يكون هناك جزءاً آخر غير مفسر بواسطة الخط ومن ثم نجد في أغلب الحالات $0 < R^2 < 1$.

ولمعرفة مقدار ما يفسره المتغير المستقل، X ، من التغير في المتغير التابع، Y نعود إلى مثالنا الوارد في (1.2)، وبالاعتماد على الصيغ الرياضية الخاصة بـ R^2 فإن:

$\hat{y}_i$	$\hat{y}_i^2$	y_i^2
-20.81666666	433.3336108	657.9225
-14.86904761	221.0885768	344.1025
-8.92142857	79.59188773	34.2225
-2.97380952	8.843543061	7.0225
2.97380953	8.843543121	60.0625
8.92142858	79.59188791	128.8225
14.86904763	221.0885774	189.0625
20.81666667	433.3336113	211.7025
$\sum \hat{y}_i = 0$	$\sum \hat{y}_i^2 = 1485.715238$	$\sum y_i^2 = 1632.92$

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{1485.715238}{1632.92} = 0.909851822 = \%90.98$$

أو

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

ويمكن توضيح الصيغة الأخيرة من خلال الاشتقاق الآتي:

$$\text{الانحرافات غير الموضحة} + \text{الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار} = \text{الانحرافات الكلية}$$

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \quad \dots(4.3)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (4.3) على الانحرافات الكلية:

$$\frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$1 = R^2 + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$\therefore R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

ونتراوح قيمة R^2 بين الصفر والواحد، أي ان:

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

حيث أن $R^2 = 1$ عندما تقع جميع نقاط الانتشار على خط الانحدار المقدر أي $Y_i = \hat{Y}_i$ وهنا تكون العلاقة تامة.

4.3 اختبار إحصائية F، F-Statistics:

لاختبار معنوية معادلة الانحدار ككل يستخدم اختبار F ويعتمد هو الآخر على نوعين من الفرضيات:

1- **فرضية العدم:** وتنص على عدم معنوية أو جوهريّة العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل ، أي أن:

$$H_0 : B_1 = 0$$

2- **الفرضية البديلة:** وتنص على وجود علاقة جوهريّة من الناحية الإحصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل ، أي أن:

$$H_1 : B_1 \neq 0$$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هو:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1} \quad \dots (5.3)$$

أي أن اختبار F هو عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار مقسومة على عدد المتغيرات المستقلة (k) الى الانحرافات غير الموضحة مقسومة على درجات الحرية التي تتمثل بعدد المشاهدات (n) مطروحاً منها (k) ناقصاً (1).

وبعد احتساب قيمة (F) نقارن مع قيمة (F) الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند مستوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) ودرجة حرية (k, n-k-1) للبسط والمقام لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم. فإذا كانت قيمة (F) المحتسبة اكبر من قيمة (F) الجدولية، نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية العلاقة

هذا يعني ان المتغير المستقل، X_i ، يفسر حوالي 90.98% من التغير الحاصل في المتغير التابع، Y_i ، وان النسبة الباقية والبالغة 9.02% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{(1.486904762)(999.2)}{1632.92} = \frac{1485.715238}{1632.92}$$

$$R^2 = 0.909851 = 90.98\%$$

or;

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{(1.486904762)^2 (672)}{1632.92} = \frac{(2.210885771)(672)}{1632.92}$$

$$R^2 = \frac{1485.715238}{1632.92} = 0.909851 = 90.98\%$$

or:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{147.204762}{1632.92} = 1 - 0.090148177 = 0.909851822 = 90.98\%$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sum e_i^2 / n - 2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sigma^2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2}{\sigma^2 / \sum x_i^2}$$

$$\therefore \sigma^2 / \sum x_i^2 = \text{var}(\hat{B}_1) = S_{\hat{B}_1}^2$$

$$\therefore F = \frac{\hat{B}_1^2}{S_{\hat{B}_1}^2} = \left(\frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} \right)^2 = t_{\hat{B}_1}^2 \quad \dots(8.3)$$

ولاختبار جوهريّة العلاقة بين المتغير التابع، Y ، والمتغير المستقل، X ، نعود إلى مثالنا (1.2)، وباعتماد على الصيغ الرياضية الخاصة بـ F نحصل على:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

$$F = \frac{1485.715238 / 1}{147.204762 / 8 - 1 - 1} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.55708597$$

المقدرة وبالعكس في حالة كون (F) المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم أي عدم معنوية العلاقة المقدرة او عدم معنوية معادلة الانحدار. ويمكن احتساب قيمة F بالاعتماد على الصيغ الآتية:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1} \quad \dots(6.3)$$

أو

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1}$$

أو

$$F = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / k}{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / n - k - 1}$$

أو

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

أو

$$F = t_{\hat{B}_1}^2$$

العلاقة بين إحصائية F و t :

ويمكن توضيح العلاقة بين إحصائي F و t في نموذج المتغيرين كالاتي:

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1} \quad \dots(7.3)$$

$$F = t_{\hat{B}_1}^2$$

$$= (7.781843354)^2 = 60.5570$$

وبما ان قيمة (F) المحتسبة والبالغة (60.55) اكبر من قيمة (F) الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.99)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل أي معنوية او جوهرية العلاقة المقدرة.

or:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

$$= \frac{(1.486904762)(999.2)/1}{24.534127} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.5570$$

or:

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1}$$

$$= \frac{0.909851822/1}{1 - 0.909851822/8 - 1 - 1} = \frac{0.909851822}{0.015024696} = 60.5570$$

r:

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

$$= \frac{(1.486904762)^2 (672)/1}{24.534127} = \frac{(2.210885771)(672)}{24.534127}$$

$$= \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.5570$$

or:

حيث ان:

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}, \quad S_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}},$$

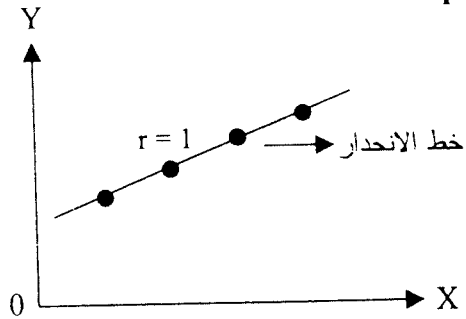
وتتراوح قيمة r بين $+1$ ، -1 اي ان:

$$-1 \leq r \leq +1$$

وقد يكون الارتباط بين ظاهرتين أو أكثر موجباً أو سالباً والإشارة تدل على وجود علاقة طردية أو عكسية ولا تدل على قوة العلاقة التي تحدد من خلال الأرقام. ويمكن التمييز بين الخصائص الآتية:

أ- عندما تكون $r = 1$ ، معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وموجبة بين المتغيرين X ، Y ، اي ان الزيادة في قيمة المتغير X يترتب عليه زيادة في قيمة المتغير التابع Y .

شكل 2.3: $r = 1$



5.3 معامل الارتباط البسيط، r ، Simple Correlation Coefficient:

يقصد بالارتباط وجود علاقة بين ظاهرتين أو أكثر، ويسمى المقياس الذي تُقاس به درجة الارتباط بمعامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز (r) . حيث ان تحليل الارتباط يعامل أي متغيرين بشكل متماثل، Symmetrically، ولا يوجد تمييز بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة. تأسيساً على ذلك يفترض تحليل الارتباط ان كلا المتغيرين عشوائي، Random، أو تصادفي، Stochastic، وهذا يتطلب احتمالية التوزيع الطبيعي. ويمكن حسابه على النحو الآتي:

$$r = \left[\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2} \right] \hat{B}_1 \quad \dots(9.3)$$

أو

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}}$$

أو

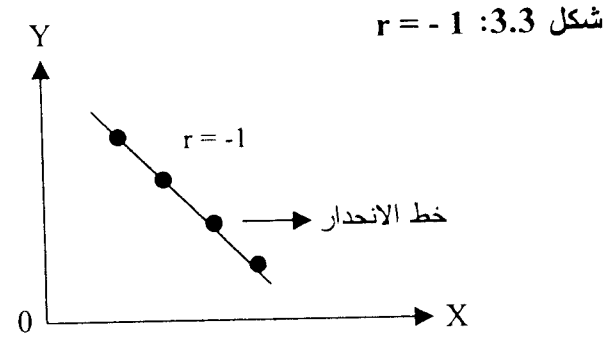
$$r = \pm \sqrt{R^2}$$

$\pm$: تعتمد على إشارة $\hat{B}_1$.

أو

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{n S_X S_Y}$$

ب- عندما $r = -1$ ، معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وسالبة بين المتغيرين Y ، X أي ان الزيادة في قيمة المتغير المستقل X يترتب عليه انخفاض في قيمة المتغير التابع Y .



ج- عندما $r = 0$ ، معنى ذلك ليست هناك علاقة بين المتغيرين Y ، X ، في هذه الحالة ان تقدير المعامل B بطريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، يكون مساوياً للصفر. ويشير ذلك ان متوسط التغيرات في المتغير المستقل ليس لها تأثير على المتغير التابع. في مثل هذه الظروف فان معامل الارتباط يكون مساوياً للصفر، ذلك لأن الانحدار يوضح عدم وجود تباين أو انحراف في المتغير التابع، بمعنى آخر:

$$\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = 0$$

حيث ان متوسط قيمة Y دائماً تكون مساوية للقيمة المحسوبة، Calculated value، من معادلة الانحدار:

$$\sum(Y_i - \hat{Y})^2 = \sum(Y_i - \bar{Y})^2$$

حيث ان: $\hat{Y}_i = \bar{Y}$.

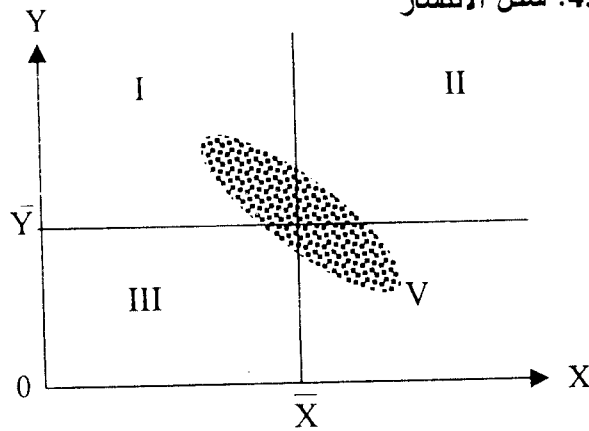
وبالتالي فان معادلة معامل التحديد البسيط r^2 يجب ان تساوي صفر، اي ان:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

يعني ذلك ان معامل الارتباط البسيط r ، يجب ان يساوي صفرأ أيضاً.

ويمكن توضيح الارتباط بين متغيرين Y ، X من خلال الشكل الانتشاري التالي الذي يعطي مؤشراً على قوة او ضعف الارتباط بين المتغير التابع Y ، والمتغير المستقل X ، وكما يأتي:

الشكل 4.3: شكل الانتشار



المشاهدات على جميع أرباع الشكل، ويعني ذلك عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرين.

- تكون قيمة معامل الارتباط (r) موجبة، عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي موجب.

- تكون قيمة معامل الارتباط، r ، سالبة عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي سالباً.

باختصار، يمكن توضيح العلاقات أعلاه في الصيغة الآتية:
أ- عندما:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum x_i y_i > 0$$

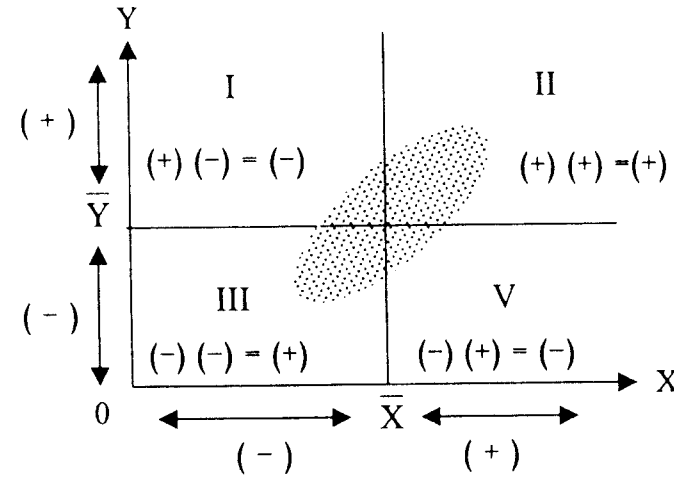
معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون موجباً.
ب- عندما:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum x_i y_i < 0$$

معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون سالباً.

ويظهر من ذلك ان مجموع حاصل ضرب الانحرافات ($\sum x_i y_i$) يتأثر بعدد المشاهدات، أي انه كلما زاد عدد المشاهدات، كلما كان الارتباط بين X ، Y موجباً وقوياً. ومعنى ذلك انه في حالة زيادة عدد المشاهدات للعينة يصبح معامل الارتباط أقوى، ولكنه يختلف عن مقياس آخر للظاهرة نفسها.

وبذلك فان مجموع حاصل ضرب الانحرافات ($\sum x_i y_i$) لا يعتبر مقياساً ملائماً لتبيان قوة العلاقة بين المتغيرين، وذلك لان المقياس يتأثر بوحدة القياس كالأمطار والسترات والدينار وغيرها. وبذلك لا تصلح للمقارنة في حالة اختلاف



يبين الشكل أعلاه، انه عندما يكون انتشار المشاهدات قريبة جداً من خط الانحدار يدل على قوة العلاقة بين المتغيرين X ، Y . أما عندما تكون المشاهدات متباعدة عن خط الانحدار يدل ذلك على ضعف العلاقة أو الارتباط بين المتغيرين. ولذلك فان الشكل الانتشاري لا يعطي إلا فقط صورة مبسطة وأولية عن طبيعة العلاقة، فضلاً عن ذلك يمكن ملاحظة ما يأتي:

- في المربعين الثاني والثالث، تكون قيمة معامل الارتباط، r ، موجبة وذلك لان معظم المشاهدات تتجمع في هذين المربعين، أي ان (X_i, Y_i) لها الإشارة نفسها.
- في المربعين الأول والرابع، تكون قيمة معامل الارتباط، r ، سالبة وذلك لان معظم المشاهدات تتجمع في هذين المربعين أي ان X_i لها إشارة معاكسة لانحرافات Y_i .

- تقترب قيمة معامل الارتباط من الصفر، عندما يكون مجموع الانحرافات للمتغيرين X ، Y عن وسطها الحسابي تقترب من الصفر، أي عندما تنتشر

وحدات القياس. ولكي نحصل على مقياس يبين قوة العلاقة، ويكون صالحاً لأجراء المقارنة نحتاج إلى معاملات لا تتأثر قيمتها بوحدة القياس المستخدمة. وهذا العامل يمكن الحصول عليه بقسمة مجموع الانحرافات $(\sum x_i y_i)$ على عدد المشاهدات (n) ، أي أن:

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n}$$

ويسمى هذا بالتباين المشترك، Covariance، ولكن الناتج ما يزال يتأثر بالعامل y_i وهو وحدات القياس للمتغيرين، ولهذا يمكن تصحيح هذا التأثير بقسمة التباين المشترك على الانحراف المعياري لكل من X ، Y أي S_x ، S_y على التوالي. ويمكن اعتماد هذا المقياس للوصول إلى تحديد قيمة معامل الارتباط البسيط.

مثال 4.3: وبالرجوع إلى البيانات الخاصة بالمثال (1.2) وباعتماد الصيغ الرياضية المذكورة أعلاه يمكن حساب معامل الارتباط (r) على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}} \cdot \hat{B}_1 \\ &= \sqrt{\frac{672}{1632.92}} \cdot (1.486904762) \\ &= (0.641508156) (1.486904762) = 0.953861532 \end{aligned}$$

إن العلاقة بين المتغيرين X و Y طردية.

or

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}} \\ &= \frac{999.2}{\sqrt{(672)(1632.92)}} = \frac{999.2}{(25.92296279)(40.40940485)} \\ &= \frac{999.2}{1047.5314978} = 0.9538 \end{aligned}$$

or

$$r = \pm \sqrt{R^2} = \sqrt{0.909851822} = 0.9538$$

or

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum x_i y_i}{n S_X S_Y} \\ S_X &= \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{672}{8}} = 9.16515139 \\ S_Y &= \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{1632.92}{8}} = 14.2868821 \\ r &= \frac{999.2}{(8)(9.16515139)(14.2868821)} = \frac{999.2}{1047.531498} = 0.9538 \end{aligned}$$

$$1.018774462 < B_1 < 1.955035062$$

هذا يعني ان هناك احتمال 95% ان تكون قيمة $\hat{B}_1$ مساوية لـ B_1 الحقيقية بين الحدين الأعلى 1.955 والأدنى 1.018 وان هناك احتمال 5% ان لا تكون كذلك.

أما بالنسبة لـ B_0 فإن:

$$B_0 = \hat{B}_0 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_0)$$

$$B_0 = 24.48571429 \mp (2.45)(3.859497372)$$

$$B_0 = 24.48571429 \mp 9.455768561$$

$$15.02994573 < B_0 < 33.94148285$$

هذا يعني ان هناك احتمال 95% ان تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع B_0 بين الحدين الأعلى 33.941 والأدنى 15.029 وان هناك احتمال 5% ان تقع خارج هذين الحدين.

وقد جرى استخدام مستوى الثقة 95% في الدراسات الاقتصادية ويعني ذلك ان 95% من الحالات تقع ضمن فترة الثقة، وان 5% من الحالات تقع خارج هذه الفترة. بمعنى آخر إذا كانت $B_0 = 0.05$ فإن احتمال B_1 ان توجد بين الحدين 95%.

جدول تحليل التباين:

يهدف جدول تحليل التباين، ANOVA Table، إلى توضيح تأثير المتغير المستقل في المتغير التابع. وتزداد أهمية هذا الجدول عند دراسة الانحدار المتعدد حيث يستفاد منه في معرفة تأثير كل متغير من المتغيرات المستقلة في المتغير التابع وبالتالي اعتماد المتغيرات المؤثرة في النموذج.

ويمكن بناء جدول تحليل التباين في ضوء المعلومات التفصيلية أدناه:

6.3 حدود الثقة لمعاملات الانحدار:

نعني بحدود أو فترات الثقة لمعاملات الانحدار، تقدير مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة أي معلمة المجتمع. ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى Lower Limit الذي يرمز له بالرمز (L) والحد الأعلى Upper Limit الذي يرمز له بالرمز (U). ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيمة B بين هذه الحدين. بمعنى آخر يمكن القول إلى أي مدى ممكن تحريك توزيع t إلى اليسار أو اليمين قبل ان تصل إلى القيمة الحرجة، Critical Value. والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

$$(الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة) \mp (t\alpha/2) \text{ المعلمة المقدرة} = \text{معلمة المجتمع}$$

سأوضح قيمة معامل الثقة بين 90%، 100%. كما ان مستوى المعنوية هو احتمال تساوي المعامل الثقة، هذا يعني ان حاصل جمع معامل الثقة ومستوى المعنوية يساوي 1. وإذا كان معامل الثقة 95%، فإن مستوى المعنوية يكون 5% وهكذا. وبناء على ما جاء أعلاه، يمكن تعريف فترة الثقة بأنها "الفترة التي توجد فيها القيمة الفعلية لـ B_1 بين حد أدنى وأعلى وباحتمال معين".

مثال 5.3: ولتوضيح كيفية احتساب حدود الثقة نعود إلى بيانات المثال (1.2)، حيث ان (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) تساوي (2.45)، لذا فان معامل الثقة هو 95%.

فبالنسبة إلى B_1 ، فإن:

$$B_1 = \hat{B}_1 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_1)$$

$$B_1 = 1.486904762 \mp (2.45)(0.191073592)$$

$$B_1 = 1.486904762 \mp 0.4681303$$

ويمكن بناء جدول تحليل التباين لمثالنا بعد ان تم تطبيق جميع الاختبارات عليه كالآتي:

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	F
الانحرافات الموضحة من قبل X_i	1485.715238	1	1485.715238/1	$F = \frac{1485.715238/1}{147.204762/6} = 60.55708597$
الانحرافات غير الموضحة	147.204762	8-1-1=6	147.204762/6	
الانحرافات الكلية	1632.92	7		

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	F
الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار أي بواسطة المتغير المستقل X_i	$\sum \hat{y}_i^2 = \hat{B}_1 \sum x_i y_i$	k	$\sum \hat{y}_i^2 / k$	$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$
الانحرافات غير الموضحة	$\sum e_i^2$	n-k-1	$\sum e_i^2 / n - k - 1$	
الانحرافات الكلية	$\sum y_i^2$	n - 1		

7.3 التنبؤ، Forecasting :

أحد الأهداف الرئيسة لتطبيق بحث الاقتصاد القياسي هو استخدام النموذج المقدر للتنبؤ بقيمة المتغيرات التابعة استناداً إلى قيم المتغيرات المستقلة من أجل التعرف على مسار الظاهرة موضوع البحث في المستقبل، حيث يعرف التنبؤ بأنه تحليل بيانات الماضي وتطبيق نتائجها على المستقبل من خلال استخدام نموذج رياضي مناسب. أي أن $(\hat{Y}_i)$ يمكن أن تستخدم في التنبؤ بقيمة (Y_i) الجديدة ولتكن (Y_{t+1}) في حالة الاعتماد على قيمة (X_i) الجديدة ولتكن (X_{t+1}) .

وللتنبؤ أخطاء وقد ينشأ بسبب:

$$\begin{aligned} & \text{خطأ التقدير} & Y_{t+1} - E(Y_{t+1}) \\ & \text{خطأ المعاينة} & E(Y_{t+1}) - YP_{t+1} \end{aligned}$$

وعليه فإن الخطأ الحاصل في التنبؤ عن قيمة المفردة الواحدة هو مجموع

نوعين من الانحراف أي:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = [Y_{t+1} - E(Y_{t+1})] + [E(Y_{t+1}) - YP_{t+1}]$$

ولأغراض التنبؤ نفترض أن القيمة المراد التنبؤ بها، تقع خارج قيم (X_i) المشمولة بالعينة أي أن المحاولة الجديدة تكون مستقلة عن القيم التي استخدمت في تحليل الانحدار، حيث أن معادلة الخط المستقيم الحقيقية هي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad \dots(10.3)$$

المعادلة التقديرية لها:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \quad \dots(11.3)$$

المعادلة الحقيقية في الفترة $t+1$ هي:

$$Y_{t+1} = B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1} \quad \dots(12.3)$$

فالمعادلة التنبؤية في الفترة $t+1$ تكون:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1} \quad \dots(13.3)$$

عليه فإن خطأ التنبؤ يكون:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{t+1} \quad \dots(14.3)$$

أن مقدرات (OLS) هي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة وأن خطأ التنبؤ يعتمد على عنصر الخطأ العشوائي، أي (U_{t+1}) . ونفترض أن قيمة الخطأ العشوائي (U_{t+1}) مستقلة عن القيم $U_1, U_2, \dots, U_n$ وأنها تتوزع توزيعاً طبيعياً، كذلك فإن خطأ التنبؤ يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي صفر وتباين ثابت. ويمكن إثبات ذلك كالاتي:

أولاً: الوسط الحسابي المساوي للصفر:

$$\begin{aligned} E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) &= E(B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1}) - E(\hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}) \\ &= B_0 + B_1 X_{t+1} + E(U_{t+1}) - E(\hat{B}_0) - E(\hat{B}_1) X_{t+1} \end{aligned}$$

$$\therefore E(\hat{B}_0) = B_0, \quad E(\hat{B}_1) = B_1$$

$$\therefore E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = B_0 + B_1 X_{t+1} + E(U_{t+1}) - B_0 - B_1 X_{t+1}$$

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = E(U_{t+1})$$

ولما كانت:

$$E(U_{t+1}) = 0$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right] + X_{t+1}^2 \left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right] - 2X_{t+1} \bar{X} \left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 \bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right] + X_{t+1}^2 \left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right] - 2X_{t+1} \bar{X} \left[\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \right]$$

وبضرب الجزء الأول من الحد الثاني وتقسيمه على $\sum x_i^2$:

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2} + \frac{\sigma^2 \bar{X}^2}{\sum x_i^2} + X_{t+1}^2 \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} - 2X_{t+1} \bar{X} \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \left[\frac{\sum x_i^2}{n} + \bar{X}^2 + X_{t+1}^2 - 2X_{t+1} \bar{X} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \left[\frac{\sum x_i^2}{n} + (X_{t+1} - \bar{X})^2 \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2} + \frac{\sigma^2 (X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

فإن:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0$$

ثانياً: تبين خطأ التنبؤ:

$$\sigma^2 P = E[(Y_{t+1} - YP_{t+1}) - E(Y_{t+1} - YP_{t+1})]^2$$

وبما أن خطأ التنبؤ وسطه الحسابي يساوي صفر، أي أن:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0$$

$$\therefore \sigma^2 P = E[(Y_{t+1} - YP_{t+1})]^2$$

$$\sigma^2 P = E[(B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{t+1})]^2$$

$$\sigma^2 P = E[U_{t+1} + \{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}]^2$$

$$\sigma^2 P = EU_{t+1}^2 + 2\{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}EU_{t+1} + E\{(B_0 - \hat{B}_0) + X_{t+1}(B_1 - \hat{B}_1)\}^2$$

ولما كانت:

$$EU_{t+1} = 0$$

إذن الحد الثاني بكامله يساوي الصفر:

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + E(B_0 - \hat{B}_0)^2 + 2X_{t+1} E(B_0 - \hat{B}_0)(B_1 - \hat{B}_1) + X_{t+1}^2 E(B_1 - \hat{B}_1)^2$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \text{var}(\hat{B}_0) + X_{t+1}^2 \text{var}(\hat{B}_1) + 2X_{t+1} \text{cov}(B_0 \hat{B}_1)$$

$$S^2 YP_{t+1} = \sigma^2 u \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2 YP_{t+1}}$$

$$t = \frac{YP_{t+1}}{SYP_{t+1}}$$

أما حدود الثقة فهي:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

ويتم إيجاد YP_{t+1} من خلال:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}$$

نرجع إلى البيانات الإحصائية

الخاصة بمثالنا (1.2) ومنها:

$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

وللتنبؤ بقيمة YP_{t+1} عندما $X_{t+1} = 36$ فإن:

$$YP_{t+1} = 24.48571429 + 1.486904762(36)$$

$$= 78.01428572$$

ألف دينار معدل الأجر السنوي لموظف له من الخدمة 36 سنة.

ولتقدير حدود ثقة 95% للمعلمة Y_{t+1} فإن:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

وللحصول على SYP_{t+1} فإن:

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \left[\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2 (X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

وإذا رمزنا لتباين خطأ التنبؤ بالرمز $S^2 P$ فإن معادلة تقدر خطأ التنبؤ تكون:

$$S^2 P = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

وعليه فإن:

$$(Y_{t+1} - YP_{t+1}) \sim N(0, S^2 P)$$

عبارة أخرى أن:

خطأ التنبؤ $(Y_{t+1} - YP_{t+1})$ يتوزع، ~، توزيعاً طبيعياً، N ، بوسط حسابي مساوي للصفر وتباين ثابت مقداره $S^2 P$.

أما اختبار (t) فيتم بموجب:

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

مثال شامل: في ضوء المجاميع الآتية التي تمثل العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y_i) وسعرها (X_i) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة:

$$n = 8, \sum Y_i = 32, \sum X_i = 24, \sum X_i Y_i = 86$$

$$\sum X_i^2 = 96, \sum Y_i^2 = 140$$

المطلوب:

1- احتساب معلمات العلاقة بطريقة المعادلات الطبيعية، المحددات، الانحرافات، المصفوفات.

2- اختبار معنوية المعالم المقدرة عند مستوى معنوية 5% إذا علمت ان (t) الجدولية عند مستوى المعنوية المذكور ودرجة حرية (6) هي 2.31.

3- كون حدود ثقة 95% لكل من B_1, B_0 .

4- وضح مقدار ما يفسره المتغير المستقل من التغير في المتغير التابع.

5- أوجد معامل ارتباط X_i و Y_i .

6- أختبر معنوية المعادلة المقدرة إذا علمت ان قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1, 6) للبسط والمقام تساوي 5.99.

7- حلل تباين المعالم باستخدام جدول ANOVA.

8- تنبأ بقيمة YP_{t+1} واحسب فترة ثقة 95% للمعلمة Y_{t+1} عند $X_{t+1} = 10$.

الحل:

1- احتساب معلمات العلاقة:

* بطريقة المعادلات الطبيعية:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \quad \dots (15.3)$$

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$S^2 YP_{t+1} = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$= 24.534127 \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{(36-18)^2}{672} \right]$$

$$= 24.54127 \left[1 + 0.125 + \frac{324}{672} \right]$$

$$= 24.534127 [1 + 0.125 + 0.482142857]$$

$$= 24.534127 [1.607142857]$$

$$= 39.42984696$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2 YP_{t+1}} = \sqrt{39.42984696} = 6.279318989$$

$$\therefore Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

$$Y_{t+1} = 78.01428572 \mp (2.45)(6.279318989)$$

$$Y_{t+1} = 78.01428572 \mp 15.38433152$$

$$62.6299542 < Y_{t+1} < 93.39861724$$

$$\hat{Y}_i = 5.248 - 0.416X_i$$

تفسير المعادلة التقديرية إلى وجود علاقة عكسية بين المتغير المستقل X_i الذي يمثل السعر والمتغير التابع Y_i الذي يمثل الكمية المطلوبة فكل زيادة في السعر X_i بمقدار وحدة واحدة سوف تؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة بمقدار 0.416 وحدة.

* طريقة المحددات:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{vmatrix} = (8)(96) - (24)(24) = 768 - 576 = 192$$

$$|N_0| = \begin{vmatrix} 32 & 24 \\ 86 & 96 \end{vmatrix} = (32)(96) - (24)(86) = 3072 - 2064 = 1008$$

$$|N_1| = \begin{vmatrix} 8 & 32 \\ 24 & 86 \end{vmatrix} = (8)(86) - (32)(24) = 688 - 768 = -80$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2 \quad \dots(16.3)$$

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24\hat{B}_1 \quad \dots(17.3)$$

$$86 = 24\hat{B}_0 + 96\hat{B}_1 \quad \dots(18.3)$$

وبضرب المعادلة (17.3) في (3) نحصل على:

$$96 = 24\hat{B}_0 + 72\hat{B}_1$$

$$86 = 24\hat{B}_0 + 96\hat{B}_1$$

بالطرح نحصل:

$$10 = -24\hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{10}{-24} = -0.416$$

وللحصول على قيمة $\hat{B}_0$ يتم تعويض قيمة $\hat{B}_1$ في أحد المعادلتين الأساسيتين ولتكن معادلة (3).

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24\hat{B}_1$$

$$32 = 8\hat{B}_0 + 24(-0.416)$$

$$32 = 8\hat{B}_0 - 9.984$$

$$32 + 9.984 = 8\hat{B}_0$$

$$41.984 = 8\hat{B}_0$$

$$\hat{B}_0 = \frac{41.984}{8} = 5.248$$

$$\therefore \hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$= 140 - \frac{(32)^2}{8} = 140 - 128 = 12$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-10}{24} = -0.416$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_0 = 4 - (-0.416)(3)$$

$$\hat{\beta}_0 = 4 + 1.248$$

$$\hat{\beta}_0 = 5.2$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 5.2 - 0.416 X_i$$

* طريقة المصفوفات:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$|X'X| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{vmatrix} = 768 - 576 = 192$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \text{adj } X'X$$

$$\text{adj } X'X = \begin{bmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|N_0|}{|D|} = \frac{1008}{192} = 5.2$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{-80}{192} = -0.416$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 5.2 - 0.416 X_i$$

* طريقة الانحرافات:

من بيانات السؤال يمكن استخراج الانحرافات وكما يأتي:

$$\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}$$

$$= 86 - \frac{(96)(32)}{8} = 86 - 96 = -10$$

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$$

$$= 96 - \frac{(24)^2}{8} = 96 - 72 = 24$$

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{7.84}{8-2} = 1.306666667$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{e_i}^2}{\sum x_i^2} = \frac{1.306666667}{24} = 0.054444444$$

$$S_{B_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.054444444} = 0.233333333$$

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} = \frac{-0.416}{0.233333333} = -1.782857145$$

وبما ان قيمة (t) المحسبة والبالغة (1.782) اقل من قيمة (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6)، والبالغة (2.31) عليه تقبل فرضية العدم، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة ($\hat{B}_1$).

ب- بالنسبة لـ $\hat{B}_0$:

$$S_{e_i}^2 = 1.306666667$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S_{e_i}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{192} \begin{bmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.125 \\ -0.125 & 0.041666666 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.125 \\ -0.125 & 0.041666666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 16 + (-10.75) \\ -4 + 3.583333276 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 5.2 \\ -0.416 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 5.2 - 0.416 X_i$$

2- اختبار معنوية المعالم المقدرة:

أ- بالنسبة إلى $\hat{B}_1$:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

$$\sum \hat{y}_i^2 = \hat{B}_1 \sum x_i y_i = (-0.416)(-10) = 4.16$$

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2$$

$$\sum e_i^2 = 12 - 4.16 = 7.84$$

هناك احتمال 95% ان تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع B_0 بين الحدين الأعلى 7.067 والأدنى 3.332، وهناك احتمال 5% ان تقع خارج هذين الحدين.

ب- بالنسبة إلى B_1 :

$$\begin{aligned} B_1 &= \hat{B}_1 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_1) \\ B_1 &= -0.416 \mp (2.31)(0.233333333) \\ B_1 &= -0.416 \mp 0.538999999 \\ 0.959999999 < B_1 < 0.122999999 \end{aligned}$$

هناك احتمال 95% ان تكون قيمة $\hat{B}_1$ مساوية إلى B_1 بين الحدين الأعلى 0.123 والأدنى -0.96، وهناك احتمال 5% ان لا تكون كذلك.

4- معامل التحديد R^2 :

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{(-0.416)(-10)}{12} = \frac{4.16}{12} = 0.346666666 = 34.666\%$$

$$\begin{aligned} S_{\hat{B}_0}^2 &= 1.306666667 \left[\frac{1}{8} + \frac{(3)^2}{24} \right] \\ &= 1.306666667 [0.125 + 0.375] \\ &= 1.306666667 (0.5) \\ &= 0.653333333 \end{aligned}$$

$$S_{\hat{B}_0} = \sqrt{S_{\hat{B}_0}^2} = \sqrt{0.653333333} = 0.808290377$$

$$t\hat{B}_0 = \frac{\hat{B}_0}{S_{\hat{B}_0}} = \frac{5.2}{0.808290377} = 6.4333317$$

وبما ان قيمة (t) المحسوبة والبالغة (6.433) اكبر من مثلثاتها الجدولية عند مستوى (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.31)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل اي معنوية المعلمة المقدرة ($\hat{B}_0$).

3- حدود الثقة:

أ- بالنسبة إلى B_0 :

$$\begin{aligned} B_0 &= \hat{B}_0 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_0) \\ B_0 &= 5.2 \mp (2.31)(0.808290377) \\ B_0 &= 5.2 \mp 1.867150771 \\ 3.332849229 < B_0 < 7.067150771 \end{aligned}$$

$$F = \frac{(-0.416)(-10)/1}{7.84/8 - 1 - 1} = \frac{4.16}{1.306666667} = 3.183673469$$

وبما ان قيمة F المحسبة والبالغة (3.183) اقل من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1,6) للبسط والمقام والبالغة (5.99)، عليه نقبل فرضية العدم والتي تنص على عدم معنوية العلاقة المقدرة.

7- جدول تحليل التباين:

F	متوسط مربعات الخطأ	درجات الحرية	مجموع مربعات الانحرافات	مصدر التباين
F = 3.183	4.16	1	4.16	$\sum \hat{y}_i^2$
	1.306666667	6	7.84	$\sum e_i^2$
		7	12	$\sum y_i^2$

8- التنبؤ:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}$$

$$YP_{t+1} = 5.2 + (-0.416)(10)$$

$$YP_{t+1} = 5.2 - 4.16$$

$$YP_{t+1} = 1.04$$

هذا يعني ان المتغير المستقل X_i والذي يمثل السعر يفسر حوالي 34.666% من التغير الحاصل في المتغير التابع Y_i والذي يمثل الكمية المطلوبة من السلعة وان النسبة الباقية والبالغة 65.334% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة كالدخل، أسعار السلع البديلة... الخ.

5- معامل الارتباط بين X_i و Y_i :

$$r = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}} \cdot \hat{B}_1$$

$$r = \sqrt{\frac{24}{12}} (-0.416)$$

$$r = \sqrt{2} \cdot (-0.416)$$

$$r = 1.414213562(-0.416)$$

$$r = -0.588312841$$

أذن العلاقة عكسية، ضعيفة بين المتغيرين X_i ، Y_i .

6- اختبار F:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.3: ماذا تعني معلمات المعادلة الآتية:

$$C_t = 20.12 + 0.31Y_t$$

حيث أن:

C_t : تمثل الأنفاق الخاص.

Y_t : تمثل الدخل المتاح.

$$\bar{C} = 400, \bar{Y} = 800$$

السؤال 2.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{C}_t = 15 + 0.81Y_t$$

$$(3.1) \quad (18.7) \quad n = 19$$

حيث أن الأرقام بين القوسين تشير إلى قيمة (t) العملية (المحتسبة).

أ- أحسب الانحراف المعياري للمعطيات المقدرة.

ب- ضع حدود ثقة ولمستوى دلالة (95%) لمعامل المتغير المستقل (Y_t)

مستخدماً $t(n-2, \alpha/2) = 2.11$.

السؤال 3.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 21.5 + 0.84X_t$$

$$S.E \quad (9.4) \quad (0.024) \quad n = 12 \quad R^2 = 0.992$$

ولتقدير فترة الثقة نحتاج حساب SYP_{t+1} :

$$\begin{aligned} S^2 YP_{t+1} &= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \bar{X})^2}{\sum x_i^2} \right] \\ &= 1.306666667 \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{(10-3)^2}{24} \right] \\ &= 1.306666667 [1 + 0.125 + 2.041666667] \\ &= 1.306666667 (3.166666667) \\ &= 4.137777779 \end{aligned}$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2 YP_{t+1}} = \sqrt{4.137777779} = 2.034152841$$

وبذلك فإن حدود الثقة لـ Y_{t+1} تكون:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

$$Y_{t+1} = 1.04 \mp (2.31)(2.034152841)$$

$$Y_{t+1} = 1.04 \mp 4.698893063$$

$$-3.658893063 < Y_{t+1} < 5.738893063$$

$$\hat{C}_i = 15 + 0.81 Y_i$$

(3.1) (18.7) n=19

حيث ان الأرقام بين القوسين تشير إلى قيمة (t) العملية.

أ- احسب الانحراف المعياري للمعالم المقدرة.

ب- ضع حدود ثقة ولمستوى دلالة (95%) لمعامل المتغير المستقل (Y_i) مستخدماً $t(n-2, \alpha/2) = 2.11$.

السؤال 7.3: إذا أعطيت الحسابات الوسطية الآتية عن الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y) وسعرها (X).

$$\sum (X - \bar{X})^2 = 280, \quad \sum (Y - \bar{Y})^2 = 520$$

$$\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = -360, \quad \sum X = 40, \quad \sum Y = 100, \quad n = 10$$

قدر معالم العلاقة $Y = b_0 + b_1 X$ مع التعليق واكتب جدول تحليل التباين واختبر معنوية العلاقة المقدرة باستخدام اختبار (F) تحت مستوى معنوية (0.05) إذا علمت ان F الجدولية:

$$F = (0.05, 1, 8) = 5.3$$

$$F = (0.05, 2, 10) = 4.1$$

السؤال 8.3: قدر باحث دالة الاستيراد الآتية حيث يمثل (Y) الاستيراد ويمثل (X) الدخل القومي وذلك باستخدام عينة من عشرين مشاهدة.

$$Y = 200 + 0.5 X$$

$$S.E \quad 20 \quad 0.04$$

حيث أن الأرقام بين القوسين تشير إلى الانحراف المعياري.

أ- اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة، مستخدماً $t(10, 0.05) = 2.23$

ب- اختبر مدى معنوية العلاقة الخطية بين Y_i و X_i مستخدماً $F(10, 2, 0.05) = 4.10$

السؤال 4.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{Y}_i = 21.5 + 0.84 X_i$$

$$S.E \quad (9.4) \quad (0.024)$$

$$n = 12, \quad R^2 = 0.992$$

حيث ان الأرقام بين قوسين تشير إلى الانحراف المعياري.

أ- اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة ، مستخدماً $t(10, 0.05) = 2.23$

ب- اختبر مدى معنوية العلاقة الخطية بين Y_i ، X_i مستخدماً $F(10, 2, 0.05) = 4.10$

السؤال 5.3: ماذا تعني النتائج في المعادلة الآتية:

$$C_i = 20.12 + 0.31 Y_i$$

حيث ان:

C_i : تمثل الأنفاق الخاص.

Y_i : تمثل الدخل المتاح.

$$\bar{Y} = 800, \quad \bar{C} = 400$$

السؤال 6.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

أ- اختبر المعنوية الإحصائية لمعلمة المتغير المستقل (X) فيما إذا كانت تختلف عن الصفر تحت مستوى معنوية (0.05) موضحاً الفرضية الإحصائية المراد اختبارها.

ب- أوجد حدود الثقة لهذه المعلمة (معلمة X) عند مستوى دلالة 95% مع التعليق.

إذا علمت أن t الجدوليه:

$$t(0.025, 18) = 2.4$$

$$t(0.05, 20) = 2.1$$

تأماً بأن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير (Y_t) و (X_t) كانت كالاتي:

$$\sum_{t=1}^5 Y_t = 30, \quad \sum_{t=1}^5 Y_t^2 = 190, \quad \sum_{t=1}^5 Y_t = 12,$$

$$\sum_{t=1}^5 Y_t^2 = 34, \quad \sum_{t=1}^5 X_t Y_t = 74$$

المطلوب: تقدير كل من B₀ و B₁.

السؤال 39: تنص نظرية العرض على وجود علاقة طردية بين الكمية المعروضة من سلعة ما وسعرها، أدناه الكمية المعروضة من سلعة ما بالطن (Y_i) وسعرها بالدينار للكيلو غرام الواحد (X_i).

Y _i :	0.70	1.15	1.35	2.05	2.30
X _i :	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5

أ- قدر العلاقة بين المتغيرين المذكورين باستخدام أسلوب الانحرافات.

ب- أوجد معامل التحديد من خلال قانون الانحرافات غير الموضحة.

السؤال 10.3: البيانات الآتية تم الحصول عليها من عينة من الناتج للمدة (1985-1999) حيث X تمثل كمية الناتج و Y تمثل تكلفة الوحدة من الناتج.

$$\bar{X} = 7, \quad \bar{Y} = 9, \quad \sum x_i y_i = -28, \quad R^2 = 0.327$$

$$\sum X_i^2 = 795, \quad F_{5\%} = 4.54$$

أ- قدر دالة التكاليف.

ب- اختبر معنوية المعادلة المقدرة من خلال $\sum e_i^2$.

السؤال 11.3: إذا أعطيت جدول تحليل التباين الآتي:

مصدر الانحرافات	حجم المربعات	درجات الحرية	متوسط في الانحرافات	F
الانحرافات الموضحة	?	?	23.43	?
الانحرافات غير الموضحة	?	?	?	
الانحرافات الكلية	?	7		

أ- هل ان معادلة العرض الآتية معنوية ؟

$$\hat{Y} = 6.36 + 0.83 X_i$$

حيث ان X تمثل السعر.

ب- اختبر معنوية المعلمات.

الفصل الرابع: الانحدار الخطي المتعدد

Multiple Linear Regression

- 1.4 المقدمة.
- 2.4 النموذج الخطي المتعدد.
- 3.4 فرضيات النموذج الخطي المتعدد.
- 4.4 طرق تقدير معاملات النموذج.
- 1.4.4 طريقة المحددات.
- 2.4.4 طريقة الانحرافات.
- 5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS.
- 6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد.
- 1.6.4 اختبار مغنوية المعالم (t).
- 2.6.4 معامل التحديد المتعدد، R^2 .
- 3.6.4 اختبار إحصائية F.
- 7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA.
- 8.4 قياس حدود الثقة.
- الأسئلة والتمارين.

ج- قدر فترة ثقة 95% للمعلمة b_1 .

استفد من المعطيات الإحصائية الآتية:

$$R^2 = 0.65, \quad F_{5\%} = 8.81, \quad \sum x_i^2 = 34$$

$$\bar{Y} = 13, \quad \bar{X} = 8, \quad \sum x_i y_i = 28, \quad t_{5\%} = 2.45$$

السؤال 12.3: ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

الفصل الرابع: الانحدار الخطي المتعدد

Multiple Linear Regression

- 1.4 المقدمة.
- 2.4 النموذج الخطي المتعدد.
- 3.4 فرضيات النموذج الخطي المتعدد.
- 4.4 طرق تقدير معاملات النموذج.
- 1.4.4 طريقة المحددات.
- 2.4.4 طريقة الانحرافات.
- 5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS.
- 6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد.
- 1.6.4 اختبار مغنوية المعالم (t).
- 2.6.4 معامل التحديد المتعدد، R^2 .
- 3.6.4 اختبار إحصائية F.
- 7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA.
- 8.4 قياس حدود الثقة.
- الأسئلة والتمارين.

ج- قدر فترة ثقة 95% للمعلمة b_1 .

استفد من المعطيات الإحصائية الآتية:

$$R^2 = 0.65, \quad F_{5\%} = 8.81, \quad \sum x_i^2 = 34$$

$$\bar{Y} = 13, \quad \bar{X} = 8, \quad \sum x_i y_i = 28, \quad t_{5\%} = 2.45$$

السؤال 12.3: ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

الفصل الرابع: الانحدار الخطي المتعدد

Multiple Linear Regression

1.4 مقدمة:

يتضح مما سبق أن الانحدار البسيط يركز على دراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما المتغير المستقل (X) والآخر المتغير التابع (Y). غير أن واقع الحياة الاقتصادية والاجتماعية مبني بشكل عام على تأثير أية ظاهرة بأكثر من متغير مستقل، فدالة الطلب مثلاً، تحدد العلاقة بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة، والأسعار الخاصة بهذه السلعة، وغيرها من السلع (أسعار السلع البديلة) ويدخل فيها دخل المستهلك كأحد المتغيرات فضلاً عن المتغيرات الأخرى. لذلك لابد من توسيع نموذج الانحدار السابق ليشتمل على انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_k$ ويسمى هذا بنموذج الانحدار الخطي المتعدد،

Multiple Linear Regression.

يهدف هذا الفصل الى توضيح كيفية تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد، الذي يتكون من متغير تابع ومتغيرين أو أكثر من المتغيرات المستقلة. لذلك سيمسأشبه طبيعة نموذج الانحدار المتعدد، ثم تحديد أهم افتراضات النموذج التي سبق وأن نعرفنا عليها في الفصل الثاني، يضاف إلى ذلك بيان عدم وجود علاقة خطية تامة بين المتغيرات المقلدة وكيف ان المصفوفة $(X'X)$ ، تكون مصفوفة غير شاذة (Non-Singular) إذا كان محددها لا يساوي صفراً. ثم يتم بعد ذلك تقدير معاملات النموذج، تقدير التباين والتباين المشترك والانحراف المعياري لها للوصول إلى اختبار معاملات النموذج.

2.4 النموذج الخطي المتعدد:

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_k$ ، وحد عشوائي U_i ، ويُعبر عن هذه العلاقة، بالنسبة لـ n من المشاهدات و k من المتغيرات المستقلة، بالشكل الآتي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_{i1} + B_2X_{i2} + \dots + B_kX_{ik} + U_i \quad \dots(1.4)$$

وفي واقع الأمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (11) تكون نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{array}{l} Y_1 = B_0 + B_1 X_{11} + B_2 X_{12} + \dots + B_k X_{1k} + U_1 \\ Y_2 = B_0 + B_1 X_{21} + B_2 X_{22} + \dots + B_k X_{2k} + U_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ Y_n = B_0 + B_1 X_{n1} + B_2 X_{n2} + \dots + B_k X_{nk} + U_n \end{array}$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلمات المطلوب تقديرها علماً بأن الحد الأول منها (B_0) يمثل الحد الثابت، الأمر الذي يتطلب اللجوء الى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات. عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات وكالاتي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad \dots(2.4)$$

$$E(U_i) = E \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

2- تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفراً، أي أن:

$$\text{Cov}(U) = E(UU') = \sigma^2 I_n$$

$$E(UU') = E \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n]$$

$$= E \begin{bmatrix} U_1^2 & U_1 U_2 & \dots & U_1 U_n \\ U_2 U_1 & U_2^2 & \dots & U_2 U_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n U_1 & U_n U_2 & \dots & U_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1 U_2) & \dots & E(U_1 U_n) \\ E(U_2 U_1) & E(U_2^2) & \dots & E(U_2 U_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(U_n U_1) & E(U_n U_2) & \dots & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

وباختصار

$$Y = XB + U \quad \dots(3.4)$$

حيث أن:

Y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع.

X: مصفوفة أبعادها $(n \times k + 1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت.

B: متجه عمودي أبعاده $(k + 1 \times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها.

U: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية.

وبما إن المعادلة (3.4) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها باستخدام الإحصاءات المتوفرة عن المتغير التابع، Y، والمتغيرات المستقلة، $X_1, X_2, \dots, X_k$ ، فإنه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة بـ U_i التالية:

$$U_i \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

والتي تعني أن U_i يتوزع توزيعاً طبيعياً (N) متعدد المتغيرات لمتجه وسطه صفري و (0) مصفوفة تباين وتباين مشترك عددية هي $(\sigma^2 I_n)$.

3.4 فرضيات النموذج الخطي المتعدد:

عند استخدام طريقة OLS في تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد، فإنه

يجب توفر الافتراضات الآتية:

1- القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفراً أي إن، $E(U_i) = 0$:

المصفوفة، تبين قيم U بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم U_i .
ليس هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما وان عدد المشاهدات يجب ان يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها، أي ان:

$$r(x) = k + 1 < n$$

حيث إن (r) رتبة مصفوفة البيانات، (X) تساوي عدد المتغيرات المستقلة (k) زائداً الحد الثابت، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n) . وهذه الفرضية ضرورية جداً لضمان إيجاد معكوس المصفوفة $(x'x)$ ، إذ إن انتفاء هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) أقل من $(k+1)$ ، وبالتالي فإن رتبة $(x'x)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها أقل من $(k+1)$ ولا يمكن إيجاد معكوسها بسبب ما يسمى بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية، OLS.

4.4 طرق تقدير معلمات النموذج:

في ضوء الفرضيات المذكورة أعلاه يمكن استخدام طريقة OLS في تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد، ولهذا الغرض يمكن إعادة كتابة المعادلة (1.4) بصيغتها التقديرية كالآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Var}(U_1) & \text{Cov}(U_1 U_2) & \dots & \text{Cov}(U_1 U_n) \\ \text{Cov}(U_2 U_1) & \text{Var}(U_2) & \dots & \text{Cov}(U_2 U_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(U_n U_1) & \text{Cov}(U_n U_2) & \dots & \text{Var}(U_n) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{var}(U_i) = E(U_i^2) = \sigma^2$$

وان:

$$\text{Cov}(U_i U_j) = E(U_i U_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$E(UU') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{حيث أن: } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك Variance- Covariance Matrix لحد الخطأ U ، حيث تشكل العناصر القطرية في

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i1}) = 0$$

$$-2 \sum X_{i1} (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس، نحصل:

$$\sum X_{i1} Y_i - \hat{B}_0 \sum X_{i1} - \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 - \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2} = 0$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2} \quad \dots(5.4)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i2}) = 0$$

$$-2 \sum X_{i2} (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس، نحصل:

$$\sum X_{i2} Y_i - \hat{B}_0 \sum X_{i2} - \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} - \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2 = 0$$

$$\sum X_{i2} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i2} + \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2 \quad \dots(6.4)$$

ولما كان هدفنا هو الحصول على قيم كل من $\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن، أي تصغير القيمة $\sum e_i^2$ (مبدأ المربعات الصغرى) إلى أقل قيمة ممكنة، أي:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^n e_i^2$$

$$\therefore e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

ومن خلال التعويض عن $\hat{Y}_i$ بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة إلى $\hat{B}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_0$ ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_0} = 2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-1) = 0$$

$$-2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (-2) وفك القوس، نحصل:

$$\sum Y_i - n \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \sum X_{i1} - \hat{B}_2 \sum X_{i2} = 0$$

$$\sum Y_i = n \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_{i1} + \hat{B}_2 \sum X_{i2} \quad \dots(4.4)$$

$$|D| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N_2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2} Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

وتمثل المعادلات (4.4)، (5.4) و (6.4) المعادلات الطبيعية الثلاث التي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{B}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_0$. أن هذه المعادلات، يمكن حلها بإحدى الطرق الآتية:

1.4.4 طريقة المحددات:

ويمكن ان تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرايمر للحصول على قيم $\hat{B}_k$ من المعلومات وعلى النحو الآتي:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_{i1} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2}$$

$$\sum X_{i2} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i2} + \hat{B}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{B}_2 \sum X_{i2}^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{i1} Y_i \\ \sum X_{i2} Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن إيجاد المحددات الآتية:

$$\hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{B}_1(X_{i1} - \bar{X}_1) + \hat{B}_2(X_{i2} - \bar{X}_2) + e_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_{i1} + \hat{B}_2 x_{i2} + e_i$$

or

إثبات أن $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \quad \dots(1)$$

وبإدخال $\sum$ على طرفي المعادلة أعلاه، نحصل على:

$$\sum \hat{Y}_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

وبالقسمة على n:

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \hat{B}_0 \frac{n}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\bar{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X}_i \quad \dots(2)$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X}_i \quad \dots(3)$$

$$\therefore \bar{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X}_i \quad \dots(4)$$

وبطرح المعادلة (4) من المعادلة (2) نحصل:

$$\bar{\hat{Y}} - \bar{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X}_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 \bar{X}_i$$

وبعد الاختصار في الطرف الأيمن، نحصل:

$$\bar{\hat{Y}} - \bar{Y} = 0$$

ومنها يكون:

$$\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$$

$$\hat{B}_2 = \frac{|N_2|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2} Y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1} X_{i2} \\ \sum X_{i2} Y_i & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة لـ $\hat{B}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق:

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X}_1 - \hat{B}_2 \bar{X}_2$$

2.4.4 طريقة الانحرافات:

ويمكن تقدير معاملات الانحدار المتعدد باستخدام أسلوب الانحرافات أو ما يسمى بالمتوسطات، أي انحرافات القيم الأصلية عن وسطها الحسابي وكالاتي:

ولهذا الغرض نأخذ نموذج يحتوي متغيرين مستقلين X_1 و X_2 :

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2} + e_i$$

وبأخذ المتوسط لهذه المعادلة:

$$\bar{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X}_1 + \hat{B}_2 \bar{X}_2 + \bar{e}_i, \quad \bar{e}_i = 0$$

x: مصفوفة أبعادها $(n \times k - 1)$ تحتوي على انحرافات قيم المتغيرات المستقلة حيث أنها لا تتضمن العمود الأول الذي يمثل الحد الثابت. حيث يمكن بذلك استخراج الحد الثابت $\hat{B}_0$ من خارج المصفوفة باستخدام القانون الآتي:

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X}_1 - \hat{B}_2 \bar{X}_2$$

Or

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - (\hat{B}_1 \bar{X}_1 + \hat{B}_2 \bar{X}_2)$$

$\hat{B}$: متجه عمودي أبعاده $(k-1 \times 1)$ تحتوي على المعالم المجهولة.
e: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على البواقي.

بإعادة كتابة المعادلة (7.4) على النحو الآتي:

$$e_i = y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}$$

ولما كانت أفضل طريقة للحصول على أصغر قيمة ممكنة للانحرافات تتم بواسطة تربيعها وجعل مجموع مربعاتها أصغر ما يمكن. ربأخذ المشتقة الجزئية لها بالنسبة لكل من $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2 \sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})(-x_{i1}) = 0$$

$$-2 \sum x_{i1} (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}) = 0$$

$$y_i = \hat{B}_1 x_{i1} + \hat{B}_2 x_{i2} + e_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \dots (7.4)$$

وفي واقع الأمر فإن المعادلة أعلاه هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها n معادلة تكون نظام المعادلات التالي:

$$\begin{aligned} y_1 &= B_1 x_{11} + B_2 x_{12} + \dots + B_k x_{1k} + e_1 \\ y_2 &= B_1 x_{21} + B_2 x_{22} + \dots + B_k x_{2k} + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= B_1 x_{n1} + B_2 x_{n2} + \dots + B_k x_{nk} + e_n \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حيث يمكن التعبير عن ذلك بصيغة المصفوفات:

$$y = x\hat{B} + e$$

حيث أن:

y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على انحرافات قيم المتغير التابع.

وعليه فإن تقدير المعالم باستخدام المصفوفة بأسلوب الانحرافات يأخذ الصيغة التالية:

$$\hat{B} = (x'x)^{-1} x'y$$

وبعد احتساب المتجه $x'y$ ومحدد المصفوفة $|x'x|$ الذي ينبغي ان لا يساوي صفراً نوجد مقلوب المصفوفة الذي هو عبارة عن $(x'x)^{-1} = \frac{\text{adj}(x'x)}{|x'x|}$ ومن ثم تطبيق القانون أعلاه. أما $\hat{B}_0$ فيمكن حسابه بموجب القانون الآتي:

$$\hat{B}_0 = Y - \hat{B}_1 \bar{X}_1 - \hat{B}_2 \bar{X}_2$$

هذا ويمكن استخراج القيم بالانحرافات دون الرجوع الى البيانات الأصلية، كما مبين أدناه:

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

وبالقسمة على (-2) وفك القوس، نحصل على:

$$\sum x_{i1} y_i - \hat{B}_1 \sum x_{i1}^2 - \hat{B}_2 \sum x_{i1} x_{i2} = 0$$

$$\sum x_{i1} y_i = \hat{B}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum x_{i1} x_{i2} \quad \dots(8.4)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_2} = 2 \sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})(-x_{i2}) = 0$$

$$-2 \sum x_{i2} (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}) = 0$$

وبالقسمة على (-2) وفك القوس، نحصل:

$$\sum x_{i2} y_i - \hat{B}_1 \sum x_{i1} x_{i2} - \hat{B}_2 \sum x_{i2}^2 = 0$$

$$\sum x_{i2} y_i = \hat{B}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{B}_2 \sum x_{i2}^2 \quad \dots(9.4)$$

ويمكن صياغة المعادلتين أعلاه على شكل مصفوفة وكالآتي:

$$\begin{bmatrix} \sum x_{i1} y_i \\ \sum x_{i2} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1} x_{i2} \\ \sum x_{i1} x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن أعاده كتابته بالشكل التالي:

$$x'y = (x'x) \hat{B}$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

وبعد استخدام الحاسوب، فقد أصبح من السهل على الباحث الاقتصادي ان يحصل على النتائج من خلال أجادته استخدام إحدى البرامج الإحصائية أمثال EXCEL، SPSS، STATS، ولا يحتاج إلى استخدام الصيغ أعلاه في الجوانب التطبيقية، ولكن تم عرضها هنا لمعرفة كيفية عمل الانحدار المتعدد.

مثال 1.4: الجدول الآتي يتضمن البيانات الخاصة بالاستيرادات كمغير تابع (Y) والدخل القومي كمغير مستقل أول (X₁) وأسعار الاستيرادات كمغير مستثنى ثاني (X₂) في أحد الدول للمدة 1985-1993 والمطلوب هو تقدير معالم العلاقة أعلاه:

السنة	الاستيرادات Y	الدخل القومي X ₁	اسعر X ₂	X ₁ Y	X ₂ Y
1985	100	100	100	10000	10000
1986	106	104	99	11024	10494
1987	107	106	110	11342	11770
1988	120	111	126	13320	15120
1989	110	111	113	12210	12430
1990	116	115	103	13340	11948
1991	124	120	102	14880	12648
1992	133	124	103	16492	13699
1993	137	126	98	17262	13426
n = 9	Σ Y = 1053	Σ X ₁ = 1017	Σ X ₂ = 954	Σ X ₁ Y = 119870	Σ X ₂ Y = 111535

الحل:

X ₁ X ₂	X ₁ ²	X ₂ ²	Y ²
10000	10000	10000	10000
10296	10816	9801	11236
11660	11236	12100	11449
13986	12321	15876	14400
12543	12321	12769	12100
11845	13225	10609	13456
12240	14400	10404	15376
12772	15376	10609	17689
12348	15876	9604	18769
Σ X ₁ X ₂ = 107690	Σ X ₁ ² = 115571	Σ X ₂ ² = 101772	Σ Y ² = 124475

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$= 119870 - \frac{(1017)(1053)}{9}$$

$$= 119870 - 118989$$

$$= 881$$

$$= 101772 - \frac{(954)^2}{9}$$

$$= 101772 - 101124$$

$$= 648$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$$

$$= 124475 - \frac{(1053)^2}{9}$$

$$= 124475 - 123201$$

$$= 1274$$

$$\hat{B} = (x'x)^{-1}x'y$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{|x'x|} \text{adj}(x'x)$$

$$|x'x| = \begin{vmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 \\ \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 650 & -112 \\ -112 & 648 \end{vmatrix}$$

$$= (650)(648) - (-112)(-112)$$

$$= 421200 - 12544$$

$$\sum x_2y = \sum X_2Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

$$= 111535 - \frac{(954)(1053)}{9}$$

$$= 111535 - 111618$$

$$= -83$$

$$\sum x_1x_2 = \sum X_1X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

$$= 107690 - \frac{(1017)(954)}{9}$$

$$= 107690 - 107802$$

$$= -112$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$= 115571 - \frac{(1017)^2}{9}$$

$$= 115571 - 114921$$

$$= 650$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

$$= 117 - 155.2892057 - 11.60029359 \\ = -49.88949929$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2$$

$$\hat{Y} = -49.88949929 + 1.374240758 X_1 + 0.109436732 X_2$$

وتشير المعادلة التقديرية أعلاه إلى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات والمتغير المستقل X_1 الذي يمثل الدخل القومي فكل زيادة في X_1 بمقدار وحدة واحدة تزداد Y بمقدار (1.374) وحدة مع ثبات أثر X_2 . كما تشير هذه المعادلة إلى وجود علاقة طردية بين الاستيرادات والمتغير المستقل X_2 الذي يمثل السعر، فزيادة X_2 بمقدار وحدة واحدة تزداد الاستيرادات بمقدار (0.109) وحدة مع ثبات أثر X_1 وهذا مخالف لمنطق النظرية الاقتصادية إذ تشير النظرية إلى وجود علاقة عكسية بين السعر والاستيرادات.

5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS:

مصفوفة التباين والتباين المشترك لمقدرات نموذج الانحدار الخطي المتعدد:
في حالة K من المتغيرات المستقلة فإن التباين إلى B_K يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\therefore Y = XB + U$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه، نحصل:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'(XB + U)$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كما يلي:

$$= 408656$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{408656} \begin{bmatrix} 648 & 112 \\ 112 & 650 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix}$$

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (x'x)^{-1} x'y$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.396988485 + (-0.022747727) \\ 0.241454789 + (-0.132018057) \end{bmatrix}$$

لذلك سيكون:

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.374240758 \\ 0.109436732 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X}_1 - \hat{B}_2 \bar{X}_2$$

$$= 117 - (1.374240758) (113) - (0.109436732) (106)$$

$$= E \left\{ (X'X)^{-1} X' U U' X (X'X)^{-1} \right\}$$

$$= (X'X)^{-1} X' E(U'U) X (X'X)^{-1}$$

ولما كانت:

$$E(UU') = \sigma^2 I_n$$

$$\text{var}(\hat{B}) = (X'X)^{-1} X' \cdot \sigma^2 I_n \cdot X (X'X)^{-1}$$

وبإعادة الترتيب، نحصل:

$$\text{var}(\hat{B}) = \sigma^2 I_n (X'X)^{-1} X' X (X'X)^{-1}$$

$$\therefore (X'X)^{-1} X' X = I \text{ مصفوفة الوحدة}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

هذا يعني أن قيمة تباين أي عنصر من عناصر المتجة $(\hat{B})$ هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة σ^2 بما يقابلها من العناصر الواقعة على القطر الرئيسي لمقلوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$. أما التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر المتجة $(\hat{B})$ فهو عبارة عن حاصل ضرب σ^2 بالعنصر المقابل لها والواقع خارج القطر الرئيسي لمقلوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$. ويمكن توضيح ذلك لنموذج الانحدار الخطي المتعدد الذي يحتوي على متغيرين مستقلين، وكما يلي:

$$\text{var}(\hat{B}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X' X B + (X'X)^{-1} X' U$$

ولما كانت:

$$(X'X)^{-1} X' X = I$$

فأن:

$$\hat{B} = B + (X'X)^{-1} X' U$$

وبأخذ التوقع لطرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}) = B + E[(X'X)^{-1} X' U]$$

$$= B + (X'X)^{-1} X' E(U)$$

$$\therefore E(U) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}) = B$$

إذن $\hat{B}$ هي عبارة عن مقدار غير متحيز إلى B الحقيقية. ويمكن الحصول على تباين قيمة المعلمة المقدرة $\hat{B}$ حيث يؤدي ذلك إلى مصفوفة التباين والتباين المشترك الخاصة بالمتجه $\hat{B}$:

$$\hat{B} - E(\hat{B}) = \hat{B} - B = (X'X)^{-1} X' U$$

$$\text{var}(\hat{B}) = E \left\{ [\hat{B} - E(\hat{B})] [\hat{B} - E(\hat{B})]' \right\}$$

$$\therefore E(\hat{B}) = B$$

$$\text{var}(\hat{B}) = E \left\{ (\hat{B} - B) (\hat{B} - B)' \right\}$$

$$= E \left\{ [(X'X)^{-1} X' U] [(X'X)^{-1} X' U]' \right\}$$

$$S^2e = \frac{e'e}{n-k-1} \quad \dots(10.4)$$

$$e'e = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y})$$

$$\therefore \hat{Y} = X\hat{B}$$

$$\begin{aligned} e'e &= (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B}) \\ &= Y'Y - Y'X\hat{B} - \hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B} \end{aligned} \quad \dots(11.4)$$

وبما أن الحدين الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة، كما وأن كلا منهما يمثل مدلة الآخر، فإن:

$$Y'X\hat{B} = (Y'X\hat{B})' = YX'\hat{B}'$$

عليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (11.4) بالشكل التالي:

$$e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B} \quad \dots(12.4)$$

$$\therefore \hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\therefore (X'X)\hat{B} = X'Y$$

$$e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'Y \quad \dots(13.4)$$

$$e'e = Y'Y - \hat{B}'X'Y \quad \dots(14.4)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \begin{bmatrix} \sum X^2 & -\sum X \\ -\sum X & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} & \frac{-\sigma^2 \sum X}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \\ \frac{-\sigma^2 \sum X}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} & \frac{n\sigma^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{var}(\hat{B}_0) = \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x^2} \right]$$

$$\text{var}(\hat{B}_1) = \frac{n\sigma^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x^2}$$

$$\text{Cov}(\hat{B}_0, \hat{B}_1) = \frac{-\sigma^2 \sum X}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{-\sigma^2 \bar{X}}{\sum x^2}$$

أما الصيغة التقديرية لتباين الخطأ العشوائي، σ^2 ، (S^2e) فيمكن الوصول إليها كالآتي:

وبتعويض هذه القيمة في البسط من المعادلة (10.4) نحصل:

$$S^2_e = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n - k - 1}$$

6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد:

يهدف هذا المبحث إلى توسيع معارفنا الأساسية لنموذج الانحدار وذلك بأجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام توزيع اختبار إحصاءه F ومقارنته باختبار t ومن ثم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد R^2 ومقارنته بمعامل التحديد المقدر المعدل $\bar{R}^2$ ، وكذلك اختبار العلاقة بين F و R^2 من خلال جدول تحليل التباين، ANOVA، ثم علاقة R^2 بقيمة المتغير العشوائي، $\sum e_i^2$.

1.6.4 اختبار معنوية المعالم (t):

يستخدم اختبار (t) لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_k$ في المتغير التابع y في نموذج الانحدار المتعدد، وكما ذكرنا سابقاً عند تناول اختبار (t) في نموذج الانحدار الخطي البسيط، انه يعتمد على نوعين من الفروض:

$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_k = 0 : H_0 \quad \text{فرضية العدم}$$

$$B_1 \neq B_2 \neq B_3 \neq \dots \neq B_k \neq 0 : H_1 \quad \text{الفرضية البديلة}$$

وبعد احتساب قيمة (t) نقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يمكن بيانها كما يلي:

أ- بالنسبة إلى $\hat{B}_1$:

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}}$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_1}}$$

$$= \frac{1274 - (1.374240758)(881) - (0.109436732)(-83)}{9 - 2 - 1}$$

$$= \frac{1274 - 1210.706108 + 9.083248756}{6}$$

$$= \frac{72.37714076}{6} = 12.06285679$$

$$\text{var cov}(\hat{B}) = S^2 e_i (x'x)^{-1}$$

$$12.06285679 \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.019127891 & 0.003306055 \\ 0.003306055 & 0.019186926 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) \text{ or } S_{\hat{B}_1}^2 = 0.019127891$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.019127891} = 0.138303618$$

$$t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}^2} = \frac{1.374240758}{0.138303618} = 9.936404975$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \text{var}(\hat{B}_1) = S^2 e_{11}$$

$$\text{var}(\hat{B}) = S^2 e (x'x)^{-1}$$

$$S^2 e = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n-k-1} = \frac{\sum y^2 - (\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y)}{n-k-1}$$

ب- بالنسبة الى $\hat{B}_2$:

$$t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_2}{S_{\hat{B}_2}}$$

$$S_{\hat{B}_2} = \sqrt{S_{\hat{B}_2}^2}$$

$$S_{\hat{B}_2}^2 = \text{var}(\hat{B}_2) = S^2 e_{22}$$

$$S^2 e = \frac{e'e}{n-k-1}$$

وبالرجوع إلى المثال 1.4، يمكن تقييم معنوية المعلمات $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_2$ وكالاتي:

أ- بالنسبة الى $\hat{B}_1$:

$$S^2 e_i = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n-k-1} = \frac{\sum y^2 - (\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y)}{n-k-1}$$

$$e = y - x\hat{B}$$

$$e'e = (y - x\hat{B})' (y - x\hat{B})$$

$$e'e = y'y - y'x\hat{B} - x'\hat{B}'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$

وبما ان الحدين الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة كما وان كلاً منها يمثل مبدلاً للآخر فان:

$$\therefore e'e = y'y - 2\hat{B}'x'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$

$$\therefore \hat{B} = (x'x)^{-1} x'y$$

$$(x'x)\hat{B} = x'y$$

$$e'e = y'y - 2\hat{B}'x'y + \hat{B}'x'y$$

$$e'e = y'y - \hat{B}'x'y$$

بذلك يمكن كتابة معادلة الانحرافات الكلية كالآتي:

$$y'y = \hat{B}'x'y - e'e$$

إذ ان:

$y'y$: تمثل الانحرافات الكلية.

$\hat{B}'x'y$: تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار.

$e'e$: تمثل الانحرافات غير الموضحة.

وبما ان قيمة $(t_{\hat{B}_1})$ المحسوبة والبالغة (9.93) اكبر من مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45)، عليه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، أي ان $\hat{B}_1$ معنوي.

ب- بالنسبة الى $\hat{B}_2$:

$$S^2 e = 12.06285679$$

$$\text{var}(\hat{B}_2) \text{ or } S_{\hat{B}_2}^2 = 0.019186926$$

$$S_{\hat{B}_2} = \sqrt{S_{\hat{B}_2}^2} = \sqrt{0.019186926} = 0.138516879$$

$$t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_2}{S_{\hat{B}_2}} = \frac{0.109436732}{0.138516879} = 0.790060625$$

وبما ان قيمة $(t_{\hat{B}_2})$ المحسوبة والبالغة (0.79) اقل من مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45)، عليه تقبل فرضية العدم، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة $(\hat{B}_2)$.

2.6.4 معامل التحديد المتعدد، (R^2) Multiple Coefficient of Determination:

ويعد مؤشر اساس في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_k) ، إذ $(k=1, 2, \dots, k)$ ، بعبارة اخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع. ويمكن اشتقاقه باستخدام المصفوفات بالانحرافات كالآتي:

$$\therefore y = x\hat{B} + e$$

$$R^2 = \frac{\hat{B}'x'y}{\sum y^2} = \frac{\begin{bmatrix} 1.374240758 & 0.109436732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}}{1274}$$

$$= \frac{1210.706108 - 9.083248756}{1274}$$

$$= \frac{1201.622859}{1274} = 0.943189057 = \%94.3$$

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

$$= \frac{(1.374240758)(881) + (0.109436732)(-83)}{1274}$$

$$= \frac{1210.706108 - 9.083248756}{1274}$$

$$= \frac{1201.622859}{1274} = 0.943189057 = \%94.3$$

أما معامل التحديد المصحح R^2 :

$$R^2 = 1 - \left[(1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-2} \right]$$

وبما ان معامل التحديد R^2 عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار الى الانحرافات الكلية، Total variation، فإنه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية:

$$\therefore R^2 = \frac{\hat{B}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{B}'x'y}{\sum y^2}$$

or

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{y'y - n\bar{Y}^2}$$

or

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_1 y + \hat{B}_2 \sum x_2 y}{\sum y^2}$$

إن إضافة متغيرات مستقلة جديدة الى المعادلة يؤدي الى رفع قيمة R^2 ، وذلك لثبات قيمة المقام وتغير قيمة البسط بمقدار $(\hat{B}xy)$ غير إن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي الى انخفاض درجات الحرية $(n-k-1)$ ، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل او المصحح R^2 وعلى النحو الآتي:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2) \frac{n-1}{n-k-1} \right]$$

وبالرجوع إلى المثال 1.4، يمكن معرفة نسبة مساهمة X_1 و X_2 في التغير الحاصل في Y وكالاتي:

$$F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$$

or

$$F = \frac{R^2/k}{1-R^2/n-k-1}$$

وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (k) و (n-k-1) للبسط والمقام ولمستوى معنوية معين. فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية ترفض H_0 وتقبل H_1 أي أن العلاقة المدروسة معنوية، وهناك على الأقل متغير مستقل واحد من المتغيرات X_k ذو تأثير في Y. أما إذا كانت القيمة المحسوبة أصغر من الجدولية فإن ذلك يعني قبول H_0 أي أن العلاقة الخطية المدروسة غير معنوية أي أنه ليس ثمة تأثير من أي متغير من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.

وبالرجوع إلى بيانات مثالنا 1.4 يمكن اختبار معنوية العلاقة المقدرة وكالاتي:

$$F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$$

$$1201.622859/2$$

$$12.37714076/9-2-1$$

$$= 1 - \left[(1 - 0.943189057) \frac{9-1}{9-2-1} \right]$$

$$= 1 - [(0.056810943)(1.333333333)]$$

$$= 1 - 0.075747924 = 0.924252076 = \%92.4$$

هذا يعني أن المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 يفسران حوالي 92.4% من التغير الدامسل في المتغير التابع Y وأن النسبة الباقية والبالغة حوالي 7.6% تمثل تأثير المتغيرات الأخرى لم تدخل في المعادلة.

3.6.4 اختبار إحصائية F: F-Statistics:

يسمى هذا الاختبار معرفة مدى معنوية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \dots, X_k$ على المتغير التابع Y، وكما هو الحال في الانحدار البسيط فإنه يعتمد على نوعين من الفروض:

فرضية العدم H_0 : وتنص على انعدام العلاقة بين كل متغير من المتغيرات المستقلة ($X_1, X_2, \dots, X_k$) وبين المتغير التابع Y، أي:

$$H_0: \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dots = \hat{B}_k = 0$$

الفرضية البديلة H_1 : وتنص على وجود علاقة معنوية بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع، أي:

$$H_1: \hat{B}_1 \neq \hat{B}_2 \neq \dots \neq \hat{B}_k \neq 0$$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA:

لغرض الوقوف على تأثير كل من X_1 ، X_2 في المتغير التابع Y ، لابد من عمل جدول تحليل التباين لبيان أثر المتغيرين المستقلين X_1 ، X_2 في النموذج.

جدول تحليل التباين

اختبار F	متوسط مربعات الخطأ	درجات الحرية	مجموع مربعات الخطأ	مصدر التباين
$F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$	$\hat{B}'x'y/k$ 600.8114295	K 2	$\hat{B}'x'y$ 1201.622859	الانحراف الموضح من قبل X_1 و X_2
$= \frac{600.8114295}{12.06285679}$	$e'e/n-k-1$ 12.06285679	$n-k-1$ 6	$e'e$ 72.37714076	الانحراف غير الموضح
$= 49.8067$		$n-k$ 8	$y'y$ 1274	الانحراف الكلي

ولمعرفة تأثير كل متغير مستقل في المتغير التابع بصورة منفردة فإننا نختبر خلال المرحلة الأولى تأثير المتغير X_1 بصورة مستقلة في Y . وفي المرحلة الثانية نختبر تأثير المتغير X_2 بصورة مستقلة في Y . وبالرجوع إلى مثالنا نختبر ما يلي:

أولاً: تأثير عنصر الدخول X_1 في الاستيرادات Y :

لغرض اختبار التأثير المستقل لعنصر الدخول (X_1) في دالة الاستيرادات (Y) يجب معرفة مقدار الزيادة المتحققة في قيمة مجموع مربعات الانحرافات الموضحة

$$= \frac{600.8114295}{12.06285679} = 49.8067282$$

$$F = \frac{R^2/k}{1-R^2/n-k-1}$$

$$= \frac{0.943189057/2}{1-0.943189057/6} = \frac{0.471594528}{0.00946849} = 49.8067$$

وبما ان قيمة (F) المحسوبة والبالغة (49.8) اكبر من قيمة (F) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (2، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14)، عليه ترفض فرضية العدم التي تنص على عدم معنوية العلاقة الخطية المقدرة وتقبل الفرضية البديلة التي تنص على معنوية العلاقة المقدرة. بعبارة أخرى، ان هناك على الأقل تأثير لأحد المتغيرين X_1 ، X_2 على المتغير التابع Y .

تحليل التأثير المستقل للمتغير المستقل X_1 في النموذج

اختبار F	متوسط مربعات الخطأ	درجات الحرية	مجموع مربعات الخطأ	مصدر التباين
$F_1 = \frac{1190.991686}{12.06285679} = 98.73214171$	1190.991686	1	10.63117284	الانحراف الموضح من قبل X_2
		1	1190.991686	الانحراف الموضح من قبل X_1
		2	1201.622859	الانحراف الموضح من قبل X_2 و X_1
	12.06285679	6	72.37714076	الانحرافات غير الموضحة
		8	1274	الانحرافات الكلية

وبمقارنة قيمة (F_1) المحسوبة والبالغة (98.73) مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (2، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14) والتي يتضح أنها أكبر من الجدولية، عليه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، مما يدل على وجود تأثير معنوي للمتغير المستقل X_1 الذي يمثل الدخل القومي على المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات.

من قبل خط انحدار المتغير التابع Y على المتغير المستقل X_2 نتيجة اضافة المتغير X_1 الى الدالة، ويتم ذلك بافتراض نموذج يتضمن المتغير X_2 أي ان:

$$Y_i = B_0 + B_2 X_2 + U_i$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_2 X_2$$

$$\hat{B}_2 = \frac{\sum x_2 y}{\sum x_2^2} = \frac{-83}{648} = -0.128086419$$

أما مجموع مربعات الانحرافات الناجمة عن المتغير X_2 فهي:

$$\begin{aligned} \hat{B}_2 \sum x_2 y &= (-0.128086419)(-83) \\ &= 10.63117284 \end{aligned}$$

أما التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل X_1 الى الدالة فهو:

$$\begin{aligned} \hat{B}_1 \sum x_1 y &= \hat{B}' X' y - \hat{B}_2 \sum x_2 y \\ &= 1201.622859 - 10.63117284 \\ &= 1190.991686 \end{aligned}$$

ولاختبار مدى معنوية هذا التأثير المضاف من قبل المتغير المستقل X_1 ننظم جدول تحليل التباين الآتي:

ثانياً: تأثير عنصر السعر X_2 في الاستيرادات Y :

لبيان أثر المتغير المستقل X_2 في الدالة نفترض نموذجاً يتضمن المتغير المستقل X_1 , أي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + U_i$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_1 y}{\sum x_1^2} = \frac{881}{650} = 1.355384615$$

أما مجموع مربعات الانحرافات الناجمة عن المتغير X_1 فهي:

$$\hat{B}_1 \sum x_1 y = (1.355384615)(881)$$

$$= 1194.093846$$

أما التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل X_2 الى الدالة فهو:

$$\hat{B}_2 \sum x_2 y = \hat{B}' x' y - \hat{B}_1 \sum x_1 y$$

$$= 1201.622859 - 1194.093846$$

$$= 7.529013$$

ولاختبار مدى معنوية هذا التأثير المضاف من قبل المتغير المستقل X_2 ننظم جدول تحليل التباين الآتي:

تحليل التأثير المستقل للمتغير المستقل X_2 في النموذج

اختبار F	متوسط مربعات الخطأ	درجات الحرية	مجموع مربعات الخطأ	مصدر التباين
$F_2 = \frac{7.529013}{12.06285679}$ $= 0.624148419$	7.529013	1	1194.093846	الانحراف الموضح من قبل X_1
		1	7.529013	الانحراف الموضح من قبل X_2
		2	1201.622859	الانحرافات الموضحة من قبل X_1 و X_2
	12.06285679	6	72.37714076	الانحرافات غير الموضحة
		8	1274	الانحرافات الكلية

وبمقارنة قيمة (F_2) المحسوبة والبالغة (0.62) مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (2، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14) والتي يتضح بأنها اقل من الجدولية، عليه نقبل فرضية العدم، مما يدل بان المتغير المستقل X_2 لا يمارس تأثيراً معنوياً على المتغير التابع Y .

وعليه نستنتج بأن المتغير المستقل X_1 الذي يمثل الدخل القومي يمارس تأثيراً معنوياً على المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات. في حين ان المتغير المستقل X_2 الذي يمثل السعر لا يمارس تأثيراً معنوياً على Y ومن ثم يجب استبعاده من النموذج المدروس واعتماد النموذج الذي يحتوي على المتغير X_1 ذو التأثير المعنوي في المتغير Y والذي ندرجه ادناه:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + U_i$$

$$= \frac{0.937279313}{0.008960098} = 104.6059221$$

ولاختبار معنوية المعلمات $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ نحتاج البيانات الآتية:

Y	$\hat{Y}$	e_i	e_i^2
100	99.38	0.62	0.3844
106	104.8015385	1.1984615	1.436309967
107	107.5123077	-0.5123077	0.262459179
120	114.2892308	5.7107692	32.61288486
110	114.2892308	-4.2892308	18.39750086
116	119.7107692	-3.7107692	13.76980806
124	126.4876923	-2.4876923	6.188612979
133	131.9092308	1.0907692	1.18977448
137	134.62	2.38	5.6644
$\sum Y = 1053$	$\sum \hat{Y} = 1053$	$\sum e_i = 0$	79.90615335

بالنسبة لـ $\hat{B}_1$:

$$S^2 e_i = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{79.90615335}{9-2} = 11.41516476$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S^2 e_i}{\sum x_i^2} = \frac{11.41516476}{650} = 0.017561791$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.017561791} = 0.132520911$$

حيث يتم تقديره وتقييمه على غرار النموذج الوارد في الفصل الخاص بالانحدار الخطي البسيط وكما يلي:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y}{\sum x_i^2} = \frac{881}{650} = 1.355384615$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_0 &= \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{X} \\ &= 117 - (1.355384615)(113) \\ &= 117 - 153.1584615 \\ &= -36.1584615 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \\ \hat{Y} &= -36.1584615 + 1.355384615 X_i \end{aligned}$$

وتعني بان زيادة المتغير المستقل X والذي يمثل الدخل القومي بمقدار وحدة واحدة تسبب زيادة في المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات بمقدار (1.355) وحدة.

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y}{\sum y^2} = \frac{(1.355384615)(881)}{1274} \\ &= \frac{1194.093846}{1274} = 0.937279313 = \%93.72 \end{aligned}$$

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1} = \frac{0.937279313 / 1}{1 - 0.937279313 / 9 - 1 - 1}$$

$$\hat{Y} = -36.1584615 + 1.355384615 X_i$$

$$(2.407) \quad (10.227)$$

$$R^2 = \%93.72 \quad F = 104.60$$

8.4 قياس حدود الثقة:

لإحساب حدود الثقة لأية مشاهدة (نقطة) من مشاهدات خط الانحدار للمجتمع أو بعبارة أخرى لحساب القيمة المتوسطة الحقيقية إلى Y عند مستوى معنوية معين للمتغير المستقل في النموذج. نفترض بأن النقطة المراد تقدير حدود ثقتها هي $E(Y_0)$. ولتقدير المجال الذي يمكن أن تقع فيه قيمة $E(Y_0)$ المقابلة لتشكلية معينة من قيم المتغيرات المستقلة (k) يجب اشتقاق متباينة القيمة $E(Y_0)$.

$$X_0 = [1 \ X_{01} \ X_{02} \ \dots \ X_{0k}]$$

$$\hat{Y}_0 = [1 \ X_{01} \ X_{02} \ \dots \ X_{0k}] \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{B}_k \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{01} + \dots + \hat{B}_k X_{0k}$$

وباختصار:

$$\hat{Y}_0 = X_0 \hat{B}$$

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} = \frac{1.355384615}{0.132520911} = 10.22770372$$

بالنسبة لـ $\hat{B}_0$:

$$S^2 e = 11.41516476$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S^2 e_i \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$= 11.41516476 \left[\frac{1}{9} + \frac{(113)^2}{650} \right]$$

$$= 11.41516476 [0.11111111 + 19.64461538]$$

$$= 225.5148729$$

$$S_{\hat{B}_0} = \sqrt{S_{\hat{B}_0}^2} = \sqrt{225.5148729} = 15.01715262$$

$$t_{\hat{B}_0} = \frac{\hat{B}_0}{S_{\hat{B}_0}} = \frac{-36.1584615}{15.01715262} = -2.407810749$$

وعليه فإن الصيغة التقديرية للنموذج المدروس تكون كما يلي:

$$\therefore \hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$E(Y_0) = \hat{Y}_0 \mp t_{\alpha/2} \cdot S(\hat{Y}_0)$$

$$E(Y_0) = X_0 \hat{B} \mp t_{\alpha/2} \cdot S(\hat{Y}_0)$$

ولغرض اشتقاق المتباينة الخاصة بتقدير فترات حدود الثقة للقيمة $E(Y_0)$ يجب اشتقاق وسط وتباين القيمة $(\hat{Y}_0)$ وكالاتي:
لايجاد الوسط فاننا نأخذ القيمة المتوقعة لـ $(\hat{Y}_0)$:

$$E(\hat{Y}_0) = E(X_0 \hat{B})$$

$$E(\hat{Y}_0) = X_0 E(\hat{B})$$

$$\therefore E(\hat{B}) = B$$

$$\therefore E(\hat{Y}_0) = X_0 B$$

والآن لنجد التباين:

$$\text{var}(\hat{Y}_0) = E\{(\hat{Y}_0 - E(\hat{Y}_0))(\hat{Y}_0 - E(\hat{Y}_0))'\}$$

$$= E\{(\hat{Y}_0 - X_0 B)(\hat{Y}_0 - X_0 B)'\}$$

$$\therefore \hat{Y}_0 = X_0 \hat{B}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{Y}_0) = E\{(X_0 \hat{B} - X_0 B)(X_0 \hat{B} - X_0 B)'\}$$

$$= X_0 \{E(\hat{B} - B)(\hat{B} - B)'\} X_0'$$

$$= \sigma^2 X_0 (X'X)^{-1} X_0'$$

وإذا رمزنا للقيمة التقديرية لتباين قيمة حدود الثقة $\text{var}(\hat{Y}_0)$ بالرمز $S^2(\hat{Y}_0)$ ، فان:

$$S^2(\hat{Y}_0) = S^2 X_0 (X'X)^{-1} X_0'$$

وعليه فان حدود الثقة للقيمة $E(Y_0)$ تكون:

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.4: لدراسة دالة الأنفاق على المواد الغذائية أخذت 6 أسر واسم لوغاريتم الأنفاق على المواد الغذائية كمتغير معتمد (Y_i) وعلاقته بلوغاريتم سعر المواد الغذائية (X_{1i}) ولوغاريتم الدخل المتاح (X_{2i}) كمتغيرات مستقلة، حيث كانت العمليات الحسابية كالآتي:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.15 & -0.07 \\ & 0.32 & -0.45 \\ & & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

قدر معلمات العلاقة بين (Y_i) والمتغيرين X_{1i} و X_{2i} .

السؤال 2.4: ماذا تعني النتائج في المعادلة الآتية:

$$\ln Y_t = 1.24 + 0.25 \ln L_t + 0.78 \ln K_t$$

حيث أن:

Y_t : تمثل الإنتاج.

L_t : تمثل العمل.

K_t : تمثل رأس المال.

السؤال 3.4: افترض ان باحثاً قدر العلاقة بين المتغير المعتمد (Y_t) والمتغيرات المستقلة (X_{1t}) و (X_{2t}) وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{Y}_t = -49.329 + 1.364 X_{1t} + 0.114 X_{2t}$$

وتوفرت المعلومات الآتية:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = 1260.89, \quad R^2 = 0.94, \quad n = 9$$

حيث أن Y_t تمثل الرقم القياسي للاستيرادات، X_{1t} تمثل الرقم القياسي للإنتاج الإجمالي، X_{2t} تمثل نسبة الرقمين القياسيين أعلاه.

المطلوب: ضع جدول تحليل التباين مستعيناً بمعامل التحديد R^2 وأختبر الأثر الإجمالي للعلاقة المقدرة مستخدماً $F(6, 2, 0.05) = 5.14$.

السؤال 4.4: لتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد للعلاقة بين الكمية المدخلة (X_1) و (X_2) سلعة معينة (Y) وسعر السلعة (X_1) والدخل الفردي (X_2).

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + U$$
وحصلت على الحسابات الآتية:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.2 & 1.8 \\ & 1 & -1.7 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad X'Y = \begin{bmatrix} 42 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad S_{uu}^2 = 10$$

المطلوب:

أ- قدر معالم هذه الدالة (b_0, b_1, b_2) مع التفسير الاقتصادي.

ب- احسب مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعاملات الدالة $\text{Var} - \text{Cov}(\hat{B})$.

ج- أوجد تباين المعلمة $\hat{b}_2$.

السؤال 5.4: لنموذج الانحدار المتعدد الآتي:

$$Y = XB + U$$

المطلوب: اختبر معنوية العلاقة المقدرة من خلال جدول تحليل التباين.

استفد من المعطيات الإحصائية الآتية:

$$\sum x_1 y = 10 \quad \sum x_2 y = 45 \quad \sum y^2 = 40 \quad F_{5\%} = 4.42$$

السؤال 9.4: النتائج الآتية تم الحصول عليها من عينة تمثل (13) عائلة حيث (Y)

يمثل الأنفاق الأسبوعي على الشؤون المنزلية، (X_1) يمثل الدخل العائلي

و (X_2) يمثل عدد الأطفال في الأسرة.

$$\hat{Y} = 6.26 + 0.45 X_1 - 0.38 X_2$$

$$\sum x_1 y = 38 \quad \sum x_2 y = -28 \quad \sum x_1^2 = 74 \quad \sum x_2^2 = 60$$

$$\sum x_1 x_2 = 12 \quad \sum e_i^2 = 12.27 \quad t_{5\%} = 2.179$$

المطلوب:

أ- ما مقدار ما يفسره المتغيران X_1 و X_2 من التغير الحاصل في Y.

ب- اختبر معنوية المعلمة $\hat{b}_1$.

ج- قدر حدود ثقة 95% للمعلمة b_1 .

د- كم يكون الأنفاق على الشؤون المنزلية عندما يكون $X_1 = 300$ ، $X_2 = 4$

هـ- أوجد الانحراف المعياري لـ $\hat{b}_2$.

السؤال 10.4: النتائج الآتية تم الحصول عليها من عينة تمثل (15) مريضاً حيث

(Y) تمثل مدة الرقود في أحد مستشفيات الأمراض المزمنة، (X_1) تمثل

عدد المراجعات السابقة و (X_2) يمثل العمر.

$$\hat{Y} = 2.08 + 0.05 X_1 + 1.76 X_2$$

$$U \sim N(0, \sigma^2 \ln) , E(U_i - U_j) = 0 \quad i \neq j$$

اثبت ان موجه المعلمات (b) المقدر بأسلوب (OLS) غير متحيز، أي ان $E(\hat{B}) = B$.

السؤال 6.4: باحث اقتصادي اعتمد الأنفاق على المواد الغذائية (Y_i) كمتغير معتمد

وعلاقته بسعر المواد الغذائية (X_{i1}) والدخل المتاح (X_{i2}) كمتغيرات مستقلة

لتقدير دالة الاستهلاك الآتية:

$$\hat{Y}_i = 4.82 - 4.71 X_{i1} + 2.77 X_{i2}$$

مع العمليات الحسابية الآتية:

$$\sum_{i=1}^6 Y_i = 9 \quad , \quad \sum_{i=1}^6 x_{i1} y_i = 12 \quad , \quad \sum_{i=1}^6 x_{i2} y_i = 16 \quad , \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 42$$

المطلوب: اشتق صيغة لتقدير تباين العينة (S_e^2) ثم احسبه من واقع البيانات أعلاه.

السؤال 7.4: إذا كان نموذج الانحدار العام هو:

$$Y = XB + U$$

$$U \sim N(0, \sigma^2 \ln) , E(U_i - U_j) = 0 \quad i \neq j$$

المطلوب: اشتق صيغة لتقدير مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه (b) أي،

Var-Cov (b)

السؤال 8.4: في عينة تمثل (24) مشاهدة للكميات المطلوبة من سلعة ما (Y)

وسعرها (X_1) ودخول المستهلكين (X_2) تم تقدير النموذج الآتي:

$$\hat{Y} = 13 - 7 X_1 + 2.4 X_2$$

الفصل الخامس: مشكلة الارتباط الذاتي

The Autocorrelation Problem

1.5 المقدمة.

2.5 مسببات الارتباط الذاتي.

3.5 تحليل الارتباط الذاتي.

4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي.

1.4.5 طريقة اختبار إحصاء D-W.

2.4.5 طريقة THEIL-NAGAR.

3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT.

4.4.5 طريقة DURBIN.

5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي.

6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي.

7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

1.7.5 طريقة التحويل.

2.7.5 طريقة التكرار.

3.7.5 طريقة الفرق العام.

4.7.5 طريقة الفرق الأول.

8.5 الأسئلة والتمارين.

$$\sum x_1 y = 215 \quad \sum x_2 y = 9 \quad \sum x_1 = 815$$

$$\sum x_2 = 26 \quad \sum y = 66 \quad R^2 = 0.83$$

$$S_{b_1}^2 = 0.00024 \quad S_{b_2}^2 = 0.093 \quad t_{5\%} = 2.36$$

$$F_{5\%} = 6.54$$

أ- أختبر معنوية العلاقة بين X_1 و X_2 و Y .

ب- أختبر معنوية المعلمات المقدرة.

ج- قدر فترة ثقة 95% للمعلمة b_1 .

د- قدر مدة الرقود لمريض راجع المستشفى (5) مرات سابقة وله من العمر (42) عاماً.

الفصل الخامس: مشكلة الارتباط الذاتي

The Autocorrelation Problem

1.5 المقدمة.

2.5 مسببات الارتباط الذاتي.

3.5 تحليل الارتباط الذاتي.

4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي.

1.4.5 طريقة اختبار إحصاءه D-W.

2.4.5 طريقة THEIL-NAGAR.

3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT.

4.4.5 طريقة DURBIN.

5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي.

6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي.

7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.

1.7.5 طريقة التحويل.

2.7.5 طريقة التكرار.

3.7.5 طريقة الفرق العام.

4.7.5 طريقة الفرق الأول.

8.5 الأسئلة والتمارين.

$$\begin{array}{lll} \sum x_1 y = 215 & \sum x_2 y = 9 & \sum x_1 = 815 \\ \sum x_2 = 26 & \sum y = 66 & R^2 = 0.83 \\ S_{b_1}^2 = 0.00024 & S_{b_2}^2 = 0.093 & t_{5\%} = 2.36 \end{array}$$

$$F_{5\%} = 6.54$$

أ- أختبر معنوية العلاقة بين X_1 و X_2 و Y .

ب- أختبر معنوية المعلمات المقدرة.

ج- قدر فترة ثقة 95% للمعلمة b_1 .

د- قدر مدة الرقود لمريض راجع المستشفى (5) مرات سابقة وله من العمر (42) عاماً.

$$\text{Cov}(U_t, U_{t-s}) \neq 0$$

2.5 مسببات الارتباط الذاتي:

يظهر الارتباط الذاتي للأسباب التي يمكن ان نوردتها بما يلي:

- 1- الآثار الممتدة لبيانات السلاسل الزمنية: ان بعض العوامل العشوائية الطارئة وغير المتكررة قد ينتج عنها ترابط في قيم العنصر العشوائي، U_t ، لأكثر من فترة زمنية واحدة. فالحروب والفيضانات والزلازل تمتد بآثارها وانعكاساتها على فعالية الاقتصاد لعدة سنوات متتالية، مما يتسبب في حصول ارتباط ذاتي بين قيم U_t المتلاحقة، حيث ان القيم الحالية تتأثر بالقيم الأخرى للفترات السابقة.
- 2- حذف بعض المتغيرات المستقلة من العلاقة المدروسة لسبب أو لآخر: مثل عدم توفر البيانات المناسبة عنها أو لغرض تبسيط هيكل النموذج، وقد يكون من بين هذه المتغيرات المحذوفة متغير أو أكثر مترابطة ذاتياً، الأمر الذي يؤدي الى جعل العنصر العشوائي يتضمن تلك المتغيرات المرتبطة، ومن ثم فان U_t لا يعكس الخطأ العشوائي في النموذج فحسب، إنما يعكس أيضاً المتغيرات المحذوفة.
- 3- معالجة البيانات: تجرى على البيانات المنشورة أحياناً عمليات تشذيب وقد يتم تقدير قيم بعض المشاهدات اعتماداً على قيم مشاهدات أخرى، ذلك ان عمليات التشذيب والتقدير تعتمد في العادة على أخذ معدلات قيم المشاهدات المتتالية، مما يخلق علاقة ما بين أخطاء تلك المشاهدات وبالتالي التأثير على طبيعة توزيعها.
- 4- الصياغة غير الدقيقة للنموذج: بمعنى ان شكل العلاقة الدالية المستخدمة لا يتطابق مع الشكل الحقيقي، فإذا افترضنا علاقة خطية بين المتغيرين X و Y ،

الفصل الخامس: مشكلة الارتباط الذاتي

The Autocorrelation Problem

1.5 المقدمة:

من جملة الافتراضات (Assumption) الأساسية التي يقوم عليها النموذج الخطي، افتراض انعدام الارتباط بين قيم المتغير العشوائي U في السنة (t) وقيمه في السنوات السابقة $U_{t-1}, U_{t-2}, \dots$ الخ. أو اللاحقة $U_{t+1}, U_{t+2}, \dots$ الخ. أي ان قيم U تكون مستقلة عن بعضها البعض. ويعبر عن ذلك بمساواة التباين المشترك للأخطاء المتتالية بالصفر وكالآتي:

$$\text{Cov}(U_t, U_{t-s}) = 0, \quad (t = 1, 2, \dots, n)$$

وبمعنى في الوقت نفسه أيضاً عدم تأثير الظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t) على تلك التي ستتحقق في السنة $(t+1)$ ، غير ان الواقع الاقتصادي يشير الى عكس ذلك، إذ يوجد تأثير للظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t) على تلك التي ستتحقق في السنة $(t+1)$ ، $(t+2)$ ، الخ. كما تتأثر بالظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة $(t-1)$ ، $(t-2)$ ، الخ. فالنماذج التي تستخدم إحصائيات السلاسل الزمنية Time series (والتي غالباً ما تعاني من ظاهرة الارتباط الذاتي) يكون حد الخطأ في فترة زمنية معينة (t) على علاقة مع حدود الخطأ في فترات زمنية أخرى، مثال ذلك العلاقة بين الدخل القومي ومجمّل الإنفاق الاستهلاكي، فزيادة الإنفاق الاستهلاكي في سنة معينة قد يكون مترتباً على الدخل المتولد في السنة السابقة (أو السنتين السابقتين)، وفي حالة اعتماد الأخطاء العشوائية على بعضها البعض ينتفي الافتراض الخاص

ففي حين ان العلاقة الحقيقية غير خطية فانه يمكن ان ينتج عن ذلك ترابط ذاتي في عنصر الخطأ.

3.5 تحليل الارتباط الذاتي:

لتوضيح المشكلة يمكننا أخذ النموذج الخطي البسيط الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t \quad \dots(1.5)$$

حيث:

$$E(U_t) = 0$$

$$\text{var}(U_t) = E(U_t^2) = \sigma^2 U$$

ولكنه لا يستوفي فرض انعدام الترابط بل يتبع نمط ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى، أي انه:

$$U_t = f(U_{t-1}) + e_t$$

$$U_t = \rho(U_{t-1}) + e_t \quad \dots(2.5)$$

حيث:

ρ أو (rho): معامل الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية وتتحصر قيمته بين $(-1, 1)$ ، أي أن $-1 \leq \rho \leq 1$.

e_t : متغير عشوائي يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط مقداره صفر، $E(e_t) = 0$ ، وتباين ثابت مقداره $\sigma^2 e$ ، حيث $\text{var}(e_t) = E(e_t^2) = \sigma^2 e$ ، وانه مستقل عن e_{t-1} ، أي $\text{Cov}(e_t, e_{t-1}) = E(e_t e_{t-1}) = 0$ ، بعبارة أخرى $e_t \sim N(0, \sigma^2 e)$.

المعادلة (2.5) تتكون من حددين، الأول هو الحد المتأخر، أي الحد الذي سبقه في الفترة السابقة، والثاني ينطوي على مجموعة التأثيرات المختلفة العاملة الى جانب المتغيرات المستقلة غير المرتبطة بالفترات الماضية.

من المعادلة (2.5) يمكن الحصول على:

$$U_{t-1} = \rho U_{t-2} + e_{t-1}$$

بتعويض عن كل U_{t-1} بما يساويها في معادلة (2.5) نحصل:

$$U_t = \rho(\rho U_{t-2} + e_{t-1}) + e_t$$

$$U_t = \rho^2 U_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t \quad \dots(3.5)$$

وفي حالة U_{t-2} :

$$U_{t-2} = \rho U_{t-3} + e_{t-2}$$

بتعويض عن U_{t-2} بما يساويها في معادلة (3.5) نحصل:

$$U_t = \rho^2(\rho U_{t-3} + e_{t-2}) + \rho e_{t-1} + e_t$$

$$U_t = \rho^3 U_{t-3} + \rho^2 e_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_t \quad \dots(4.5)$$

وبالتعويض المتتالي للأخطاء لعدد من الفترات r (حيث r كبيرة)، نحصل على:

$$U_t = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \dots + \rho^r e_{t-r} \quad \dots(5.5)$$

$$U_t = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \dots + \rho^r e_{t-r} \quad \dots(8.5)$$

$$U_{t-1} = e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + \rho^3 e_{t-4} + \dots + \rho^r e_{t-r} \quad \dots(9.5)$$

وبتعويض المعادلتين 8.5 و 9.5 في الطرف الأيمن من المعادلة 7.5، نحصل:

$$E(U_t - U_{t-1}) = E \left[\begin{array}{l} (e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \dots + \rho^r e_{t-r}) \\ (e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + \dots + \rho^r e_{t-r}) \end{array} \right]$$

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$E(U_t - U_{t-1}) = E \left[\begin{array}{l} e_t + \rho(e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \dots + \rho^r e_{t-r}) \\ (e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + \dots + \rho^r e_{t-r}) \end{array} \right]$$

$$\therefore E(e_t) = 0, \quad E(e_t^2) = \sigma^2 e$$

$$\therefore E(U_t - U_{t-1}) = \rho E(e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \dots + \rho^r e_{t-r})^2$$

$$E(U_t - U_{t-1}) = \rho [E(e_{t-1}^2) + \rho^2 E(e_{t-2}^2) + \dots + \rho^r E(e_{t-r}^2)]$$

$$E(U_t - U_{t-1}) = \rho (\sigma^2 e + \rho^2 \sigma^2 e + \dots + \rho^r \sigma^2 e)$$

وهذا يعني ان أس ρ يزداد إلى ما لانهاية وان مقدار e تتناقص بنفس الأس أي بتعبير آخر:

$$U_t = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r e_{t-r}$$

وبأخذ التباين للصيغة (5.5):

$$\text{var}(U_t) = E(U_t^2)$$

وبتربيع الطرفين وإدخال التوقع للمعادلة 5.5، نحصل:

$$E(U_t^2) = E(e_t^2) + \rho^2 E(e_{t-1}^2) + \rho^4 E(e_{t-2}^2) + \rho^6 E(e_{t-3}^2) + \dots + \rho^r E(e_{t-r}^2)$$

$$\therefore E(e_t^2) = \sigma^2 e, \quad E(U_t^2) = \sigma^2 U$$

$$\therefore \sigma^2 U = \sigma^2 e + \rho^2 \sigma^2 e + \rho^4 \sigma^2 e + \dots + \rho^r \sigma^2 e$$

وبالتربيع نحصل:

$$\sigma^2 U = \sigma^2 e (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots + \rho^r)$$

$$\sigma^2 U = \frac{\sigma^2 e}{1 - \rho^2} \quad \dots(6.5)$$

أما التباين المشترك بين الأخطاء العشوائية فيمكن الوصول إليها كالآتي:

$$\text{Cov}(U_t - U_{t-1}) = E(U_t - U_{t-1}) \quad \dots(7.5)$$

لذلك وباعتماد المعادلة (5.5)، يمكن كتابة ما يلي:

4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي،

:Estimate of Autocorrelation Coefficient

هناك عدة طرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ) نذكر منها ما يلي:

1.4.5 طريقة اختبار إحصائية D-W:

ويتم تقدير معامل الارتباط الذاتي من خلال طريقة اختيار المعامل (ρ) كما يلي:

باستحضار معادلة تقدير D-W :

$$D^* = 2(1 - \hat{\rho})$$

نستطيع تقدير معامل الارتباط الذاتي (ρ) في الصيغة الآتية بعد إعادة ترتيب المعادلة أعلاه، نحصل على:

$$\hat{\rho} = \frac{(2 - D^*)}{2}$$

$$\hat{\rho} = \left[\frac{2}{2} - \left(\frac{1}{2} \right) D^* \right]$$

or

$$\hat{\rho} = [1 - (0.5D^*)]$$

$$E(U_t - U_{t-1}) = \rho \sigma^2 e(1 + \rho^2 + \dots + \rho^r)$$

$$E(U_t - U_{t-1}) = \frac{\rho \sigma^2 e}{1 - \rho^2} \quad \dots(10.5)$$

وبإجراء مقارنة بين التباين صيغة (6.5) والتباين المشترك صيغة (10.5)، نرى:

$$\sigma^2 U = \frac{\sigma^2 e}{1 - \rho^2}, \quad E(U_t - U_{t-1}) = \frac{\rho \sigma^2 e}{1 - \rho^2}$$

وبذلك نجد ان المقام متشابه فيهما ومن ثم فان:

$$E(U_t - U_{t-1}) = \rho \sigma^2 U \quad \dots(11.5)$$

وفي حالة S من الارتباط المتسلسل، Serial Correlation، للأخطاء فان الصيغة (11.5) تكون:

$$E(U_t - U_{t-1}) = \rho^S \sigma^2 U \neq 0 \quad (S = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

ويترتب على هذا ان الفرض الخاص بانعدام الارتباط الذاتي بين أخطاء المشاهدات المختلفة في العينة موضوع البحث قد تم تجاوزه، فالتباين المشترك لا يساوي الصفر بل يساوي قيمة هي $\rho^S \sigma^2 U$ ، نسبة لأن:

$$\rho^S \geq 0, \quad \sigma^2 U > 0$$

2.4.5 طريقة THEIL-NAGAR :

يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي (ρ) من خلال الصيغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2 \left[1 - \frac{D^*}{2} \right] + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

حيث أن:

k : تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

$K+1$: تمثل عدد معاملات الانحدار المقدرة.

3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT :

يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي من خلال تقدير قيم المتغير العشوائي وفق

الصيغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{U}_i \hat{U}_{i-1}}{\sum (\hat{U}_i)^2}$$

أو باستخدام طريقة انحدار قيمة المتغير العشوائي $\hat{U}_i$ على $\hat{U}_{i-1}$ وكما يلي:

$$U_i = \hat{\rho} \hat{U}_{i-1}$$

4.4.5 طريقة DURBIN :

وهي طريقة ذات مرحلتين في معالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ) والتي يتم فيها إعادة تقدير انحدار المتغير التابع على قيمته المرتدة زمنياً لفترة زمنية سابقة واحدة، على قيم المتغيرات التوضيحية (المفسرة) للنموذج، وقيم المتغيرات التوضيحية للتخلف الزمني لفترة زمنية واحدة سابقة لها.

تعد هذه الطريقة نموذجاً للمربعات الصغرى الشاملة (GLS)، وعلى وفق هذه الطريقة يتم التقدير على مرحلتين تنصب المرحلة الأولى على تقدير معامل الارتباط الذاتي ($\hat{\rho}$) وكالاتي:

$$(Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) = B_0(1 - \hat{\rho}) + B_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + U_t$$

$$Y_t = B_0(1 - \hat{\rho}) + \hat{\rho} Y_{t-1} + B_1 X_t - B_1 \hat{\rho} X_{t-1} + U_t$$

$$Y_t^* = B_0 + \hat{\rho} Y_{t-1} + B_1 X_t - \gamma X_{t-1} + U_t$$

حيث أن:

$$B_0^* = B_0(1 - \hat{\rho}) , \gamma = B_1 \hat{\rho}$$

يتبين من المعادلة أعلاه، بأنه نموذج يضم ثلاث متغيرات مستقلة هي: X_t ، Y_{t-1} ، والميل للمتغير Y_{t-1} يعطينا تقدير لمعامل الارتباط الذاتي ($\hat{\rho}$)، وأنه قابل للتقدير بطريقة (OLS).

أما المرحلة الثانية فهي تقدير النموذج الآتي:

$$H_0 : \rho = 0$$

2- الفرضية البديلة: ويعني وجود ارتباط ذاتي موجب:

$$H_1 : \rho \neq 0$$

ويفترض في هذا الاختبار ان الارتباط الذاتي لقيم U يتخذ نمط الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى:

$$U_t = \rho U_{t-1} + e_t$$

ويتم احتساب الأخطاء العشوائية للنموذج أعلاه كالآتي:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

وبالتالي تحسب قيمة D.W بموجب الصيغة الآتية:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

ان قيمة D.W الاختبارية مجدولة بقيمتين، تشير أحدهما إلى الحد الأدنى، Lower Limit، ويرمز لها بالرمز (dL) والأخرى إلى الحد الأعلى، Upper Limit، ويرمز لها بالرمز (dU) حسب درجات الحرية n و k' ولمستوى معنوية معين، حيث:

n: تمثل عدد المشاهدات في العينة موضوع الدراسة.

k': تمثل العدد الكلي للمتغيرات المستقلة.

ويتم الاختبار على أساس مقارنة قيمة (D.W) المحتسبة بقيم dL و dU

المجدولة لاتخاذ القرار الإحصائي المطلوب وعلى الشكل الآتي:

$$(Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) = \hat{B}_0 + B_1(X_t - \hat{\rho} Y_{t-1}) + U_t$$

حيث ان:

$$\hat{B}_0 = B_0(1 - \hat{\rho})$$

5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي:

تبقى مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS) تتسم بالخطية وعدم التحيز، إلا إنها تفقد خاصية أفضل أو اصغر تباين (التباين بوجود الارتباط الذاتي يفوق التباين في حالة عدم الارتباط الذاتي)، كما ويؤثر الارتباط الذاتي على نتائج تحليل الانحدار الذاتي للاختبارات F، t، نتائج أقل دقة من تلك في حالة عدم وجوده، حيث تستند تلك الاختبارات على التباين والخطأ المعياري وعدم دقة التنبؤات المستحصلة بـ OLS، مما يستلزم استخدام طرق أخرى للتقدير كطريقة المربعات الصغرى الشاملة Generalized least Squares Method (GLS) لأنها تعطي أفضل تقدير خطي غير منحيز في حالة وجود الارتباط الذاتي شريطة ان تكون قيمة (ρ) معلومة.

6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي:

هناك عدد من الاختبارات الخاصة بالارتباط الذاتي، إلا ان أكثرها شيوعاً ودقة هو اختبار دارين-واتسون، Durbin-Watson Test، الذي يرمز له بالرمز (D-W) أو (d) وذلك لسهولة استخدامه وإمكانية اعتماده في حالة العينات الصغيرة، ويعتمد هذا الاختبار على بواقي الانحدار المقدر.

ويفترض الاختبار وجود فرضيتين أساسيتين هما:

1- فرضية العدم: التي تنص على انعدام الارتباط الذاتي:

1- عندما $0 < D.W < dL$ نرفض H_0 ونقبل H_1 أي ان هناك مشكلة ارتباط ذاتي موجب.

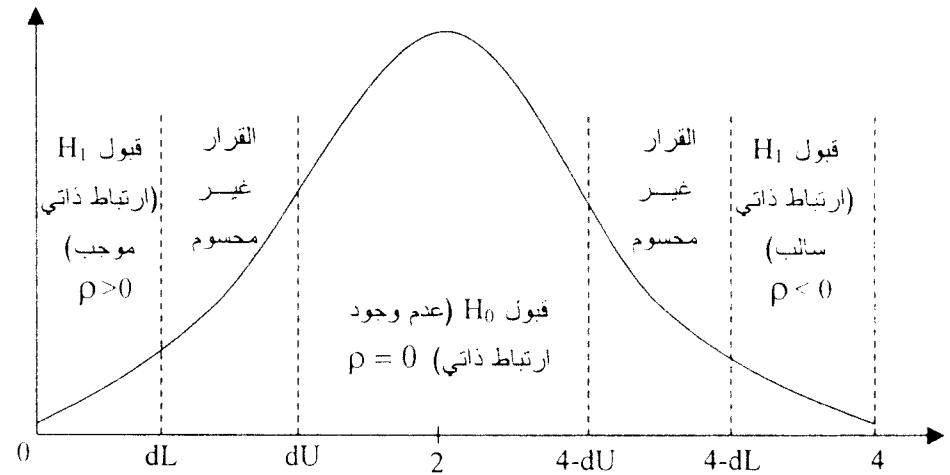
2- عندما $dL < D.W < dU$ أو $4-dU < D.W < 4-dL$ يكون الاختيار غير محسوم وتترك الحرية للباحث بقبول أو رفض فرضية العدم، إذ قد يكون السبب في وجود المشكلة خطأ في صيغة النموذج وليس بسبب ارتباط الأخطاء.

3- عندما $dU < D.W < 4-dU$ نقبل H_0 أي انعدام وجود مشكلة الارتباط الذاتي.

4- عندما $4-dL < D.W < 4$ نرفض H_0 ونقبل H_1 بمعنى ان هناك مشكلة ارتباط ذاتي سالب.

ويمكن توضيح الاحتمالات الواردة أعلاه في الشكل الآتي:

شكل رقم 1.5: التوزيع الاحتمالي لـ $D.W$ (اختبار $D.W$)



ويمكن تلخيص مدى اختبار $D.W$ في الجدول الآتي:

النتيجة	قيمة $D.W$	رقم
رفض فرضية العدم، أي وجود ارتباط ذاتي سالب، أي ان $p < 0$.	$4 - dL < D^* < 4$	1
نتيجة غير مؤكدة (أو محددة).	$4 - dU < D^* < 4 - dL$	2
قبول فرضية العدم، أي عدم وجود ارتباط ذاتي، أي ان $p = 0$.	$2 < D^* < 4 - dU$	3
قبول فرضية العدم، أي عدم وجود ارتباط ذاتي، أي ان $p = 0$.	$dU < D^* < 2$	4
نتيجة غير مؤكدة.	$dL < D^* < dU$	5
رفض فرضية العدم، أي وجود ارتباط ذاتي موجب، أي ان $p > 0$.	$0 < D^* < dL$	6

بعد أن عرفنا طبيعة هذا الافتراض وأسباب مخالفتها والآثار التي تترتب على المخالفا واختبار وجودها ننتقل الآن إلى تبيان طرق التغلب على هذه المشكلة.

7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي:

Remedy of First-Order Autocorrelation Problem

تتوقف الطريقة التي تعالج فيها مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى على

سبب حدوث المشكلة.

1- عندما يكون السبب هو إهمال متغير أو متغيرات مسبقه من النموذج يتعين إضافة

ذلك المتغير أو المتغيرات إلى النموذج.

$$U_i = \rho U_{i-1} + e_i, \quad |\rho| \leq 1$$

وان المتغير العشوائي، e_i ، يتبع افتراضات OLS للقيمة المتوقعة صفر وثبات التباين وبدون ارتباط ذاتي، أي ان:

$$E(e_i) = 0, \quad E(e_i e_j) = 0, \quad E(e_i)^2 = \sigma^2$$

أي ان:

$$e_i \sim N(0, \sigma^2)$$

ولغرض التخلص من الارتباط الذاتي، يمكن تحويل البيانات في المعادلة أعلاه، وذلك باستخدام التخلف الزمني للمتغير التابع والمتغير المستقل مع المتغير العشوائي ويكتب النموذج كما يلي:

$$Y_{i-1} = B_0 + B_1 X_{i-1} + U_{i-1} \quad \dots (12.5)$$

وبضرب المعادلة (12.5) بمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ) نحصل على:

$$\rho Y_{i-1} = \rho B_0 + \rho B_1 X_{i-1} + \rho U_{i-1} \quad \dots (13.5)$$

وبالطرح المعادلة (13.5) من المعادلة (12.5) نحصل على:

$$Y_i - \rho Y_{i-1} = B_0(1 - \rho) + B_1(X_i - \rho X_{i-1}) + (U_i - \rho U_{i-1})$$

2- عندما يكون سبب المشكلة هو الصياغة غير الدقيقة فإن المعالجة تتوقف على إعادة صياغة النموذج المراد دراسته من واقع العلاقة.

3- أما إذا كان سبب المشكلة هو وجود علاقة فعلية بين قيم حد الخطأ أو المتغير العشوائي فيصبح معالجتها بتحويل المتغيرات المستقلة بالشكل الذي يضمن التخلص من الارتباط الذاتي.

فإذا كان الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى يتعين تحويل المتغيرات المستقلة في النموذج المراد دراسته بإحدى الطرق الآتية:

طريقة التحويل.

- طريقة التكرار.

- طريقة الفرق العام.

- طريقة الفرق الأول.

وسنحاول بيان الكيفية التي تتم بها معالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى باستخدام الطرق أعلاه. وبافتراض ان نموذج الانحدار المراد تقديره هو:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

1.7.5 طريقة التحويل، Transformation Method:

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق استخداماً في معالجة مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، وتسمى بطريقة كوكران-اوكرات، ويمكن توضيحها باتباع الخطوات الآتية:

أ- بافتراض ان المتغير العشوائي، U_i ، في المعادلة أعلاه، يخضع للارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، أي ان:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

3- بعد حساب قيمة $(\hat{\rho})$ يتم تحويل بيانات كل من المتغير التابع Y_t والمستقل X_t

إلى القيمتين الجديدتين $\dot{Y}_t$ و $\dot{X}_t$ وكالآتي:

$$\dot{Y}_t = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$

$$\dot{X}_t = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

ويتم تقدير معالم النموذج من جديد في ضوء البيانات المحولة للمتغيرين المذكورين

باعتقاد OLS أي إجراء انحدار المتغير التابع المحول $\dot{Y}_t$ على المتغير المستقل

المحول $\dot{X}_t$ فنحصل على:

$$\dot{Y}_t = \dot{B}_0 + \dot{B}_1 \dot{X}_t$$

ومن ثم نحسب البواقي الجديدة e_t ، وكالآتي:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

وبالتالي نحسب قيمة D.W مرة أخرى بموجب الصيغة الآتية:

$$D.W = \frac{\sum (\dot{e}_t - \dot{e}_{t-1})^2}{\sum \dot{e}_t^2}$$

ومن هذه المعادلة يلاحظ ان الحد الأخير يمثل:

$$U_t - \rho U_{t-1} = e_t$$

أي ان:

$$U_t = \rho U_{t-1} + e_t$$

ويلاحظ من هذه الطريقة بأنها غير عملية، بسبب ان قيمة ρ مجهولة، لذا فقد اقترح داربن الطريقة الثانية، الطريقة التكرارية Iterative Method.

2.7.5 طريقة التكرار ، Iterative Method:

على وفق هذه الطريقة:

1- نبدأ باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتقدير معالم

النموذج ولغرض الإيضاح نفترض نموذجاً يتضمن متغير مستقل واحد

وكالآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t$$

حيث نحصل على $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ باتباع OLS وكالآتي:

$$\hat{Y}_t = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_t$$

ثم يتم حساب بواقي المربعات الصغرى (e_t) من خلال المعادلتين أعلاه، حيث:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

2- نحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي التقديري $(\hat{\rho})$ ووفق القانون الآتي:

وتقارن مع القيمة الجدولية لقبول أو رفض فرضية العدم، ففي حالة قبول H_0 يعني انعدام الارتباط الذاتي والتوقف عند هذا الحد. أما في حالة قبول H_1 عندها تجرى عملية تنقية للبيانات مرة ثانية باتباع الخطوات السابقة نفسها أي تكرار ما قمنا به وبالأسلوب ذاته لرؤية مدى تناقص الارتباط الذاتي، ويمكن الاستمرار في عملية التصحيح والتقدير السى أن تتقارب القيم التقديرية لكل من $\hat{B}_0$ و $\hat{B}_1$ للنموذج المدروس بين مرحلة وأخرى.

3.7.5 طريقة الفرق العام، The Generalized Difference Method:

وتسمى طريقة المربعات الصغرى الشاملة، GLS، تميزاً عن طريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، ولمعالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى نتبع الخطوات الآتية:

- 1- تقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، ρ ، باستخدام أيّاً من الطرق المستخدمة في تقدير ρ التي تم ذكرها سابقاً.
- 2- يتم حساب قيمة البواقي (أو الفروق) الأولى للمتغيرات التابعة والمستقلة Y_i و X_i على التوالي وذلك طبقاً لطريقة الفرق العام باستخدام الصيغة الآتية:

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = B_0(1 - \rho) + B_1(X_i - \rho X_{i-1}) + U_i \quad \dots(14.5)$$

وبتحويل البيانات من خلال استخدام الصيغة الآتية:

$$\dot{Y}_i = Y_i - \rho Y_{i-1}$$

$$\dot{X}_i = X_i - \rho X_{i-1}$$

حيث ان:

$$\dot{Y}_i : \text{قيمة } Y_i \text{ المحولة.}$$

$$\dot{X}_i : \text{قيمة } X_i \text{ المحولة.}$$

ولغرض تجنب إهمال المشاهدة الأولى في عملية إيجاد الفروق، سوف يتم تقدير المشاهدة الأولى المحولة لكل من المتغير التابع، Y_i ، والمتغير المستقل، X_i ، كما يلي:

$$\dot{Y}_i = Y_i(1 - \rho^2)^{1/2}$$

$$\dot{X}_i = X_i(1 - \rho^2)^{1/2}$$

3- باستخدام طريقة OLS في تقدير معاملات النموذج الجديد بعد التحويل كما في الصيغة الآتية:

$$\dot{Y}_i = B_0 + B_1 \dot{X}_i + U_i$$

ومن ثم يتم اختبار وجود الارتباط الذاتي من خلال تقدير النموذج اعلاه، وذلك باستخدام اختبار D-W المشار إليه سابقاً. فإذا كانت النتيجة تشير الى وجود الارتباط الذاتي، فانه يجب تكرار استبدال القيم لكل من $\dot{Y}_i$ و $\dot{X}_i$ بقيم الفروق الأولى لهذين المتغيرين بنفس الطريقة المشار إليها سابقاً ومن ثم إجراء الانحدار على البيانات المحولة واعادة الاختبار الى أن نتأكد بإزالة الارتباط الذاتي من النموذج.

4.7.5 طريقة الفرق الأول، The First Difference Method:

لقد بينا سابقاً أن قيمة ρ تنحصر بين الصفر والواحد صحيح، $0 < \rho < 1$ ،

لذا يمكن البدء من أقصى الطرفين في التقدير.

$$\Delta Y_i = B_0 + B_1 \Delta X_i + B_2 + e_i \quad \dots (16.5)$$

حيث ان:

$$\Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}$$

$$\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$$

وان المعادلة (16.5) تبين ان هناك الحد الثابت في صيغة الفرق الاول، وذلك بمقارنتها في المعادلة (15.5) لكن بالطبع، B_2 يمثل معامل اتجاه المتغير في النموذج الأصلي، لذلك فانه:

"إذا يوجد الحد الثابت في صيغة الفرق الأول، يدل على أنه كان يوجد حد اتجاه خطي في النموذج الأصلي، وان الحد الثابت هو في الحقيقة معامل اتجاه المتغير".

وإذا كانت قيمة B_2 ، على سبيل المثال، موجبه في المعادلة (16.5)، فإن هذا يعني وجود اتجاه متصاعد في Y بعد السماح لأثر كل المتغيرات الاخرى، وبدلاً من افتراض ان $\rho = 1$ ، نفترض ان $\rho = -1$ هذا يعني أن هناك ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى سالب والذي لا يمثل سلسلة زمنية نمطية، Typical، في الاقتصاد.

والآن فان معادلة الفرق العام (14.5) تأخذ الكيفية الآتية:

$$Y_i + Y_{i-1} = 2B_0 + B_1(X_i - X_{i-1}) + e_i$$

وبقسمة الطرفين على 2، نحصل على:

$$\frac{Y_i + Y_{i-1}}{2} = B_0 + B_1 \frac{X_i - X_{i-1}}{2} + \frac{e_i}{2}$$

عند الطرف الأول نستطيع الافتراض بان $\rho = 0$ ، وهذا يعني لا وجود للارتباط الذاتي. وعند الطرف الثاني نفترض ان $\rho = 1$ ، وهذا يعني ان هناك ارتباط ذاتي موجب أو سالب. وكما هو معروف انه عند إجراء الانحدار، فإن واحدة من الافتراضات العامة، هي عدم وجود ارتباط ذاتي وبالتالي نترك اختبار DW، أو أي اختبارات أخرى.

فإذا كان $\rho = 1$ فان معادلة الفرق العام تحقق معادلة الفرق الأول كما هو في المعادلة (15.5)، ويتم حساب الرقم الفردي الأولي للمتغيرات Y_i و X_i على وفق معادلة الفرق الأول الآتية:

$$Y_i - Y_{i-1} = B(X_i - X_{i-1}) + (U_i - \rho U_{i-1})$$

$$Y_i - Y_{i-1} = B(X_i - X_{i-1}) + e_i$$

$$\Delta Y_i = B \Delta X_i + e_i \quad \dots (15.5)$$

حيث أن Δ تمثل بدالة الفرق الأول، ولنجاح الفروق للقيمتين، بإجراء انحدار المعادلة (15.5) لابد من عمل الفروق الأولى لكل من المتغير التابع والمتغيرات المستقلة واستخدامهم كمدخلات في تحليل الانحدار.

ويجب الملاحظة هنا ان الصورة المهمة لنموذج الفرق الأول لا يوجد فيها الحد الثابت، ولغرض إجراء انحدار المعادلة (15.5) فانه سوف يستخدم الانحدار من خلال النموذج الأصلي لكن بافتراض ان النموذج الأصلي هو:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + B_2 t + U_i$$

وحيث أن t تمثل اتجاه المتغير، وان U_i تحقق الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، لذا يمكن التحقق من ان تحويل الفرق الأول في المعادلة (15.5) تصبح كما يلي:

و حالما تم تقدير $\hat{\rho}$ من المعادلة (17.5) بالإمكان تحويل البيانات باستخدام

المعادلة الآتية:
... (18.5)

حيث ان:

$$Y_i^* = (Y_i - \rho Y_{i-1})$$

$$B_0^* = B_0(1 - \rho)$$

$$X_i^* = (X_i - \rho X_{i-1})$$

ومن ثم تُستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية OLS، لتقدير معاملات النموذج الجديد المتكون من الفرق الأولى Y_i و X_i في الصيغة أعلاه.

وبذلك يتم اختبار وجود الارتباط الذاتي في المعادلة (18.5) بعد تقديرها باستخدام اختبار D-W. فإذا أظهر الاختبار وجود الارتباط الذاتي فإنه يجب استبدال القيم الجديدة بالفرق الأول لهذه المتغيرات الجديدة Y_i^* و X_i^* بالطريقة نفسها الموضحة في المعادلة (15.5) ثم أجراء الانحدار على البيانات المحولة وإعادة الاختبار الى ان يتم التأكد من عدم وجود الارتباط الذاتي.

ويتضح مما سبق ان طريقة الفرق الأول هي عبارة عن إعادة أجراء الانحدار على شكل فروق وحذف الحد المطلق (الثابت) ويتم استخدام هذه الطريقة عندما $\hat{\rho} = +1$. وتمثل هذه الطريقة حالة خاصة من طريقة الفرق العام.

العلاقة بين $\hat{\rho}$ و D-W:

تربط بين إحصاء W-D الاختبارية و $\hat{\rho}$ ، مقدرة معلمة الارتباط الذاتي

البسيط بين الأخطاء العشوائية، العلاقة الآتية:

$$D.W \cong 2(1 - \hat{\rho})$$

ويمكن الوصول الى العلاقة أعلاه كالآتي:

فالنموذج أعلاه يُعرف على انه معدل نموذج الانحدار ذات الفترتين وذلك بسبب انحدار قيمة ما يحرك متوسط أحدهما إلى الآخر. وان تحويل الفرق الأول الذي قدم سابقاً أصبح معروفاً إلى حد ما في الاقتصاد القياسي "تطبيقي لأنه من السهل تمثيله، Perform، لكن يمكن ملاحظة ان مثل هذا التحويل يتوقف على افتراض ان $\hat{\rho} = +1$ ، أنه يكون مرتبط إيجابياً وبشكل تام. إذا لم تكن هذه الحالة، فإن معالجته سوف تكون أسوأ من المشكلة الأصلية. لكن كيف نستطيع ان نجد ما إذا كان الافتراض $\rho = +1$ يكون قابل للتشخيص في الوضع المعطى؟ والإجابة هي:

ρ : تتوقف على اختبار إحصائية D لدرابن واطسون، D-W. وباستحضار المعادلة الآتية:

$$D^* = 2(1 - \rho^2)$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D^*}{2} \quad \dots (17.5)$$

الذي تقترح بطريقة مبسطة وسهلة للحصول على تقدير $\hat{\rho}$ من التقدير لإحصائية D^* . واضح من المعادلة (17.5) بأن قضية الفرق الأول $\hat{\rho} = +1$ تكون سالبة المفعول عندما $D^* = 0$ وبشكل تقريبي.

ويكون واضح أيضاً عندما $D^* = 2$ و $\hat{\rho} = 0$ ، وعندما $D^* = 4$ و $\hat{\rho} = -1$ لذلك، فان إحصائية D^* تزودنا بطريقة عمل جاهزة للحصول على تقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ)، لكن يلاحظ ان العلاقة (17.5) هي فقط مقربة الى واحد.

وربما لا يكون ذلك صحيح للعينات الصغيرة. للعينات الصغيرة ربما يستخدم اختبار آخر هو اختبار THEIL-NAGAR المشار إليه سابقاً لتعديل إحصائية D^* .

$$D.W = 2 \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2} \right)$$

وبما أن e_t عبارة عن القيمة التقديرية للمتغير العشوائي U_t فإن القيمة

$$\left(\frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_t^2} \right)$$

تمثل القيمة التقديرية لمعامل الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية ونرمز له

بالرمز $\hat{\rho}$ ، أي أن:

$$D.W = 2(1 - \hat{\rho})$$

أو بصيغة أخرى:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D.W}{2}$$

وبما أن قيمة $\hat{\rho}$ تتحصر بين (1، -1) لذا فإن قيمة $D.W$ تتراوح بين (0 و 4).

فإذا كانت $\hat{\rho} = 0$ ، فإن:

$$D.W = 2(1 - 0) = 2$$

انعدام الارتباط الذاتي كلياً:

عندما $\hat{\rho} = 1$ ، فإن:

$$D.W = 2(1 - 1) = 0$$

وجود ارتباط ذاتي موجب:

عندما $\hat{\rho} = -1$ ، فإن:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

وبفك القوس في البسط نحصل:

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^n e_t^2 + \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2 - 2 \sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

و عندما تكون حجم العينة كبير جداً ($n \rightarrow \infty$) فأنتنا نحصل على الآتي:

$$\sum_{t=1}^n e_t^2 \cong \sum_{t=2}^n e_t^2 \cong \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2$$

وعليه فإن:

$$D.W = \frac{2 \sum_{t=1}^n e_t^2 - 2 \sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

$$D.W = 2 \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^n e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^n e_t^2} \right)$$

$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
-	-	1621.763702
297.8996953	88744.22846	66372.479
-242.1945152	58658.18319	238.2099827
-42.5076178	1806.897571	732.9779272
43.5106651	1893.177977	270.1782564
-7.7112745	59.46375441	76.14003066
73.0091413	5330.334713	6680.604798
-168.8085319	28496.32044	7581.805739
182.1003047	33160.52097	9030.081239
-415.595734	172719.8141	102764.4802
	$\Sigma(e_t - e_{t-1})^2 =$ 390868.9412	$\Sigma e_t^2 =$ 195368.7208

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

$$D.W = \frac{390868.9412}{195368.7208} = 2.000673087$$

$$D.W = 2 [1 - (-1)] = 2 + 2 = 4$$

وجود ارتباط ذاتي سالب:

مثال 1.5: الجدول الآتي يتضمن البيانات الخاصة بعدد حوادث السرقات (Y_t) وعدد مكاتب الشرطة (X_t) في أحد الدول للمدة (1990-1999)، وباستخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS)، تم تقدير العلاقة الآتية:

$$\hat{Y}_t = 1346.28941 - 12.10030471X_t$$

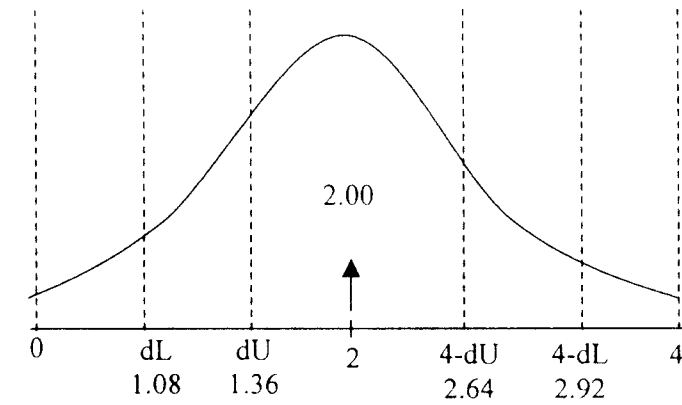
(5.319) (3.105)

$$R^2 = 0.546 \quad , \quad F = 9.641$$

والمطلوب: معرفة ما إذا كان النموذج الخاص بالعلاقة أعلاه يعاني من مشكلة الارتباط الذاتي مستخدماً احصاءة W-D عند مستوى معنوية 5% إذا علمت ان $dL = 1.08$ ، $dU = 1.36$.

السنة	عدد حوادث Y_t السرقات	عدد مكاتب X_t الشرطة	$\hat{Y}_t$	e_t	e_{t-1}
1990	580	60	620.2711274	-40.2711274	-
1991	890	59	632.3714321	257.6285679	-40.2711274
1992	430	77	414.5659473	15.4340527	257.6285679
1993	690	52	717.0735651	-27.0735651	15.4340527
1994	310	87	293.5629	16.4371	-27.0735651
1995	750	50	741.2741745	8.7258255	16.4371
1996	460	80	378.2650332	81.7349668	8.7258255
1997	630	52	717.0735651	-87.0735651	81.7349668
1998	800	53	704.9732604	95.0267396	-87.0735651
1999	215	67	535.5689944	320.5689944	95.0267396
$n = 10$	$\Sigma Y_t = 5755$	$\Sigma X_t = 637$	$\Sigma \hat{Y}_t = 5755$	$\Sigma e_t = 0$	

X_t	Y_t	$\hat{Y}_t$	e_t	e_{t-1}
4	25.6	30.43333334	-4.833333334	
8	32.7	36.38095239	-3.68095239	4.833333334
12	45.4	42.32857143	3.07142857	3.68095239
16	53.9	48.27619048	5.62380952	3.07142857
20	59.0	54.22380953	4.77619047	5.62380952
24	62.6	60.17142858	2.42857142	4.77619047
28	65.0	66.11904763	-1.11904763	2.42857142
32	65.8	72.06666667	-6.26666667	-1.11904763
$\sum X_t = 144$	$\sum Y_t = 410$	$\sum \hat{Y}_t = 410$	$\sum e_t = 0$	



و عليه، فإن النموذج أعلاه لا يعاني من مشكلة الارتباط الذاتي ذلك ان قيمة D.W المحتسبة تقع في منطقة القبول أي قبول فرضية العدم التي تنص بعدم وجود ارتباط ذاتي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

مثال 2.5: في المثال الوارد في الفصل الأول حللنا العلاقة بين عدد سنوات الخدمة (X_t) ومعدل الأجر السنوي (Y_t) لعينة تمثل (8) موظفين في أحد الدوائر. حيث تم تقدير المعادلة الآتية:

$$\hat{Y}_t = 24.48571429 + 1.486904762 X_t$$

وفي الواقع لا يمكن الأخذ بالمعادلة أعلاه بصورة نهائية إلا بعد التأكد من عدم وجود الارتباط الذاتي، ولغرض ذلك نجري الآن اختبار (D.W) على العينة موضوع البحث.

$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
-	-	23.36111118
1.15238095	1.327981854	13.5494105
6.75238096	45.59464863	9.433673461
2.55238095	6.514648514	31.62723352
-0.84761905	0.718458053	22.81199541
-2.34761905	5.511315204	5.897959142
-3.54761905	12.58560092	1.252267598
-5.14761904	26.49798178	39.27111115
	$\sum (e_t - e_{t-1})^2 =$	$\sum e_t^2 =$
	98.75063496	147.204762

ولاستبعاد أثر الارتباط الذاتي نتبع طريقة التكرار:

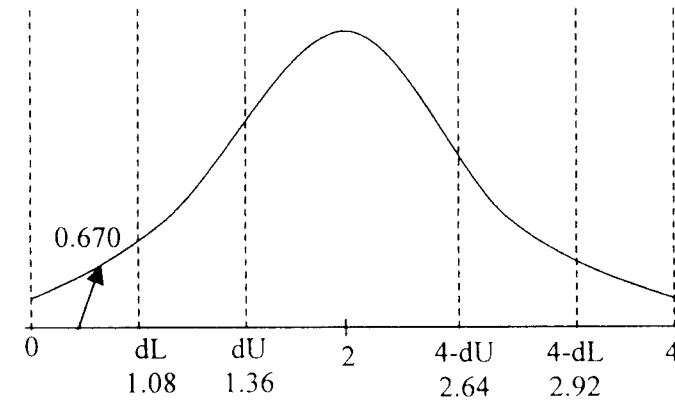
$e_t \cdot e_{t-1}$	e_{t-1}^2	Y_{t-1}	$\hat{\rho} Y_{t-1}$	$\hat{Y}_t$
-	-	-	-	-
17.79126991	23.36111118	25.6	15.77581522	16.92418478
-11.30578234	13.5494105	32.7	20.15113897	25.24886103
17.27312923	9.433673461	45.4	27.9774223	25.9225777
26.86038543	31.62723352	53.9	33.21548595	25.78451405
11.59931967	22.81199541	59.0	36.35832414	26.24167586
-2.717687092	5.897959142	62.6	38.57679815	26.42320185
7.012698485	1.252267598	65.0	40.05578083	25.74421917
$\sum e_t \cdot e_{t-1} =$ 66.51333329	$\sum e_{t-1}^2 =$ 107.9336508			$\sum \hat{Y}_t =$ 172.2892344

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^n e_t \cdot e_{t-1}}{\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2} = \frac{66.51333329}{107.9336508} = 0.616242782$$

$$\hat{Y}_t = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$

$$\hat{X}_t = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

$$D.W = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2} = \frac{98.75063496}{147.204762} = 0.670838589$$



يتضح مما سبق أن النموذج المقدر يعاني من وجود مشكلة الارتباط الذاتي الموجب بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي لأن قيمة D.W المحتسبة أقل من الحد الأدنى، أي أن:

$$0 < D.W < dL$$

$$0 < 0.670 < 1.08$$

$\overset{*}{X}_t^2$	$\overset{*}{\hat{Y}}_t$	$\overset{*}{e}_t$	$\overset{*}{e}_t^2$
-	-	-	-
30.63654461	21.49190313	-4.56771835	20.86405092
49.9857165	22.53218468	2.71667635	7.380330391
74.04751567	23.57246622	2.35011148	5.523023968
102.8219422	24.61274777	1.17176628	1.37306215
136.3089958	25.65302932	0.58864654	0.346504749
174.5086768	26.69331086	-0.27010901	0.072958877
217.420985	27.73359241	-1.98937324	3.957605888
$\overset{*}{\sum X}_t =$ 785.7303766	$\overset{*}{\sum \hat{Y}}_t =$ 172.2892344	$\overset{*}{\sum e}_t = 0$	$\overset{*}{\sum e}_t^2 =$ 39.51753694

$$\begin{aligned}
\overset{*}{\sum x}_t \overset{*}{y}_t &= \overset{*}{\sum X}_t \overset{*}{Y}_t - \frac{(\overset{*}{\sum X}_t)(\overset{*}{\sum y}_t)}{n} \\
&= 1791.744876 - \frac{(70.98080841)(172.2892344)}{7} \\
&= 1791.744876 - 1747.032734 \\
&= 44.712142
\end{aligned}$$

$$\overset{*}{\sum x}_t^2 = \overset{*}{\sum X}_t^2 - \frac{(\overset{*}{\sum X}_t)^2}{n}$$

X_{t-1}	$\hat{\rho}X_{t-1}$	$\overset{*}{X}_t$	$\overset{*}{X}_t \overset{*}{Y}_t$	$\overset{*}{Y}_t^2$
-	-	-	-	-
4	2.464971128	5.535028872	93.67585139	286.4280305
8	4.929942256	7.070057744	178.5109055	637.5049833
12	7.394913384	8.605086616	223.0660264	671.9800346
16	9.859884512	10.14011549	261.4579503	664.8411648
20	12.32485564	11.67514436	306.3753539	688.6255519
24	14.78982677	13.21017323	349.0550737	698.185596
28	17.2547979	14.7452021	379.6037146	662.7648207
		$\overset{*}{\sum X}_t =$ 70.98080841	$\overset{*}{\sum X}_t \overset{*}{Y}_t =$ 1791.744876	$\overset{*}{\sum Y}_t^2 =$ 4310.330182

$$n = 7 \quad , \quad \overset{*}{\sum Y}_t = 172.2892344 \quad , \quad \overset{*}{\sum X}_t = 70.98080841$$

$$\overset{*}{\sum X}_t \overset{*}{Y}_t = 1791.744876 \quad , \quad \overset{*}{\sum Y}_t^2 = 4310.330182$$

$$\overset{*}{\sum X}_t^2 = 785 \quad , \quad \overset{*}{Y}_t = 24.61274777$$

$$\overset{*}{X}_t = 10.14011549$$

$$\begin{aligned}\hat{B}_0 &= \bar{Y}_t - \hat{B}_1 \bar{X}_t \\ &= 24.61274777 - (0.677695101)(10.14011549) \\ &= 24.61274777 - 6.871906591 \\ &= 17.74084118\end{aligned}$$

$$\hat{Y}_t = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X}_t$$

$$\hat{Y}_t = 17.74084118 + 0.677695101 \bar{X}_t$$

$$D.W = \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2}$$

$$D.W = \frac{58.61863258}{39.51753694} = 1.483357444$$

$$\begin{aligned}&= 785.730766 - \frac{(70.98080841)^2}{7} \\ &= 785.730766 - 719.7535946 \\ &= 65.976782\end{aligned}$$

e_{t-1}	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$
-	-	-
-	-	-
-4.56771835	7.2843947	53.06240615
2.71667635	-0.36656487	0.134369803
2.35011148	-1.1783452	1.38849741
1.17176628	-0.58311974	0.340028631
0.58864654	-0.85875555	0.737461094
-0.27010901	-1.71926423	2.955869493
		$\sum (e_t - e_{t-1})^2 =$ 58.61863258

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum \bar{x}_t \bar{y}_t}{\sum \bar{x}_t^2} = \frac{44.712142}{65.976782} = 0.677695101$$

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.5: باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستيرادات التالية:

$$\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t$$

$$S.E (250) (0.01) \quad r^2 = 0.98$$

ومن الانحرافات $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ وجد أن:

$$\sum_{t=2}^{20} (e_t - e_{t-1})^2 = 537192, \quad \sum_{t=1}^{20} e_t^2 = 573069$$

المطلوب: أحسب إحصاءه (D.W) واختبر لوجود مشكلة الارتباط الذاتي استخدم (5%) مستوى دلالة لقيمة عليا ودنيا لإحصاءه (D-W) مساوية إلى

$$du=1.41, \quad dL=1.20$$

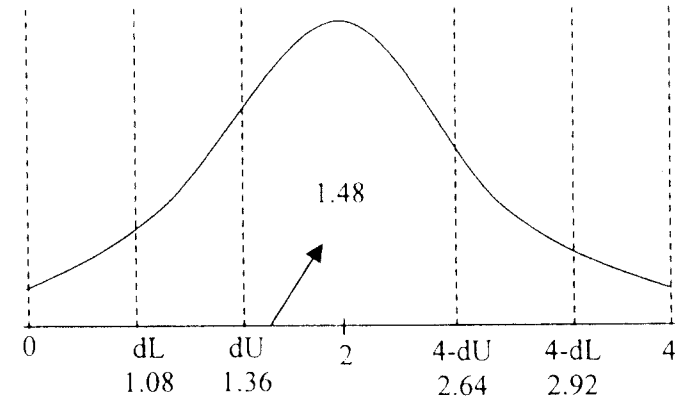
السؤال 2.5: فرضاً باحث قدر العلاقة بين المتغير (Y_t) والمتغير (X_t) وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75X_t$$

مع المعلومات التالية:

$$D - W = 0.8229, \quad \sum_{t=2}^n e_t \cdot e_{t-1} = 110.29, \quad \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2 = 185.6775$$

المطلوب: من قيمة D-W وجد أن هناك ارتباط ذاتي موجب، قدره وضع الخطوات اللازمة لمعالجة هذه المشكلة في الجانب التطبيقي.



وبمقارنة قيمة D.W المحسوبة مع مثلثها الجدولية عند مستوى معنوية 5% يتضح بأن:

$$dU < D.W < 4-dU$$

$$1.36 < 1.48 < 2.64$$

عليه نقبل فرضية العدم والتي تنص على انعدام وجود ارتباط ذاتي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

الأسئلة والتمارين

سؤال 1.5: باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستيرادات التالية:

$$\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t$$

$$S.E \quad (250) \quad (0.01) \quad r^2 = 0.98$$

من الانحرافات $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ وجد أن:

$$\sum_{t=2}^{20} (e_t - e_{t-1})^2 = 537192 \quad , \quad \sum_{t=1}^{20} e_t^2 = 573069$$

مطلوب: أحسب إحصاءه (D.W) واختبر لوجود مشكلة الارتباط الذاتي استخدم (5%) مستوى دلالة لقيمة عليا ودنيا لإحصاءه (D-W) مساوية إلى

$$du=1.41, dL=1.20$$

سؤال 2.5: فرضاً باحث قدر العلاقة بين المتغير (Y_t) والمتغير (X_t) وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75X_t$$

مع المعلومات التالية:

$$D - W = 0.8229 \quad , \quad \sum_{t=2}^n e_t \cdot e_{t-1} = 110.29 \quad , \quad \sum_{t=2}^n e_{t-1}^2 = 185.6775$$

مطلوب: من قيمة D-W وجد أن هناك ارتباط ذاتي موجب، قدره وضع الخطوات اللازمة لمعالجة هذه المشكلة في الجانب التطبيقي.

السؤال 3.5: المتغير العشوائي (Y_t) يرتبط بالمتغير المستقل (X_t) وفق نموذج الانحدار الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t$$
$$E(U_t) = 0, \text{ var}(U_t) = \sigma^2$$

وقد وجد بأن الخطأ العشوائي (U_t) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى بمقدار $\hat{\rho}$.

المطلوب: اشرح الخطوات اللازمة لمعالجة أثر الارتباط الذاتي عند تقدير كل من (B_1) ، (B_0) .

السؤال 4.5: ان مشكلة الارتباط الذاتي تنشأ عند استخدام بيانات السلاسل الزمنية ولا تنشأ عند استخدام بيانات المقطع العرضي، ناقش هذه العبارة موضحاً طبيعة المشكلة، وما هي النتائج المترتبة على وجودها في تحليل الانحدار.

السؤال 5.5: باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستيرادات الآتية:

$$\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t$$
$$S.E \quad (250) \quad (0.01) \quad r^2 = 0.98$$

ومن الانحرافات، $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ، وجد أن:

$$\sum_{t=2}^{20} (e_t - e_{t-1})^2 = 537192 \quad , \quad \sum_{t=2}^{20} e_t^2 = 573069$$

المطلوب:

احسب إحصاءة D-W واختبر لوجود مشكلة الارتباط الذاتي، استخدم
(5%) مستوى دلالة لقيمة عليا ودنيا لإحصاءة (D.W) مساوية إلى :

$$dU = 1.41 \quad , \quad dL = 1.20$$

السؤال 6.5: البيانات الآتية تبين بواقي المربعات الصغرى لإحدى علاقات النظرية
الاقتصادية:

$$e_t: \quad 260, 29, 148, -57, -76, -181, 40, -81, -89, 22, 81, 293, -82, \\ -157, -363$$

المطلوب:

- أ- اختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي علماً أن قيمة $dU=1.36$ ، $dL=1.08$.
ب- اشرح الخطوات اللازمة لمعالجة أثر هذه المشكلة إن وجدت.

الفصل السادس: مشكلة التعدد الخطي

The MULTICOLLINEARITY PROBLEM

1.6 المقدمة.

2.6 طبيعة الارتباط الخطي.

3.6 أسباب حدوث ظاهرة التعدد الخطي.

4.6 أنواع التعدد الخطي:

1.4.6 غياب التعدد الخطي.

2.4.6 التعدد الخطي التام.

3.4.6 التعدد الخطي غير التام.

5.6 النتائج المترتبة على وجود التعدد الخطي.

6.6 طرق اختبار وجود التعدد الخطي:

1.6.6 اختبار Firsch.

2.6.6 طريقة FARRAR-GLAUBER.

1.2.6.6 اختبار مربع كاي، χ^2 .

2.2.6.6 اختبار إحصاء F.

3.2.6.6 اختبار إحصاء t.

3.6.6 اختبار كلاين.

7.6 طرق معالجة مشكلة التعدد الخطي.

8.6 الأسئلة والتمارين.

الفصل السادس: مشكلة التعدد الخطي

The Multicollinearity problem

1.6 مقدمة:

ينص أحد الافتراضات الخاصة بنموذج الانحدار الخطي بعدم وجود ارتباط خطي تام بين قيم مشاهدات المتغيرات المستقلة الداخلة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أي أن:

$$r_{x_i x_j} \neq 1$$

وفي حالة اعتماد قيمة أحد المتغيرات المستقلة على قيمة واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة في النموذج المدروس ينتفي الافتراض الخاص بانعدام الارتباط فتظهر مشكلة تدعى بمشكلة التعدد الخطي، The Multicollinearity Problem.

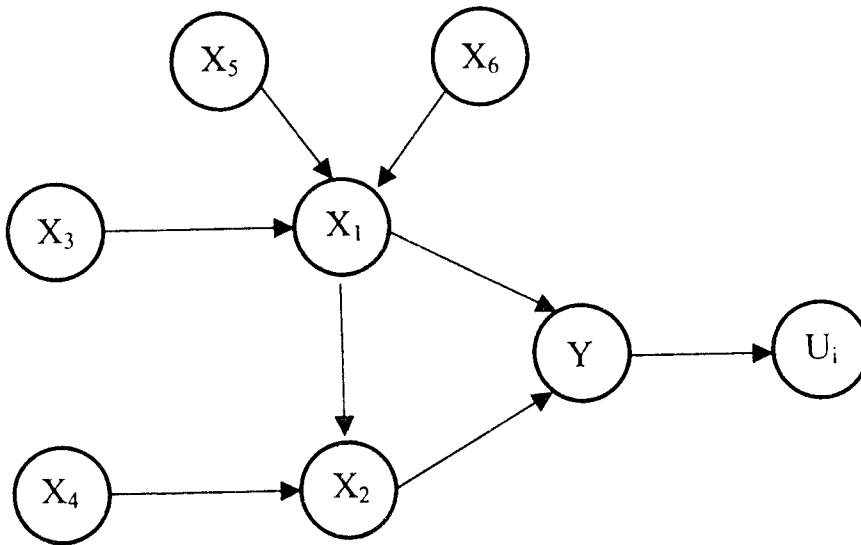
وتجدر الإشارة هنا إلى أن التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة لا يشكل مشكلة إلا إذا تجاوزت شدته حداً معيناً يتعذر عندها تحديد تأثير أي منها على المتغير التابع بشكل منفصل، حيث أنه غالباً ما يكون هنالك قدر من الارتباط لسبب أو لآخر، ما بين متغيرات المستقلة أهمها هو أن معظم المتغيرات المستقلة تميل إلى التحرك سوياً على مر الزمن تحت تأثير العوامل الاقتصادية نفسها، مثلاً في فترات الرواج الاقتصادي تميل كل من الدخل، الأسعار، العمالة، الإنتاج، الاستهلاك، الاستثمار،.. الخ نحو الارتفاع. بينما يحدث العكس في فترات الكساد.

وسيتناول هذا الفصل طبيعة وأسباب الارتباط الخطي وآثاره وكيفية تحديده والحلول والمعالجات المقترحة للارتباط الخطي.

2.6 طبيعة التعدد الخطي، The Nature of Multicollinearity:

يقصد بالتعدد الخطي، Multicollinearity، طبقاً لمفهود RANGER FRISH بشكل أساسي إلى وجود علاقة خطية تامة بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة المتضمنة في نموذج الانحدار المراد دراسته لـ K من متغيرات الانحدار المتضمنة في النموذج $(X_1, X_2, \dots, X_k)$. فإذا كانت هذه العلاقة الخطية تامة، Perfect، أي $r_{X_1X_2} = 1$ معنى ذلك أن معامل الارتباط يساوي واحد. ففي هذه الحالة لا يمكن فصل أثر X_1 و X_2 عن بعضها البعض. ويلاحظ أنه في الحياة الواقعية دائماً توجد علاقة بين المتغيرات الاقتصادية ولا يوجد دليل يوضح درجة الارتباط التي إذا ظهرت فإنها ستؤثر بصورة خطيرة على تقدير المعلمات. ولكن من المعروف أنه إذا كان لدينا متغيرين مستقلين يتغيران تقريباً في نفس الاتجاه فإنه من الصعب فصل أثر كل منهما على المتغير التابع. وبالإمكان توضيح ذلك من خلال المخطط الآتي:

شكل (1.6): يوضح آثار التعدد الخطي



عند استخدام البيانات في تقدير نموذج الانحدار المتعدد، غالباً ما يوجد بعض الارتباط، أو بعض درجات الاعتماد الخطي بين المتغيرات المستقلة، والشكل (1.6) يبين الارتباطات السببية في حالة افتراضية اتجاه السببية في المتغيرات. والمتغير (X_1) يؤثر بشكل مباشر بالمتغير (X_2) ، والمتغير (X_2) يتأثر بشكل مباشر بالمتغير (X_1) ، والمتغير (X_4) ، كذلك يتأثر المتغير (X_1) بالمتغيرات (X_3, X_5, X_6) . ويتأثر المتغير (Y) بشكل مباشر بالمتغيرات (X_1) و (X_2) وغير مباشر بالمتغيرات الأخرى. يلاحظ أن المتغير (X_1) له آثار مباشرة وغير مباشرة على المتغير التابع، (Y) . ويمكن ملاحظة أن المتغير العشوائي، (U_i) ، يتأثر بشكل مباشر بالمتغير التابع، (Y) وليس له أي ارتباط بأي من المتغيرات المستقلة. (موضحة في الشكل (1.6)).

3.6 أسباب حدوث ظاهرة التعدد الخطي:

- 1- من الممكن أن تتغير بعض المتغيرات المستقلة سوية، فعلى سبيل المثال، وفي فترة الازدهار الاقتصادي يلاحظ أن المتغيرات الاقتصادية كالدخل والاستثمار تزداد بوقت واحد، وتتناقص في وقت واحد في فترة الكساد. لذلك فعندما نستخدم هذه المتغيرات كمتغيرات تفسيرية في النموذج تبرز ظاهرة التعدد الخطي، مما يجعل من الصعب أو المستحيل عزل تأثيراتها الفردية على المتغير التابع.
- 2- استخدام المتغيرات المتخلفة زمنياً كمتغيرات تفسيرية في النموذج. فعلى سبيل المثال، يستخدم الدخل الحالي، والدخل السابق كمتغيرات تفسيرية سوية في النموذج. ومن الطبيعي أن القيم المتطابقة لأي متغير اقتصادي تظهر نوع من الارتباط، ولهذا السبب تظهر مشكلة الارتباط الخطي المتعدد.

$$C_t = B_0 + B_1X_t + B_2X_{t-1} + U$$

فإذا كان:

$$X_1 = 2X_2$$

Or;

$$X_1 = X_2^2$$

هذا يؤدي إلى وجود تعدد خطي.

4.6 أنواع التعدد الخطي:

1.4.6 غياب التعدد الخطي، Absence of Multicollinearity:

تحدث هذه الحالة عندما لا ترتبط المتغيرات المستقلة X_i في نموذج الانحدار الخطي المتعدد ارتباطاً خطياً وبالتالي فإن مصفوفة $(X'X)$ تصبح مصفوفة قطرية وتأخذ الصيغة التالية:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} \sum X_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum X_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum X_k^2 \end{bmatrix}$$

وأن مقلوب المصفوفة سيكون قطعياً أيضاً وللعناصر المعطاة بواسطة المصفوفة $(X'X)$ وتحسب المعلمات $(\hat{b}_i)$ بموجب الصيغة التالية:

$$\hat{B}_i = \frac{\sum x_i y}{\sum x_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

وبالتالي فلا توجد حاجة إلى نموذج الانحدار المتعدد ويقدر الثابت $\hat{B}_0$ بموجب:

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_i \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

يتبين مما سبق بأن هذه الصيغ مطابقة لانحدار Y البسيط على كل متغير من المتغيرات المستقلة X_i بشكل مستقل.

2.4.6 التعدد الخطي التام، Exact Multicollinearity:

إن حالة التعدد الخطي التام هي حالة مثالية غير ممكنة التحقق في الواقع عملي ذلك أنها تتحقق فقط في حالة وجود علاقة خطية تامة بين قيم اثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة، ويمكن حينذاك التعبير عن واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة كتركيب خطي للمتغير أو المتغيرات المستقلة الأخرى. ولتوضيح هذه الحالة نفرض وجود نموذج انحدار خطي متعدد يحتوي متغيرين مستقلين وكما يلي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + U_i \quad \dots(1.6)$$

الذي يمكن تقدير معالمته بموجب الصيغة التالية:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$$

حيث محدد المصفوفة:

$$\begin{aligned} |X'X| &= \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{vmatrix} \\ &= (\sum X_1^2)(\sum X_2^2) - (\sum X_1 X_2)^2 \end{aligned}$$

فوجود علاقة خطية تامة بين قيم مشاهدات المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$X_2 = \rho X_1$$

حيث ρ عبارة عن قيمة ثابتة لا تساوي الصفر، فالمحدد $|X'X|$ تكون:

$$\begin{aligned} |X'X| &= \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \rho \sum X_1^2 \\ \rho \sum X_1^2 & \rho^2 \sum X_1^2 \end{vmatrix} \\ &= (\sum X_1^2)(\rho^2 \sum X_1^2) - (\rho \sum X_1^2)(\rho \sum X_1^2) \\ &= \rho^2 (\sum X_1^2)^2 - \rho^2 (\sum X_1^2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبالتالي لا يمكن حساب معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الشاذة وعليه لا يمكن الحصول على مقدرات OLS المعطاة بالقانون $\hat{B} = (X'X)^{-1} X'Y$ فتنهار OLS تحت وطأة الارتباط الخطي المتعدد التام.

3.4.6 التعدد الخطي غير التام، No Exact Multicollinearity:

يتضح مما سبق أن حالتي التعدد الخطي التام وغياب التعدد الخطي هم حالتان لا تحدثان في الحياة العملية. وفي الواقع هناك دائماً علاقة ارتباطية بدرجات متفاوتة بين المتغيرات المستقلة تقع ضمن الحالتين المتطرفتين المذكورتين إلا وهو التعدد الخطي غير التام ويسود دراسات القياس الاقتصادي خاصة تلك التي تعتمد على بيانات السلاسل الزمنية نسبة لتحرك هذه السلاسل سوية في اتجاه واحد وذلك لمختف

المتغيرات الاقتصادية، وتشير هذه الحالة إلى الوضع الذي يكون فيه بين متغيرين مستقلين أو أكثر في نموذج الانحدار المتعدد ارتباط خطي ولكنه غير تام ولتوضيح ذلك نفترض النموذج التالي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + U_i$$

وإن هناك علاقة خطية غير تامة بين قيم مشاهدات المتغيرين X_1 و X_2 ممثلة بالمعادلة الآتية:

$$X_2 = \rho X_1 + V$$

حيث V متغير يمكن تمثيله بالمقدار الآتية:

$$\sum X_1 V = \sum V = 0$$

عليه يمكن كتابة محدد المصفوفة كالآتي:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1(\rho X_1 + V) \\ \sum X_1(\rho X_1 + V) & \sum (\rho X_1 + V)^2 \end{vmatrix}$$

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \rho \sum X_1^2 + \sum X_1 V \\ \rho \sum X_1^2 + \sum X_1 V & \rho^2 \sum X_1^2 + 2\rho \sum X_1 V + \sum V^2 \end{vmatrix}$$

$$|X'X| = \rho^2 (\sum X_1^2)^2 + 2\rho \sum X_1 V \sum X_1^2 + \sum X_1^2 \sum V^2 - [\rho^2 (\sum X_1^2)^2 + 2\rho \sum X_1 V \sum X_1^2 + \sum X_1^2 V^2]$$

وبعد فك القوس والاختصار، نحصل:

$$|X'X| = \sum X_1^2 \sum V^2 - \sum X_1^2 V^2$$

وبما ان $\sum X_i^2 > 0$ وان $V^2 > 0$ فان محدد المصفوفة $(X'X)$ لا يساوي الصفر وهكذا يمكن الحصول على المعكوس $(X'X)^{-1}$.

5.6 النتائج المترتبة على وجود التعدد الخطي:

تحتفظ مقدرات OLS بخاصية الخطية وعدم التحيز فيما لو كان النموذج قد حدد بدقة، ولكنه لا يكتسب خاصية الكفاءة أي أقل تباين ممكن، إذ إنه بزيادة درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة فإن محدد المصفوفة $(X'X)$ يبدأ بالتناقص وينعكس ذلك على عناصر معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$ ، حيث يأخذ قيم مرتفعة مما يقود إلى ارتفاع التباين المتحصل عليه من قطر مصفوفة التباين والتباين المشترك، والذي يقود بدوره إلى زيادة حجم الأخطاء المعيارية فيؤثر بصورة خاطئة عدم معنوية بعض المتغيرات المستقلة في النموذج نتيجة تناقص قيم (t) المحسوبة بالمقارنة مع الجدولية، والذي يقود بالباحث خطأ إلى حذف المتغيرات غير المعنوية من النموذج. في حين أن السبب في عدم معنويتها هو الارتباط الذي يجمع بين المتغيرات المستقلة والذي يؤدي إلى كبر حجم التباين ومن ثم الوصول إلى القياسات غير الدقيقة وبالتالي صعوبة الاعتماد على النتائج بدقة.

وهنا لابد أن نشير إلى إن تباين معاملات النموذج المقدرة في هذه الحالة تكون $\hat{B} = 0$ و $\text{var}(\hat{B}) = \infty$. ويجب التأكيد في هذا المجال على نقطتين هما:

أ- إن تقدير المعلمات المقدرة غير متحيزة، أي أن $E(\hat{B}) = B$ حتى عندما يكون الارتباط الخطي قوي فإن الخاصية الإحصائية لعدم التحيز لا تعتمد على الافتراض.

ب- تشير بعض الدراسات التطبيقية إلى أن الارتباط الخطي يكون مشكلة غير مهمة إذا كان:

$$R^2_{y.x_1, x_2} \geq r_{x_1 x_2}$$

أي أن $r_{x_1 x_2}$ أقل أو يساوي $R^2_{y.x_1, x_2}$ ويكون مؤثر على القياس، إذا كان:

$$R^2_{y.x_1, x_2} < r_{x_1 x_2}$$

6.6 طرق اختبار وجود التعدد الخطي:

هناك عدد من الاختبارات لاكتشاف التعدد الخطي ولكن سنتناول أهم هذه الاختبارات:

1.6.6 اختبار Firsch:

يشير هذا الاختبار إلى أن خطورة التعدد الخطي تعتمد على درجة الارتباط بين X_1 و X_2 فضلاً عن معامل التحديد $R^2_{y.x_1, x_2}$ ، وعليه يمكن اقتراح استعمال عناصر الآتية للاختبار الخاص بمشكلة التعدد الخطي وهي:

$$R^2_{y.x_1, x_2} , r_{x_1 x_2} , Se \text{ الخطأ المعياري}$$

وكن يجب أن يفهم بأن أي من هذه العناصر لمفرده لا يمكن الاستفادة منه وذلك لأسباب الآتية:

أ- الأخطاء المعيارية الكبيرة لا تعني دائماً أن هناك مشكلة ارتباط خطي، فقد تعود أسبابها إلى مشاكل قياسية أخرى.

ب- الارتباط بين المتغيرات المستقلة قد يكون مرتفعاً أو قد يكون منخفضاً. وبالرغم من ذلك قد لا تتأثر قيم المعلمات أو أخطاءها المعيارية.

ج- ربما تكون قيم معامل التحديد، R^2 ، مرتفعة نسبة إلى معامل الارتباط بين X_1 و X_2 ومع ذلك فالنتائج قد تكون غير دقيقة وغير مهمة.

ولهذه الأسباب يتطلب الأمر تحليل هذه العناصر الثلاثة أعلاه مجتمعة للحكم على وجود التعدد الخطي من عدمه.

ويتم الأجراء وفقاً لهذا الاختبار عن طريق إيجاد معادلة الانحدار للمتغير التابع على كل من المتغيرات المستقلة على حدة ثم بعد ذلك نقوم بإجراء الاختبار على وفق المعايير الإحصائية المتعارف عليها ثم نختار معادلة الانحدار التي تعطي أفضل النتائج. وعلى أية حال، يمكن استعمال مجموعة من المعايير لاكتشاف مشكلة التعدد الخطي، ولمعرفة خطورة هذه المشكلة في معادلة الانحدار فقد تم اقتراح الأسلوب الذي يتضمن الحصول على معادلة انحدار المتغير التابع على كل من المتغيرات المستقلة على حدة، ثم تقييم نتائج التقدير المتحصل عليها من حيث قيمة معامل التحديد، R^2 ، والأخطاء المعيارية. للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار ومن ثم القيام بأجراء اختيار المعادلة المقدرة، التي تكون نتائج تقديرها أكثر قبولاً من باقي المعادلات المقدرة، ويجب أن تتميز المعادلة المقدرة المختارة بالآتي:

أولاً: أن تكون قيمة معامل التحديد، R^2 ، الخاصة بها أكبر من مثيلتها لأي معادلة مقدرة أخرى.

ثانياً: أن تكون الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار الخاصة بها أقل من مثيلتها لأي معادلة مقدرة أخرى.

لغرض توضيح هذه الطريقة، أفترض لدينا المعادلة الآتية:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$$

والتي يُمكن وصفها بالشكل الآتية:

$$Y = f(X_1)$$

$$Y = f(X_2)$$

$$\vdots$$

$$Y = f(X_k)$$

وبافتراض أن أفضل النتائج يُمكن الحصول عليها من $Y = f(X_2)$ عندئذ نقوم بأخذ أفضل معادلة ونضيف عليها في كل مرة متغير جديد ونجري عليها الاختبار، فإذا كانت المشكلة موجودة نحذف المتغير المضاف ونضيف متغير جديد.

وبعد ذلك نبدأ تدريجياً في إضافة المتغيرات المستقلة الواحدة تلو الأخرى إلى المعادلة التي تم اختيارها ثم اختبار آثار كل منها على قيمة R^2 والخطأ المعياري والقيم المقدرة لمعاملات الانحدار ويعتبر المتغير المستقل المضاف إلى المعادلة مفيد أو غير مفيد أو زائد وفقاً للحالات الآتية:

1- إذا أدت إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار أي تحسن في قيمة معامل التحديد، R^2 ، دون التأثير على قيم المعلمات، فإن المتغير المستقل المضاف يعتبر مفيداً.

2- إذا لم تؤدي إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار أي تحسن في قيمة معامل التحديد، R^2 ، ولا يؤثر على قيم معاملات الانحدار، فإن هذا المتغير المضاف يعتبر زائداً ولا حاجة له لذا يجب حذفه من المعادلة.

3- إذا أدت إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار إلى التأثير على إشارة وقيم المعاملات مما يجعلها غير مقبولة من الناحية الإحصائية والاقتصادية، فإنه يعتبر غير مفيد ولا حاجة لوجوده في معادلة الانحدار.

مثال 1.6: إذا توفرت لدينا البيانات الآتية والخاصة بدالة الطلب على الملابس:

Year	الإتفاق على الملابس C	الدخل لمتاح Y	الأصول السائلة L	الرقم القياسي للملابس 1993=100 P _c	الرقم القياسي العام 1993=100 P _o
1989	8.4	82.9	17.1	92	94
1990	9.6	88.0	21.3	93	96
1991	10.4	99.9	25.1	96	97
1992	11.4	105.3	29.0	94	97
1993	12.2	117.7	34.0	100	100
1994	14.2	131.0	40.0	101	101
1995	15.8	148.2	44.0	105	104
1996	17.9	161.8	49.0	112	109
1997	19.3	174.2	51.0	112	111
1998	20.8	184.7	53.0	112	111

وحسب مفهوم النظرية الاقتصادية، فإن دالة الأنفاق على الملابس تكون:

$$C = B_0 + B_1 Y + B_2 L + B_3 P_c + B_4 P_o + U_i$$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى على هذه الدالة، حصلنا على المعادلة التقديرية التالية:

$$C = -13.53 + 0.097Y + 0.015L - 0.199P_c + 0.34P_o$$

$$Se \quad (7.5) \quad (0.03) \quad (0.05) \quad (0.09) \quad (0.15)$$

$$R^2 = 0.998, \sum \hat{y}^2 = 28.15, \sum e_i^2 = 0.33, DW = 3.4$$

وبتطبيق تحليل التباين لاختبار مدى أهمية هذه المعادلة، نحصل على ما يلي:

$$F = \frac{\sum \hat{y}^2 / (k-1)}{\sum e_i^2 / (n-k)} = \frac{28.15/4}{0.33/5} = 15.6$$

حيث أن قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% هي 5.19، وفي هذه الحالة نرفض فرضية العدم، H_0 ، القائلة بأنه لا توجد علاقة بين الأنفاق على الملابس من جهة والمتغيرات المستقلة من جهة أخرى، ونقبل الفرض البديل، H_1 ، القائل بوجود هذه العلاقة.

ومن حل البيانات نحصل على مصفوفة الارتباط بين المتغيرات وكما يلي:

$$r_{YL} = 0.99, \quad r_{LPc} = 0.96$$

$$r_{yPc} = 0.98, \quad r_{LP0} = 0.92$$

$$r_{YP0} = 0.99, \quad r_{PcP0} = 0.99$$

ولغرض توضيح تأثير الارتباط الخطي لأبد من تقدير معادلة الانحدار للمتغير التابع مع كل متغير مستقل على حدة، وبذلك نحصل على المعادلات التالية:

$$1) \quad \hat{C} = -1.24 + 0.118Y \quad R^2 = 0.995 \\ \text{Se} \quad (0.37) \quad (0.002) \quad D.W = 2.6$$

$$2) \quad \hat{C} = -38.51 + 0.516P_c \quad R^2 = 0.951 \\ \text{Se} \quad (4.20) \quad (0.04) \quad D.W = 2.4$$

$$3) \quad \hat{C} = 2.11 + 0.327L \quad R^2 = 0.967$$

$$\text{Se} \quad (0.81) \quad (0.02) \quad D.W = 0.4$$

$$4) \quad \hat{C} = -53.65 + 0.663P_o \quad R^2 = 0.977$$

$$\text{Se} \quad (3.63) \quad (0.03) \quad D.W = 2.1$$

وحيث أنه في النظرية الاقتصادية، يعتمد الاستهلاك على الدخل، لذا نأخذ التقدير الأول لمعادلة الانحدار كأفضل معادلة مقدرة، ونجري عليها الانحدار بإضافة المتغيرات المستقلة إليها وكما هو مبين في الجدول الآتي:

المعادلة	B ₀	Y B ₁	P _c B ₂	L B ₂	P _o B ₃	R ²	D.W
C=F(Y)	-1.24 (0.37)	0.118 (0.002)	—	—	—	0.995	2.6
C=F(Y,P _c)	1.40 (4.92)	0.126 (0.01)	-0.036 (0.07)	—	—	0.996	2.5
C=F(Y,P _c ,L)	0.94 (5.17)	0.138 (0.02)	-0.034 (0.06)	-0.037 (0.05)	—	0.996	3.1
C=F(Y,P _c ,P _o)	-12.76 (6.52)	0.104 (0.01)	-0.188 (0.07)	—	0.319 (0.12)	0.997	3.5
C=F(Y,P _c ,L,P _o)	-13.53 (7.5)	0.097 (0.03)	-0.199 (0.09)	0.015 (0.05)	0.34 (0.15)	0.998	3.4

ونلاحظ من التحليل أن إضافة المتغير P_c إلى المعادلة أدى إلى زيادة حقيقية في قيمة معامل التحديد، R²، ويلاحظ أيضاً أن المعاملات، B₀ و B₁ أخذت إشاراتها الصحيحة، إلا إن الخطأ المعياري الخاص بقيمة B₂ يوضح بأنها ليست ذات أهمية إحصائية. وكذلك فإن إضافة الأصول السائلة، L، لا تعطي نتائج مهمة للمعاملات

المقدرة $\hat{B}_2$ و $\hat{B}_3$ وذلك بسبب الارتباط الذاتي بين أسعار الملابس، P_c ، والأصول السائلة، L ، مما جعل من الصعب الحصول على تقديرات لهذه المعلمات ذات أهمية، وذلك لأن الخطأ المعياري أكبر من قيمة المعامل B_1 لهذه المعلمات.

ولكن بالرغم من الارتباط بين الأنفاق الاستهلاكي، C ، وأسعار الملابس، P_c ، والأصول السائلة، L ، إلا أن قيمة B_1 لم تتأثر وعليه يمكن اعتبار الأصول السائلة، L ، متغير زائد لا حاجة لوجوده وهنا يسقط المتغير، L .

أن إسقاط المتغير L وإضافة المتغير P_0 ، أسعار السلع الأخرى، في المعادلة، يلاحظ أن قيمة R^2 زادت بنسبة طفيفة، كما أنه يلاحظ بعد إضافة أسعار السلع الأخرى، P_0 ، أن كل المعاملات تأخذ الإشارات المتوقعة وإلى حد ما زادت الأهمية الإحصائية.

أما معادلة الانحدار بالنسبة لكافة المتغيرات المستقلة، توضح بأن مشكلة تعدد الخطي ليست خطيرة بالنسبة للمعاملات $\hat{B}_1$ و $\hat{B}_2$.

كما أن معامل الأصول السائلة، L ، $\hat{B}_3$ ، ليس ذات أهمية إحصائية وعليه يمكن إسقاط المتغير المستقل، L .

وبذلك يمكن أن نتلخص العلاقة التالية، كأفضل ما يمكن الحصول عليه:

$$C = F(Y, P_c, P_0)$$

2.6.6 طريقة FARRAR- GLAUBER:

نشرت هذه الطريقة لأول مرة عام 1967 لمقالة بعنوان التعدد الخطي في نموذج الانحدار من قبل FARRAR and GLAUBER. وهذه الطريقة تقوم على ثلاثة اختبارات أساسية هي:

أولاً: اختبار مربع كاي χ^2 ، Chi-Square.

ثانياً: اختبار إحصاءه F.

ثالثاً: اختبار إحصاءه t.

وستتناول بشيء من الإيجاز عن كل اختبار من الاختبارات الثلاث أعلاه.

1.2.6.6 اختبار مربع كاي، χ^2 ، Chi-Square.

يستخدم هذا الاختبار لتحديد وجود أو عدم وجود مشكله التعدد الخطي في

النموذج المقدر، ولتطبيق هذا الاختبار، يتم أتباع الخطوات الآتية:

أ- حساب قيمة محدد الارتباط الخطي، $|R|$ ، وأن قيمة المحدد تمثل معلمات الارتباط البسيطة بين كل متغيرين من المتغيرات المستقلة على حدة.

ب- وأن معامل الارتباط بين المتغير نفسه يساوي واحد صحيح. لذلك فإن القطر الرئيسي للمحدد سوف يكون عبارة عن واحد. أما بقية العناصر فسوف يكون أقل من الواحد الصحيح.

يفترض الاختبار وجود فرضيتين أساسيتين هما:

1- فرضية العدم، H_0 : التي تنص على أن المتغيرات مستقلة.

2- الفرضية البديلة، H_1 : وتنص على أن المتغيرات غير مستقلة.

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

$$\chi^2 = -[n - 1 - \frac{1}{6}(2k + 5)] \cdot \ln|R| \quad \dots(2.6)$$

حيث أن:

n: تمثل حجم العينة (عدد المشاهدات).

K: تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

$\ln|R|$: اللوغاريتم الطبيعي لمحدد مصفوفة معاملات الارتباطات الجزئية الجزئية الآتية:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كانت قيمة المحدد تقع بين الصفر والواحد الصحيح فإنه قيمة $\ln|R|$ ستكون سالبة دائماً.

ويمكن التمييز بين ثلاث حالات لمحدد الارتباط، $|R|$ ، وكما يلي:

1- إذا كانت قيمة المحدد $|R| = 0$ فإن ذلك يعني أن تكون العلاقة 100% بين X_1 و X_2 ، أي يوجد تعدد خطي تام ولذلك تكون معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرين مساوية للواحد الصحيح وكما يلي:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_2X_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2- إذا كانت قيمة محدّد الارتباط، $|R| = 1$ معنى ذلك عدم وجود ارتباط بين المتغيرين X_1 و X_2 ، أي يكون معامل الارتباط بين كلا المتغيرين مساو للصفر مثلاً $r_{X_1X_2} = 0$ و $r_{X_2X_1} = 0$ وكما مبين أدناه:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} \\ r_{X_2X_1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

3- إذا كانت قيمة محدد الارتباط محصورة بين الصفر والواحد الصحيح، أي $0 \leq |R| \leq 1$ ، معنى ذلك لابد من اتباع خطوات الاختبار لغرض معرفة الارتباط الخطي والتي ذكرت سابقاً والمتضمنة اختبار الفرضيات وإيجاد قيمة χ^2 المحسوبة باستخدام المعادلة (2.6).

وبعد احتساب قيمة χ^2 تقارن مع قيمتها الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية $k(k-1)/2$.

فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من مثلثتها الجدولية ترفض فرضية العدم (H_0) وتقبل الفرضية البديلة (H_1) أي أن هناك مشكلة تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة في النموذج وبالعكس في حالة كون قيمة χ^2 المحسوبة أقل من قيمتها الجدولية تقبل (H_0) أي أنه ليست هنالك مشكلة تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة. وكلما كبرت القيمة المحسوبة مقارنة بنظيرتها الجدولية كلما دل ذلك على أن مشكلة التعدد الخطي أشد.

مثال 2.6: إذا كانت لدينا مصفوفة الارتباطات، R :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & 1 \end{bmatrix}$$

وتوفرت لدينا المعلومات الآتية:

$$r_{12} = 0.8811 \quad , \quad r_{13} = 0.9399 \quad , \quad r_{23} = 0.9866$$

$$n = 15 \quad , \quad k = 4$$

فأن محدد الارتباط $|R|$ ، يصبح كما يلي:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0.8811 & 0.9399 \\ 0.8811 & 1 & 0.9866 \\ 0.9399 & 0.9866 & 1 \end{vmatrix} = 0.000969$$

$$\chi^2 = -[N - 1 - \frac{1}{6}(2K + 5)] \ln |R|$$

$$\chi^2 = -[15 - 1 - \frac{1}{6}(2(4) + 5)] \ln 0.000969$$

$$\chi^2 = -[14 - \frac{1}{6}(13)] - 6.939$$

$$\chi^2 = -[14 - 6.5)(-6.939)$$

$$\chi^2 = 52$$

أما قيمة χ^2 الجدولية بدرجات حرية $2/(3)(4)$ والتي تساوي 6 وبمستوى معنوية 1% فإنها بلغت 16.8 وهي أصغر من χ^2 المحسوبة، وعليه نستنتج وجود مشكلة التعدد الخطي.

2.2.6.6 اختبار إحصاءه F:

وفي حالة وجود مشكلة التعدد الخطي في النموذج يتطلب الأمر تحديد المتغير المستقل (X_j) الذي يرتبط خطياً مع غيره من المتغيرات المستقلة (K) وتسبب في إحداث المشكلة، ويتم هذا من خلال اختبار (F) والذي يتطلب احتساب معامل التحديد المتعدد R^2 بين كل متغير في النموذج (X_j) وبقية المتغيرات المستقلة (K) والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هو:

$$F_j = \frac{(R^2_{X_j.X_1X_2...X_k})/(k-1)}{(1 - R^2_{X_j.X_1X_2...X_k})/(n-k)} \quad (j=1,2,3,...,k)$$

وبعد احتساب قيمة (F_j) نقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية مساوية إلى ($K-2$)، ($n-k-1$) للبسط والمقام وبمستوى معنوية معين بهدف قبول أو رفض أحد هاتين الفرضيتين:

$$H_0 : R_{X_i.X_1X_2...X_k}^2 = 0$$

$$H_1 : R_{X_i.X_1X_2...X_k}^2 \neq 0$$

فإذا كانت قيمة F المحسوبة اكبر من القيمة الجدولية ترفض H_0 وتقبل H_1 أي أن المتغير المستقل X_j يرتبط خطياً مع بقية المتغيرات المستقلة. أما إذا كانت F المحسوبة أقل من مثلثاتها الجدولية تقبل H_0 أي أن المتغير X_j لا يرتبط خطياً مع بقية المتغيرات المستقلة ومن ثم فليس له علاقة بوجود مشكلة التعدد الخطي الذي يعاني منه النموذج. وتكرر العملية لكل متغير من المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة المتداخلة خطياً كلاً على انفراد.

3.2.6.6 اختبار إحصاءه t :

ولتحديد المتغيرات المستقلة المسؤولة عن حصول المشكلة يتطلب ذلك إجراء اختبار آخر هو اختبار (t) والذي يعتمد بدوره على قيم معاملات الارتباط الجزئية ما بين كل اثنين من المتغيرات المستقلة (r_{ij}) بصورة منفردة بافتراض ان بقية المتغيرات المستقلة في النموذج ثابتة. والصيغة الرياضية لهذا الاختبار:

$$t_{ij} = \frac{(r_{X_i X_j.X_1X_2...,X_k})\sqrt{n-k}}{\sqrt{(1-r_{X_i X_j.X_1X_2...,X_k}^2)}}$$

حيث أن :

قيمة معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين المستقلين X_i ، X_j بأعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة ثابتة.

وبعد احتساب قيمة t_{ij} تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية $(n-k)$ ومستوى معنوية معين لتحديد قبول أو رفض أحد الفرضيتين:

$$H_0 : r_{X_i X_j \cdot X_1 X_2 \dots X_k} = 0$$

$$H_1 : r_{X_i X_j \cdot X_1 X_2 \dots X_k} \neq 0$$

فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية ترفض H_0 وتقبل H_1 أي أن الارتباط الجزئي بين المتغيرين X_i, X_j معنوي. وبالعكس فإن الارتباط الجزئي بينهما غير معنوي عندما تكون القيمة المحسوبة أصغر من مثلثاتها الجدولية. وتكرر العملية لكافة المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة التي تسببت في حصول مشكلة التعدد الخطي.

3.6.6 اختبار كلاين، KLIEN Test:

يستخدم هذا الاختبار للكشف عن وجود (التعدد الخطي) حيث يتم مقارنة معامل التحديد R^2 مع مربع معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة. فإذا كان معامل التحديد R^2 أكبر من مربع معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة فهذا يعني عدد وجود مشكلة التعدد الخطي وإن كان موجوداً فهذا لا يؤثر أو يكون غير مؤثر. أي أن:

$$R^2 > r_{X_i X_j}^2$$

7.6 طرق معالجة مشكلة التعدد الخطي:

1- محاولة توسيع حجم العينة وذلك بإضافة بيانات كافية عن متغيرات الظاهرة المدروسة، إذ تزداد التقديرات دقة بزيادة عدد البيانات التي تعتمد عليها في عملية التقدير نظراً لوجود علاقة عكسية بين حجم العينة وقيمة التباين، فكلما كبر حجم العينة كلما تم الحصول على معلومات إضافية تساعد على تخفيض حجم التباينات.

2- حذف المتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة التي تسببت في ظهور المشكلة في النموذج. ولكن غالباً ما يستبدل هذا الحل للمشكلة بمشكلة أخرى، إذ أن حذف متغير مستقل معين له أهميته التفسيرية يوقع الباحث بمشكلة التوصيف (عدم إدخال المتغيرات المهمة في النموذج) مما يرفع من احتمال تحيز المقدرات في تلك الحالة.

3. تحويل شكل الدالة بإستعمال النسب والفروقات عوضاً عن المتغيرات الأصلية. فعلى سبيل المثال النموذج التالي:

$$Y_i = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + U_i$$

يمكن اختيار احد المتغيرات المستقلة ولتكن مثلاً X_2 كمقام وتضرب المعادلة بها فنحصل على متغيرات جديدة وكالاتي:

$$\frac{Y_i}{X_2} = B_0 \frac{1}{X_2} + B_1 \frac{X_1}{X_2} + B_2 + \frac{U_i}{X_2}$$

غير أنه يلاحظ أن النموذج الجديد قد لا يستوفي أحد فروض OLS الاعتيادية إلا وهو (أنه لا يمتلك تباين ثابت لحدود الخطأ $\frac{U_i}{X_2}$ ، حيث أن:

$$E\left(\frac{U_i}{X_2}\right)^2 = \frac{E(U_i^2)}{X_2^2} = \frac{\sigma^2}{X_2^2} \neq \sigma^2$$

مما يعني إستبدال المشكلة بمشكلة أخرى.

4- استخدام اسلوب الدمج بين بيانات السلاسل الزمنية والبيانات المقطعية فمثلاً يمكن استخدام المعلمة المستخرجة بواسطة البيانات المقطعية مع العلاقة المقدرة بواسطة السلاسل الزمنية كاستخدام مقدر معلمة الميل الحدي للاستهلاك لفترة معينة ولقطر معين من دراسات المقاطع العرضية مع العلاقة بين الدخل والاسعار لنفس الفترة والقطر من دراسات السلاسل الزمنية.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.6: الجدول التالي يبين السلسلة الزمنية لخمسة متغيرات، Y_i ، X_1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 .

Y_i	X_1	X_2	X_3	X_4
6.0	40.1	5.5	108	63
6.0	40.3	4.7	93	72
6.5	47.5	5.2	108	86
7.1	49.2	6.8	100	100
7.2	52.3	7.3	99	107
7.6	58.0	8.7	99	111
8.0	61.3	10.2	101	114
9.0	62.5	14.1	97	116
9.0	64.7	17.1	93	119
9.3	66.8	21.3	102	121

المطلوب: اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي.

سؤال 2.6: ماذا يقصد بمشكلة التعدد الخطي؟ وما هي أنواعه؟ وكيف يتم معالجتها؟

السؤال 3.6: قام أحد الباحثين بدراسة دالة الطلب على سلعة معينة، Y ، فوجد ان هناك عاملين أساسيين تؤثران فيها هي سعر السلعة ، X_1 ، وسعر سلعة أخرى منافسة، X_2 ، وكما مبين في الجدول أدناه:

Y_i	X_1	X_2
9	1	6
7	2	6
5	3	5
5	4	2
4	5	1

المطلوب:

1- تقدير معلمات العلاقة.

2 اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي باستخدام إحدى طرق الاختبار المناسبة مع إجراء المعالجات الضرورية في حالة وجود المشكلة.

الفصل السابع: مشكلة عدم تجانس التباين The Heteroscedasticity Problem

1.7 المقدمة.

2.7 طبيعة مشكلة تباين حد الخطأ.

3.7 أسباب تباين حد الخطأ.

4.7 اكتشاف تباين حد الخطأ.

1.4.7 اختبار كولدفيلد وكوانت.

2.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لسييرمان.

3.4.7 اختبار بارتليت.

4.4.7 طريقة كليجر.

5.4.7 اختبار بارك.

5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين.

6.7 الأسئلة والتمارين

الفصل السابع: مشكلة عدم تجانس التباين

The Heteroscedasticity Problem

1.7 المقدمة:

أحد الفرضيات الأساسية التي يقوم عليها النموذج الخطي (العام والبسيط) هو ثبات التباين لحدود الخطأ (تجانس تباين الخطأ)، Homoscedasticity، لجميع المشاهدات (i)، أي:

$$E U_i^2 = \sigma_i^2$$

وفي النموذج الخطي العام فإن الفرض المناظر:

$$E(UU') = \sigma_i^2 I_n$$

وفي واقع الأمر، فإننا كثيراً ما نواجه حالات يتعسر فيها استيفاء الشرط أعلاه، ومن ثم فإن التباين لا يكون ثابتاً بل يختلف لكل مشاهدة من مشاهدات العينة وتصبح لدينا قيم مختلفة وغير ثابتة لتباينات حدود الخطأ العشوائية، وعليه فإن القطر الرئيس لمصفوفة التباين والتباين المشترك الخاصة بحدود الخطأ يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة، أي إن:

$$E(UU') \neq \sigma_i^2 I_n$$

حيث إن:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_n^2$$

ويحدث هذا أساساً في حالة الدراسات المعتمدة على البيانات الإحصائية المقطعية Cross- Section Data ، كما هو الحال في بيانات بحوث ميزانية الأسرة التي تشمل أسراً متباينة بشكل كبير في مستويات دخولها، فتشتت مشاهدات البيانات المقطعية الجزئية الخاصة بالمتغير التابع قد يختلف اختلافاً شديداً من مستوى إلى آخر من مستويات المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة). فعلى سبيل المثال نجد ان دراسة دالة الاستهلاك التي تعتمد على دخل وانفاق العوائل على مختلف السلع والخدمات، تبين ان تباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي لعائلات الدخل المرتفع عادة ما يكون اكبر عنه بالنسبة لتباين الخطأ الخاص بإنفاق العائلات ذات الدخل المنخفض، ذلك ان العوائل ذات الدخل المرتفعة تتمتع بمرونة كبيرة في الأنفاق، أما العوائل ذات الدخل المنخفضة فان أنفاقها يقع عادة ضمن حدود ضيقة، وعليه فان التشتت ومن ثم التباين عند قيم الدخل (X_i) الكبيرة يكون اكبر من التشتت ومن ثم التباين عند قيم (X_i) الصغيرة ومن ثم فان فرضية تجانس تباين الخطأ تصبح غير مجدية، وخرق الفرض هذا يؤدي إلي ظهور مشكلة تدعى مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ، The Heteroscedasticity problem.

في هذا الفصل سوف نختبر سريان مفعول ثبات تباين حد الخطأ، أي أن $E(U_i^2) = \sigma^2$ ، ومحاولة معرفة ماذا يحصل إذا لم تتحقق الفرضية تلك. وعليه سنحاول الإجابة على الأسئلة الآتية:

- ما هي طبيعة مشكلة تباين حد الخطأ؟
- ما هي أسباب المشكلة؟
- ما هي الآثار المترتبة على وجود هذه المشكلة؟
- وكيف يمكن اكتشافها ومن ثم أسلوب معالجتها؟

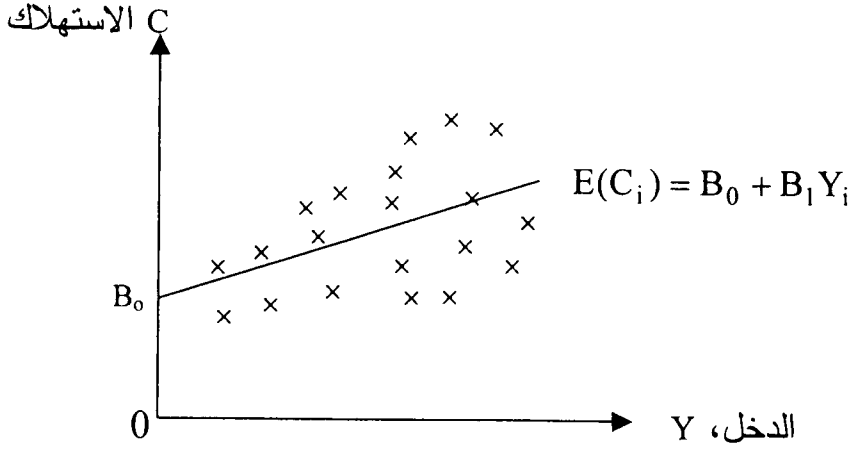
2.7 طبيعة مشكلة عدم تجانس حد الخطأ،

The Nature of Heteroscedasticity

إن مشكلة تجانس الخطأ، Heteroscedasticity، تتكون من كلمتين، هما (Hetero) بمعنى غير متساو و (Scedasticity) بمعنى تباعد أو انتشار. فعند تغير قيمة تباين حد الخطأ، U_i ، بحيث تزداد هذه القيمة بزيادة قيمة المتغير المستقل، Y_i ، فإننا نواجه مشكلة تباين الخطأ.

ويمكن توضيح ذلك بيانياً في نموذج الانحدار البسيط المتضمن متغيرين كما في الشكل (1.7)، الذي يمثل العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكية لأسرة ما، C_i ، ومستوى الدخل لتلك الأسرة، Y_i ، في حالة ثبات حد الخطأ، ويلاحظ من هذا الشكل إذا كانت قيمة تباين حد الخطأ يتغير بتغير قيمة حد الخطأ، U_i ، بحيث تزداد هذه القيمة بزيادة قيمة المتغير المستقل، فإننا نواجه مشكلة تباين حد الخطأ أو عدم تجانس حد الخطأ. وبافتراض أننا بصدد دراسة مستوى الاستهلاك لأسرة ما، وقد أخذنا عينة عشوائية من الأسر حجمها (n) وكان التباين في الاستهلاك يزداد كلما زاد دخل الأسرة، فالأسر التي تحصل على دخل أعلى يكون لديها مرونة أكبر من الاستهلاك، كما هو واضح في الشكل البياني.

الشكل (1.7): عدم تجانس حد الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



وبالاحظ من الشكل أعلاه، ان تباين المتغير التابع (C) يزداد كلما زاد مستوى الدخل (Y)، ولذلك نجد ان حساب الأخطاء المعيارية في علاقة الاستهلاك بالدخل وبطريقة OLS، لا يساعدنا في الوصول إلى تقديرات غير متحيزة ومتوافقة، وذلك لان هذه نصيغة تفترض عدم ثبات تباين الخطأ، وبذلك فان اختبار الفرضية المعتمدة على هذه لأخطاء المعيارية تصبح غير سارية المفعول.

لذلك فان المقدرات تصبح غير فعالة، وبعض طرق التقدير التي نحصل منها على مقدرات غير متحيزة سوف تكون تباينات العينة فيها صغيرة، لذلك إذا كانت تباينات المتوفرة كافية سوف يكون التقدير في هذه الحالة مرضٍ.

لسوء الحظ، ان حساب الأخطاء المعيارية بطريقة OLS، التي تعتمد على نصيغة المنتظمة، تكون غير صحيحة، وذلك بسبب ان هذه الصيغة تفترض عدم ثبات تباين حد الخطأ، Heteroscedasticity، لذلك فان اختبار الفرضية التي تعتمد على لأخطاء المعيارية تصبح غير نافذة.

وتوجد طريقة بديلة لتحديد الأخطاء المعيارية والتي قام بتطويرها "هاربرت وايست" H. WHITE، وتوصلنا هذه الصيغة إلى تقديرات متوافقة لتباين العينة

المدروسة، وعلى أقل تقدير في العينة الكبيرة، وبذلك فإن اختبار الفرضيات بطريقة WHITE تكون جاهزة كاختبار في معظم برامج الحاسوب.

مثال ذلك، بافتراض دراسة العلاقة بين الادخار، S_i ، ومستوى الدخل، Y_i ، للأسر وذلك باستخدام بيانات المقطع العرضي. وعند تقدير دالة الادخار، Saving Function، والتي ربما تعرض عدم تباين حد الخطأ للسبب نفسه، فإن دالة الاستهلاك ربما تكون بصيغة خطية بسيطة، وبافتراض أننا حصلنا على النتائج الآتية:

...(1.7)

$$\hat{S}_i = -1.062 + 0.295Y_i$$

$$Se_1 \quad 0.851 \quad 0.075$$

$$Se_2 \quad (1.233) \quad (0.152)$$

$$R^2 = 0.137 \quad , \quad Se = 4.154$$

ان الأخطاء المعيارية الأولى، Se_1 ، تقترح بان الدخل له أثر معنوي جداً على الادخار وذلك طبقاً لاختبار t المحسوبة ($t_1^* = 3.95$). أما الأخطاء المعيارية المنقحة، Se_2 تكون الضعف في الحجم. وان قيمة t_2^* المحسوبة لها تساوي ($t_2^* = 1.95$) وهي تمثل أقل من قيمة t_1^* ، وان استخدام اختبار ذات طرف واحد يكون ملائماً. ومن ثم نحكم بان الدخل يكون موجب ومعنوي عند مستوى معنوية 5% مع ان العامل لا يكون معنوياً عند إجراء الاختبار ذات الطرفين، ومن ثم فإن الأخطاء المعيارية الأولى، Se_1 ، ربما تقود إلى تقييم مضلل.

ولمواجهة مشكلة تباين حد الخطأ، والإبقاء على صحة الفرضية القائلة باستقلالية حد الخطأ، U_i ، عن المتغير المستقل، Y_i ، أي: $E(U_i Y_i) = 0$

وبافتراض ان العلاقة المراد دراستها في نموذج الانحدار البسيط هي:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \quad \dots(2.7)$$

إذ لابد ان نفترض ان قيمة معامل حد الخطأ تكون مساوية للصفر، أي: $E(U_i) = 0$ ، مهما كانت قيمة المتغير المستقل، Y_i ، بالنسبة لكل قيمة من قيم Y ، أي ان متوسط قيم Y_i يساوي كل قيمة من قيم المتغير المستقل Y ، التي تبدأ من القيمة الأولى، Y_1 ، حتى آخر قيمة لها، Y_n ، والتي ينتج عنها $E(U_i) = 0$.

ويمكن التعبير عن ذلك بالصيغة الآتية:

$$[AY_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow E(U_i) = 0] \quad \dots(3.7)$$

ويعني ذلك ان متوسط العلاقة، Average Relationship، بين المتغير التابع،

C_i^A ، والمستقل يمكن كتابتها كما يأتي:

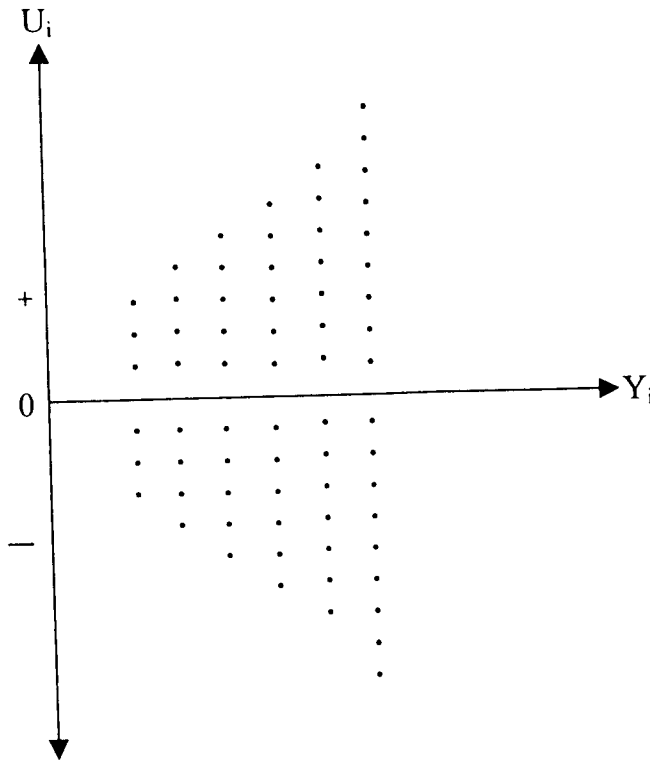
$$C_i^A = B_0 + B_1 Y_i \quad \dots(4.7)$$

معنى ذلك ان معامل حد الخطأ ليس له أي ارتباط بالمتغير المستقل، Y_i . وبذلك يمكن كتابة العلاقة بين المتغير التابع وحد الخطأ، وكما يأتي:

$$E(U_i Y_i) = 0$$

ونترضح ذلك، نأخذ الشكل البياني (2.7) الآتي:

الشكل (2.7): العلاقة بين معامل حد الخطأ والمتغير المستقل

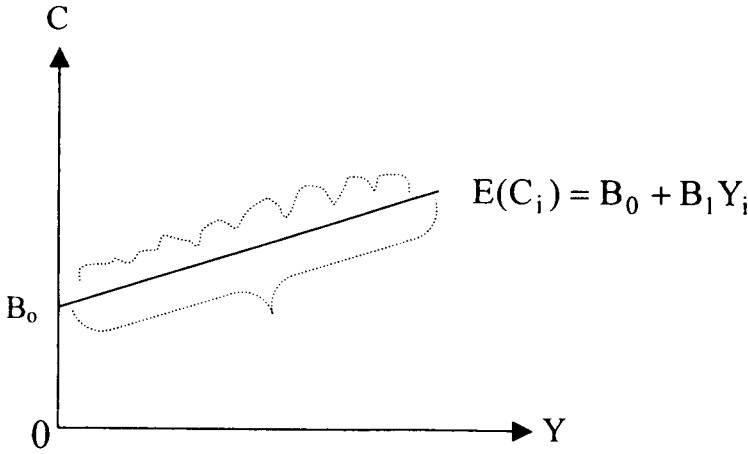


حيث يلاحظ من الشكل (2.7) ان معامل حد الخطأ، U_i يزداد بزيادة المتغير المستقل، Y_i ، ولكن لا يوجد ارتباط بينهما، وذلك لان قيمة معامل حد الخطأ مساوية، في المتوسط، إلى الصفر. أي ان $E(U_i) = 0$ عن كل قيمة من قيم المتغير المستقل، Y . أما في حالة ثبات حد الخطأ، U_i وهي أحد أهم افتراضات نموذج الانحدار والذي يكون مشروطاً باختبار قيم المتغيرات المستقلة، فإنه يكون مساوياً إلى σ^2 وهذا يمثل افتراض ثبات تباين الخطأ أو تجانس التباين، Homoscedasticity ويمكن كتابته بالصيغة الآتية:

$$E(U_i^2) = \sigma_i^2 \quad , (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots(5.7)$$

ويمكن توضيح ذلك في الشكل البياني (3.7) الذي يوضح العلاقة بين متغيرين هما (C) متغير تابع و (Y) متغير مستقل في حالة ثبات تباين حد الخطأ. ويلاحظ من الشكل ان تباين حد الخطأ لا يعتمد على قيم المتغير المستقل، Y.

الشكل (3.7): ثبات تباين حد الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



3.7 أسباب عدم تجانس حد الخطأ،

:The Reasons of Heteroscedasticity

هناك أسباب عدة لظهور هذه المشكلة ومن أهمها ما يأتي:

- 1- سلوكية وتصرف الأفراد التي تقل الأخطاء فيها بمرور الزمن، وعليه فان تباين حد الخطأ (σ_i^2) يتناقص هو الآخر خلال الفترة الزمنية.
- 2- يتزايد تباين حد الخطأ (σ_i^2) مع زيادة مستوى الدخل وذلك لتباين وتعدد

اختبارات الناس في سلوكهم، مثال ذلك، تباين الأنفاق على المواد الغذائية بين الأسر يمكن أن يزيد بزيادة دخل الأسرة.

3- مع تحسن أساليب جمع البيانات يقل تباين حد الخطأ (σ_i^2) وذلك لان جمع البيانات الدقيقة والواقعية تقلل من الأخطاء، مثال ذلك ان الأخطاء التي ترد في المستندات في المؤسسات الحكومية والتي تستخدم الحاسب الآلي لتحليل البيانات تكون أقل من مثيلتها في المؤسسات التي لا تستخدم الحاسب الآلي.

4.7 اكتشاف عدم تجانس حد الخطأ، :Detection of Heteroscedasticity

هناك طرق عدة يمكن بواسطتها اختبار فيما لو كان النموذج يعاني من مشكلة عدم تجانس التباين أم لا، منها:

1.4.7 اختبار كولد فيلد وكوانت، :GOLDFELD and QUANDT Test

يعد من الاختبارات المهمة لغرض الكشف عن مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ، ويتم استخدامه في حالة العينات كبيرة الحجم، حيث يتم:

- 1- ترتيب البيانات الخاصة بالمتغير المستقل، X_i ، من اصغر قيمة إلى اكبر قيمة.
- 2- حذف المشاهدات الوسطية من بيانات العينة ويفضل حذف 1/5 المشاهدات.
- 3- تقسم المشاهدات الباقية إلى عینتين جزئيتين متساويتين تنطوي الأولى على قيم X_i الصغيرة، والثانية على قيم X_i الكبيرة.
- 4- يتم تقدير معلمات العلاقة الخطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل لكل عينة جزئية على انفراد.
- 5- يتم احتساب تباين الخطأ للعينة الجزئية الأولى، S_1^2 ، وللعينة الجزئية الثانية، S_2^2 بموجب الصيغة الآتية:
أ. بالنسبة للعينة الجزئية الأولى:

$$S_{i1}^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_1 - 2} \quad \dots (6.7)$$

حيث ان:

$\sum e_i^2$: مجموع مربعات البواقي في العينة الجزئية الأولى.

T_1 : حجم العينة الجزئية الأولى.

2 : ثوابت النموذج.

ب. بالنسبة للعينة الجزئية الثانية:

$$S_{i2}^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_2 - 2} \quad \dots (7.7)$$

6- احتساب إحصاءه F^* وفق الصيغة الآتية:

$$F^* = \frac{S_{i2}^2}{S_{i1}^2} \quad \dots (8.7)$$

فإذا كانت قيمة F^* المحتسبة اصغر من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية قدرها $T_2 - 2$ للبسط و $T_1 - 2$ للمقام نأخذ بفرضية العدم التي تنص على

عدم وجود المشكلة أي تجانس تباين الخطأ، حيث: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$.

أما إذا كانت F^* المحتسبة اكبر من قيمة F الجدولية عند نفس مستوى المعنوية ودرجة الحرية فنأخذ بالفرضية البديلة H_1 ، التي تنص على وجود المشكلة، أي عدم

تجانس تباين الخطأ، أي: $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_n^2$.

مثال (1.7): في ضوء البيانات الإحصائية الآتية التي تبين الأنفاق الاستهلاكي (Y)

والدخل القابل للتصرف (X) في اقتصاد إحدى الدول للمدة 1983-1994.

السنة	Y	X
1983	26.1	38.3
1984	29.3	43.5
1985	35.6	53.5
1986	39.4	60.8
1987	42.7	66.4
1988	46.3	71.2

السنة	Y	X
1989	50.1	77.2
1999	54.5	86.1
1991	60.1	94.6
1982	64.9	102.4
1993	69.2	109.9
1994	73.1	115.6

المطلوب: اختبار عدم تجانس التباين باستخدام اختبار Goldfeld Quandt Test

الحل:

البيانات الخاصة بالمتغير المستقل (X_i) مرتبة في السؤال من اصغر قيمة إلى اكبر قيمة بالصدفة، تحذف 1/5 المشاهدات ، أي $2.5 = (12)(\frac{1}{5})$ مشاهدة، حيث تحذف المشاهدين الخاصتين بعامي 1988 و 1989 لكي تقسم البيانات إلى مجموعتين جزئيتين متساويتين تضم كلأ منها (5) مشاهدات وكالاتي:

المجموعة الجزئية الأولى:

السنة	Y	X	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	$\hat{Y}$
1983	26.1	38.3	-8.52	-14.2	120.984	201.64	26.246075
1984	29.3	43.5	-5.32	-9.0	47.88	81.0	29.312583
1985	35.6	53.5	0.98	1.0	0.98	1.0	35.209713
1986	39.4	60.8	4.78	8.3	39.674	68.89	39.514618
1987	42.7	66.4	8.08	13.9	112.312	193.21	42.817011
n = 5	173.1	262.5	0	0	321.83	454.74	173.1

$$\bar{Y} = 34.62$$

$$\bar{X} = 52.5$$

e_i	e_i^2
-0.146075	0.0213379
-0.012583	0.0001583
0.390287	0.1523239
-0.114618	0.0131372
-0.117011	0.0136915
0	0.2006488

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{321.83}{545.74} = 0.589713$$

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{x}$$

$$\hat{B}_0 = 34.62 - (0.589713)(52.5)$$

$$\hat{B}_0 = 34.62 - 30.5959932$$

$$\hat{B}_0 = 3.660068$$

نحن المعادلة التقديرية، هي:

$$\therefore \hat{Y} = 3.66068 + 0.589713 X_i$$

$$S_1^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_1 - 2} = \frac{0.2006488}{5 - 2} = 0.0668829$$

المجموعة الجزئية الثانية:

السنة	Y	X	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1990	54.5	86.1	-9.86	-15.62	154.0132	243.9844	97.2196
1991	60.1	94.6	-4.26	-7.12	30.3312	50.6944	18.1476
1992	64.9	102.4	0.54	0.68	0.3672	0.6424	0.2916
1993	69.2	109.9	4.84	8.18	39.5912	66.9124	23.4256
1994	73.1	115.6	8.74	13.88	121.3112	192.6544	76.3876
$n = 5$	321.8	508.6	0	0	354.614	554.708	215.472

$$\bar{Y} = 64.36$$

$$\bar{X} = 101.72$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{345.614}{554.708} = 0.6230557$$

$$\hat{B}_0 = \bar{Y} - \hat{B}_1 \bar{x}$$

$$\hat{B}_0 = 64.36 - (0.6230557)(101.72)$$

$$\hat{B}_0 = 64.36 - 63.377225$$

$$\hat{B}_0 = 0.982775$$

أذن المعادلة التقديرية، هي:

$$\hat{Y} = 0.982775 + 0.623055 X_i$$

$$\sum \hat{y}^2 = \hat{B}_1 \sum xy = 0.6230557(345.61) = 215.33677$$

$$\sum e_i^2 = \sum y^2 - \sum \hat{y}^2$$

$$\sum e_i^2 = 215.472 - 215.3367 = 0.13523$$

$$S_2^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_2 - 2} = \frac{0.13523}{5 - 2} = 0.0450766$$

$$F^* = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0.0450766}{0.0668829} = 0.673963$$

وبمقارنة قيمة F^* المحتسبة والبالغة (0.673) مع قيمتها الجدولية البالغة (9.28) عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (3، 3) للبسط والمقام، يتضح بأن F^* المحتسبة أقل من F^* الجدولية، عليه تقبل فرضية العدم H_0 ، والتي تنص على تجانس تباين الخطأ، أي عدم وجود المشكلة .

2.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان،

:Spearman's Rank Correlation Coefficient Test

يُعد هذا الاختبار من أسهل وأبسط الاختبارات المستخدمة في اكتشاف مشكلة عدم تجانس التباين، ويمكن تطبيقه على العينات الكبيرة والصغيرة. يعتمد هذا الاختبار على القيم المطلقة لحدود الخطأ (أي إهمال إشارة، $|e_i| = e_i$) وقيم المتغير المستقل موضوع الدراسة. ويتطلب احتساب هذا المؤشر:

1- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة OLS.

2- احتساب البواقي، e_i ، $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

3- ترتيب قيم المتغير المستقل (X_i) والانحرافات (e_i) تصاعدياً أو تنازلياً، وإعطاء كل منها رتبا معينة وفق تسلسل القيم ثم تحسب فروقات الرتب، ومن ثم نستخرج معامل ارتباط الرتب ما بين القيم المطلقة للانحرافات وقيم المتغير المستقل المعني

وفق قانون سبيرمان، Spearman، لارتباط الرتب الآتي:

$$r_s = 1 - \left[\frac{6 \sum D_i^2}{n(n^2 - 1)} \right] \quad \dots(9.7)$$

حيث أن:

n : تمثل حجم العينة.

D_i : تمثل الفرق ما بين رتب القيم المطلقة للانحرافات (لحد الخطأ، $|e_i|$) ورتبة المتغير المستقل، X_i ، المناظرة.

وكلما اقتربت قيمة r_s من الواحد الصحيح دل ذلك على وجود علاقة قوية بين e_i و X_i ومن ثم وجود مشكلة عدم تجانس التباين (وجود علاقة تباين حد الخطأ).

ويمكن التأكد من وجود المشكلة من خلال اختبار t على وفق الصيغة الآتية:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} \quad \dots(10.7)$$

- ثم إيجاد قيمة t^c الجدولية وذلك بالبحث عنها في جدول توزيع t في نهاية الكتاب عند درجات حرية $(n-k+1)$ ومستوى معنوية 1% أو 5%.

- إجراء مقارنة بين قيمة t^* المحسوبة مع نظيرتها قيمة t^c الجدولية، فإذا كانت قيمة $t^c < t^*$ نقبل فرضية العدم، H_0 ، القائلة بوجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ أو التجانس ونرفض الفرضية البديلة.

- أما إذا كانت $t^c > t^*$ نرفض فرضية العدم، H_0 ، ونقبل الفرضية البديلة، H_1 ، القائلة بوجود ثبات مشكلة تباين حد الخطأ.

- وبشكل عام يمكن القول بأنه كلما كانت قيمة معامل ارتباط الرتب (r_s) عالية وقريبة من الواحد الصحيح، دل ذلك على وجود علاقة قوية بين انحرافات حد الخطأ والمتغير المستقل، ومن ثم يكون هناك وجود علاقة تباين حد الخطأ.

وبالرجوع إلى بيانات المثال (1.7)، الخاص بالأنفاق الاستهلاكي (Y) والدخل القابل للتصرف في اقتصاد أحد الدول للمدة (1983-1994) وبتطبيق معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لاختبار وجود أو عدم وجود مشكلة عدم تجانس التباين تكون:

السنة	Y_i	X_i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1983	26.1	38.3	-38.325	-23.175	888.18187	1468.8056
1984	29.3	43.5	-33.125	-19.975	661.67187	1097.2656
1985	35.6	53.5	-23.125	-13.675	316.23437	534.76562
1986	39.4	60.8	-15.825	-9.875	156.27187	250.43062
1987	42.7	66.4	-10.225	-6.575	67.229375	104.55062
1988	46.43	71.2	-5.425	-2.975	16.139375	29.430625
1989	50.1	77.2	0.575	0.825	0.474375	0.330625
1990	54.5	86.1	9.475	5.225	49.506875	89.775625
1991	60.1	94.6	17.975	10.825	194.57937	323.10062
1992	64.9	102.4	25.775	15.625	402.73437	664.35062
1993	69.2	109.9	33.275	19.925	663.00437	1107.2256
1994	73.1	115.6	38.975	23.825	928.57937	1519.0506
$n=12$	$\sum Y_i = 591.3$	$\sum X_i = 919.5$	$\sum x_i = 0$	$\sum y_i = 0$	$\sum x_i y_i = 4344.6067$	$\sum x_i^2 = 7189.0822$

$\hat{Y}_i$	e_i	Rank of x_i	Rank of e_i	$D_i = X_i - e_i$	D_i^2
26.113903	-0.013903	1	1	0	0
29.256439	0.043561	2	3	-1	1
35.299778	0.300222	3	7	-4	16
39.711416	-0.311416	4	9	-5	25
43.095685	-0.395685	5	10	-5	25
45.996488	0.303512	6	8	-2	4
49.622492	0.477508	7	11	-4	16
55.001063	-0.501063	8	12	-4	16
60.137901	-0.037901	9	2	7	49
64.851706	0.048294	10	4	6	36
69.38421	-0.18421	11	5	6	36
72.828913	0.271087	12	6	6	36
$\Sigma \hat{Y}_i = 591.3$	$\Sigma e_i = 0$				$\Sigma D_i^2 = 260$

$$r_s = 1 - \frac{6 \Sigma D_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(260)}{12(12^2 - 1)} = 1 - \frac{1560}{12(144 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1560}{1716}$$

$$= 1 - 0.9090909$$

$$= 0.0909091$$

ولما كانت قيمة r_s تساوي (0.09) يدل ذلك على وجود علاقة ضعيفة بين x_i و e_i ومن ثم عدم وجود مشكلة عدم تجانس التباين. وللتأكد من ذلك يمكن إجراء اختبار t وكالاتي:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091 \sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(0.0909091)^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091 (3.1622776)}{\sqrt{1-0.0082644}}$$

$$t = \frac{0.2874798}{0.9958592}$$

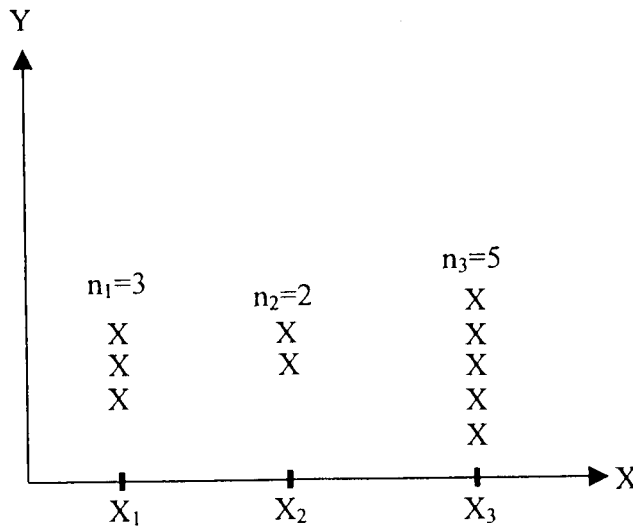
$$t = 0.2886751$$

وبمقارنة قيمة t^* المحتسبة البالغة (0.288) مع قيمتها الجدولية t^c البالغة (2.23) عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (10)، يتضح بأن القيمة المحتسبة اقل من القيمة الجدولية، عليه تُرفض فرضية العدم، H_0 ، ونُقبل الفرضية البديلة، H_1 ، التي تنص على تجانس تباين الخطأ، أي عدم وجود المشكلة.

3.4.7 اختبار بارتليت، BARTLETT Test:

يُستخدم هذا الاختبار في حالة توفر أكثر من مشاهدة لكل قيمة من قيم المتغير المستقل (X) كما مبين في الشكل 4.7:

الشكل 4.7: اختبار بارتليت



يتضح من الشكل السابق بأن المتغير المستقل، X_i ، أخذ ثلاث مستويات وهناك مشاهدات عديدة لكل مستوى، فمثلاً هناك 3 مشاهدات عند المستوى X_1 ومشاهدتين عند المستوى X_2 و 5 مشاهدات عند المستوى X_3 . فلو رمزنا لعدد المشاهدات عند كل مستوى من المستويات (i) بالرمز (n_i) ، حيث $(i=1,2,...,m)$ ومنه يكون المجموع الكلي لمشاهدات العينة مساوياً إلى $\sum_{i=1}^m n_i = N$ ، عليه يمكن إعادة صياغة النموذج الخطي البسيط وبدون إحداث أي تغيير في الجوهر على النحو الآتي:

$$Y_{ij} = B_0 + B_1 X_{ij} + U_{ij} \quad \dots (11.7)$$

حيث $(j=1,2,\dots,n_i)$ وهي عبارة عن رقم المشاهدة عند مستوى معين من مستويات المتغير المستقل X_i . فمثلاً عند المستوى X_1 تكون $(j=1,2,3)$ أي $(n_i=3)$. ومحتوى اختبار بارثليت هو تجزئة العينة المدروسة إلى عدد من العينات الجزئية ولتكن (m) ، ومن ثم احتساب تباين الخطأ لكل عينة جزئية (S_i^2) بمستوى معنوية معين ودرجة حرية (n_i) للتأكد من احتمالية انسحاب هذه العينات الجزئية من مجتمع معين، فإذا قبلت فرضية العدم الآتية:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$$

أي:

$$H_0: \sigma_i^2 = \sigma^2$$

دل ذلك إن العينات مسحوبة من مجتمع واحد (متجانس)، أي ان تباين الخطأ ثابت. وبالعكس في حالة قبول الفرضية البديلة:

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_n^2$$

أو:

$$H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma^2$$

أي ان تباين الخطأ غير ثابت.

ولإجراء اختبار بارثليت، نتبع الخطوات الأساسية الآتية:

- احتساب Q/L ، حيث ان:

$$Q = N \log \left(\frac{\sum_{i=1}^m n_i S_i^2}{N} \right) - \sum_{i=1}^m n_i \log S_i^2 \quad \dots\dots(12.7)$$

$$L = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n} \right) \quad \dots\dots(13.7)$$

حيث إن:

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \quad \dots\dots(14.7)$$

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad \dots\dots(15.7)$$

والمقدّر Q/L يتوزع بصورة مقارنة إلى توزيع χ_{m-1}^2 (Chi-Square) بدرجة حرية $(m-1)$ ومستوى معنوية معين. فإذا كانت:

$$Q/L \leq \chi_{m-1}^2$$

تقبل فرضية العدم، أي أن تباين الخطأ المحسوب من العينات الجزئية ثابت (متساوي).

أما إذا كانت:

$$Q/L \geq \chi_{m-1}^2$$

فيقبل الفرض البديل، أي أن تباين الخطأ المحسوب من العينات الصغيرة غير متجانس، أي وجود مشكلة عدم تجانس التباين.

4.4.7 طريقة كليجر، GLEJSER Method:

يعتمد هذا الاختبار على شكل العلاقة بين الانحرافات العشوائية والمتغير المستقل الذي تعتمد عليه تلك الانحرافات، حيث يتم:

1- تقدير معلمات العلاقة الخطية ومن ثم إيجاد قيم الانحرافات الناتجة من الفرق بين القيم الحقيقية والتقديرية للمتغير التابع.

2- أخذ القيمة المطلقة للبواقي، $|e_i|$ ، كمتغير تابع في الانحدار، حيث يكون المتغير المستقل هو X_i الذي نعتقد بارتباطه مع σ_i^2 ، ومن الأمثلة على مثل هذه الصيغ:

$$|e_i| = B_0 + B_1 X_i$$

$$|e_i| = B_0 + B_1 \sqrt{X_i}$$

$$|e_i| = B_0 + B_1 / X_i$$

3- اختبار معنوية معلمات العلاقة المقترحة، B_0 و B_1 ، من الناحية الإحصائية. فإذا أعطت إحدى الصيغ أعلاه قيمة جوهرياً لمعاملات الانحدار عندئذٍ يجب تحويل متغيرات النموذج وفقاً للصيغة المذكورة. بعبارة أخرى، يمكن عن طريقها تحديد صيغة العلاقة بين الأخطاء العشوائية والمتغير المستقل.

5.4.7 اختبار بارك، PARK Test:

للكشف عن مشكلة تباين الخطأ نستخدم اختبار بارك كما يلي:

بافتراض ان نموذج الانحدار البسيط المراد تقديره في عملية الاختبار هو:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \quad , (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots (16.7)$$

وان:

n : تمثل عدد المشاهدات.

C_i : تمثل القيمة الفعلية للإنفاق الاستهلاكي.

Y_i : تمثل القيمة الفعلية لمستوى الدخل.

B_0, B_1 : تمثل معاملات النموذج المراد تقديره.

ولاستخدام اختبار بارك في اكتشاف مشكلة تباین حد الخطأ نتبع ما يأتي:

- تطبيق طريقة OLS لتقدير معاملات النموذج، ونحصل على:

$$\hat{C}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 Y_i + e_i \quad \dots (17.7)$$

- للحصول على القيم المقدرة لحد الخطأ، e_i ، من المعادلة أعلاه، كما يأتي:

$$e_i = C_i - \hat{C}_i \quad \dots (18.7)$$

- لتطبيق طريقة OLS في إجراء انحدار $\ln e_i^2$ على $\ln Y_i$ نحصل على:

$$\ln e_i^2 = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \ln Y_i \quad \dots (19.7)$$

- تحسب قيمة t^* المحتسبة بالنسبة للمعامل b وكما يأتي:

$$t_b^* = \frac{\hat{b}}{se\hat{b}} \quad \dots (20.7)$$

حيث ان:

$$se\hat{b} = \sqrt{\text{var } \hat{b}}$$

وان:

$$\text{var } \hat{b} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum Y_i^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وان انحرافات y_i عن الوسط الحسابي هي:

$$y_i = y_i - \bar{Y}$$

وان درجات الحرية، $(df = n - k + 1)$.

- نجد قيمة t^c الجدولية ثم نقارنها مع نظيرتها t^* المحسوبة عند درجات حرية $(n - k + 1)$.

إذا كانت $t^c < t^*$ نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل القائل ان $b \neq 0$ ، ويقال عندئذ إن قيمة المعامل b يكون معنوي إحصائياً. ويدل ذلك على وجود مشكلة تباین حد الخطأ، والعكس إذا كانت $t^c > t^*$ عدم وجود مشكلة تباین حد الخطأ.

5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين:

كما بينا سابقاً إن خرق فرضية ثبات التباين لحدود الخطأ يؤدي إلى وجود قيم مختلفة وغير ثابتة لتباينات حدود الخطأ العشوائية، ومن ثم فإن القطر الرئيس لمصفوفة التباين والتباين المشترك الخاصة بحدود الخطأ يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة، أي ان:

$$E(U_i U_j) \neq \sigma^2 I_n$$

حيث ان:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \dots \neq \sigma_n^2$$

وتتمثل معالجة مشكلة عدم تجانس التباين في المجتمعات الفرعية بتحديد الأوزان ومن ثم استخدام هذه الأوزان في تحويل صيغة النموذج إلى صيغة أخرى ينتج عنها قيم متساوية في قطر المصفوفة $\sigma^2 \text{In}$. ولتحقيق هذا الفرض توجد طرق مختلفة منها:

1- عندما يزداد تباين المتغير التابع، Y ، بشكل تناسبي مع قيمة الوسط الحسابي، $\bar{X}$ ، فإنه يمكن تحويل المتغيرات التي تعاني من مشكلة عدم تجانس التباين من خلال قسمة طرفي المعادلة $Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$ على المتغير المستقل، X_i ، وكما في الصيغة الآتية:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{B_0}{X_i} + B_1 \frac{X_i}{X_i} + \frac{U_i}{X_i}$$

مع ملاحظة إن الحد الثابت في المعادلة الرئيسة B_0 أصبح يمثل معامل الانحدار، أي B_1 . وان B_1 أصبح يمثل الثابت، مما يجعل معامل التحديد R^2 مختلف في المعادلتين، لاختلاف قيم المتغير التابع، Y_i في الأولى و $\frac{Y_i}{X_i}$ في الثانية:

2- عندما يزداد تباين المتغير التابع، Y_i ، بشكل تناسبي مع الزيادة في X_i فنتم عملية التحويل بقسمة طرفي معادلة الانحدار على $\sqrt{X_i}$ ، أي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{B_0}{\sqrt{X_i}} + B_1 \frac{X_i}{\sqrt{X_i}} + \frac{e_i}{\sqrt{X_i}}$$

هنا العلاقة بين المتغيرين X_i و Y_i أصبح علاقة بين ثلاث متغيرات $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$ ، $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$

$\sqrt{X_i}$ ، علماً بأن قيمة الثابت بعد التحويل تصبح صفر، كما وان قيمة R^2 تصبح اكبر، مما يجعل تقدير القيمة المتوقعة للمتغير التابع، Y ، غير دقيقة.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.7: يعطي الجدول الآتي بيانات كل من X_i ، e_i والمطلوب استخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان في اكتشاف مشكلة عدم تجانس التباين علماً ان $t_{5\%} = 0.549$.

التسلسل	X_i	e_i
1	12.4	1.017
2	14.4	1.260
3	14.6	0.181
4	16.0	0.202
5	11.3	0.221
6	10.0	0.602
7	16.2	0.908
8	10.4	0.110
9	13.1	0.077
10	11.3	0.038

السؤال 2.7: إذا أعطيت الصيغة التقديرية الآتية:

$$\hat{Y}_i = 5.25 - 0.42X_i$$

علماً بأن كل من X_i ، Y_i أخذت المشاهدات الآتية:

التسلسل	Y_i	X_i
1	6	1
2	4	1
3	3	2
4	5	3
5	4	2
6	5	4
7	3	5
8	2	6

احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب.

السؤال 3.7: باستخدام عينة عشوائية مكونة من (12) عائلة توصل باحث اقتصادي إلى البيانات الآتية فيما يخص بمتغيرين، الدخل Y والادخار S بآلاف الدنانير.

التسلسل	الدخل، Y	الادخار، S
1	30.5	2.6
2	26.0	2.2
3	18.0	1.5
4	42.5	4.0
5	30.0	2.7
6	28.0	2.9
7	27.5	2.6
8	32.5	3.0
9	35.0	3.2
10	26.0	2.7
11	27.5	2.2
12	39.0	3.4

المطلوب:

- قدر دالة الادخار للعينه.
- استعمل اختبار كولد فيلد وكوانت للتحقق من وجود مشكلة عدم تجانس التباين.

الفصل الثامن: نماذج المعادلات الآنية

Simultaneous Equations Models

- 1.8 طبيعة المعادلات الآنية.
- 2.8 مشكلة التحيز الآني.
- 3.8 نماذج المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية.
 - 1.3.8 نموذج العرض والطلب.
 - 2.3.8 النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي.
 - 3.3.8 نموذج فيلبس الأجر النقدي-السعر.
- 4.8 الشكل المختزل.
- 5.8 تقدير نموذج المعادلات الآنية.
 - 1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، ILS.
 - 2.5.8 طريقة المتغيرات المساعدة، IV.
 - 3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، TSLS.
- 6.8 الأسئلة والتمارين.

الفصل الثامن: نماذج المعادلات الآتية

Simultaneous Equations Models

1.8 طبيعة المعادلات الآتية:

كان التركيز فيما تقدم من الفصول على نماذج المعادلة المنفردة، والذي يفترض بأن هناك اتجاهًا وحيداً للسببية بين متغير أو متغيرات مستقلة إلى متغير تابع. ولكن هذه العلاقة السببية لا تكون كذلك دائماً، فقد تكون باتجاهين من المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) إلى المتغير التابع، وكذلك من المتغير التابع إلى المتغير أو المتغيرات المستقلة. وهذا التأثير المتبادل يجعل الفرض الذي يتعلق باستقلال المتغير العشوائي عن المتغير المستقل غير صحيح، أي أن:

$$E(X_i U_i) \neq 0$$

ومن ثم فإن مقدرات OLS ستكون متحيزة وغير متسقة. ان وجود تأثير ذو اتجاهين في الدالة يعني بحد ذاته ضرورة وجود معادلتين أو مجموعة من المعادلات لوصف العلاقة بين متغيرين، فالمتغير التابع في معادلة أولى قد يوجد ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة في معادلة ثانية. وعند ذلك يؤدي دوراً مزدوجاً إذ يكون هو الأثر (تابع) في المعادلة الأولى والمؤثر (مستقل) في المعادلة الثانية. ان هذا النظام في وصف التأثير المتبادل بين المتغيرات يسمى بنظام المعادلات الآتية، Simultaneous Equations System.

وبشكل عام يمكن تعريف منظومة المعادلات الآتية بأنها عبارة عن مجموعة معادلات يكون فيها المتغير التابع لواحد أو أكثر من معادلاتها متغيراً مستقلاً في معادلة أو أكثر ضمن تلك المجموعة. وان المتغيرات التابعة في تلك المجموعة من المعادلات تسمى بالمتغيرات الداخلية، Endogenous variables، حيث يقابل كل متغير داخلي في المنظومة معادلة واحدة وبهذا فان عدد المعادلات في منظومة المعادلات الآتية ينبغي ان يساوي عدد المتغيرات الداخلية. أما المتغيرات الخارجية، Exogenous variables، فان عددها يكون غير محدداً، إذ لا توجد قيود تحدد عدد هذه المتغيرات وإنما يتوقف ذلك على طبيعة العلاقة بين مختلف معادلات المنظومة، وكمثال على نموذج آني مبسط نأخذ النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي وكما يلي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t \quad \dots(1.8)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad \dots(2.8)$$

حيث ان:

C_t : تمثل الأنفاق الاستهلاكي في الفترة الزمنية t .

Y_t : تمثل الدخل في الفترة الزمنية t .

I_t : تمثل الاستثمار في الفترة الزمنية t .

B_0, B_1 : تمثل معالم دالة الاستهلاك.

U_t : تمثل المتغير العشوائي.

وإذا ما نظرنا إلى النموذج السابق نجد ان الاستهلاك، C_t ، والدخل، Y_t ، في المعادلة الأولى متغيران داخليان ويحدد أحدهما الآخر، أما المعادلة الثانية فهي معادلة تعريفية

أو متطابقة الدخل القومي، ولا تتضمن أي متغيرات عشوائية كما لا تتضمن معلومات مجهولة وان I_t الاستثمار هو متغير خارجي يجري تحديده من خارج النموذج. ومن ناحية أخرى فإن المعادلة الأولى من النموذج هي التي تمثل دالة الاستهلاك وهي معادلة سلوكية أو هيكلية تصف سلوك المستهلك، إذ توضح اعتماد C_t على Y_t وان ميل المعادلة هو B_1 الذي يمثل الميل الحدي للاستهلاك ويكون موجب وذلك بسبب العلاقة الطردية بين الأنفاق الاستهلاكي كمتغير تابع ومستوى الدخل كمتغير مستقل أي إذا زاد الدخل يترتب عليه زيادة في الاستهلاك ولكن ليست كل الزيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك بل يذهب جزء منها إلى الادخار وان U_t تمثل بقية العوامل التي تؤثر على الاستهلاك وغير داخلة في النموذج كأسعار الفائدة وتوزيع الدخل،... الخ. ومن ثم فإن التغير في أي من هذه العوامل سوف يترتب عليها تغير في المتغير العشوائي، U_t ، ومن ثم انتقال دالة الاستهلاك وتغير مستوى الدخل، Y_t ، وبذلك يكون هناك ارتباط بين المتغير المستقل، Y_t ، والمتغير العشوائي، U_t ، وعليه لا يمكن استخدام طريقة OLS في حل النموذج، فإذا طبقت طريقة OLS العادية على كل معادلة من المعادلات الآتية أعلاه برغم انتفاء الشروط اللازمة لتطبيقها فإن ذلك سيقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة ويشار إلى ذلك بتحيز المعادلات الآتية. ويمكن توضيح ذلك في الفقرة الآتية.

2.8 مشكلة التحيز الآتي:

لبيان مشكلة التحيز الآتي في نموذج تحديد الدخل الكينزي السابق فإننا نشق الصورة المختزلة للنموذج وعلى النحو الآتي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t \quad \dots(1.8)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad \dots(2.8)$$

وبالتعويض عن قيمة C_t بما يساويها في المعادلة (1.8) من المنظومة أعلاه
فأن:

$$Y_t = (B_0 + B_1 Y_t + U_t) + I_t \quad \dots(3.8)$$

وبإعادة ترتيب الحدود:

$$Y_t - B_1 Y_t = B_0 + I_t + U_t \quad \dots(4.8)$$

$$Y_t(1 - B_1) = B_0 + I_t + U_t \quad \dots(5.8)$$

$$\therefore Y_t = \frac{B_0}{1 - B_1} + \frac{I_t}{1 - B_1} + \frac{U_t}{1 - B_1} \quad \dots(6.8)$$

يتبين من الصيغة (6.8) ان الدخل، Y_t ، دالة في عنصر الخطأ لدالة الاستهلاك،
أي ان:

$$\text{Cov} = (Y_t \ U_t) \neq 0$$

وذلك لأن:

$$\text{Cov} = (Y_t \ U_t) = E[Y_t - E(Y_t)][U_t - E(U_t)]$$

وبما أن:

$$E(U_t) = 0$$

فإن:

$$\text{Cov}(Y_t, U_t) = E[(Y_t - E(Y_t)) U_t]$$

وبالتعويض عن توقع Y_t :

$$\text{Cov}(Y_t, U_t) = E \left[Y_t - E \left(\frac{B_0}{1-B_1} + \frac{I_t}{1-B_1} + \frac{U_t}{1-B_1} \right) \right] [U_t]$$

وبالتعويض عن Y_t :

$$\text{Cov}(Y_t, U_t) = E \left[\left(\frac{B_0}{1-B_1} + \frac{I_t}{1-B_1} + \frac{U_t}{1-B_1} \right) - \left(\frac{B_0}{1-B_1} + \frac{I_t}{1-B_1} \right) \right] [U_t]$$

وبعد الاختصار والترتيب، نحصل:

$$\text{Cov}(Y_t, U_t) = E \left[\frac{1}{1-B_1} U_t \cdot U_t \right]$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة، بعد الترتيب، كما يلي:

$$\text{Cov}(Y_t, U_t) = \left(\frac{1}{1 - B_1} \right) E(U_t^2)$$

$$\text{Cov}(Y_t, U_t) = \frac{1}{1 - B_1} \sigma^2 U \neq 0$$

ويناقض ذلك الفرض الخاص بـ OLS والذي يؤكد على عدم ارتباط المتغيرات المستقلة مع العنصر العشوائي. فالمتغير الداخلي Y_t يؤدي دور المتغير المستقل في معادلة الاستهلاك الهيكلية إلا أنه يرتبط بالعنصر العشوائي U_t . حيث يترتب عند تطبيق OLS على تلك المعادلة الحصول على مقدرات متحيزة وغير متسقة.

لذا يستوجب اللجوء إلى طرق أخرى أهمها:

- طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، Indirect Least Squares (ILS).
 - طريقة المتغير الاداتي، Instrument Variable (IV).
 - طريقة الإمكان الأعظم، Maximum Likelihood Method.
 - طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (Two Stage Least Squares (2SLS).
- وسيتّم التطرق إلى بعض هذه الطرق في مبحث لاحق بعد دراسة نماذج المعادلات الآتية في النظرية الاقتصادية.

3.8 نماذج المعادلات الآتية في النظرية الاقتصادية:

1.3.8 نموذج العرض والطلب، Supply and Demand Model:

يتكون نموذج الطلب والعرض على سلعة ما من المعادلات الآتية:

$$Q_d = B_0 + B_1 P + U_1 \quad , \quad (B_1 < 0) \quad \dots(7.8)$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + U_2 \quad , \quad (\alpha_1 > 0) \quad \dots(8.8)$$

وعند التوازن تتساوى الكمية المطلوبة والمعرضة Q_d و Q_s من تلك السلعة في السوق حيث ان:

$$Q_d = Q_s \quad \dots(9.8)$$

عندما:

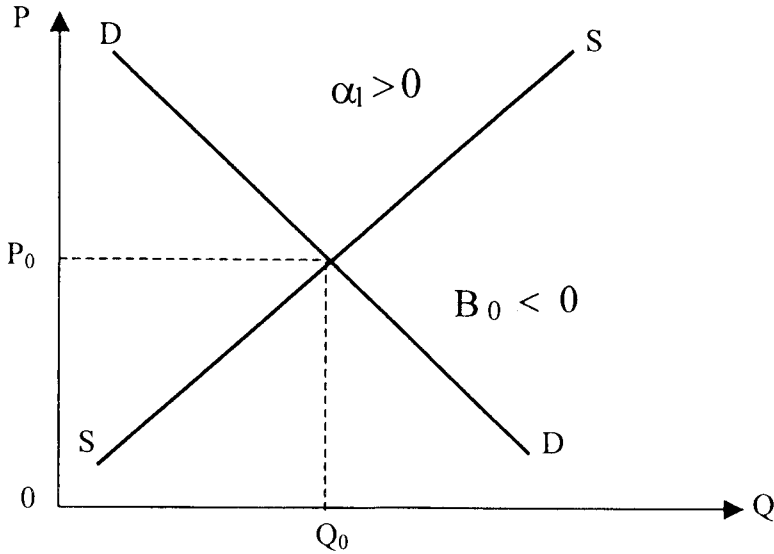
P : تمثل سعر تلك السلعة.

U_2, U_1 : تمثل المتغير العشوائي لدالة الطلب والعرض على التوالي.

$B_1, B_0, \alpha_1, \alpha_0$: تمثل معلمات النموذج.

أما التمثيل البياني للنموذج فهو كما في بالشكل (1.8).

شكل (1.8): نموذج توازن السوق



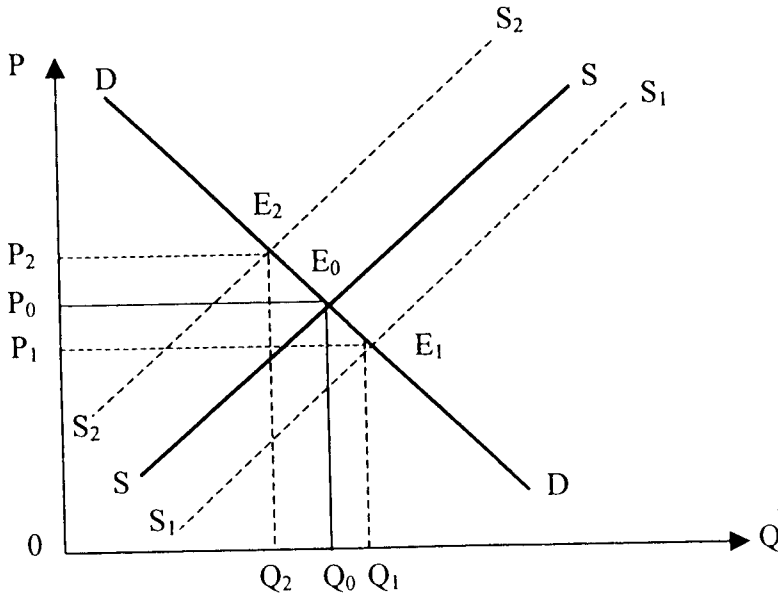
ومن الشكل السابق يمكن ملاحظة ما يأتي:

- أن SS يمثل منحنى العرض و DD يمثل منحنى الطلب و P_0 و Q_0 يمثلان السعر والكمية التوازنية في السوق على التوالي. وان كلا المنحنيين يأخذان شكل خط مستقيم أي بمعنى ان النموذج خطي.

- أن جميع متغيرات النموذج هي متغيرات داخلية، وذلك لأن الكمية المطلوبة والمعروضة تتحدد بالسعر في حالة تقاطع المنحنيين في السوق، ولكن هناك

بعض الآثار لتغيرات كل من ظروف العرض والطلب على تحديد توازن السوق. ويمكن تلخيصها بالشكل البياني (2.8).

شكل (2.8): تغير ظروف العرض مع ثبات الطلب



فإذا بدأنا من الوضع التوازني في السوق، فما هو أثر تغيرات ظروف العرض على توازن السوق مع افتراض ثبات منحنى الطلب؟

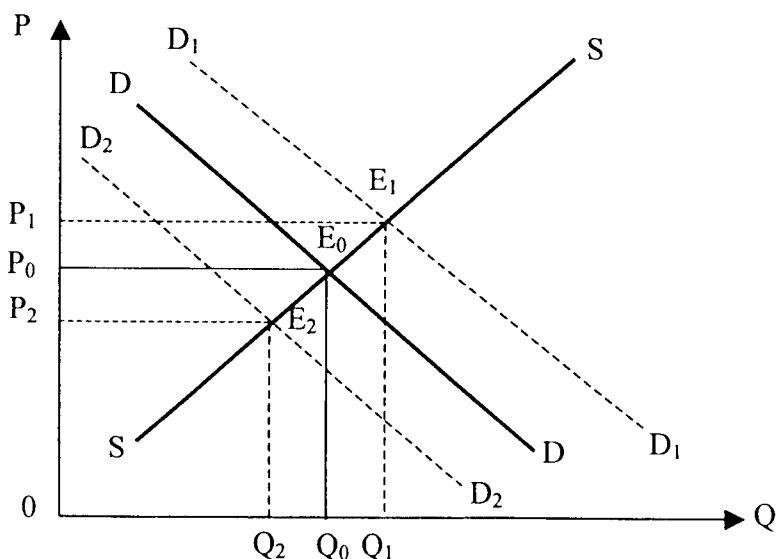
يلاحظ من الشكل (2.8) ان حدوث تغير في ظروف العرض مع ثبات ظروف الطلب ناتج من تغير أحد العوامل، التي افترضتها النظرية الاقتصادية ثابتة، مع تغير السعر، وهذه العوامل هي تغير المستوى الفني وتكاليف الإنتاج والقيود المفروضة على الواردات،... الخ. ويترتب على تغير هذه العوامل انتقال لكامل منحنى العرض الى اليمين او الى اليسار في حالة الزيادة والنقصان على التوالي. فعند تحسن المستوى

الفني للإنتاج سوف يؤدي إلى انتقال منحنى العرض إلى جهة اليمين وانتقال نقطة التوازن من النقطة (E_0) إلى نقطة توازن جديدة هي (E_1) نتيجة انخفاض السعر التوازني من P_0 إلى P_1 ، حيث يترتب عليها زيادة في الكميات التوازنية من تلك السلعة في السوق. أما في حالة رداءة المستوى الفني المستخدم ينتقل منحنى العرض إلى الأعلى مسبباً انخفاض في الكميات التوازنية وزيادة في السعر التوازني مع انتقال نقطة التوازن إلى (E_2) وبالتالي سوف يسقط الافتراض القائل بعدم وجود علاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير العشوائي ومن ثم لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعادلة (8.8).

وبطريقة مماثلة، فإن التغير في (U_i) يؤدي إلى حدوث تغير في المتغيرات الأخرى التي تؤثر على الكمية المطلوبة التي لم تدخل في نموذج الطلب مثل دخل المستهلك، وذوقه، وأسعار السلع الأخرى (البديلة أو المكملة)، ومن ثم فإن التغير في أي من العوامل أعلاه سوف يترتب عليه تغير في المتغير العشوائي (U_i) وبالتالي انتقال لمنحنى الطلب إلى اليمين أو إلى اليسار بالزيادة والنقصان مسبباً تغيراً في السعر والكمية التوازنية.

ومن ناحية أخرى ما هو اثر تغيرات ظروف الطلب على توازن السوق مع بقاء العرض ثابتاً. للجواب على ذلك يمكن الاستعانة بالشكل البياني (3.8) وكما يأتي:

شكل (3.8): تغير ظروف الطلب مع ثبات العرض



فإذا ازداد الدخل النقدي للمستهلك، على سبيل المثال، سيترتب على ذلك انتقال محي الطلب إلى جهة اليمين من (DD) إلى (D_1D_1) ، وانتقال نقطة التوازن من E_0 إلى E_1 ، حيث يتبع ذلك زيادة الكمية التوازنية إلى (Q_1) وانتقال السعر التوازني إلى (P_1) . ويترتب على ذلك بأن (U_1) سوف تكون موجبة أي أن $(U_i > 0)$ ، والعكس يحصل إذا انخفض دخل المستهلك، لأن منحنى الطلب سوف ينتقل إلى جهة اليسار من (DD) إلى (D_2D_2) نتيجة انتقال السعر التوازني إلى (P_2) والكمية التوازنية إلى (Q_2) . ويترتب عليه أن يكون المتغير العشوائي سالب، أي أن $(U_i < 0)$ ، وبذلك يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) في تقدير معادلة تص

(7.8).

من المثال أعلاه، يمكن ملاحظة ان هناك علاقة معتمدة تداخلية بين (P) و (Q) من ناحية، وبين المتغير العشوائي (U_i) والسعر (P) من ناحية ثانية، وبين (U_2) و (P_1) من ناحية أخرى. ولذلك فان أحد افتراضات الانحدار الخطي سوف تسقط، ويتمثل هذا الافتراض بعدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي.

2.3.8 النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي:

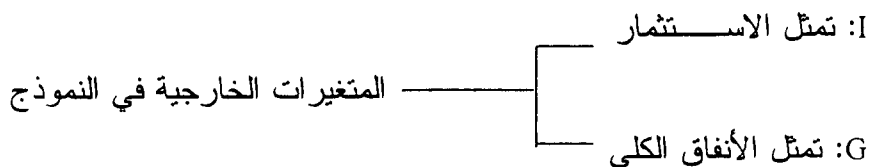
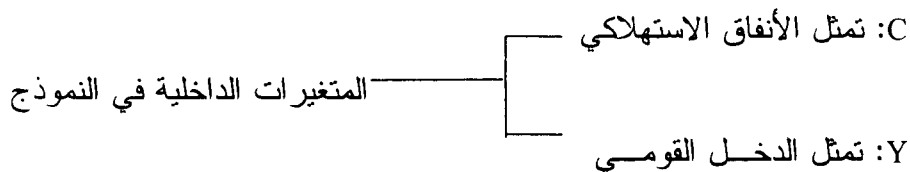
باستخدام الصيغة البسيطة لكينز في تحديد مستوى الدخل القومي، وذلك بأخذ دالة الاستهلاك والدخل القومي كما يأتي:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \quad \dots (10.8)$$

$$Y_i = C_i + I_i + G_i \quad \dots (11.8)$$

$$0 < B_1 < 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{حيث ان:}$$

ون:

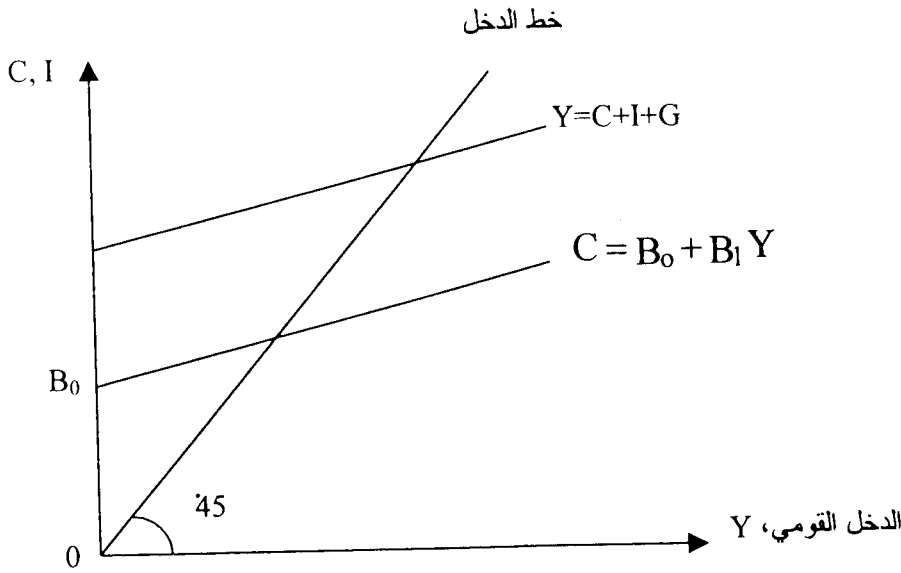


U: تمثل المتغير العشوائي

B_1 و B_0 : تمثل معاملات النموذج

ويجب ملاحظة ان المعادلة (11.8) فيها متغيرين خارجيين ومتغيرين داخليين في نظام المعادلات الآتية، الذي يمكن وصفه بشكل بياني كما في الشكل (4.8).

شكل (4.8): نموذج كينز في تحديد الدخل القومي



حيث يلاحظ من الشكل أعلاه، ان ميل المعادلة (10.8) هو B_1 ويمثل الميل الحدي للاستهلاك (Marginal Propensity to Consume (MPC)، أو ميل دالة الاستهلاك ويكون موجب، أي أن $(B_1 > 0)$ وذلك بسبب العلاقة الطردية بين الأنفاق الاستهلاكي كمتغير تابع ومستوى الدخل كمتغير مستقل، أي إذا زاد مستوى الدخل يترتب عليه زيادة في الاستهلاك ولكن ليست كل الزيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك، بل

يذهب جزء منها إلى الادخار، وحسب النظرية الاقتصادية فقد تتراوح قيمة الميل الحدي للاستهلاك أو ميل دالة الاستهلاك بين الصفر والواحد الصحيح، أي ان:

$$0 < B_1 < 1$$

وتمثل المعادلة (11.8) مطابقة الدخل القومي والتي تمثل مجموع الاستهلاك والاستثمار والأنفاق الحكومي، وان خط (45) يمثل خط الدخل أي العرض الكلي. أما المتغير العشوائي (U_i) يمثل بقية العوامل التي تؤثر على الاستهلاك وغير داخلة في النموذج، كالتيبؤ بالأسعار المستقبلية وأسعار الفائدة وتوزيع وإعادة توزيع الدخل... الخ. ومن ثم فان التغير في أي من هذه العوامل سوف يترتب عليها تغير في المتغير العشوائي (U_i) ومن ثم يترتب عليه انتقال دالة الاستهلاك بالكامل وبذلك يتغير مستوى الدخل (Y_i) وبذلك يكون هناك ارتباط بين المتغير المستقل (Y_i) والمتغير العشوائي (U_i). ولهذا السبب لا يمكن استخدام طريقة (OLS) في حل هذا النموذج وتقدير معاملاته (B_0 و B_1)، ولكن يمكن تحديد مستوى الدخل التوازني باستخدام حل نموذج المعادلات الآتية للمعادلتين (10.8) و (11.8).

3.3.8 نموذج الأجر النقدي-السعر، Wage-Price Model (نموذج فيلبس):
 بافتراض ان لدينا نموذج فيلبس الذي يربط الأجر النقدي والأسعار باستخدام
 المعادلات الآتية:

$$W_i = B_0 + B_1 Un_i + B_2 \bar{P}_1 + U_1 \quad \dots(12.8)$$

$$P_i = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{W}_i + \alpha_2 \bar{R}_i + \alpha_3 \bar{M}_i + U_2 \quad \dots(13.8)$$

(i= 1, 2, 3, ..., s)

حيث ان:

متغيرات داخلية في النموذج	—	$\bar{W}$ = معدل التغير في الأجور النقدية $\bar{P}$ = معدل التغير في الأسعار Un = معدل البطالة $\bar{R}$ = معدل التغير في مكننة رأس المال. $\bar{M}$ = معدل التغير في سعر المواد الأولية المستوردة. i = عنصر الزمن (1, 2, ..., n). U_1, U_2 = المتغيرات العشوائية أو حدود الخطأ. B_{is}, α_{is} = معاملات النموذج.
---------------------------	---	--

من المعادلة (12.8) يتبين ان (W) متغير تابع وان (P) متغير مستقل، وعلى العكس
 من ذلك فأن (P) متغير تابع و (W) متغير مستقل في المعادلة (13.8). لذلك فان

المتغيرات المستقلة الداخلة في النموذج لها علاقة بالمتغير العشوائي (U_1) و (U_2). ومن ثم يصعب استخدام طريقة (OLS) لتقدير معاملات النموذج. مما سبق يلاحظ ان النماذج التطبيقية المدروسة أعلاه، لا يمكن استخدام طريقة (OLS) لتقدير معاملاتها وذلك لوجود علاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغيرات العشوائية فيها. ولكن هناك عدة طرق قد طورت في استخدام وحل نماذج المعادلات الآتية لتقدير معاملات تلك النماذج، وقد تم الإشارة إلى تلك الطرق أعلاه والتي سنبحثها لاحقاً في هذا الفصل.

4.8 الشكل المختزل، Reduced Form :

يطلق الشكل المختزل على المعادلات التي تستق من حل الشكل الهيكلي للنموذج، ويلاحظ ان معادلات الشكل المختزل تجعل كل متغير داخلي على حدة دالة في جميع المتغيرات المحددة سابقاً، Predetermined، للنموذج. ان هيكل النموذج يمثل مجموعة من المعادلات كل واحدة تصف نوع واحد من السلوك الاقتصادي المشابه للتعريف. وبافتراض أننا لدينا المعادلات الآتية والتي تمثل هيكل النموذج.

$$Q_d = B_0 + B_1 W_i + U_i \quad \dots(14.8)$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 W_i + \alpha_2 O_i + \alpha_3 N_i + V_i \quad \dots(15.8)$$

فإن الشكل المختزل للنموذج يمكن الحصول عليه وكما يلي:
ومن خلال شرط التوازن للمعادلتين (14.8) و (15.8) واعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$W_i = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1} O_i + \frac{\alpha_3}{B_1 - \alpha_1} N_i + \frac{V_i - U_i}{B_1 - \alpha_1} \quad \dots (16.8)$$

وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة (3 15)، نحصل على:

$$Q = \frac{\alpha_0 B_1 - \alpha_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2 B_1}{B_1 - \alpha_1} O_i + \frac{\alpha_3 B_1}{B_1 - \alpha_1} N_i + \frac{B_1 V_i - \alpha_1 U_i}{B_1 - \alpha_1} \dots (17.8)$$

بعد إعادة الترتيب والتبسيط الرياضي لهاتين المعادلتين، يمكن إعادة كتابتهما بالصيغة الآتية:

$$W_i = \pi_1 + \pi_2 O_i + \pi_3 N_i + e_{1i} \quad \dots (18.8)$$

$$Q = \pi_4 + \pi_5 O_i + \pi_6 N_i + e_{2i} \quad \dots (19.8)$$

حيث أن: e, π يمثلان الحدود المحصّون واس للمعادلتين (16.8) و (17.8) بالتمائل، وإن المعاملات π تكون توليفانه يلي:

$$\pi_1 = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad \pi_2 = \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha_3}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad \pi_4 = \frac{\alpha_0 B_1 - \alpha_1 B_0}{B_1 - \alpha_1}$$

$$\pi_5 = \frac{\alpha_2 B_1}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad \pi_6 = \frac{\alpha_3 B_1}{B_1 - \alpha_1} \quad \dots(20.8)$$

وهنا يجب ملاحظة أننا نحصل على قيمتين للمعامل B_1 ، أي ان:

$$B_1 = \frac{\pi_5}{\pi_2} \quad \text{Or} \quad B_1 = \frac{\pi_6}{\pi_3} \quad \dots(21.8)$$

وهذه ليست بالضرورة ان تكون متساوية، ولكل واحدة منها نحصل على تقدير للمعامل B_0 من خلال:

$$B_0 = \pi_1 - B_1 \pi_4 \quad \dots(22.8)$$

ومن ناحية أخرى لا نستطيع الحصول على تقدير لمعاملات دالة العرض (15.8) عبر B_0 و α_2 و α_3 ، وهنا يمكن القول ان دالة الطلب (14.8) يكون لها تشخيص علوي ودالة العرض لها تشخيص سفلي. وعندما نحصل على تقدير واحد لمعاملات المعادله، يمكن القول بان المعادلة مشخصة تماماً. وعند الحصول على تقديرات متعددة، يقال ان المعادلة لها تشخيص علوي، وعندما لا نحصل على تقديرات يقال ان المعادلة لها تشخيص سفلي.

في جميع الحالات نتحدث عن الحصول على تقديرات للمعادلات الهيكلية من خلال تقدير المعلمات لم B_1 و B_0 لكل المختزل.

وعند مناقشة التشخيص أعلاه للحصول على حلول المعلمات للمعادلات الهيكلية من B_1 و B_0 معاملات المعادلات للشكل المختزل. وفي تحليل النماذج القياسية

للمعادلات الآتية، فإن الحلول في المعادلات (16.8) و(17.8) أو الصيغ المبسطة (18.8) و(19.8) تسمى بالشكل المختزل لهيكل النموذج الأصلي في المعادلتين (14.8) و(15.8) وان كل معادلة من معادلات الشكل المختزل تحدد بدقة كيف يكون لقيمة المتغير الداخلي الواحدة لها علاقة بقيم المتغيرات الخارجية، والمتغير العشوائي وهيكل المعلمات. وان الاعتماد المتداخل بين المتغيرات الداخلية يمكن حلها كما في المعادلتين (16.8) و(17.8)، ويجب هنا ملاحظة ان كل المتغيرات الداخلية تعتمد على كلاً من المتغيرات العشوائية، وان الصيغ الأخرى للهيكل والشكل المختزل لنموذج المعادلات الآتية، ساري المفعول لتركيب العملية الاقتصادية نفسها.

وربما لا يكون بالإمكان تقدير المعاملات الهيكلية من تقديرات الشكل المختزل. وأحياناً يمكن الحصول على تقديرات متعددة، ويصبح لدينا مشكلة الاختيار بينهم. لذلك سنعرض النماذج التالية:

النموذج الأول: بافتراض ان لدينا نموذج الطلب والعرض (للتبسيط نحذف المتغيرات العشوائية) كما يأتي:

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 Y \quad \dots(23.8)$$

$$Q_s = B_0 + B_1 P \quad \dots(24.8)$$

في هذا النموذج يُمكن تقدير قيمة واحدة فقط للمعلمة B كما سنرى لاحقاً. وبحل المعادلتين اعلاه، نحصل على معادلات الشكل المختزل وكما يأتي:

$$P = \frac{B_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - B_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - B_1} Y \quad \dots(25.8)$$

$$Q = \frac{\alpha_1 B_0 - \alpha_0 B_1}{\alpha_1 - B_1} + \frac{\alpha_2 B_1}{\alpha_1 - B_1} Y \quad \dots(26.8)$$

ويمكن كتابة الشكل المختزل لهاتين المعادلتين (25.8) و (26.8) في الصيغة الآتية:

$$P = \pi_1 - \pi_2 Y \quad \dots(27.8)$$

$$Q = \pi_3 + \pi_4 Y \quad \dots(28.8)$$

حيث ان:

$$\pi_1 = \frac{B_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - B_1} , \pi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - B_1}$$

$$\pi_3 = \frac{\alpha_1 B_0 - \alpha_0 B_1}{\alpha_1 - B_1} , \pi_4 = \frac{\alpha_2 B_1}{\alpha_1 - B_1} \quad \dots(29.8)$$

ويمكن تقدير معاملات معادلة العرض (24.11) من معاملات الانحدار المقدر لمعادلات الشكل المختزل كما يأتي:

$$\hat{B}_1 = \frac{\hat{\pi}_4}{\hat{\pi}_2}$$

$$\hat{B}_0 = \hat{\pi}_1 - B_1 \hat{\pi}_4 \quad \dots(30.8)$$

ولكن يصعب الحصول على معلمات معادلة الطلب (23.11) أي (α_0 و α_1 و α_2) من معلمات الشكل المختزل. وهكذا فإن معادلة العرض قابلة للتقدير، أما معادلة الطلب فإنها غير قابلة للتقدير.

من جانب آخر، نفترض أن نموذج العرض والطلب يأخذ الشكل الآتي:

$$Q_d = B_0 + B_1 P \quad \text{دالة الطلب (31.8)}$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 R \quad \text{دالة العرض (32.8) ...}$$

يلاحظ من النموذج السابق، أن معادلة الطلب قابلة للتقدير، أما معادلة العرض فإنها غير قابلة للتقدير.

النموذج الثامن: بافتراض أن لدينا النموذج الآتي:

$$Q = B_0 + B_1 P + B_2 Y + B_3 R \quad \text{... (33.8)}$$

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 P \quad \text{... (34.8)}$$

نلاحظ من النموذج السابق، يمكن تقدير قيمتين للمعلمة (α_1)، حيث أن R يمثل تذي يؤثر على الطلب وليس على العرض، (إذا كان هناك مطر كثير مثلاً فقد لا يذهب الناس إلى النادي) وأن معادلات الشكل المختزن تصبح:

$$Q = \frac{B_1 \alpha_0 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} Y - \frac{\alpha_1 B_3}{B_1 - \alpha_1} R \quad \dots(35.8)$$

$$P = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1} - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1} Y - \frac{B_3}{B_1 - \alpha_1} R \quad \dots(36.8)$$

وبالتعبير عن معادلات الشكل المختزل السابق في الشكل الآتي:

$$Q = \pi_1 - \pi_2 Y - \pi_3 R \quad \dots(37.8)$$

$$P = \pi_4 - \pi_5 Y - \pi_6 R \quad \dots(38.8)$$

وبلاحظ ان المعلمة (α_1) يكون لها قيمتين مقدرتين هما:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_5} \quad \dots(39.8)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\pi}_3}{\hat{\pi}_6} \quad \dots(40.8)$$

وليست بالضرورة ان تكون المعادلتين (39.8) و (40.8) متساويتان. ونحصل من كل معادلة منها على تقدير (α_0) وكما يأتي:

$$\alpha_0 = \pi_4 - \alpha_1 \pi_2 \quad \dots(41.8)$$

ومن ثم فإن المعادلة (34.8) يكون لها تشخيص علوي، أما المعادلة (33.8) تكون غير مشخصة بسبب عدم القدرة على الحصول على معلمات الانحدار المقدرة الخاصة بها (B_0 و B_1 و B_2 و B_3) من معلمات الانحدار لمعادلات الشكل المختزل.

النموذج الثالث: بافتراض ان نموذج المعادلات الآتية الآتية:

$$Q_s = B_0 + B_1P + B_2S \quad \dots(42.8)$$

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1P + \alpha_2I \quad \dots(43.8)$$

$$Q_s = Q_d \quad \dots(44.8)$$

المطلوب: إيجاد تشخيص المعادلات الآتية من خلال الشكل المختزل لهيكل النموذج.

الحل:

لإيجاد تشخيص المعادلة من خلال الشكل المختزل نتبع ما يأتي:

- جد الشكل المختزل بالنسبة لـ P :

$$Q_s = Q_d = \bar{Q}$$

$$B_0 + B_1P + B_2S = \alpha_0 + \alpha_1P + \alpha_2I$$

$$B_1 P - \alpha_1 P = \alpha_0 - B_0 + \alpha_2 I - B_2 S$$

$$(B_1 - \alpha_1)P = \alpha_0 - B_0 + \alpha_2 I - B_2 S$$

وبالقسمة على $(B_1 - \alpha_1)$ ، نحصل على:

$$P = \frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1} S \quad \dots(45.8)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل المختزل كما يأتي:

$$P = A_1 + A_2 I - A_3 S \quad \dots(46.8)$$

- نشق الشكل المختزل بالنسبة للمتغير (Q) ، وبالتعويض عن قيمة (P) في المعادلة (42.8) او (43.8) نحصل على معادلة الشكل المختزل للمتغير (Q) ، وكما يأتي:

$$Q = B_0 + B_1 \left[\frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1} S \right] + B_2 S$$

وبفك القوس، نحصل على:

$$Q = B_0 + \frac{B_1 \alpha_1 - B_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \frac{B_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} S + B_2 S$$

وبإيجاد المضاعف المشترك نحصل على:

$$Q = \frac{B_0 B_1 - B_0 \alpha_1 + B_1 \alpha_1 - B_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \left[\frac{B_1 B_2 + B_1 B_2 - \alpha_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} \right] S$$

وبعد الاختصار والتبسيط، نحصل على:

$$Q = \frac{B_1 \alpha_1 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \alpha_2}{B_0 - B_2} I - \frac{\alpha_1 B_2}{B_0 - B_2} S \quad \dots(47.8)$$

ويمكن كتابة الشكل المختزل كما يأتي:

$$Q = A_4 + A_5 I - A_6 S \quad \dots(48.8)$$

أذن المعادلات (46.8 ، 48.8) تمثل الشكل المختزل كما يأتي:

$$P = A_1 + A_2 S - A_3 I \quad \dots(49.8)$$

$$Q = A_4 + A_5 I - A_6 S \quad \dots(50.8)$$

حيث ان:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad A_2 = \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}$$

$$A_3 = \frac{-B_2}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad A_4 = \frac{B_1 \alpha_1 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1}$$

$$A_5 = \frac{B_1 \alpha_2}{B_1 - \alpha_1} \quad , \quad A_6 = \frac{\alpha_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} \quad \dots(51.8)$$

ولتشخيص المعادلات، يمكن الحصول على قيمة مقدرة واحدة لكل معلمة من معلمات الانحدار للنموذج في المعادلتين (42.8) و(43.8)، من خلال معلمات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل:

$$B_1 = \frac{A_5}{A_2} \quad , \quad \alpha_1 = \frac{A_5}{A_3}$$

$$B_2 = -A_3(B_1 - \alpha_1) \quad , \quad \alpha_2 = A_4 - B_1 A_1$$

$$\alpha_0 = A_4 - \alpha_1 A \quad \dots(52.8)$$

ومن ثم يمكن القول ان المعادلات السلوكية لنموذج المعادلات الآتية تكون مشخصة.

5.8 تقدير نموذج المعادلات الآتية،

:Estimation of Simultaneous Equations Model

يمكن الوصول إلى التقدير الملائم باستخدام OLS أو أي طريقة أخرى من الطرق المستخدمة في تقدير نماذج المعادلات الآتية وهي:

1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة:

Indirect Ordinary Least Square (IOLS)

تسمى هذه الطريقة بطريقة الشكل المختزل، وتستخدم في تقدير المعادلات المشخصة تماماً في نموذج المعادلات الآتية، ومن ثم تستخدم طريقة OLS في تقدير معلمات انحدار الشكل المختزل (أو المحور) ومنها يمكن الحصول على معلمات المعادلات المشخصة المراد تقديرها.

رأينا فيما تقدم ان طريقة OLS تقود إلى مقدرات متحيزة وغير متنسقة إذا ما تم تطبيقها لغرض الحصول على تقديرات لمعالم الصورة الهيكلية، مما يستدعي اللجوء إلى طرق أخرى للحصول على تقديرات غير متحيزة ومتنسقة منها IOLS. تستخدم هذه الطريقة لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات المشخصة تماماً في نموذج المعادلات الآتية عبر استخدام الصورة المختزلة. وتتضمن الطريقة الخطوات الآتية:

- 1- إيجاد النموذج المختزل، وكما تم عرضه في المباحث السابقة، أي التعبير عن المتغيرات الداخلية للمنظومة بدلالة المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنياً.
- 2- تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معلمات النموذج المختزل.

3- يتم الحصول على مقدرات المعلمات الهيكلية من مقدرات معاملات الشكل المختزل الذي تم الحصول عليه في الخطوة (2) وذلك باستخدام العلاقات الرياضية التي تجمع بين معالم الشكل الهيكلي ومعالم الشكل المختزل.

ان تقديرات B_S في بعض الأحيان، بطريقة (IOLS) لا تحقق نفس التقدير لـ B ، وبشكل ملفت للنظر، وفي هذه الحالة يكون هناك أكثر من مقدر واحد لمعاملات خاصة في هيكل المعادلة بطريقة (IOLS)، وهذه تميز المعادلة التي يكون لها تشخيص علوي، Over Identified.

وعندما تكون المعادلة مشخصة معنى ذلك وجود وحدة مقدرة بطريقة (IOLS) لكل واحدة من معلماتها. وعندما تكون المعادلة غير مشخصة يصبح من المستحيل ان نبني المقدرات بطريقة (IOLS) لكل المعلمات. فعلى سبيل المثال، لا يوجد معدل أو توليفة لـ (π_s) في المعادلة (31.8) و(32.8) الذي نحصل منها على (α_1) ، ومعادلة العرض (33.8) تكون غير مشخصة.

باختصار، يمكن القول بأن المعادلة إما ان تكون مشخصة وتعتمد على المقدرات بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (IOLS) التي يمكن تشكيلها، أو أن تكون المعادلة غير مشخصة ولا تعتمد على المقدرات بطريقة (IOLS). لذلك فان طريقة (ILS) متحيزة، Bias ولكنها متوافقة، Consistent.

وعندما تكون المعادلة مشخصة فان طريقة (IOLS) نقودنا بالضبط إلى التقدير نفسه كما هو الحال في طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TS LS) التي تعطي وضع مفرد للمعادلات، لذلك تكون طريقة (TS LS) مفضلة في الدراسات القياسية التطبيقية، خاصة عندما تكون المعادلة لها تشخيص علوي.

مثال 1.8: افترض لدينا البيانات الآتية عن نموذج العرض والطلب:

جدول (1.8): قيم متغيرات النموذج

i	P	Q	S	I
1	10	50	100	15
2	12	54	102	12
3	9	65	105	11
4	15	84	107	17
5	14	75	110	19
6	15	85	111	30
7	16	91	111	28
8	14	60	113	25
9	17	40	117	23
10	19	70	120	35

المطلوب: قدر نموذج المعادلات الآتية باستخدام طريقة IOLS.

الحل: نطبق طريقة OLS على الجدول اعلاه، باستخدام المعادلتين (49.8) و(50.8) لنحصل على ما يلي:

$$\hat{P} = -19.60 + 0.28S + 0.14I$$

$$S_e \quad 13.46 \quad 0.14 \quad 0.11$$

$$t \cdot \text{value} \quad (1.4) \quad (1.9) \quad (1.2) \quad \dots(53.8)$$

$$\hat{Q} = 215.03 + 1.715S + 1.87I$$

$$S_e \quad 146.85 \quad 1.52 \quad 1.19$$

$$t - \text{value} \quad (1.5) \quad (1.1) \quad (1.6) \quad \dots(54.8)$$

باستخدام قيم المعلمات المقدرة أعلاه في معادلة الشكل المختزل (51.8) نحصل على:

$$\hat{B}_1 = \frac{A_6}{A_3} = \frac{1.87}{0.14} = 13.36$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{A_5}{A_2} = \frac{-1.71}{0.28} = -6.11$$

$$\hat{B}_2 = -A_2 (\hat{B}_1 - \hat{\alpha}_1)$$

$$= -0.28[(13.36) - (-6.11)] = -5.45$$

$$\hat{\alpha}_2 = A_3 (\hat{B}_1 - \hat{\alpha}_1)$$

$$= 0.14[(13.36) - (-6.11)] = 2.73$$

$$B_0 = A_4 - \hat{B}_1 A_1$$

$$= 215.03 - [(13.36) - (19.65)] = 477.55$$

$$\hat{\alpha}_0 = A_4 - \hat{\alpha}_1 A_1$$

$$= 215.03 - [(-6.11)(-19.65)] = 94.97$$

وباختصار هناك مشكلتين رئيسيتين عند استخدام طريقة (IOLS) هي:

أ- يمكن تطبيقها على المعادلة المشخصة تماماً، ولا يمكن تطبيقها في المعادلة التي لها تشخيص علوي.

ب- يصعب اشتقاق معادلات الشكل المختزل، حيث أنها تتطلب استخدام هيكل المعادلات الجبرية، ولكن لحل هاتين المشكلتين نستخدم طريقة (TS LS) بدلاً من (IOLS) في نظام المعادلات الآتية.

2.5.8 طريقة المتغير الأداة، (IV): Instrumental Variable

تهدف هذه الطريقة إلى تحقيق درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة والمتغير العشوائي وذلك من خلال استخدام متغيرات خارجية ملائمة كمتغيرات أدائية.

وتستخدم هذه الطريقة في تقدير المعادلات السلوكية التي يكون لها تشخيص علوي وعندما يكون المتغير الخارجي له ارتباط بالمتغير العشوائي ولا يمكن الحصول على تقديرات متوافقة للمعلمات باستخدام طريقة المتغيرات الأدائية. وعليه فإن إيجاد المتغيرات الأدائية في نموذج المعادلات الآتية ليست مشكلة أساسية وذلك لأن المتغيرات الخارجية غير موجودة في المعادلة لاستخدامها كمتغيرات مستقلة.

مثال 2.8: بافتراض ان النموذج المراد تقديره هو:

$$Q_s = B_0 + B_1 P + B_2 S + U_1 \quad \dots(55.8)$$

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 I + U_2 \quad \dots(56.8)$$

$$Q_s = Q_d \quad \dots(57.8)$$

يلاحظ من المعادلة (55.8) وجود متغير خارجي واحد هو (S) وله ارتباط بالمتغير العشوائي U_1 ، لذلك نحتاج إلى متغير أدائي واحد. وباستخدام الشكل المختزل للنموذج بالنسبة إلى P، نحصل على:

$$P = A_1 - A_2 S + A_3 I + U_i \quad \dots(58.8)$$

وللحصول على تقدير معلمات الانحدار من المعادلة (58.8) تستخدم لبناء المتغير الأدائي (P) كما يأتي:

$$P = A_1 - A_2 S + A_3 I \quad \dots(59.8)$$

وبما انه يوجد متغير خارجي واحد فقط يظهر في الجهة اليمنى من المعادلة (58.8) نذكر ان (P) ليس له علاقة ارتباط بحدود المتغيرات العشوائية (U_1) و (U_2) ويمكن ملاحظة ذلك فيما إذا كان معامل التحديد المتعدد (R^2) في المعادلة (59.8) مساوياً

للوحد الصحيح، أي ان $(R^2=1)$ فان $(P = \hat{P})$ ، ومن ثم لا يكون هناك اختلاف بين مقدرات النموذج بطريقة (OLS) وبين طريقة (TSLs).

لذلك فان تعويض المتغيرات المساعدة للمتغيرات الداخلية في الجهة اليمنى من النموذج، في كل معادلة يتم تقديرها بطريقة (OLS) يمكن وصفها بالكيفية التي وردت في المعادلتين 55.8 و 56.8. وبما أننا قد حصلنا على تقدير A_1 ، A_2 ، A_3 من الشكل المختزل في المثال 1.8، الذي يساوي:

$$\hat{P} = -19.60 + 0.28S + 0.14I \quad \dots(60.8)$$

وبالتعويض عن قيم S ، I في الجدول (1.8) أعلاه نحصل على P كما يأتي:

$$\hat{P}_1 = -19.60 + 0.28(100) + 0.14(15)$$

$$\hat{P}_1 = -10.50$$

$$\hat{P}_2 = -19.60 + 0.28(102) + 0.14(12)$$

$$\hat{P}_2 = 10.65$$

وهكذا بالطريقة نفسها والى نهاية الجدول نحصل على القيم المقدرة للمتغيرات الأداة $(\hat{P}_i)$ ، كما في الجدول الآتي:

جدول (2.8): القيم المقدرة للمتغير $(\hat{P})$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	10.50	10.65	11.35	12.75	13.87	15.67	15.39	15.54	16.39	18.89

ويمكن تقدير نموذج المعادلات الآتية بطريقة المتغيرات الأدواتية بأسلوب آخر والذي يمكن تلخيصه بالخطوات الآتية:

أولاً: اختيار المتغيرات الأدواتية التي يتم إحلالها محل المتغيرات الداخلية التي تظهر كمتغيرات مستقلة في المعادلة المراد تقديرها، وان يكون للمتغير الأداة عدة خصائص منها:

- ☐ ألا يرتبط المتغير الأداة بالمتغير العشوائي، حد الخطأ في المعادلة المراد تقديرها.
 - ☐ ان يكون له علاقة ارتباط قوية بالمتغير (أو المتغيرات) الداخلية التي تظهر في المعادلة المراد تقديرها.
 - ☐ ان يكون له على الأقل علاقة ارتباط بالمتغير (أو المتغيرات) الخارجية التي تظهر في المعادلة المراد تقديرها كمتغيرات مستقلة.
 - ☐ عند استخدام أكثر من متغير أداتي في المعادلة المراد تقديرها يجب ان يرتبط كل منهم بالمتغير الآخر.
- ثانياً: ضرب المتغير الأداتي (كل متغير مساعد على حدة) في المعادلة المراد تقديرها ومن ثم جمع حاصل الضرب لكل المشاهدات، ويترتب على ذلك وجود عدة معادلات، وعند حل هذه المعادلات يمكننا الحصول على قيم المعلمات المقدرة لهذا النموذج.

مثال 3.8: بافتراض أننا نريد تقدير العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي (C) ومستوى الدخل، Y، في نموذج المعادلات الآتية التي يمكن كتابتها بالكيفية الآتية:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots(61.8)$$

حيث ان:

$Y =$ له علاقة ارتباط بالمتغير العشوائي، U_i ، وذلك لان Y متغير داخلي في النموذج المراد تقديره.

وعند تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) على المعادلة (61.8) نحصل على تقديرات متحيزة لمعاملات المعادلة في النموذج السابق، ولكي نحصل على قيم مقدره غير متحيزة لمعاملات المعادلة يتم ذلك باستخدام طريقة (IV) كما يأتي:
أ- اختيار المتغير الأداة الذي لا يكون له ارتباط بالمتغير العشوائي (U_i) ولكن له علاقة ارتباط قوي بالمتغير الداخلي في المعادلة، وليكن W_i ثم إعادة كتابة المعادلة المراد تقدير معاملاتها مع إهمال الحد المطلق لها، وتأخذ الشكل الآتي:

$$C_i = B_1 Y_i + U_i \quad \dots(62.8)$$

$$c_i = (C_i - \bar{C})$$

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

$$\bar{C} = \frac{\sum C_i}{n}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} \quad \dots(63.8)$$

ب- ضرب المتغير الأداة W_i في المعادلة (61.8) ثم جمع حاصل ضرب لكل المشاهدات نحصل على:

$$\sum (w_i c_i) = B_1 \sum (w_i y_i) + \sum (w_i u_i) \quad \dots(64.8)$$

حيث ان: $w_i = W_i - \bar{W}$
 وبافتراض ان هناك علاقة ارتباط بين W_i و U_i فان القيمة المتوقعة تكون مساوية للصفر، أي:

$$E(\sum w_i c_i) = 0$$

ومن ثم تصبح المعادلة (64.8) كما يأتي:

$$\sum (w_i c_i) = B_1 \sum (w_i y_i) \quad \dots(65.8)$$

وبقسمة الطرفين على $\sum (w_i y_i)$ ، نحصل على:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum (w_i c_i)}{\sum (w_i y_i)} \quad \dots(66.8)$$

مثال 4.8: إذا توفرت البيانات الآتية عن الإنفاق الاستهلاكي، C_i ، والدخل، Y_i ، في الجدول الآتي:

جدول (3.8): لبيانات قيم W_i ، Y_i ، C_i

I	C_i	Y_i	W_i
1	3	3	5
2	4	5	10
3	6	6	11
4	11	6	14
	$\sum C_i = 24$	$\sum Y_i = 20$	$\sum W_i = 40$

المطلوب: باستخدام البيانات الواردة في الجدول أعلاه، تقدير المعادلة الآتية:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i$$

حيث أن: (W_i) متغير أدائي.

الحل: لإيجاد قيمة المعلمة B_1 نجد انحرافات قيم المتغيرات عن أوسطها الحسابية كما يأتي:

$$\bar{C} = \frac{\sum C_i}{n} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\bar{W} = \frac{\sum W_i}{n} = \frac{40}{4} = 10$$

وبتطبيق الصيغة الآتية:

$$B_1 = \frac{\sum(w_i c_i)}{\sum(w_i y_i)}$$

نجد قيم كل من انحراف المتغيرات w_i ، c_i ، y_i عن أوساطها الحسابية ثم نضرب $w_i c_i$ وكذلك $w_i y_i$ ، كما في الجدول الآتي:

جدول (4.8): البيانات المستخدمة في تقدير B_1

i	C_i	Y_i	w_i	c_i	y_i	w_i	$w_i c_i$	$w_i y_i$
1	3	3	5	-3	-2	-5	15	10
2	4	5	10	-2	0	0	0	0
3	6	6	11	0	1	1	0	1
4	11	6	14	5	1	4	20	4
$\sum$	24	20	40	0	0	0	35	15

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{\sum(w_i c_i)}{\sum(w_i y_i)} = \frac{35}{15} = 2.33$$

3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين،

:Two Stage Least Squares (TSLS)

تعد هذه الطريقة من الطرق الشائعة الاستخدام في الدراسات القياسية التطبيقية للحصول على مقدرات متوافقة للمعاملات في نموذج المعادلات الآتية الذي تم افتراضه لمعالجة التأثير المتبادل في قيمة المتغير التابع الاستهلاك (C_i) على الدخل

(Y_i) والتأثير في قيمة المتغير المستقل (Y_i) على (C_i) ، بحيث أصبح الفرض الذي يتعلق باستقلال معامل المتغير العشوائي عن المتغير المستقل غير صادق.

وان جوهر هذه الطريقة هو استبدال (أو إحلال) المتغيرات المستقلة التي تستخدم كتقريب للمتغير الأصلي، والذي لا يرتبط بشكل أساسي بالمتغير العشوائي ومن ثم فإن طريقة OLS يمكن استخدامها في تقدير المعادلة. وربما تكون نتيجة تقدير المعاملات الأصلية للمعادلة متحيزة ولكنها تتلاشى كلما كبر حجم العينة.

تعتبر طريقة TSLS من أبسط وأوسع الطرق الخاصة لتقدير المعلمات الهيكلية للمعادلات المشخصة تماماً وفوق التشخيص في نموذج المعادلات الآتية، وتقود الطريقة إلى مقدرات تتسم بالاتساق حيث تقود إلى قياسات متطابقة مع ذلك التي يمكن التوصل إليها عبر طريقة IOLS.

تتفوق طريقة TSLS على طريقة IOLS من حيث إنها تعطي أيضاً الأخطاء المعيارية للمعلمات الهيكلية المقدرّة مباشرة والتي يتعذر الحصول عليها من خلال IOLS. ويشترط عند التطبيق طريقة TSLS تحقق الافتراضات الاعتيادية في عنصر الخط أي أن:

$$U_t \sim N(0, \sigma^2 U) \quad , \quad E(U_t U_s) = 0 \quad , \quad t \neq s$$

وبالتالي انعكاس تحقق هذه الافتراضات على عنصري الخطأ في النموذج المختزل أي أن:

$$V_t \sim N(0, \sigma^2 V) \quad , \quad E(V_t V_s) = 0 \quad , \quad t \neq s$$

إضافة إلى أعلاه يشترط ان تكون عناصر الخطأ العشوائي في معادلات الشكل المختزل مستقلة عن المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا. كما ويجب ان تكون عدد مشاهدات العينة اكبر من عدد المتغيرات الخارجية والمتغيرات المرتدة زمنيا (ان تكون العينة كبيرة بدرجة كافية).

وتتضمن الطريقة مرحلتين من مراحل التقدير:

المرحلة الأولى: يتم إجراء انحدار لكل متغير داخلي على مجموعة المتغيرات الخارجية في نظام المعادلات الآتية للحصول على معادلات الشكل المختزل. ويقود هذا إلى قيمة مقدرة للمتغير الداخلي ترتبط بصورة اقل مع حد الخطأ العشوائي للمعادلة الهيكلية وذلك بالمقارنة مع ارتباط المتغير الأصلي مع حد الخطأ العشوائي.

المرحلة الثانية: تستخدم القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية بدلا عن قيمها الأصلية لتقدير المعادلات الهيكلية للنموذج للحصول على قيم مقدرة للمتغيرات الداخلية من خلال التعويض بالقيم الفعلية للمتغيرات الخارجية في معادلات الشكل المختزل. ويعني ذلك الأمر انه يجرى تنقية المتغيرات الداخلية الموجودة على يمين المعادلة الهيكلية من شوائب الارتباط مع العنصر العشوائي، مما يجعل مقدرات TSLS متسقة للمعاملات الهيكلية.

وإن كانت هذه الطريقة تعطينا تقديرات متحيزة ومتوافقة فان الاعتماد على عينة ذات حجم كبير نسبياً يؤدي إلى إيجاد تقديرات جيدة للمعاملات.

تتفق هذه الطريقة مع الطرق الأخرى (IOLS) و (IV) في محاولة التخلص من التحيز الوارد في نموذج المعلمات الآتية وذلك بسبب وجود متغيرات داخلية

كمتغيرات مستقلة في المعادلة المراد تقديرها. ويتم استخدام هذه الطريقة في تقدير المعادلات التي يكون لها تشخيص علوي وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات الآتية:

1- فصل المتغير المستقل، وعزله عن ذلك الجزء الذي يرتبط بمعامل المتغير العشوائي.

2- استخدام القيم الجديدة، والتي توصلنا إليها بعد عزل الجزء الذي يرتبط بالمتغير العشوائي، بطريقة (OLS) في إيجاد تقدير المعاملات.

مثال 5.8: لمعرفة الكيفية التي تطبق بها هذه الطريقة، نستخدم نموذج للعرض والطلب ولنفترض ان هيكل النموذج المراد تقديره يمكن وصفه بالكيفية الوارد ذكره في المثال 1.8.

حيث ان:

Q: تمثل الكمية المطلوبة والمعروضة

متغيرات داخلية في النموذج

P: تمثل السعر

I: تمثل الاستثمار

متغيرات خارجية في النموذج

S = الادخار

U_1 و U_2 : تمثل المتغيرات العشوائية.

وبافتراض ان بيانات النموذج معطاة في الجدول (1.8).

المطلوب: تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TSLS).

الحل:

أولاً: إجراء انحدار P على S ، باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، نحصل على المعادلة التقديرية لـ $\hat{P}$ ، وكما في المعادلة 66.8. وباستخدام المعادلة أعلاه وبيانات كل من S و I الواردة في الجدول (1.8) نحصل على قيم P ، كما في الجدول 8.8.

جدول (8.8): قيم $\hat{P}$ المقدرة

i	$\hat{P}$
1	10.50
2	10.65
3	11.35
4	12.75
5	13.87
6	15.67
7	15.39
8	15.54
9	16.39
10	18.89

ثانياً: يتم إحلال P محل الكمية Q ثم إجراء انحدار Q على P وذلك باستخدام طريقة (OLS)، نحصل على:

$$\hat{Q} = 49.41 + 1.27\hat{P}$$

وعند مقارنة المعلمات المقدرة بطريقة TSLS مع طريقة IOLS يتبين ان هناك علاقة قريبة، وان الاختلاف بين مقدرات الطريقتين ناتج من دوران قيم $\hat{P}$ في الجدول (2.8).

لذلك عندما تكون المعادلة مشخصة تماماً فان TSLS و IOLS يكونان متساويان. وان قيم $\hat{B}_1$ ، $\hat{\alpha}_0$ ، لا نحتاج لاشتقاقتهما لان قيمهما كانت ممتازة بالنسبة لطريقة IOLS و ثم ان IOLS لا يمكن تطبيقها على المعادلة التي يكون لها تشخيص علوي. ولكن طريقة TSLS تستخدم في الحصول على مقدرات المعاملات للمعادلة التي يكون لها تشخيص علوي.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.8: باستخدام النموذج الآتي:

$$Q_d = \beta_0 + \beta_1 W_i + U_1 \quad \text{دالة الطلب}$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 W_i + \alpha_2 O_i + U_2 \quad \text{دالة العرض}$$

المطلوب: إيجاد الشكل المختزل للنموذج.

السؤال 2.8: إذا كان نظام المعادلات الآتية لنموذج العرض والطلب كما يأتي:

$$Q_d = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 I + U_1 \quad \text{معادلة الطلب}$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 S + U_2 \quad \text{معادلة العرض}$$

لمطلوب:

أ- إيجاد الشكل المختزل للنموذج.

ب- بافتراض لدينا البيانات الواردة في الجدول الآتي:

i	P	Q	S	T
1	20	100	200	30
2	24	108	204	24
3	18	130	110	22
4	30	170	114	34
5	28	150	220	38
6	30	170	222	60
7	32	180	222	56
8	28	120	226	50
9	34	80	234	46
10	38	140	240	70

قدر هيكل المعلمات للنموذج أعلاه باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (IOLS)، ثم بين الخطوات المطلوبة لذلك التقدير.

السؤال 3.8: إذا كان لديك معادلتين هيكليتين يمثلان دالة الطلب والعرض كما يأتي:

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + U_1 \quad (\alpha_1 < 0) \quad \text{دالة الطلب}$$

$$Q_s = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 Y + U_2 \quad (\beta_1 > 0) \quad \text{دالة العرض}$$

حيث أن:

Q: تمثل الكمية.

P: يمثل السعر.

Y: تمثل الدخل.

المطلوب:

- 1- هل يعد النموذج أعلاه من نماذج المعادلات الآتية، ولماذا؟
- 2- حدد المتغيرات الخارجية والداخلية في النموذج.
- 3- أوجد الشكل المختزل للنموذج.
- 4- هل يمكن تقدير معاملات النموذج بطريقة OLS ولماذا ؟
- 5- هل تعد معاملات النموذج متحيزة ومتوافقة أم ماذا.

السؤال 4.8: كون نموذج المعادلات الآتية لنموذج العرض والطلب على النقود، ثم حدد المتغيرات الخارجية والداخلية للنموذج.

السؤال 5.8: كون نموذج كينزي لتحديد الدخل القومي، ثم بين المتغيرات الداخلية والخارجية للنموذج.

السؤال 6.8: عرّف مع الاستعانة بمثال بسيط:

- 1- المعادلة المنفردة ومنظومة المعادلات الآتية.
- 2- الصيغة الهيكلية والصيغة المختزلة.
- 3- معادلة مشخصة تماماً ومعادلة فوق التشخيص.
- 4- المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية.
- 5- متغير مرند زمنياً ومتغير داخلي.

السؤال 7.8: إذا أعطيت المعادلات الآتية الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 Y_{t-1} + U_t$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

حيث ان:

C_t ، Y_t ، I_t : تمثل أنفاق المستهلك، الدخل والاستثمار على التوالي.

C_t و Y_t : تمثل متغيرات داخلية ، في حين I_t متغير خارجي.

Y_{t-1} : تمثل متغير داخلي مرتد زمنياً.

المطلوب: اشتق الصيغة المختزلة لكل من Y_t و C_t .

السؤال 8.8: ان بعض الأفراد يعتقدون ان المبيعات تعتمد على مصروفات الاعلان،

وبعض الأفراد الآخرين يعتقدون على العكس من ذلك بأن المصروفات على

الإعلان تعتمد على المبيعات، ضع نموذج معادلات آنية لهذه العلاقات وحدد

عدد المعادلات في النموذج، وما هي المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية

لذلك النموذج ؟

السؤال 9.8: افترض انك أعطيت النموذج الآتي:

$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + E_t$$

$$I_t = B_1 + B_2 Y_t + B_2 G_{t-1} + U_t$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

عندما يكون Y_t الدخل، I_t الاستثمار، C_t الاستهلاك ، أوجد نظام الشكل المختزل للنموذج وحدد المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية، ثم بيّن هل ان دالة الاستهلاك مشخصة او فوق المشخصة، ولماذا ؟

الفصل التاسع: مشكلة التشخيص

Identification Problem

- 1.9 المقدمة
- 2.9 طبيعة مشكلة التشخيص
- 3.9 شروط التشخيص
- 4.9 الأسئلة والتمارين

الفصل التاسع: مشكلة التشخيص

Identification Problem

1.9 المقدمة:

عندما يكون المتغير التابع في معادلة ما متغيراً مستقلاً في معادلة أخرى، يكون لدينا نظام أو نموذج معادلات آنية، أي أن لكل متغير داخلي في النظام هناك معادلة سلوكية أو هيكلية وأن استخدام طريقة OLS لتقدير المعادلات الهيكلية يؤدي إلى تقديرات معلمات متحيزة وغير متسقة، وهو ما يدعى بتحيز المعادلات الآنية وكما تمت الإشارة إليه في الفصل السابق. وللحصول على تقديرات للمعلمات متسقة يجب الحصول أولاً على معادلات الشكل المختزل للنموذج والتي تعبر عن المتغيرات الداخلية في النظام كدالة فقط في المتغير الخارجي للنموذج. ولمعرفة طبيعة الشكل الهيكلي والشكل المختزل لنظام المعادلات الآنية نأخذ النموذج التالي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t \quad \dots(1.9)$$

$$Y_t = C_t + I_t \quad \dots(2.9)$$

يتضح من المعادلتين (1.9) و(2.9) أن C_t و Y_t متغيران داخليان وأن I_t متغير خارجي يتحدد من خارج النموذج، وحيث أن C_t تعتمد على Y_t في المعادلة (1.9) وتعتمد Y_t على C_t و I_t في المعادلة (2.9) فإن C_t و Y_t يتحددان معاً، وهذا يعني أن لدينا نموذج معادلات آنية لأن التغير في U_t يؤثر على C_t في المعادلة (1.9) وهذا بدوره يؤثر على Y_t في المعادلة (2.9) وكنتيجه لذلك تكون U_t و Y_t مترابطتين مؤدية ذلك إلى تقديرات OLS متحيزة وغير متسقة لمعادلة C_t و Y_t هذا فيما يتعلق

بالشكل الهيكلية، Structural model. أما بالنسبة إلى الشكل المختزل، Reduced form، فيمكن الحصول عليه بالتتابع الآتي:

نعوض المعادلة (2.9) في المعادلة (1.9): نذ

$$C_t = B_0 + B_1(C_t + I_t) + U_t \quad \dots(3.9)$$

$$C_t = B_0 + B_1 C_t + B_1 I_t + U_t$$

$$C_t - B_1 C_t = B_0 + B_1 I_t + U_t$$

$$C_t(1 - B_1) = B_0 + B_1 I_t + U_t$$

$$C_t = \frac{B_0}{1 - B_1} + \frac{B_1}{1 - B_1} I_t + \frac{1}{1 - B_1} U_t \quad \dots(4.9)$$

معادلة الشكل المختزل الأولى:

$$C_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + V_{1t} \quad \dots(5.9)$$

ويمكن اشتقاق معادلة الشكل المختزل الثانية بتعويض المعادلة (1.9) في المعادلة (2.9) وكالاتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t + I_t \quad \dots(6.9)$$

$$Y_t - B_1 Y_t = B_0 + I_t + U_t$$

$$Y_t(1 - B_1) = B_0 + I_t + U_t$$

$$Y_t = \frac{B_0}{1 - B_1} + \frac{1}{1 - B_1} I_t + \frac{1}{1 - B_1} U_t \quad \dots(7.9)$$

معادلة الشكل المختزل الثانية:

$$Y_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + V_2 t \quad \dots(8.9)$$

الصيغتين (5.9) و(8.9) والمشتقة من النموذج الهيكلي تمثلان النموذج المختزل ، حيث يظهر بأن المتغيرات الداخلية C_t و Y_t دالة في المتغير الخارجي I_t ، فضلاً عن الخطأ العشوائي U_t ، ان معاملات الشكل المختزل هذه تعبر عن الآثار الكلية (المباشرة وغير المباشرة) للمتغير المستقل على المتغير التابع، أي ان زيادة المتغير المستقل I_t بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الاستهلاك C_t بمقدار $(\frac{B_1}{1-B_1})$ وزيادة الدخل Y_t بمقدار $(\frac{B_1}{1-B_1})$ ، في حين ان معاملات الشكل الهيكلي تقيس الأثر المباشر للمتغير المستقل على المتغير التابع.

2.9 طبيعة مشكلة التشخيص:

تشير مشكلة التشخيص إلى إمكانية حساب المعلمات الهيكلية لنموذج معادلات آنية من معلمات النموذج المختزل أو عدم إمكانية حسابها، وتعد من المشاكل الأساسية التي تواجه بناء النموذج القياسي، إذ تهتم بكيفية قياس كل معادلة من المعادلات الهيكلية للنموذج، عليه فإن المشكلة تتلخص في إمكانية التعرف على ما إذا كان النموذج مصاغاً بشكل يتيح الحصول على تقديرات وحيدة وفريدة للمعلمات من بيانات العينة أم لا.

وبصورة عامة يمكن القول إذا كان من الممكن الحصول على المقدرات العددية لمعلمات المعادلة الهيكلية من معاملات الشكل المختزل المقدرة فتكون حينئذٍ تلك المعادلة مشخصة تماماً، Exactly identified، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فإن

المعادلة تكون غير مشخصة، Unidentified، أو تحت التشخيص، Under identified. وفي الحالة التي يكون فيها هناك إمكانية للحصول على عدة قيم عددية لبعض معلمات المعادلات الهيكلية من معاملات الشكل المختزل عندها سوف لن يكون هناك حلاً وحيداً لهذه المعلمات وعندئذ تكون تلك المعادلة فوق التشخيص، Over identified. ويمكن توضيح مستويات التشخيص هذه كالآتي:

لنتأمل نموذج العرض والطلب الآتي:

$$Q_d = a_0 + a_1P + U_1 \quad \dots(9.9)$$

$$Q_s = b_0 + b_1P + b_2W + U_2 \quad \dots(10.9)$$

$$Q_d = Q_s \quad \dots(11.9)$$

حيث ان:

Q_d : تمثل الكمية المطلوبة من سلعة ما.

Q_s : تمثل الكمية المعروضة من سلعة ما.

P : تمثل سعر السلعة.

W : تمثل الحالة الجوية.

U_1, U_2 : الخطأ العشوائي.

وان Q_d, Q_s, P متغيرات داخلية، و W متغير خارجي.

يتضح من النموذج الهيكلية أعلاه، ان معادلة الطلب مشخصة تماماً ومن ثم يمكن تقدير معاملاتها a_0, a_1 في حين تعد معادلة العرض غير مشخصة إذ ان المتغير الخارجي، W ، قد استبعد من معادلة الطلب وان استبعاد المتغيرات الخارجية من المعادلة يمثل مفتاح التشخيص. وعليه فان تضمين المتغير الخارجي، W ، في معادلة

العرض جعلها غير مشخصة، ومن ثم فإن منظومة العرض والطلب ككل غير مشخصة ويجب النظر بإعادة بنائها.

وبهدف جعل معادلة العرض مشخصة يمكن إضافة متغير جديد إلى دالة الطلب وهو الدخل (Y)، إذ تشير النظرية الاقتصادية إلى كون الدخل متغير مهم في تحديد الطلب على السلع والخدمات فيصبح نموذج الطلب والعرض الجديد كالآتي:

$$Q_d = a_0 + a_1 P + a_2 Y + U_1 \quad \dots(12.9)$$

$$Q_s = b_0 + b_1 P + b_2 W + U_2 \quad \dots(13.9)$$

$$Q_d = Q_s \quad \dots(14.9)$$

حيث يتضح من النموذج أعلاه بأن كل من معادلتى الطلب والعرض أصبحتا مشخصتين تماماً والمنظومة ككل مشخصة تماماً وذلك لأن كلا المتغيرين الخارجيين، W، الحالة الجوية و Y، الدخل ساعدا على تشخيص الدالة التي حذفت منها.

3.9 شروط التشخيص، Identification Condition:

تشخيص أي معادلة هيكلية يتطلب إيجاد الاختزال لها أولاً، وفي الواقع هناك قاعدة عامة يمكن استخدامها لهذا الغرض من دون اللجوء إلى الاختزال وتتلخص هذه القاعدة بتحقق الشرطين الآتيين:

أ- شرط الدرجة، Order Condition.

ب- شرط الرتبة، Rank Condition.

أن الشرط الأول يعد ضروري ولكنه غير كافي لتشخيص أي معادلة هيكلية، لذا وتأكيداً للشرط الأول يستوجب اجتياز المعادلة شرط الاختبار الثاني.

أ: شرط الدرجة، Order Condition:

وفقاً لهذا الشرط تكون المعادلة مشخصة عندما يكون عدد المتغيرات الداخلية (التابعة) والمتغيرات المحددة مسبقاً (خارجية، مرتدة زمنياً) والداخلية في المعادلات الهيكلية للنموذج مساوياً أو اكبر من عدد معادلات النموذج مطروحاً منها واحد، أي:

$$K - M \geq S - 1$$

حيث أن:

K: تمثل عدد المتغيرات الداخلية والمحددة مسبقاً.

M: تمثل عدد المتغيرات التي تحتويها المعادلة الهيكلية المراد تشخيصها.

S: تمثل عدد المعادلات الهيكلية التي يحتويها النموذج.

أولاً: فإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها مساوياً لعدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد كانت المعادلة مشخصة تماماً أي:

$$S - M = S - 1$$

ويمكن في هذه الحالة حساب قيمة وحيدة ومنفردة للمعاملات الهيكلية من معلمات الشكل المختزل.

ثانياً: وإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها اقل من عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة دون مستوى التشخيص أي غير مشخصة:

$$K - M < S - 1$$

وفي هذه الحالة لا يمكن حساب أي من المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل.

ثالثاً: أما إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها أكبر من عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة فوق مستوى التشخيص، أي:

$$K - M > S - 1$$

وفي هذه الحالة يمكن حساب أكثر من قيمة عددية لبعض المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل. وباختصار فإن شرط الدرجة للتشخيص يُمكن بيانه في الجدول 1.9:

جدول 1.9: شرط الدرجة للتشخيص

نوع لتشخيص المعادلة	عدد المتغيرات المفقودة، M	العلامة	عدد المعادلات مطروح منها واحد
مشخصة تماماً	M	=	S - 1
لها تشخيص سفلي	M	<	S - 1
لها تشخيص علوي	M	>	S - 1

حيث يمكن لشرط الدرجة للتشخيص ان يأخذ الصيغة الآتية:

$$M \geq S - 1$$

ب: شرط الرتبة، Rank Condition:

بموجب هذا الشرط ترتب معلمات المعادلات الهيكلية بدلالة جميع المتغيرات في المنظومة ثم تؤخذ المعلمات المقابلة للمعلمات المفقودة في المعادلة المراد

أ: شرط الدرجة، Order Condition:

وفقاً لهذا الشرط تكون المعادلة مشخصة عندما يكون عدد المتغيرات الداخلية (التابعة) والمتغيرات المحددة مسبقاً (خارجية، مرتدة زمنياً) والداخلية في المعادلات الهيكلية للنموذج مساوياً أو اكبر من عدد معادلات النموذج مطروحاً منها واحد، أي:

$$K - M \geq S - 1$$

حيث ان:

K: تمثل عدد المتغيرات الداخلية والمحددة مسبقاً.

M: تمثل عدد المتغيرات التي تحتويها المعادلة الهيكلية المراد تشخيصها.

S: تمثل عدد المعادلات الهيكلية التي يحتويها النموذج.

أولاً: فإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها مساوياً لعدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد كانت المعادلة مشخصة تماماً أي:

$$S - M = S - 1$$

ويمكن في هذه الحالة حساب قيمة وحيدة ومنفردة للمعاملات الهيكلية من معاملات الشكل المختزل.

ثانياً: وإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها أقل من عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة دون مستوى التشخيص أي غير مشخصة:

$$K - M < S - 1$$

وفي هذه الحالة لا يمكن حساب أي من المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل.

ثالثاً: أما إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها أكبر من عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة فوق مستوى التشخيص، أي:

$$K - M > S - 1$$

وفي هذه الحالة يمكن حساب أكثر من قيمة عددية لبعض المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل. وباختصار فإن شرط الدرجة للتشخيص يُمكن بيانه في الجدول 1.9:

جدول 1.9: شرط الدرجة للتشخيص

نوع لتشخيص المعادلة	عدد المتغيرات المفقودة، M	العلامة	عدد المعادلات مطروح منها واحد
مشخصة تماماً	M	=	S - 1
لها تشخيص سفلي	M	<	S - 1
لها تشخيص علوي	M	>	S - 1

حيث يمكن لشرط الدرجة للتشخيص ان يأخذ الصيغة الآتية:

$$M \geq S - 1$$

ب: شرط الرتبة، Rank Condition:

بموجب هذا الشرط ترتب معلمات المعادلات الهيكلية بدلالة جميع المتغيرات في المنظومة ثم تؤخذ المعلمات المقابلة للمعلمات المفقودة في المعادلة المراد

تشخيصها وتوضع بشكل مصفوفة ثم تحسب قيمة محدد هذه المصفوفة والتي تكون ذات رتبة (S-1). فإذا كانت القيمة تلك لا تساوي صفر تكون المعادلة مشخصة، أما إذا كانت تلك القيمة مساوية إلى الصفر كانت المعادلة دون مستوى التشخيص. وإذا حدث وان كانت المصفوفة المستخرجة من المعالم الهيكلية غير مربعة عندها يتطلب تجزئتها إلى كافة المصفوفات الجزئية الممكنة وذات الرتبة (S-1)، فإذا كانت واحدة على الأقل من قيم هذه المحددات لا تساوي صفراً تكون المعادلة مشخصة، أما إذا كانت كافة قيم المحددات ذات الرتبة (S-1) مساوية إلى الصفر فإن المعادلة تكون غير مشخصة.

ويجب الإشارة هنا إلى ان المنظومة الهيكلية تكون غير مشخصة إذا كانت واحدة أو أكثر من معادلاتها غير مشخصة، وهذا النوع من النماذج لا يمكن تقدير معلماته بأي أسلوب من أساليب القياس الاقتصادي. أما إذا كانت معادلات المنظومة مشخصة تماماً، عندها تكون المنظومة ككل مشخصة تماماً ويمكن تقدير معلماتها الهيكلية بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS).

ومن ناحية أخرى إذا كانت معادلات المنظومة فوق التشخيص، فيمكن تقدير معلماتها الهيكلية بواسطة طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS)، طريقة المتغيرات الأداتية (IV)، وطريقة الإمكان الأعظم (MLE).

ولتوضيح عملية التشخيص نأخذ المثال الآتي:

مثال (1.9): شخص كل معادلة من معادلات المنظومة الآتية:

$$Y_1 = 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1$$

$$Y_2 = Y_3 + X_3 + U_2$$

$$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3$$

الحل:

نعيد كتابة النموذج الهيكلي بعد دمج المتغيرات الداخلية مع الخارجية وكالاتي:

$$-Y_1 + 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1 = 0$$

$$-Y_2 + Y_3 + X_3 + U_2 = 0$$

$$-Y_3 + Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3 = 0$$

ولغرض الحل لابد من القيام بما يلي:

- 1- إهمال الأخطاء العشوائية وأعادته كتابة المعلمات الهيكلية بدلالة كافة المتغيرات في المنظومة للحصول على ما يلي:

جدول 2.9: هيكل النموذج

المعادلة	المتغيرات					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1	-1	3	0	-2	1	0
2	0	-1	1	0	0	1
3	1	-1	-1	0	0	-2

- 2- وبتحويلها إلى صيغة مصفوفة من خلال إيجاد مصفوفة المعاملات، نحصل على:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. الاختبارات المطلوبة:

أولاً: اختبار شرط الدرجة، وصيغة الاختبار هو:

$$K - M \geq S - 1$$

حيث أن:

$$K = 6, S = 3$$

أ- بالنسبة للمعادلة الأولى:

$$6 - 4, 3 - 1$$

المعادلة مشخصة تماماً، $2 = 2$.

ب- بالنسبة للمعادلة الثانية:

$$6 - 3, 3 - 1$$

المعادلة فوق مستوى التشخيص، $3 > 2$.

ج- بالنسبة للمعادلة الثالثة:

$$6 - 4, 3 - 1$$

المعادلة مشخصة تماماً، $2 = 2$.

ثانياً: اختبار شرط الرتبة:

ويتم ذلك بإنشاء جدول المتغيرات الخارجية والتي لم تظهر في المعادلة المر -

تشخيصها وكما يأتي:

جدول 3.9: المتغيرات الخارجية

-1	3	0	-2	1	0
0	-1	1	0	0	1
1	-1	-1	0	0	-2

ويتم ذلك من خلال شطب الصف الخاص بالمعادلة المراد تشخيصها، ثم شطب الأعمدة التي تظهر متغيراتها في هذه المعادلة وكما يأتي:

أ- بالنسبة للمعادلة الأولى:

نشطب الصف الأول من الجدول أعلاه وكذلك العمود الأول والثاني، نحصل على المصفوفة الفرعية $[Z_1]$ من المصفوفة $[A]$ التي تم تشخيصها بالاعتماد على العمودين (3) و(6) لاحتوائها على أصفار في الصف الأول الخاص بالمعادلة الأولى أو Y_1 . ومن ثم أيجاد المحدد لهذه المصفوفة.

$$|Z_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = [(1)(-2)] - [(-1)(1)] = -2 + 1 = -1$$

بما ان قيمة المحدد لا تساوي صفر، أذاً المعادلة الأولى مشخصة تماماً.

ب- بالنسبة للمعادلة الثانية:

نأخذ المصفوفة الفرعية Z_2 من المصفوفة $[A]$ بالاعتماد على الأعمدة (1) و(4) و(5) وذلك لاحتوائها على أصفار في الصف الثاني الخاص بالمعادلة الثانية أو Y_2 وكما يأتي:

$$|Z_2| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

وبما ان هذه المصفوفة غير مربعة أذا نجزئها إلى عدد من المصفوفات الفرعية، وكما يأتي:

$$|Z_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(-2) = 0 + 2 = 2$$

$$|Z_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(1) = 0 - 2 = -1$$

$$|Z_{23}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(0) - (1)(0) = 0 - 0 = 0$$

وبما ان هناك على الأقل واحدة من قيم هذه المحددات للمصفوفة Z_2 لا تساوي صفراً، لذا فان المعادلة الثانية مشخصة تماماً.

ج- أما بالنسبة للمعادلة الثالثة:

فنأخذ المصفوفة الفرعية Z_3 من المصفوفة $[A]$ بالاعتماد على العمودين 4

و 5 لاحتوائها على أصفار في الصف الثالث الخاص لـ (3) أو Y_3 ، وكما يأتي:

$$|Z_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(0) - (0)(1) \\ = 0 - 0 = 0$$

بما أن قيمة محدد هذه المصفوفة تساوي صفر فإن المعادلة الثالثة غير مشخصة.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.9: إذا كان نموذج المعادلات الآتية الآتي:

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 Y_3 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e_1$$

$$Y_2 = \alpha_3 + \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 Y_2 + \beta_3 X_3 + e_2$$

$$Y_3 = \alpha_6 + \alpha_7 Y_1 + \alpha_8 Y_2 + e_3$$

المطلوب: باستخدام شرط الدرجة ، هل ان المعادلات في النموذج أعلاه:

أ- مشخصة تماماً.

ب- لها تشخيص علوي.

ج- لها تشخيص سفلي.

د- غير مشخصة.

السؤال 2.9: إذا توفرت لديك المعلومات الآتية عن نموذج السوق:

$$Q_d = B_0 + B_1 P + B_2 X$$

دالة الطلب

$$Q_s = \alpha_1 + \alpha_2 P$$

دالة العرض

$$Q_d = Q_s$$

شرط التوازن

المطلوب:

أ - اشتق شرطي الرتبة والدرجة للتشخيص.

ب- حدد نوع التشخيص لمعادلات العرض والطلب في نموذج السوق.

السؤال 3.9: اكتب نموذج توازن السوق لسلعة ما، بحيث تكون معادلات النموذج ذات تشخيص سفلي أو علوي، ثم اشرح ذلك في ضوء النظرية الاقتصادية الجزئية.

الفصل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنياً

The Lagged Variables

1.10 المقدمة.

2.10 مفهوم النموذج المرتد زمنياً.

3.10 أسباب وجود الارتداد الزمني.

4.10 تقدير نموذج المرتد زمنياً:

1.4.10 نموذج كويك، KOYCH.

2.4.10 نموذج التوقع لـ CAGAN.

3.4.10 نموذج التعديل الجزئي لـ نيرلوف، NERLOV'S.

4.4.10 نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لـ ألمان، ALMON.

5.10 الأسئلة والتمارين.

الفصل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنياً

The Lagged Variables

1.10 المقدمة:

في نموذج الانحدار الخطي البسيط المنتظم يرتبط المتغير التابع (Y_i) بالمتغير المستقل (X_i)، وفي سياق السلسلة الزمنية يعني ذلك ان قيم Y و X يمكن قياسها في الفترة الزمنية نفسها ، لكن السلوك الاقتصادي يكون متحركاً وربما يحدث الأثر بشكل جوهري بعد سببه، مثال ذلك أنفاق الأسر على الاستهلاك لا يعتمد فقط على مستوى الدخل الجاري بل يعتمد على مستوى الدخل في السنوات السابقة، وهذا يعني ان حالة استجابة المتغير التابع للمتغيرات المستقلة تتباطأ وتنتشر عبر الزمن. وحيث تعرف تلك النماذج بالمتغيرات المرتدة زمنياً.

2.10 مفهوم النموذج المرتد زمنياً:

يعرف النموذج المرتد زمنياً بأنه ذلك النموذج الذي يحتوي على قيم متغيرات مرتدة زمنياً، سواء أكانت تلك المتغيرات داخلية أم خارجية على ان تكون، من بين المتغيرات التي يحتويها النموذج.

الصياغة الرياضية للنموذج المرتد زمنياً:

بشكل عام يمكن كتابة الصيغة العامة لنموذج الارتداد الزمني كالآتي:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + \dots + B_s X_{t-s} + U_t \quad \dots(1.10)$$

ويوضح النموذج أعلاه العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي (Y_t) كمتغير تابع والدخل (X_t) كمتغير مستقل واحد، فضلاً عن ذلك يبين النموذج آثار المتغير المستقل (X_t)

خلال فترات زمنية سابقة (t-1, t-2, t-3,...,s) على المتغير التابع (Y_t) ، حيث تشير B_0 إلى التأثير المعلوم، وذلك لأنه يعطي متوسط التأثير على المتغير التابع (Y_t) خلال الفترة الزمنية نفسها، وتشير المعلمات B_1 و B_2 إلى التأخر الزمني الذي يقيس متوسط التأثير على المتغير التابع (Y_t) عندما يتغير (X_t) بوحدة واحدة خلال الفترات الزمنية السابقة، وان (U_t) هو المتغير العشوائي. وتعود تسمية النماذج القياسية بنماذج الارتداد الزمني إلى كون تأثير المتغير المستقل فيها على المتغير التابع يتوزع عبر عدد من قيم المتغير المستقل (X) المرة زمنياً ولـ (S) من فترات الارتداد الزمني أي قد تكون محدودة Finite، او غير محدودة Infinite، ويمكن كتابة النموذج (1.10) كالآتي:

$$Y_t = a + b_0 X_t + \sum_{i=1}^s b_i X_{t-s} + U_t \quad \dots(2.10)$$

حيث : a ، b_0 ، b_i المعلمات المراد تقديرها.
ولنفترض ان b_s تحتوي على عدد محدد من فترات الارتداد الزمني أو عدد معين من السنوات (S) أي ان:

$$\sum_{i=0}^s b_i < \infty \quad \dots(3.10)$$

عليه فإن معدل الارتداد الزمني الذي يمثل متوسط جميع أوزان الارتداد التي يحتويه النموذج بالارتباط مع الوزن النسبي لكل معلمات b على التوالي. يُمكن كتابته كم يلي:

$$\text{Average lag} = \frac{\sum_{i=0}^s i b_i}{\sum_{i=0}^s b_i} \quad (i = 0,1,2,\dots,s) \quad \dots(4.10)$$

هذا وتعد المتغيرات المرتدة زمنياً متغيرات مستقلة مهمة جداً في معظم العلاقات الاقتصادية؛ ذلك لأن السلوك الاقتصادي لكل فترة زمنية محددة يتأثر إلى حد ما بنمط السلوك السائد في الفترة السابقة، كما وتعد نماذج الارتداد الزمني من النماذج المهمة جداً في عملية اتخاذ القرار، إذ تمكن من معرفة الفترة الزمنية التي ستكون فيها الوحدات الاقتصادية قادرة على الاستجابة للقرارات التي تتخذ بشأن الإنتاج، المبيعات، ... الخ.

مثال 1.10: بافتراض ان الفترة ($n = 2$) في النموذج (1.10) وانه تم تقدير النموذج وكانت النتائج كما يلي:

$$\hat{Y}_t = 55.02 + 0.4X_t + 0.3X_{t-1} + 0.2X_{t-2}$$

فإن معدل الارتداد الزمني، هو:

$$\text{Average lag} = \frac{\sum_{i=0}^s i b_i}{\sum_{i=0}^s b_i} = \frac{0(0.4) + 1(0.3) + 2(0.2)}{2} = 0.36$$

فالأثر في الأجل القصير (الميل الحدي للاستهلاك في الأجل القصير) على الأنفاق الاستهلاكي نتيجة زيادة الدخل المتاح بدينار واحد هو (0.4) وهذا يعني ان زيادة الدخل الشخصي المتاح للأنفاق على الاستهلاك بدينار واحد يترتب عليه زيادة في الأنفاق الاستهلاكي الشخصي في السنة نفسها بمقدار (400) فلساً. أما الأثر طويل الأجل (الميل الحدي للاستهلاك طويل الأجل) على الأنفاق الاستهلاكي، يساوي:

$$\sum b_i = b_0 + b_1 + b_2 = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9$$

ويعني ذلك ان زيادة الدخل الشخصي المتاح للأنفاق بدينار واحد يترتب عليه زيادة في الأنفاق الاستهلاكي الشخصي بمقدار (900) فلساً.

3.10 أسباب وجود الارتداد الزمني:

هناك أسباب عدة لظهور الارتداد الزمني في نماذج الاقتصاد القياسي، نذكر أهمها ما يأتي:

- أ- الأسباب النفسية أي بسبب العادات والتقاليد الاستهلاكية.
 - ب- الأسباب الفنية التي تحدث خلال بعض التغيرات المتعلقة بالانتاج، كالتغيرات في الأسعار والأجور، وكذلك فإن عرض المنتجات الزراعية يعتمد على متغيرات عديدة منها الأسعار في الفترات الزمنية السابقة.
 - ج- والسبب الآخر لوجود الارتداد الزمني، يرجع إلى السبب المؤسسي والتشريعي الحكومي التي تساهم في إحداث الارتداد الزمني، مثال ذلك، قد تحول التشريعات الحكومية المنتج من استخدام العمل إلى استخدام عنصر آخر، وبهذا فأنها تؤثر في اتخاذ القرار.
- ولهذه الأسباب فإن الارتداد الزمني يمثل مركزاً رئيساً في الاقتصاد لانه يؤثر في التحليل الاقتصادي سواء كان في الأجل القصير او الأجل الطويل، مثلاً نقول ان الميز الحدي للاستهلاك MPC، في الأجل القصير اقل منه في الأجل الطويل بوجود الارتداد الزمني في العوامل المؤثرة على الاستهلاك وكذلك فان مرونة الدخل في الأجل القصير تكون صغيرة في القيمة المطلقة مقارنة بمرونة الدخل في الأجل الطويل.

4.10 تقدير نماذج الارتداد الزمني:

سيتم مناقشة أهم نماذج الارتداد الزمني، وهي:

1.4.10 نموذج كويك، KOYCH:

يفترض كويك بأن أوزان المتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً تتناقص تدريجياً بمتوالية هندسية حسب القانون الآتي:

$$B_j = B_0 \lambda^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots(5.10)$$

حيث ان: $0 < \lambda < 1$

و λ هو معامل التباطؤ، ويُعرف بسرعة الاستجابة، ويوضح شرط المتوالية الهندسية السابقة، ان المعلمات B_j تتناقص بصورة مستمرة، إذ ان $\lambda < 1$ فكلما بعد الزمن كلما قل تأثير المتغير المرتد الزمني على المتغير التابع. ويشق نموذج كويك للارتداد الزمني ذو المتغيرات الداخلية من النموذج الأصلي الذي يحتوي على متغير خارجي مرتد زمنياً فقط ووفق الصيغة الآتية:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + \dots + B_s X_{t-s} + U_t \quad \dots(6.10)$$

حيث ان:

$$U_t \sim N(0, \sigma_u^2)$$

وان B_j تتناقص تدريجياً بشكل متوالية هندسية أي ان:

ويعني ذلك ان زيادة الدخل الشخصي المتاح للأنفاق بدينار واحد يترتب عليه زيادة في الأنفاق الاستهلاكي الشخصي بمقدار (900) فلساً.

3.10 أسباب وجود الارتداد الزمني:

هناك أسباب عدة لظهور الارتداد الزمني في نماذج الاقتصاد القياسي، نذكر أهمها ما يأتي:

أ- الأسباب النفسية أي بسبب العادات والتقاليد الاستهلاكية.

ب- الأسباب الفنية التي تحدث خلال بعض التغيرات المتعلقة بالانتاج، كالتغيرات في الأسعار والأجور، وكذلك فإن عرض المنتجات الزراعية يعتمد على متغيرات عديدة منها الأسعار في الفترات الزمنية السابقة.

ج- والسبب الآخر لوجود الارتداد الزمني، يرجع إلى السبب المؤسسي والتشريعي الحكومي التي تساهم في إحداث الارتداد الزمني، مثال ذلك، قد تحول التشريعات الحكومية المنتج من استخدام العمل إلى استخدام عنصر آخر، وبهذا فأنها تؤثر في اتخاذ القرار.

ولهذه الأسباب فإن الارتداد الزمني يمثل مركزاً رئيساً في الاقتصاد لانه يؤثر في التحليل الاقتصادي سواء كان في الأجل القصير او الأجل الطويل، مثلاً نقول ان الميز الحدي للاستهلاك MPC، في الأجل القصير اقل منه في الأجل الطويل بوجود الارتداد الزمني في العوامل المؤثرة على الاستهلاك وكذلك فان مرونة الدخل في الأجل القصير تكون صغيرة في القيمة المطلقة مقارنة بمرونة الدخل في الأجل الطويل.

4.10 تقدير نماذج الارتداد الزمني:

سيتم مناقشة أهم نماذج الارتداد الزمني، وهي:

1.4.10 نموذج كويك، KOYCH:

يفترض كويك بأن أوزان المتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً تتناقص تدريجياً
بمتوالية هندسية حسب القانون الآتي:

$$B_j = B_0 \lambda^j \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad \dots(5.10)$$

حيث ان: $0 < \lambda < 1$

و λ هو معامل التباطؤ، ويُعرف بسرعة الاستجابة، ويوضح شرط المتوالية الهندسية السابقة، ان المعلمات B_j تتناقص بصورة مستمرة، إذ ان $\lambda < 1$ فكلما بعد الزمن كلما قل تأثير المتغير المرتد الزمني على المتغير التابع. ويشق نموذج كويك للارتداد الزمني ذو المتغيرات الداخلية من النموذج الأصلي الذي يحتوي على متغير خارجي مرتد زمنياً فقط ووفق الصيغة الآتية:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + \dots + B_s X_{t-s} + U_t \quad \dots(6.10)$$

حيث ان:

$$U_t \sim N(0, \sigma_u^2)$$

وان B_j تتناقص تدريجياً بشكل متوالية هندسية أي ان:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \lambda B_0 \\
B_2 &= \lambda^2 B_0 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
B_i &= \lambda^i B_0
\end{aligned}$$

وبالتعويض في المعادلة (6.10):

$$Y_t = a + B_0 X_t + \lambda B_0 X_{t-1} + \lambda^2 B_0 X_{t-2} + \dots + U_t \quad \dots(7.10)$$

وبجعل النموذج أعلاه مرتد لفترة زمنية واحدة فأن:

$$Y_{t-1} = a + B_0 X_{t-1} + \lambda B_0 X_{t-2} + \lambda^2 B_0 X_{t-3} + \dots + U_{t-1} \quad \dots(8.10)$$

وبضرب طرفي المعادلة في λ ، نحصل على:

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda a + \lambda B_0 X_{t-1} + \lambda^2 B_0 X_{t-2} + \lambda^3 B_0 X_{t-3} + \dots + \lambda U_{t-1} \quad \dots(9.10)$$

وبطرح معادلة (9.10) من معادلة (7.10) نحصل على:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a - \lambda a + B_0 X_t + U_t - \lambda U_{t-1} \quad \dots(10.10)$$

ويمكن ترتيبها كما يلي:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = a(1 - \lambda) + B_0 X_t + U_t - \lambda U_{t-1} \quad \dots(11.10)$$

وبالمناقلة والترتيب ، نحصل على:

$$Y_t = a(1 - \lambda) + B_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t \quad \dots(12.10)$$

حيث ان:

$$V_t = (U_t - \lambda U_{t-1})$$

وهو حد الخطأ الجديد.

كما يمكن كتابة نموذج KOYCK بصورة مختصرة بعد حذف الحد الثابت، وكما يأتي:

$$Y_t = B_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t$$

وتسمى هذه الصيغة بتحويلة، Transformation، كويك، وعليه فان تحويلة كويك أعلاه تستخدم في نقل النموذج الأصلي والذي يحتوي على عدد لا نهائي من المتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً إلى نموذج يحتوي على متغيرين مستقلين فقط هما X_t و Y_{t-1} كما تناقصت عدد المعلمات التي يراد تقديرها من العدد اللانهائي في النموذج الأصلي إلى ثلاث معلمات فقط في نموذج كويك المحول هي a ، B_0 ، λ . وبتطبيق طريقة OLS يُمكن تقدير معادلة كويك للحصول على المقدرات $\hat{a}$ ، $\hat{B}_0$ ، $\hat{\lambda}$ ثم نجري استعادة تقديرات المعلمات الأصلية B_j بتطبيق القانون:

$$B_j = B_0 \lambda^j \quad \dots(13.10)$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

فعلى سبيل المثال:

$$\text{At } j = 0;$$

$$\hat{B}_0 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^0$$

$$\therefore \hat{B}_0 = \hat{B}_0, \quad \lambda^0 = 1$$

$$\text{At } j = 1;$$

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^1$$

$$\therefore \hat{B}_1 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}$$

$$\text{At } j = 2;$$

$$\hat{B}_2 = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\hat{B}_\infty = \hat{B}_0 \hat{\lambda}^\infty$$

فإذا قدرنا على سبيل المثال المعادلة (12.10) كما يأتي:

$$\hat{Y}_i = 64 + 0.3X_i - 0.6X_{i-1} \quad \dots(14.10)$$

عندئذٍ سنعتمد $B=0.3$ و $\lambda = 0.6$ ، فإن:

$$\hat{a} = \frac{a}{(1 - \hat{\lambda})} = \frac{64}{1 - 0.6} = 160$$

وعند تعويض هذه المعاملات في المعادلة (6.10)، يمكن الحصول على:

$$\hat{Y}_i = 160 + 0.3X_i + 0.18X_{i-1} + 0.108X_{i-2} \quad \dots(15.10)$$

استناداً إلى العرض السابق للنموذج، يمكن إثارة الملاحظات الآتية:

- إننا بدأنا بنموذج متغيرات مرتدة زمنياً موزعة بصورة لا نهائية، غير أنه تحول

إلى نموذج انحدار ذاتي لـ Y_{t-1} على X_t و Y_{t-1} .

- ان المتغير التابع المرتد زمنياً يظهر ضمن المتغيرات المستقلة مما يخرق
الفرض اللازم للحصول على مقدرات OLS المنادية بثبات قيم المتغيرات
المستقلة في المعاينات المتكررة.

- إن حد الخطأ العشوائي الخاص بالنموذج الأصلي هو U_i بينما حد الخطأ الخاص
بنموذج كويك المحول هو V_i فإذا كانت U_i الأصلية لا تتربط ذاتياً حسب فروض
OLS فان V_i لا تحتفظ بتلك الخاصية.

ونتيجة لعشوائية Y_{i-1} وعدم استقلال V_i عن قيمها السابقة تنتهك فروض
OLS العادية مما يقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة لنموذج كويك المتخلف
زمنياً.

2.4.10 نموذج التوقع المكيف لـ CAGAN:

يقودنا هذا النموذج إلى بقاء الارتداد الزمني بشكل فعلي متطابق مع نموذج
كويك (6.10)، غير ان المتغير Y_i يعتمد على القيم المتوقعة أو الدائمة للمتغير X^*
وليست على القيمة الحقيقية لـ X . لذلك يستخدم نموذج CAGAN للتوقع المكيف في
النموذج ذاتي الانحدار والذي يكون المتغير المستقل فيه له قيم متوقعة مثلى، ويمكن
كتابة هذا النموذج بالصيغة الآتية:

$$Y_i = a + BX_i^* + U_i \quad \dots\dots(16.10)$$

حيث ان:

Y : تمثل الكمية المطلوبة من سلعة ما.

X^* : تمثل السعر المتوقع للسلعة.

i : تمثل الزمن.

U : تمثل المتغير العشوائي.

ان التفسير الأكثر شيوعاً لـ X^* في النظرية الاقتصادية، أنه يمثل الدخل الدائم في نظرية فريدمان للاستهلاك، وكذلك في دالة الطلب على النقود، وبما ان X^* مجهولة، أي لا تتوفر عنها بيانات، لذلك نحتاج إلى كيفية تحديدها، وبالتالي فان المعادلة (16.10) لابد وان ترتبط ببعض الافتراضات عند تكوينها، والفرضية العامة لها هي التوقعات المكيفة التي تأخذ خطة دقيقة لتحديد قيمة X^* ، وكما يأتي:

$$X_i^* - X_{i-1}^* = \mu(X_i - X_{i-1}^*) \quad \dots(17.10)$$

حيث أن: $0 \leq \mu \leq 1$

لذلك فان الأفراد سيزيدون من مشترياتهم عندما يتوقعون ارتفاع الأسعار في المستقبل. وعلى افتراض ان الأسعار المتوقعة هي عبارة عن متوسط للأسعار المرجحة في الفترة الحالية والأسعار المتوقعة في الفترة الزمنية السابقة، أي ان:

$$X_i^* = \mu X_i + (1 - \mu) X_{i-1}^* \quad \dots(18.10)$$

وان قيمة μ تقع بين الصفر والواحد الصحيح، وهنا لابد من تحديد ما يأتي:

أ- عندما تكون $\mu = 1$:

وهذا يعني ان الأسعار المتوقعة تكون دائماً مساوية للأسعار الحقيقية، وتعرف μ بمعامل التوقع المكيف، Adjustment Coefficient of Expectation، وتعرف هذه الفرضية أيضاً بفرضية التوقع المتطور، Progressive Expectation، او فرضية تعلم الخطأ Error Learning Hypothesis، إذ ان المعادلتين (17.10) و (18.10) تعرف على أنها فرضية التوقعات المكيفة.

فالمعادلة (17.10) تشير إلى ان الدخل الحقيقي في الفترة X_i ، يفوق الدخل المتوقع في الفترة السابقة X_{i-1}^* ، لذلك فان فكرة توقع الدخل قد تُعدّل إلى الأعلى،

ومن ثم فإن الدخل المتوقع في الفترة i ، (X_i) يفوق الدخل المتوقع في الفترة السابقة X_{i-1}^* ، وان تحديد التعديل يعتمد على حجم معامل التوقع المكيف μ ، الواقع بين الصفر والواحد الصحيح.

ب- عندما تكون $\mu = 1$:

فان التعديل يكون قد تم بسبب ان $X_i^* = X_i$ ، ولذلك يتطابق الدخل الحقيقي والدخل المتوقع.

ج- عندما $\mu = 0$:

في هذه الحالة لا يحدث تعديل على الإطلاق، وان الدخل المتوقع يبقى بدون تغيير ويكون غير متأثر بالدخل الحقيقي مهما كان حجمها.

وبشكل عام، يمكن تحديد ما يأتي:

كلما كانت قيمة μ أكبر كلما كان امتداد التعديل اكبر، ويمكن ملاحظة ذلك، انه عند التعويض في المعادلة (18.10) لـ (X_{i-1}^*) ، $X_{i-2}^*, \dots, X_{i-n}^*$ يترتب عليه ما يأتي:

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^*$$

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^* + (1-\mu)^3 X_{i-3}^*$$

$$X_i^* = \mu X_i + (1-\mu)\mu X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2}^* + (1-\mu)^3 X_{i-3}^* + (1-\mu)^4 X_{i-4}^* \dots (19.10)$$

وهكذا لتحديد الدخل المتوقع، فان معظم الأوزان قد أعطيت إلى الدخل الجاري X_i ، وقد تم انحدار الأوزان بشكل ناجح إلى المستويات السابقة للدخل، X_{i-1} ، X_{i-2} ، X_{i-3} ، ويتعويض المعادلة (19.10) في المعادلة (16.10)، نحصل على:

$$Y_i = a + B\mu[X_i + (1-\mu)X_{i-1} + (1-\mu)^2 X_{i-2} + \dots] \quad \dots(20.10)$$

حيث إن المعادلة (20.10) تتطابق مع المعادلة (6.10) لنموذج الارتداد الزمني لكويك، وان:

$$b = (1-\mu) \quad , \quad B\mu = b$$

وباستخدام تحويل CAGA بارتداد زمني لفترة واحدة، كما في المعادلة (20.10) أولاً وبضرب طرفي المعادلة في $(1-\mu)$ ثانياً. ثم بطرح النتيجة من المعادلة (20.10) نحصل على ما يلي:

$$Y_i = a\mu + B\mu X_i + (1-\mu)Y_{i-1} + U_i - (1-\mu)U_{i-1} \quad \dots(21.10)$$

وتأسيساً على ذلك، إذا توقعنا افتراض التوقعات المكيفة، فانه لتعديل معادلة التقدير (14.10) سوف نقترح ما يأتي:

$$1 - \hat{\mu} = 0.6$$

لان $\hat{\mu} = 0.4$ وان:

$$\hat{B} = \frac{0.3}{\hat{\mu}} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

وهكذا يمكن تقدير العلاقات السلوكية للمعادلة (16.10) كما يأتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{B} X_i^* + e_i$$

$$\hat{Y}_i = 160 + 0.75 X_i^* \quad \dots(22.10)$$

وان معامل التعديل المكيف في معادلة التوقعات المعدلة (17.10) هو 0.4، هذه القيمة يمكن استخدامها بأنها تمثل 40% لأي اختلاف بين الدخل الحقيقي والدخل المتوقع.

مثال 2.10: إذا توفرت البيانات الآتية عن الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y) والسعر الحقيقي لتلك السلعة (X) كما في الجدول الآتي:

i	Y	X
1	30.6	125
2	31.6	140
3	31.3	130
4	33.3	155
5	33.5	145
6	33.2	163
7	36.7	170
8	38.6	182
9	39.0	173
10	40.8	192
11	42.7	203
12	41.9	178
13	40.2	163
14	40.7	182
15	40.4	175

المطلوب: تقدير المعادلة (16.10)، وكيف يمكن إيجاد السعر المتوقع للسلعة X؟

الحل:

أ- لا يمكن تقدير المعادلة (16.10) من البيانات في الجدول أعلاه، بسبب ان قيمة X_i^* غير معلومة، لذلك لابد من إيجادها أولاً ومن ثم يمكن تقدير النموذج.

ب- إيجاد السعر المتوقع X_i^* من خلال الخطوات الآتية:

1- باستخدام طريقة OLS وتطبيقها على المعادلة (21.10) نحصل على:

$$\hat{Y}_i = 1.95825 + 0.0805855X_i + 0.598679Y_{i-1}$$

$$\therefore (1 - \hat{\mu}) = 0.598679$$

$$\hat{\mu} = 1 - 0.598679$$

$$\hat{\mu} = 0.401321$$

$$\hat{a}\hat{\mu} = 1.95825 \quad \text{وان:}$$

$$\hat{a} = \frac{1.95825}{\hat{\mu}}$$

إذن:

$$\therefore \hat{a} = \frac{1.95825}{0.401321} = 4.87951$$

وان:

$$\hat{B}\hat{\mu} = 0.0805855$$

$$\hat{B} = \frac{0.0805855}{\hat{\mu}}$$

$$\therefore \hat{B} = \frac{0.0805855}{0.401321} = 0.20080$$

وباستخدام المعادلة (16.10)، يمكن إيجاد قيمة X_i^* ، وكما يأتي:

$$\begin{aligned} Y_i &= a + BX_i^* + U_i \\ \hat{Y}_i &= \hat{a} + \hat{B}X_i^* + e_i \end{aligned} \quad \dots(23.10)$$

وبإعادة ترتيب (23.10) أعلاه، نحصل على:

$$\hat{B}X_i^* = Y_i - \hat{a}$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $\hat{B}$ ، نحصل على:

$$X_i^* = \frac{Y_i - \hat{a}}{\hat{B}}$$

وبتعويض قيم (Y_i) الواردة في الجدول، نحصل على:

$$X_1^* = \frac{30.6 - 4.87951}{0.20080} = 128.1$$

$$X_2^* = \frac{31.6 - 4.87951}{0.20080} = 133.1$$

$$X_3^* = \frac{31.3 - 4.87951}{0.20080} = 131.6$$

وهكذا نحصل على بقية قيم X_i^* من الجدول السابق.

$$X_{15}^* = \frac{40.4 - 4.87951}{0.20080} = 176.9$$

3.4.10 نموذج التعديل الجزئي لـ "نيرلوف" Nerlov's:

يفترض نيرلوف ان المستوى المرغوب للمتغير (Y) في الفترة الزمنية (t) يعتمد على قيمة (X) في الفترة الزمنية (t)، مضافاً إليه المتغير العشوائي U_t ، وبذلك يأخذ المتغير التابع (Y) قيمة متوقعة مثلى حيث يمكن ان نرمز له بالرمز (Y_t^*) وكما في النموذج الآتي:

$$Y_t^* = B_0 + B_1 X_t + U_t \quad \dots(24.10)$$

حيث ان:

Y_t^* : تمثل الرصيد الأمثل او المخطط لرأس المال.

X_t : تمثل الناتج.

U_t : تمثل المتغير العشوائي.

t : الفترة الزمنية.

وبموجب نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف او ما يسمى بنموذج تعديل الرصيد The Stock Adjustment Model، فان التغير في خزين رأس المال إلى المستوى الأمثل (Y_t^*) يمثل في حقيقته التغير المتحقق في خزين رأس المال في كل فترة، لذلك من الطبيعي ان Y_t و (Y_t^*) ليست نفسها، بمعنى آخر فان تعديل (Y) الحقيقية إلى التغير في (X) لا يحصل بشكل فوري بل ربما يكون حصيلة التقدم التكنولوجي والقرارات الإدارية والمالية التي تقدم عليها المنشأة أو الدولة في مجال الاستثمار، وعليه فان معادلة التعديل تأخذ الصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda(Y_t^* - Y_{t-1}) + V_t \quad \dots(25.10)$$

$$0 < \lambda < 1$$

λ : تمثل معامل التعديل، Coefficient of Adjustment، وتقيس مدى اقتراب او ابتعاد Y_t الحالية عن السابقة Y_{t-1} ، وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح.

$Y_t - Y_{t-1}$: تمثل التغير الفعلي.

$Y_t^* - Y_{t-1}$: تمثل التغير المرغوب فيه.

V_t : تمثل حد الخطأ.

وبطرح معادلة (24.10) من معادلة (25.10) نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda [(B_0 + B_1 X_t + U_t) - Y_{t-1}] + V_t \quad \dots (26.10)$$

وبفك الأقواس والترتيب، نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t - \lambda Y_{t-1} + \lambda U_t + V_t$$

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + Y_{t-1} - \lambda Y_{t-1} + \lambda U_t + V_t$$

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + (1 - \lambda) Y_{t-1} + (\lambda U_t + V_t) \quad \dots (27.10)$$

هذه المعادلة توضح ان (Y_t) الرصيد من رأس المال في الفترة (t) يعتمد في جزء منه على مستوى الإنتاج في تلك الفترة (X_t) وفي الجزء الآخر على التوسع في الرصيد، كما وان درجة التعديل والسرعة التي تمكن تعديل (Y) إلى (X) عبر الفترة الزمنية تعتمد على حجم معامل التعديل (λ) ، فكلما كانت (λ) اكبر كلما كانت سرعة التعديل اكثر، أي يتساوى رأس المال الحالي مع رأس المال المرغوب فيه، وكلما كانت اصغر كلما صغر التعديل في الفترة الجارية، مما يدل على اقتراب رأس المال القائم من السابق، فعندما $\lambda = 1$ ، معنى ذلك ان الرصيد الحقيقي لرأس المال

سوف يكون دائماً مساوياً للرصيد المخطط منه، وعندما تكون $\lambda = 0$ فإن $Y_t = Y_{t-1}$ ولا يكون هناك أي تعديل على الإطلاق.

وبمقارنة نموذج نيرلوف (معادلة 27.10) مع نموذج كويك (معادلة 12.10) يتضح بأن كلاهما يحتويان على المتغيرات نفسها (Y_{t-1}, X_t, Y_t) غير أن حد الخطأ في نموذج نيرلوف لا يحتوي على أي شكل من أشكال التعدد الخطي كما هو الحال في نموذج كويك، كما أن حد الخطأ $(\lambda U_t + \lambda V_t)$ لا يرتبط خطياً.

مثال 3.10: إذا توفرت لديك البيانات الآتية:

المبيعات X_t	الأنفاق الاستثماري المخطط Y_t	الفترة i
20	10	1
19	9	2
21	10	3
23	11	4
25	13	5
27	20	6
30	24	7
32	19	8
34	24	9
40	26	10

المطلوب: تقدير معاملات نموذج التعديل الجزئي قصيرة وطويلة الأجل لدالة الطلب على الأنفاق الاستثماري.

الحل: نتبع الخطوات الآتية:

أ- صياغة نموذج التعديل، كما جاء في المعادلة (27.10)، وهي:

$$Y_t = \lambda B_0 + \lambda B_1 X_t + (1 - \lambda) Y_{t-1} + (\lambda U_t + V_t)$$

ب- تطبيق طريقة OLS على المعادلة أعلاه، مستخدماً البيانات في الجدول أعلاه ومنها نحصل على:

$$\hat{Y}_t = -7.33 + 0.095 X_t + 0.83 X_{t-1}$$

وتمثل هذه الدالة دالة الطلب قصيرة الأجل. ولإيجاد قيم B_1 ، B_0 نتبع ما يأتي:

$$(1 - \hat{\lambda}) = 0.83$$

$$\therefore \hat{\lambda} = 1 - 0.83 = 0.17$$

$$\lambda \hat{B}_0 = -7.33$$

وان:

$$\therefore \hat{B}_0 = \frac{-7.33}{0.17} = -43.12$$

$$\lambda \hat{B}_1 = 0.095$$

وان:

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{0.095}{0.17} = -0.5588$$

ومن ثم يمكن تقدير دالة الطلب في الأجل الطويل وكما يأتي:

$$Y_t^* = -43.12 - 0.5588 X_t$$

4.4.10 نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لـ "المون" ALMON:

يفترض المون أن معاملات النموذج المقدرة B_i تأخذ شكل التوزيع متعدد الحدود. فقد افترض المون أن أقصى ارتداد زمني هو (m) ، أي:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + \dots + B_m X_{t-m} + U_t \dots (28.10)$$

$$Y_t = a + \sum_{i=0}^m B_i X_{t-i} + U_t$$

وإن B_i تتوقف على درجة الحدود، فمثلاً بافتراض أربع فترات ارتداد، فإن الصياغة تكون:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + B_3 X_{t-3} + B_4 X_{t-4} + U_t \dots (29.10)$$

$$B_i = C_0 + C_{1i} + C_{2i}^2 + C_{3i}^3$$

حيث أن: $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$

وبالتعويض في المعادلة (28.10) نحصل على:

$$Y_t = a + C_0 X_t + (C_0 + C_1 + C_2 + C_3) X_{t-1} + (C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 8C_3) X_{t-2} \\ + (C_0 + 3C_1 + 9C_2 + 27C_3) X_{t-3} + (C_0 + 4C_1 + 16C_2 + 64C_3) X_{t-4} + U_t$$

وبإعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$Y_t = a + C_0 \left(\sum_{i=0}^4 X_{t-i} \right) + C_1 \left(\sum_{i=0}^4 i X_{t-i} \right) + C_2 \left(\sum_{i=0}^4 i^2 X_{t-i} \right) + C_3 \left(\sum_{i=0}^4 i^3 X_{t-i} \right) + U_t$$

وإذا رمزنا للمتغيرات المستقلة الجديدة بالرموز الآتية $Z_{1t}, Z_{2t}, Z_{3t}, Z_{4t}$ على الترتيب، نحصل على:

$$Y_t = a + C_0 Z_{1t} + C_1 Z_{2t} + C_2 Z_{3t} + C_3 Z_{4t} + U_t \quad \dots(30.10)$$

وتعد المعادلة (30.10) انحدار متعدد منظم، وإن التقديرات التي نحصل عليها لقيم C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 ، تكتسب خصائص التقدير الجيد.

ويجب هنا ملاحظة تحديد كل من درجة الحدود وطول فترة الارتداد الزمني قبل البدء بتطبيق طريقة أُمون ويلاحظ هنا أن المعادلة (29.10) تستخدم فقط لتحديد المعلمات للنموذج لقيم (i) من الصفر إلى (m)، أي أن $(i=0,1,2,3,\dots,m)$ وأن معلمات نموذج الارتداد الزمني خارج هذا المجال يمكن تحديدها بأن نساويها بالصفر. وعند مقارنة نموذج أُمون للارتداد الزمني مع نموذج كويك للارتداد الزمني نحصل على ميزتان هامتان:

الأولى: أن لنموذج أُمون هيكل ارتداد زمني مرّن على عكس هيكل الارتداد الزمني الجامد لنموذج كويك.

الثانية: أن نموذج أُمون لا يستبدل متغيراً تابعاً مرتداً زمنياً بالمتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً، فإنه لا يخرق أياً من فروض OLS كما يفعل نموذج كويك. أما عيوب نموذج أُمون، فهي:

- أن عدد المعلمات اللازم تقديرها لا ينخفض كثيراً كما يحدث في نموذج كويك.
- أنه في الواقع العملي قد لا نستطيع تحديد فترة الارتداد الزمني عن طريق النظرية أو بمعلومات مسبقة.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.10: ميز بين طريقة KOYCK وطريقة ALMON فيما يتعلق بالارتداد الزمني للتغيرات، ثم حدد أيهما أفضل عندما تكون سنوات التخلف (10 سنة) ($n = 25$).

السؤال 2.10: افترض لدينا دالة الاستهلاك الآتية:

$$C_t = a + B_0 Y_t + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + U_t$$

وكانت المعادلة التقديرية لها هي:

$$\hat{C}_t = 15 + 0.6Y_t + 0.9Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2} + e_t$$

المطلوب:

أ- أيجاد متوسط (معدل) الارتداد الزمني.

ب- ما هو الأثر القصير والطويل الأجل على الأنفاق الاستهلاكي.

السؤال 3.10: ضع علامة صح () أو خطأ (X) أمام العبارات الآتية مع تصحيح العبارة الخاطئة:

أ- عندما تكون فترات الارتداد الزمني كبيرة نسبة إلى حجم العينة المدروسة سوف تقع في مشكلة درجات الحرية وبذلك يصبح من الصعب الحصول على تحديد مقدرات دقيقة لمعاملات النموذج.

ب- ان من أسباب الارتداد الزمني هو أسباب نفسية وليست فنية.

ج- ان الارتداد الزمني يعود إلى التشريع الحكومي والتي تساهم في التخلف الزمني للمتغيرات.

د- يفترض نموذج كويك ان المتغيرات المستقلة تكون سالبة وتتصاعد هندسياً مع الزمن.

هـ- ان فقدان مشاهدة واحدة عند إجراء عملية التقدير نتيجة الارتداد الزمني يرضي الشرط الأول للتقدير.

و- يطلق على نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف بنموذج تعديل الرصيد.

ز- يأخذ المتغير التابع في نموذج نيرلوف قيمة متوقعة مثلى.

ح- نطلق على $e_i = \lambda U_i$ باصطلاح نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف.

ط- عند وجود نقطة واحدة من نقاط الانقلاب في نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لالمون فإنه يأخذ شكل متعدد الحدود من الدرجة الثانية.

السؤال 4.10: ان مستوى الاستهلاك الجاري يتأثر بالدخل الجاري ومستويات الدخل في السنوات السابقة، ويمكن عرض ذلك رياضياً وكما يأتي:

$$C_t = f(Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots, Y_{t-n})$$

المطلوب:

أ- اشتق رياضياً أفضل نموذج لدالة الاستهلاك معتمداً نموذج كويك.

ب- ما هي فرضيات نموذج كويك.

السؤال 5.10: بين أهم الصعوبات التي تواجه الباحث عند بناء نموذج تقديري لنموذج يحتوي على n من فترات الارتداد الزمني.

السؤال 6.10: ما المقصود اقتصادياً بنماذج الارتداد الزمني، وما هي الصيغة الرياضية العامة لها عندما يكون لديك هناك (n) من فترات الارتداد الزمني.

السؤال 7.10: هل يكون هناك عدد لانتهائي (∞) من فترات الارتداد الزمني في نماذج الارتداد الزمني، وهل يكون ذلك مقبولاً اقتصادياً.

الفصل الحادي عشر: المتغيرات الوهمية

Dummy Variables

1.11 المقدمة.

2.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد.

3.11 نموذج الانحدار المتضمن أكثر من متغير وهمي مستقل.

4.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي تابع.

5.11 الأسئلة والتمارين.

الفصل الحادي عشر: المتغيرات الوهمية

Dummy Variables

1.11 المقدمة:

تضمنت الطرق التي تعرضنا لها في الفصول السابقة استعمال متغيرات اقتصادية يجري قياسها كمياً وتتوفر عنها بيانات إحصائية مثل متغيرات السعر، الصادرات، الاستهلاك، الكمية المطلوبة والمعرضة... الخ، غير أنه قد تواجه الباحث أحياناً كثير من المتغيرات لا تتوفر عنها إحصائيات كمية، وقد تكون ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة أو قد تظهر كمتغير تابع على الجانب الأيمن من النموذج المراد قياسه، وتعرف تلك المتغيرات بالمتغيرات النوعية، Qualitative Variables، أو المتغيرات الوهمية، Dummy Variables، وتعبر عن صفة معينة كالجنس، الحروب، الزلازل، الإضراب وغيرها من الصفات ويتخذ المتغير الوهمي (النوعي) قيمتين فقط (1، صفر)، القيمة واحد للدلالة على وجود الصفة والقيمة صفر للدلالة على عدم وجودها.

تعد المتغيرات الوهمية ذات أهمية بالغة وكبيرة، فالعلاقات الاقتصادية لا تعتمد على متغيرات يمكن قياسها فقط، بل تعتمد فضلاً عن ذلك على متغيرات وهمية. فالاستهلاك مثلاً لا يتوقف على مستوى الدخل لوحده، بل يتوقف على ما إذا كان البلد في وقت الحرب، War time، أو في وقت السلم Peace time، كذلك الحال بالنسبة للطلب على سلعة ما لا يتوقف على الدخل وحده، بل يعتمد على متغيرات أخرى غير الدخل كذوق المستهلك مثلاً، عندما يتغير ذوق المستهلك يتبع ذلك تغيير في الكميات المطلوبة من تلك السلعة، لذلك لابد من إدخال المتغيرات الوهمية المتعلقة بذوق المستهلك إلى النموذج الاقتصادي المراد دراسته وهكذا بالنسبة لبقية النماذج

2.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد:

في هذه الحالة يظهر المتغير الوهمي كمتغير مستقل ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة، وغالباً ما تظهر تلك المتغيرات في الدراسات التي تعتمد السلاسل الزمنية كقاعدة بياناتية وذلك نتيجة لحدوث تغيرات هيكلية كبيرة في مسار الاقتصاد، كما قد تظهر في الدراسات التي تستخدم البيانات المقطعية نتيجة لعدم تماثل الظروف الذاتية والموضوعية بين مختلف الوحدات الاقتصادية المشمولة في العينة.

فعلى سبيل المثال، نتوقع ان تنخفض مستويات ومعدلات الاستهلاك الخاص في دولة ما إذا ما مرت تلك الدولة بظرف طارئ مثل فترات الحرب او الجفاف وذلك مقارنةً مع فترات السلم او الازدهار والتي غالباً ما ترتفع فيها مستويات ومعدلات الاستهلاك، عليه يصبح من الممكن إدخال متغير مستقل إضافي جديد لدالة الاستهلاك بجانب الدخل ليفسر الفرق بالاستهلاك بين فترتي السلم والحرب، ويتم إعطاء قيمتين لذلك المتغير ليتخذهما في فترتي السلم والحرب. ويمكن التعبير عن نموذج الاستهلاك أعلاه كالآتي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 D_t + U_t \quad \dots(1.11)$$

إذ ان:

C_t : تمثل الأنفاق الاستهلاكي الخاص.

Y_t : تمثل الدخل.

D_t : تمثل المتغير الوهمي وتأخذ القيم:

$D_t = 0$: في وقت السلم.

$D_t = 1$: في وقت الحرب.

U_t : تمثل المتغير العشوائي.

فدالة الاستهلاك في وقت السلم تأخذ الصيغة الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t$$

وذلك من خلال التعويض $D_t = 0$ في المعادلة (1.11).

أما في وقت الحرب فان الدالة تأخذ الصيغة الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2(1) + U_t$$

$$C_t = B_0 + B_2 + B_1 Y_t + U_t$$

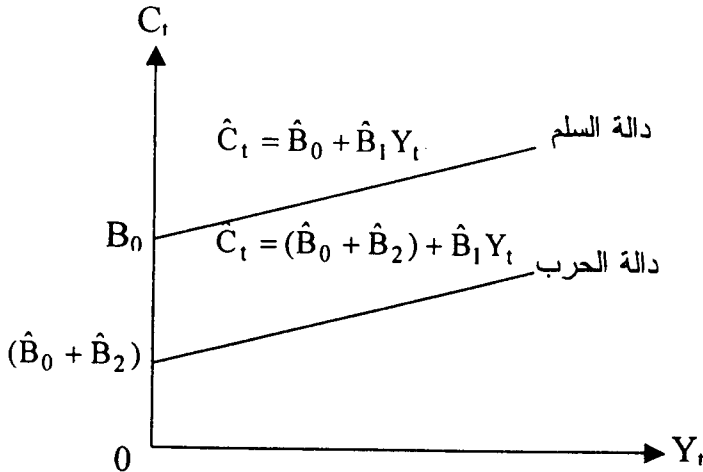
Or;

$$C_t = (B_0 + B_2) + B_1 Y_t + U_t$$

فخلال فترة الحرب، يكون الاستهلاك اقل من فترة السلم بسبب القيود ونقص المتاح من السلع والخدمات عليه فإن B_2 (معامل D_t) من المتوقع ان تكون سالبة لسنوات الحرب بحيث يكون المقطع و/أو الميل اقل في معادلة الحرب عنها في معادلة سنوات السلم. ويمكن توضيح هذه الحالات بالأشكال الآتية:

أ- تغيير المقطع، ويمكن توضيح ذلك في الشكل (1.11).

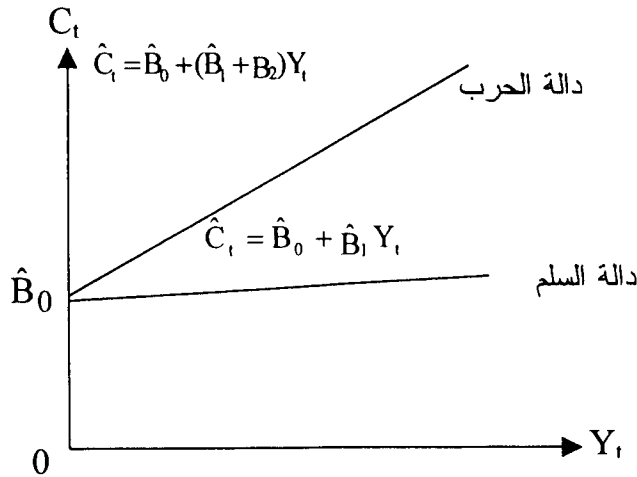
الشكل (1.11): تغير الحد الثابت في دالة الاستهلاك



ان الشكل (1.11) يوضح تغير المقطع فقط حيث يكون المقطع في دالة استهلاك الحرب اسفل من دالة استهلاك السلم.

ب- تغير ميل دالة الاستهلاك، ويمكن توضيح ذلك كما في الشكل (2.11).

الشكل (2.11): تغير ميل دالة الاستهلاك

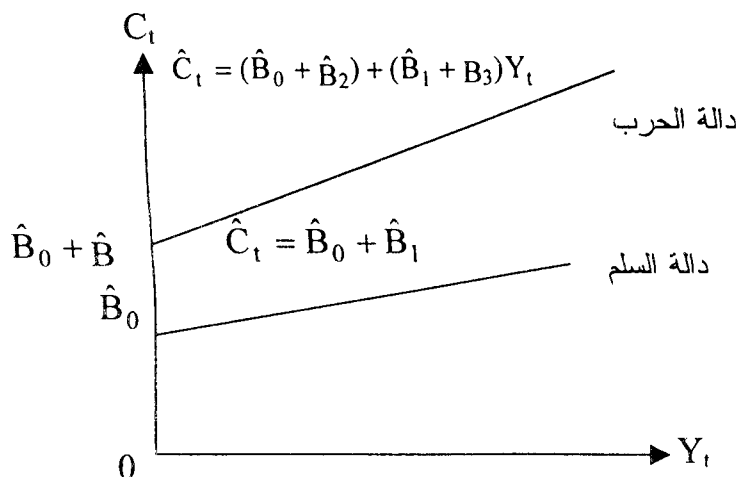


ان الشكل (2.11) يوضح تغير الميل حيث ان ميل دالة الاستهلاك ترتفع في فترات السلم عنه في فترات الحرب مع بقاء المقطع ثابت. ان الدالة الأصلية، هي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 Y_t D_t + U_t$$

ج- تغير الميل والحد الثابت لدالة الاستهلاك، ويمكن توضيح ذلك في الشكل (3.11).

الشكل (3.11): تغير الميل والحد الثابت لدالة الاستهلاك



ان الشكل (3.11)، يوضح تغير المقطع والميل معاً فالدالة الأصلية، هي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 D_t + B_3 Y_t D_t + U_t$$

هذا ويمكن تعميم الحالة بحيث يشمل نموذج الانحدار الواحد على العديد من المتغيرات الوهمية المستقلة، فمثلاً بافتراض النموذج الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 D_{i1} + B_2 D_{i2} + U_i$$

إذ إن:

Y_i : تمثل مستوى دخل الفرد.

D_1 : تمثل شهادة الدكتوراه.

D_2 : تمثل شهادة الماجستير.

B_0 : تمثل المقطع الصادي.

B_1 : تمثل ميل المتغير الوهمي D_1 الذي يفسر أثر شهادة الدكتوراه على متوسط دخل الفرد.

B_2 : تمثل ميل المتغير الوهمي D_2 الذي يفسر أثر شهادة الماجستير على متوسط دخل الفرد.

مثال 1.11: بافتراض ان هناك دراسة لتقدير العلاقة بين دخل الفرد، الذي يعتمد على عدد السكان، وسنوات التعليم، توفرت فيها البيانات الآتية في الجدول (1.11).

جدول (1.11): العلاقة بين دخل الفرد وعدد السكان وسنوات التعليم

الجنس	عدد سنوات التعليم	عدد السكان	دخل الفرد	ت
D_i	X_{i2}	X_{i1}	Y_i	
1	9	80	1000	1
1	8	95	2000	2
1	10	100	3000	3
1	10	101	4000	4
1	11	103	5000	5
1	14	115	6000	6
1	15	105	7000	7
0	13	116	8000	8
0	16	120	9000	9
0	17	110	10000	10

المطلوب: معرفة أثر نوع الجنس على دخل الفرد، بافتراض ان نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد تقديره، هو:

$$Y_i = B_0 + B_1X_{1i} + B_2X_{2i} + B_3D_i + U_i$$

إذ ان: $i=1,2,...,n$ ، وأن:

D_i : تمثل الجنس وتكون $D_i = 1$ إذا كان الجنس أنثى و $D_i = 0$ إذا كان الجنس ذكر.

B_0 : تمثل الحد الثابت.

B_1 : تمثل أثر التغير في السكان بوحدة واحدة على دخل الفرد.

B_2 : تمثل أثر التغير في سنوات التعليم بوحدة واحدة على دخل الفرد.

B_3 : تمثل الحد الثابت التفاضلي ويقاس أثر الجنس على دخل الفرد.

الحل: نأخذ دالة الدخل المقدرة، عندما يكون الجنس ذكر، وكما في الشكل الآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1X_1 + \hat{B}_2X_2 + e_i$$

ويكون شكل دالة الدخل المقدرة، عندما يكون الجنس أنثى وكما يأتي:

$$\hat{Y}_i = (\hat{B}_0 + \hat{B}_3) + \hat{B}_1X_1 + \hat{B}_2X_2 + e_i$$

وبتطبيق طريقة OLS على المعادلة المراد تقديرها، نحصل على ما يلي:

$$\hat{Y}_i = -7327.01 + 66.121X_1 + 567.463X_2 - 1517.698D$$

ومن هذه المعادلة التقديرية نستطيع تحديد ما يأتي:

أ- معادلة الدخل المقدرة عندما يكون الجنس ذكر، أي $D_1 = 0$:

$$\hat{Y}_i = -7327.01 + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

ب- معادلة الدخل المقدرة عندما يكون الجنس أنثى ، أي $D_1 = 1$:

$$\hat{Y}_i = [(-7327.01) + (-1517.698)] + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

$$\hat{Y}_i = -8844.708 + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

نستنتج من ذلك ان الأنثى تحقق دخلاً أقل من دخل الرجل بمقدار 1518 دينار تقريباً.

3.11 نموذج الانحدار المتضمن أكثر من متغير وهمي مستقل:

لغرض تقدير وتوضيح معامل الانحدار في حالة تضمين النموذج على

متغيرين وهميين مستقلين نأخذ المثال الآتي:

مثال 2.11: افترض انه قد توفرت لدينا البيانات الآتية عن دخل الفرد ومستوى التعليم

حسب الشهادة وكما في الجدول (2.11).

جدول 2.11: العلاقة بين الدخل ومستوى التعليم (ماجستير، دكتوراه)

ت	الدخل، Y_i	دكتوراه، D_{1i}	ماجستير، D_{2i}
1	1000	0	0
2	2000	0	0
3	3000	0	0
4	4000	0	1
5	5000	0	1
6	6000	0	1
7	7000	0	0
8	8000	1	0
9	9000	1	0
10	10000	1	0

وأن نموذج الانحدار المراد تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$Y_i = B_0 + B_1 D_{1i} + B_2 D_{2i} + U_i$$

إذ أن:

D_1 : تمثل شهادة الدكتوراه وتكون قيمها:

$D_1 = 1$: بالنسبة لشهادة الدكتوراه.

$D_1 = 0$: بالنسبة لشهادة الماجستير والبيكالوريوس.

D_2 : تمثل شهادة الماجستير وتكون قيمها:

$D_2 = 1$: بالنسبة لشهادة الماجستير.

$D_2 = 0$: بالنسبة لشهادة الدكتوراه والبيكالوريوس.

B_0 : تمثل الحد المطلق.

B_1 : تمثل ميل المتغير الوهمي D_1 الذي يقيس أثر شهادة الدكتوراه على متوسط دخل

الفرد.

B_2 : تمثل ميل المتغير الوهمي D_2 الذي يقيس اثر شهادة الماجستير على متوسط دخل

الفرد.

U_i : تمثل المتغير العشوائي.

ويمكن تقدير النموذج المراد تقديره باستخدام طريقة OLS، ونحصل على:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 D_1 + \hat{B}_2 D_2 + e_i$$

أي ان:

$$\hat{Y}_i = 3666.67 + 5333.33 D_1 + 1333.33 D_2$$

ولتفسير مضامين هذه النتائج، نتبع ما يأتي:

أ- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة البكالوريوس، عندما $D_1 = D_2 = 0$ ، هو:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 = 3666.67 \text{ دينار}$$

ب- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة الماجستير، عندما $D_1 = 0$ ، هو:

$$\hat{Y}_i = (\hat{B}_0 + \hat{B}_2) = 3666.63 + 1333.33$$

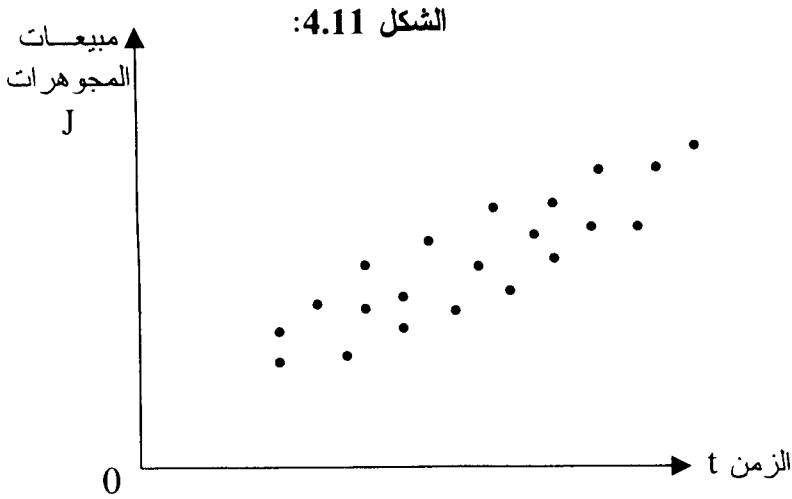
$$\hat{Y}_i = 5000 \text{ دينار}$$

ج- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة الدكتوراه عندما $D_2 = 0$ ، هو:

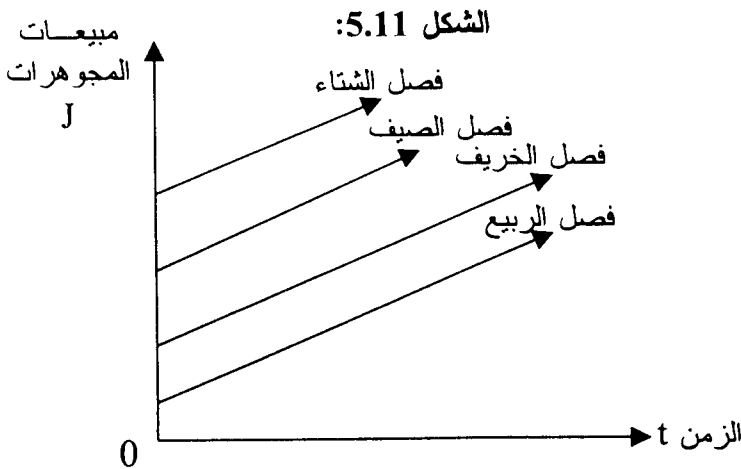
$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 = 3666.63 + 1333.33$$

$$\hat{Y}_i = 9000 \text{ دينار}$$

وباستخدام الأسلوب نفسه، يمكن تقدير معاملات الانحدار عندما يكون عدد المتغيرات الوهمية المستقلة أكثر من متغيرين كما هو مبين في الشكل (4.11) بافتراض ان بائع المجوهرات يعتمد بشكل كبير على موسم الوقت من السنة، إضافة إلى اتجاه الزمن ولدينا بيانات فصلية لمبيعات المجوهرات.

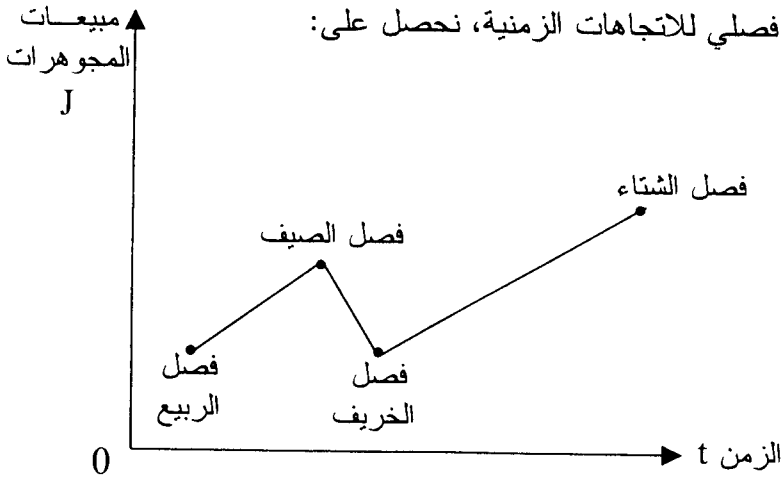


ويمكن رسم العلاقة الانتشارية بيانياً، إذ يلاحظ من الشكل ان هناك اتجاه واضح إلى الأعلى. ولكن عند رسم بيانات سنة معينة تبين ان لها نمط موسمي Seasonal pattern، يمكن توضيحها في الشكل 5.11.



ومن الشكل 5.11 يتبين ان أعلى قيمة للمبيعات هي في فصل الشتاء، إذ أنها تعد فترة

انتعاش المبيعات لطبيعة الفصل وما يتضمنه من مناسبات، كالأعياد مثلاً، وعند رسم ذلك بشكل فصلي للاتجاهات الزمنية، نحصل على:



ولكن قد يتبادر إلى الذهن هنا، هل نستطيع استخدام المتغيرات الوهمية هنا، ولغرض الإجابة على ذلك، لابد من تحديد عدد المتغيرات الوهمية، وهنا ستكون ثلاثة لأن لدينا أربعة مواسم للمبيعات، أي ان $4-1=3$ ، إذ ان واحد من هذه المتغيرات يمثل الأساس و 3 متغيرات متغيرة.

وبافتراض أننا نأخذ فصل الربيع كأساس، ثم نقدم ثلاث متغيرات وهمية هي D_1 و D_2 و D_3 ، وان القيم التي تأخذها هذه المتغيرات تتوقف على الفصل، ويمكن بيان ذلك كما في الجدول الآتي:

جدول 3.11: فصول السنة والمتغيرات الوهمية

الفصل	D ₁	D ₂	D ₃
الربيع	0	0	0
الصيف	0	0	1
الخريف	0	1	0
الشتاء	1	0	0

ومن ثم فإن أول خمسة فصول لمبيعات المجوهرات كانت كما في الجدول (4.11).

جدول (4.11)

وقت الفصل	مبيعات المجوهرات	D ₁	D ₂	D ₃
1	36	0	0	0
2	44	0	0	1
3	45	0	1	0
4	106	1	0	0
5	35	0	0	0

وبذلك يمكن استخدام نموذج الانحدار الخطي المتعدد والذي يأخذ الصيغة الآتية:

$$J = B_0 + B_1T + B_2D_1 + B_3D_2 + B_4D_3 + U_i$$

إذ أن:

D₁: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الصيف.

D₂: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الخريف.

D₃: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الشتاء.

4.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي تابع:

مثلاً يكون المتغير الوهمي مستقلاً، كذلك يمكن ان يكون المتغير الوهمي تابعاً. والمتغير التابع الوهمي هو متغير ثنائي الوجه يعكس أحد خيارين اثنين كما قد يشير إلى حدوث أو عدم حدوث حدث ما أو إلى وجود أو غياب ظروف معينة، مثال ذلك: عامل أو عاطل، سفر أو عدم سفر، وتعطى القيمة واحد (1) لوقوع الحدث أو وجود الظرف بينما تعطى القيمة صفر (0) لعدم الحدث أو غياب الظرف. وكمثال على ذلك لناخذ النموذج الآتي:

$$D_i = B_0 + B_1 X_i + U_i \quad \dots (2.11)$$

إذاً ان:

X_i : تمثل دخل الشخص.

$D_i = 1$: إذا كان الشخص يملك منزلاً.

$D_i = 0$: اذا كان الشخص لا يملك منزلاً.

فالمتغير التابع الوهمي D_i يعتمد على المتغير المستقل X_i والنموذج أعلاه كأى نموذج آخر للانحدار، يمكن تقدير معالمته بواسطة طرق المربعات الصغرى العادية ولكن تظهر بعض المشاكل، منها:

أولاً: حدد الخطأ U_i لا يتبع التوزيع الطبيعي، وهذا يخالف فرض نموذج الانحدار الخطي البسيط، OLS، المطلوب لإجراء اختبارات معنوية المعالم. ويمكن ملاحظة ذلك بإعادة كتابة المعادلة (2.11) كالآتي:

$$U_i = D_i - B_0 - B_1 X_i$$

فإذا كانت $D_i = 0$ ، فإن:

$$U_i = -B_0 - B_1 X_i$$

أما إذا كانت $D_i = 1$ ، فإن:

$$U_i = 1 - B_0 - B_1 X_i$$

أي أن U_i تتخذ قيمتين ورغم ذلك فإنه يمكن اللجوء إلى نظرية النهاية المركزية للعينات الكبيرة ($n \geq 30$) لغرض الحصول على سند نظري يتيح إجراء اختبارات الفروض في هذه النماذج.

ثانياً: عنصر الخطأ U_i يرتبط بقيم المتغيرات المستقلة ويؤدي هذا إلى مقدرات غير كفوءة أي أن المقدرات لا تتصف بكونها تمتلك اصغر تباين، ويمكن التغلب على هذه المشكلة بتصحيح النموذج الأصلي من خلال استخدام تحويلة مناسبة تقلل من حدة المشكلة.

ثالثاً: ان القيم المقدرة للمتغير التابع D_i قد تأخذ قيماً خارج المدى من الصفر إلى 1، ويمكن التغلب على هذه المشكلة باستعمال إحدى وسائل التقدير التي تحصر قيم $\hat{D}_i$ داخل المدى من 0 إلى 1، منها الدالة الطبيعية التراكمية (نموذج بروبيت، Probit)، الدالة اللوجيستية (نموذج لوجيت، Logit) وهي أساليب للتقدير تعرض في كتب القياس الاقتصادي الأكثر تقدماً.

مثال 3.11: بافتراض إننا نرغب في دراسة العلاقة بين الفقر، Poverty، كمتغير تابع D_1 والجنس، D_2 ، واللون، D_3 ، كمتغيرات وهمية مستقلة، وان بيانات هذا النموذج مبينة في الجدول (5.11)، وبافتراض ان نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$D_{1i} = B_0 + B_1 D_{2i} + B_2 D_{3i} + U_i \quad \dots (3.11)$$

إذ أن:

D_1 : تمثل الفقر كمتغير وهمي تابع يأخذ القيمتين:

$$D_1 = 1 \text{ الفقر.}$$

$$D_1 = 0 \text{ لغير ذلك.}$$

D_2 : تمثل الجنس كمتغير مستقل يأخذ القيم الآتية:

$$D_2 = 1 \text{ للدلالة على الأنثى.}$$

$$D_2 = 0 \text{ للدلالة على الذكر.}$$

D_3 : تمثل اللون كمتغير مستقل يأخذ القيم الآتية:

$$D_3 = 1 \text{ للدلالة على اللون الأسود.}$$

$$D_3 = 0 \text{ للدلالة على اللون الأبيض.}$$

B_0 : تمثل الحد الثابت.

B_1 : تمثل أثر الجنس على احتمال حدوث الفقر.

B_2 : تمثل أثر اللون على احتمال حدوث الفقر.

جدول 5.11: العلاقة بين الفقر، متغير تابع، والجنس واللون، متغيرات وهمية مستقلة.

ت	الفقر D ₁	الجنس D ₂	اللون D ₃	ت	الفقر D ₁	الجنس D ₂	اللون D ₃
1	0	1	0	16	0	0	0
2	0	1	0	17	1	1	1
3	1	1	1	18	0	1	0
4	0	0	0	19	1	1	0
5	0	0	1	20	1	0	0
6	0	1	0	21	1	1	1
7	1	0	0	22	0	0	1
8	1	1	1	23	0	0	0
9	0	0	1	14	1	1	1
10	0	1	0	25	0	1	0
11	0	1	0	26	1	1	1
12	0	0	1	27	0	0	0
13	0	0	0	28	1	1	1
14	1	1	1	29	1	0	0
15	0	0	0	30	0	1	0

المطلوب:

أ- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة OLS.

ب- بيان أثر كل من الجنس واللون على احتمال حدوث الفقر.

وعند تقدير النموذج من البيانات أعلاه وباستخدام طريقة OLS، كان:

$$\hat{D}_1 = 0.10 + 0.23D_2 + 0.41D_3$$

ومن النموذج المقدر أعلاه، يتضح ما يأتي:

أ- احتمال حدوث الفقر كنتيجة للجنس يكون بمقدار (0.23) واحتمال حدوث الفقر كنتيجة للون سيكون بمقدار (0.41).

ب- ولغرض تحديد حدوث الفقر لأسباب تتعلق بنوع الجنس واللون، سيكون من خلال تعويض قيم المتغيرات المستقلة حسب أنواعها في النموذج المقدر أعلاه، وذلك من خلال ما يأتي:

1- احتمال حدوث الفقر لرب العائلة لكونه ابيض، هو:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 = 0.10$$

$$\text{لأن } D_2 = D_3 = 0 \text{ ، وأن } D_1 = 1.$$

2- احتمال حدوث الفقر للأثنى البيضاء، سيكون:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 = 0.10 + 0.23 = 0.33$$

3- أما احتمال حدوث الفقر للأثنى السوداء، هو:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2$$

$$\hat{D}_1 = 0.10 + 0.23 + 0.41 = 0.47$$

مثال 4.11: الجدول الآتي يمثل كمية الإنتاج لشركة ما، ولمدة 14 شهراً وبأسعار مختلفة حيث ان الشركة واجهت إضراباً لعمالها في بعض مصانعها وذلك خلال الشهر الخامس، والسادس، والسابع.

المتغير الوهمي D	السعر P	كمية الإنتاج (بآلاف) Q	الشهر
0	0.79	98	1
0	0.80	100	2
0	0.82	103	3
0	0.82	105	4
1	0.93	80	5
1	0.95	87	6
1	0.96	94	7
0	0.88	113	8
0	0.88	116	9
0	0.90	118	10
0	0.93	121	11
0	0.94	123	12
0	0.96	126	13
0	0.96	128	14

المطلوب:

أ- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع خلال فترات الإضراب وعدم الإضراب.

ب- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع والميل.

الحل:

أ- عند استخدام طريقة OLS تم الحصول على النموذج الآتي:

$$\hat{Q} = -32.47 + 165.47P - 37.64D$$

$$(15.65) \quad (23.59) \quad R^2 = 0.98$$

فالمقطع خلال فترة عدم الإضراب هو المعامل $\hat{B}_0$ ، والذي يساوي -32.47 .
أما خلال فترة الإضراب، فهو:

$$= \hat{B}_0 + \hat{B}_2 = -23.47 + (-37.64) = -70.11$$

وهذا يعني ان المقطع قد تحرك في فترة الإضراب عما هو خلال فترة عدم الإضراب.

ب- لغرض تحديد ما إذا كان هناك تحرك في المقطع والميل، وبعد تقدير النموذج بطريقة OLS، حصلنا على:

$$\hat{Q} = -29.74 + 162.86P - 309.62D + 287.14XD$$

$$(27.16) \quad (5.67) \quad (4.98) \quad R^2 = 0.99$$

فالمقطع هو -29.74 ، والميل هو 162.86 خلال فترة عدم الإضراب .
أما في فترة الإضراب، فإن:
المقطع يساوي:

$$\hat{B}_0 + \hat{B}_2 = -29.74 + (-309.62) = -339.36$$

والميل يكون:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 162.86 + 287.14 = 450$$

وهنا أيضاً ان هناك اختلافاً في الميل والمقطع لفترة عدم الإضراب عن فترة الإضراب.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.11: إذا توفرت البيانات الآتية عن الدخل القومي ومشتريات الدولة من السندات وكما هو في الجدول الآتي:

i	المشتريات (B _i)	الدخل (Y _i)	D _i
1983	2.6	2.4	0
1984	3.0	2.8	0
1985	3.6	3.1	0
1986	3.7	3.4	0
1987	3.8	3.9	0
1988	4.1	4.0	0
1989	4.4	4.2	0
1990	7.1	5.1	1
1991	8.0	6.3	1
1992	8.9	6.3	1
1993	9.7	8.1	1
1994	10.2	8.8	1
1995	10.1	9.6	1
1996	7.9	9.7	0
1997	9.7	9.6	0
1998	9.1	10.4	0
1999	10.1	12.0	0

وان نموذج الانحدار قد تم تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$B = B_0 + B_1 Y$$

ثم قارن هذا النموذج بالنموذج الآتي:

$$B = B_0 + B_1 Y + D$$

إذ أن:

i: تمثل السنوات.

B: تمثل المشتريات العامة لسندات الدولة.

Y: تمثل الدخل القومي.

D: المتغير الوهمي.

المطلوب:

1- أي من النموذجين أعلاه تختار ولماذا؟

2- ما هو أثر الحرب على سلوك الاستثمار، ولماذا؟

السؤال 2.11: البيانات الآتية تمثل مبيعات إحدى الشركات:

المدة الزمنية	S	D ₁	D ₂	D ₃
1997	70	0	0	0
	88	0	0	1
	90	0	1	0
	112	1	0	0
1998	76	0	0	0
	92	0	0	1
	94	0	1	0
	224	1	0	0
1999	84	0	0	0
	98	0	0	1
	96	0	1	0
	236	1	0	0
2000	84	0	0	0
	100	0	0	1
	102	0	1	0
	236	1	0	0

المطلوب:

1- تقدير معادلة الانحدار الآتية:

$$S = B_0 + B_1t + B_2D_1 + B_3D_2 + B_4D_3$$

إذ أن: $Y = t$

2- هل إن اتجاه الزمن يتغير معنوياً عند إهمال الفصول؟

3- علق اقتصادياً على النموذج.

السؤال 3.11: بافتراض لدينا النموذج الآتي المراد دراسته اقتصادياً:

$$Q = B_0 + B_1P + B_2D + U_i$$

إذ إن $B_2 > 0$ ، وأن:

$D = 1$: تمثل مشتريات اللحوم لسنوات الحرب.

$D = 0$: تمثل مشتريات اللحوم لسنوات السلم.

Q : تمثل الطلب على اللحوم (مليون كيلو) عند الأسعار الثابتة.

P : تمثل الرقم القياسي للدخل الحقيقي للمستهلك.

لذلك فإن النموذج في ظل سنوات الحرب، عندما يكون $D = 1$ ، يكون:

$$Q = (B_0 + B_2) + B_1P + U_i$$

وعند تقدير المعادلة (1)، حصلنا على النتائج الآتية:

$$\hat{Q} = 24 + 0.2P - 5D$$

المطلوب:

أ- علق اقتصادياً على مشتريات اللحوم أثناء سنوات الحرب والسلم.

ب- مثل النتائج بيانياً موضعاً ميل النموذج.

ج- ما هو تفسيرك للمعامل B_0 .

د- ماذا تعني $(B_0 + B_2)$ اقتصادياً.

السؤال 4.11: ما هو المتغير الوهمي، وما هو دوره في تقدير النماذج القياسية؟

السؤال 5.11: ما هي طبيعة المتغيرات الوهمية، وضّح ذلك مع الامثلة والتوضيح البياني.

الملاحق

Appendix **T**ables

Table 1: Cumulative normal distribution. Table entry is $\Phi(z) = \text{Prob}[Z \leq z]$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table 2: Ordinates of the Standard Normal Density. Table Entry Is $\Phi(z)$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009

Table 3: Percentiles of the Student's Distribution.

Table Entry Is x Such That Prob $[t_n \leq x] = P$

Pn	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	1.000	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	0.817	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.766	1.638	2.354	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.777	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.708
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.500
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.822	3.250
10	0.700	1.372	1.813	2.228	2.764	3.169
11	0.698	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.696	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.161	2.650	3.012
14	0.693	1.345	1.762	2.145	2.624	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.132	2.602	2.947
16	0.691	1.337	1.746	2.120	2.584	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.879
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	1.326	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.687	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.686	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.686	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.685	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	1.314	1.704	2.052	2.473	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	1.311	1.697	2.042	2.457	2.750
35	0.682	1.307	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.705
45	0.680	1.301	1.680	2.014	2.412	2.690
50	0.680	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	0.679	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	0.679	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	0.678	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Table 4: Percentiles of the Chi-Squared Distribution. Table Entry Is c Such

That Prob $[X_n^2 \leq c] = P$.

P _n	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	0.00004	0.0002	0.001	0.004	0.02	0.10	0.46	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.89
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.27	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.12	0.22	0.35	0.59	1.21	2.37	4.11	6.25	7.82	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.49	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.56	0.83	1.15	1.61	2.68	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.21	3.46	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.35	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.74	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.59	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.07	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.57	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.61	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.35	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.93	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.37	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.32	46.93

Table 4 ; Continued

26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.44	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
31	13.70	15.04	17.11	19.01	21.31	25.46	30.50	36.00	41.33	44.70	47.73	51.38	53.94
32	14.37	15.74	17.87	19.80	22.15	26.37	31.50	37.08	42.49	45.91	48.98	52.67	55.26
33	15.05	16.45	18.62	20.59	22.99	27.29	32.50	38.17	43.65	47.12	50.22	53.96	56.59
34	15.73	17.16	19.38	21.39	23.83	28.21	33.50	39.25	44.81	48.32	51.46	55.25	57.90
35	16.42	17.88	20.14	22.19	24.68	29.13	34.50	40.33	45.97	49.52	52.70	56.53	59.21
36	17.11	18.60	20.91	22.99	25.52	30.05	35.50	41.41	47.12	50.71	53.94	57.81	60.52
37	17.81	19.33	21.68	23.80	26.37	30.97	36.50	42.49	48.27	51.91	55.17	59.08	61.83
38	18.51	20.06	22.45	24.61	27.22	31.89	37.50	43.57	49.42	53.10	56.39	60.35	63.13
39	19.22	20.79	23.22	25.42	28.08	32.81	38.50	44.65	50.57	54.29	57.62	61.62	64.42
40	19.92	21.53	24.00	26.23	28.93	33.73	39.50	45.72	51.71	55.47	58.84	62.88	65.71
41	20.64	22.27	24.78	27.05	29.79	34.66	40.50	46.80	52.86	56.66	60.06	64.14	67.00
42	21.35	23.01	25.57	27.87	30.65	35.58	41.50	47.87	54.00	57.84	61.28	65.40	68.29
43	22.07	23.76	26.35	28.69	31.51	36.51	42.50	48.95	55.14	59.02	62.49	66.65	69.57
44	22.79	24.51	27.14	29.51	32.37	37.44	43.50	50.02	56.27	60.19	63.70	67.91	70.84
45	23.52	25.26	27.93	30.34	33.23	38.37	44.50	51.09	57.41	61.37	64.91	69.15	72.12
46	24.25	26.02	28.72	31.16	34.10	39.29	45.50	52.16	58.55	62.54	66.12	70.40	73.39
47	24.98	26.77	29.52	31.99	34.96	40.22	46.50	53.23	59.68	63.72	67.32	71.64	74.66
48	25.71	27.53	30.32	32.82	35.83	41.15	47.50	54.30	60.81	64.89	68.53	72.88	75.92
49	26.45	28.30	31.12	33.65	36.70	42.08	48.50	55.37	61.94	66.05	69.73	74.12	77.19
50	27.19	29.06	31.92	34.49	37.57	43.02	49.50	56.44	63.07	67.22	70.92	75.35	78.45

Table 5: 95th Percentile of the F Distribution.

Table Entry Is f Such That Prob. $[F_{n1,n2} \leq f] = .95$

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	6.54	9.12	5.89	8.94	5.63	8.85	5.49
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.10	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.72
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.97	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50
18	4.41	3.56	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.69	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.38	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.48	2.39	2.32	2.27
27	4.22	3.36	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.72	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.94	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21
35	4.12	3.27	2.88	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16

Table 5: Continued

40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.13
45	4.06	3.21	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10
50	4.05	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.26	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.22	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.98
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

$n_1 = \text{Degrees of Freedom for the Numerator}$

10	12	15	20	30	40	50	60	∞
242	244	246	248	250	251	251	252	254
19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
8.79	8.74	8.72	8.66	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56
5.97	5.91	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.69	5.63
4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.43	4.37
4.06	4.00	3.94	3.88	3.81	3.78	3.75	3.74	3.67
3.64	3.58	3.51	3.45	3.38	3.34	3.32	3.31	3.23
3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	3.01	2.93
3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.79	2.71
2.98	2.91	2.85	2.78	2.70	2.66	2.64	2.62	2.54
2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.49	2.40
2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.39	2.30
2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.30	2.21
2.60	2.54	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.22	2.13
2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.21	2.18	2.16	2.07
2.49	2.43	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.11	2.01
2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.06	1.96
2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	2.02	1.92
2.38	2.31	2.24	2.16	2.07	2.03	2.00	1.98	1.88
2.35	2.28	2.20	2.13	2.04	1.99	1.97	1.95	1.84
2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.97	1.94	1.92	1.81
2.30	2.23	2.15	2.07	1.99	1.94	1.91	1.89	1.78
2.28	2.20	2.13	2.05	1.96	1.91	1.89	1.87	1.76
2.26	2.18	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.84	1.73
2.24	2.17	2.09	2.01	1.92	1.87	1.84	1.82	1.71
2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.80	1.70
2.21	2.13	2.06	1.97	1.89	1.84	1.81	1.79	1.68
2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.77	1.66
2.18	2.11	2.03	1.95	1.86	1.81	1.78	1.75	1.65

n1 = Degrees of Freedom for the Numerator: Continued

2.17	2.09	2.02	1.93	1.84	1.79	1.76	1.74	1.62
2.12	2.04	1.96	1.88	1.79	1.74	1.70	1.68	1.57
2.08	2.00	1.92	1.84	1.75	1.69	1.66	1.64	1.51
2.05	1.98	1.90	1.81	1.71	1.66	1.63	1.60	1.48
2.03	1.95	1.87	1.79	1.69	1.63	1.60	1.58	1.45
1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.60	1.56	1.54	1.39
1.97	1.89	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.51	1.36
1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.55	1.51	1.48	1.34
1.94	1.86	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.47	1.32
1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.45	1.30
1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.39	1.34	1.31	1.00

Table 6: 99th Percentiles of the Distribution.
Table Entry Is f Such That Prob. $[F_{n1,n2} < f] = .99$
 n_1 = Degrees of Freedom for the Numerator

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	5000	5403	5625	5724	5859	5928	5982	6023
2	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	21.3	28.7	19.0	27.9	27.7	27.5	27.3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.6	10.5	10.3	10.2
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.0	7.56	6.55	6.00	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.01	3.90
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.68
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.57	3.46
21	8.02	5.78	4.88	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12

Table 6: Continued

29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.31	3.17	3.07
35	7.41	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
45	7.23	5.11	4.25	3.77	3.46	3.23	3.07	2.94	2.83
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.85	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.70	2.59
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

n_1 = Degrees of Freedom for the Numerator

10	12	15	20	30	40	50	60	∞
6056	6106	6157	6209	6261	6287	6302	6313	6366
99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.3	26.1
14.6	14.4	14.2	14.0	13.8	13.8	13.7	13.6	13.5
10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.20	9.02
7.88	7.72	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	7.06	6.88
6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.82	5.65
5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	5.03	4.86
5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.48	4.31
4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.08	3.91
4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.78	3.60
4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.54	3.36
4.10	3.96	3.82	3.67	3.51	3.43	3.38	3.34	3.17
3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.18	3.00
3.81	3.67	3.52	3.37	3.22	3.13	3.08	3.05	2.87
3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.93	2.75
3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.84	2.65
3.51	3.37	3.23	3.08	2.92	2.84	2.79	2.75	2.57
3.43	3.30	3.15	3.00	2.85	2.76	2.71	2.68	2.49
3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.70	2.64	2.61	2.42
3.31	3.17	3.03	2.88	2.72	2.64	2.58	2.55	2.36
3.26	3.12	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.50	2.31
3.21	3.08	2.93	2.78	2.62	2.54	2.48	2.45	2.26
3.17	3.03	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.40	2.21
3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.45	2.40	2.36	2.17

n1 = Degrees of Freedom for the Numerator: Continued

3.10	2.96	2.82	2.66	2.50	2.42	2.36	2.33	2.13
3.06	2.93	2.78	2.63	2.47	2.38	2.33	2.29	2.10
3.03	2.90	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.26	2.06
3.01	2.87	2.73	2.58	2.41	2.33	2.27	2.24	2.03
2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.21	2.01
2.88	2.74	2.60	2.45	2.28	2.19	2.14	2.10	1.91
2.80	2.67	2.52	2.37	2.20	2.12	2.06	2.02	1.81
2.74	2.61	2.47	2.31	2.15	2.06	2.00	1.96	1.75
2.70	2.56	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.91	1.68
2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.84	1.60
2.59	2.45	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.79	1.53
2.55	2.42	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.75	1.49
2.53	2.39	2.25	2.09	1.92	1.82	1.76	1.72	1.48
2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.80	1.74	1.69	1.43
2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.57	1.51	1.46	1.00

**Table 7a Durbin- Watson Statistic: 1 Percent Significance Points of
dL and dU**

n	K=1		k=2		k=3		k=4		k=5	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.390	1.142	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0.435	1.036	0.294	1.676	-	-	-	-	-	-
8	0.497	1.003	0.345	1.489	0.229	2.102	-	-	-	-
9	0.554	0.998	0.408	1.389	0.279	1.875	0.183	2.433	-	-
10	0.604	1.001	0.466	1.333	0.340	1.733	0.230	2.193	0.150	2.690
11	0.653	1.010	0.519	1.297	0.396	1.640	0.286	2.030	0.193	2.453
12	0.697	1.023	0.569	1.274	0.449	1.575	0.339	1.913	0.244	2.280
13	0.738	1.038	0.616	1.261	0.499	1.526	0.391	1.826	0.294	2.150
14	0.776	1.054	0.660	1.254	0.547	1.490	0.441	1.757	0.343	2.049
15	0.811	1.070	0.700	1.252	0.591	1.464	0.488	1.704	0.391	1.967
16	0.844	1.086	0.737	1.252	0.633	1.446	0.532	1.663	0.437	1.900
17	0.874	1.102	0.772	1.255	0.672	1.432	0.574	1.630	0.480	1.847
18	0.902	1.118	0.805	1.259	0.708	1.422	0.613	1.604	0.522	1.803
19	0.928	1.132	0.835	1.265	0.742	1.415	0.650	1.584	0.561	1.767
20	0.952	1.147	0.863	1.271	0.773	1.411	0.685	1.567	0.598	1.737
21	0.975	1.161	0.890	1.277	0.803	1.408	0.718	1.554	0.633	1.712
22	0.997	1.174	0.914	1.284	0.831	1.407	0.748	1.543	0.667	1.691
23	1.018	1.187	0.938	1.291	0.858	1.407	0.777	1.534	0.698	1.673
24	1.037	1.199	0.960	1.298	0.882	1.407	0.805	1.528	0.728	1.658
25	1.055	1.211	0.981	1.305	0.906	1.409	0.831	1.523	0.756	1.645
26	1.072	1.222	1.001	1.312	0.928	1.411	0.855	1.518	0.783	1.635
27	1.089	1.233	1.019	1.319	0.949	1.413	0.878	1.515	0.808	1.626
28	1.104	1.244	1.037	1.325	0.969	1.415	0.900	1.513	0.832	1.618
29	1.119	1.254	1.054	1.332	0.988	1.418	0.921	1.512	0.855	1.611
30	1.133	1.263	1.070	1.339	1.006	1.421	0.941	1.511	0.877	1.606
31	1.147	1.273	1.085	1.345	1.023	1.425	0.960	1.510	0.897	1.601
32	1.160	1.282	1.100	1.352	1.040	1.428	0.979	1.510	0.917	1.597
33	1.172	1.291	1.114	1.358	1.055	1.432	0.996	1.510	0.936	1.594
34	1.184	1.299	1.128	1.364	1.070	1.435	1.012	1.511	0.954	1.591
35	1.195	1.307	1.140	1.370	1.085	1.439	1.028	1.512	0.971	1.589
36	1.206	1.315	1.153	1.376	1.098	1.442	1.043	1.513	0.988	1.588
37	1.217	1.323	1.165	1.382	1.112	1.446	1.058	1.514	1.004	1.586
38	1.227	1.330	1.176	1.388	1.124	1.449	1.072	1.515	1.019	1.585
39	1.237	1.337	1.187	1.393	1.137	1.453	1.085	1.517	1.034	1.584

Table 7a: Continued

40	1.246	1.344	1.198	1.398	1.148	1.457	1.098	1.518	1.048	1.584
45	1.288	1.376	1.245	1.423	1.201	1.474	1.156	1.528	1.111	1.584
50	1.324	1.403	1.285	1.446	1.245	1.491	1.205	1.538	1.164	1.587
55	1.356	1.427	1.320	1.466	1.284	1.506	1.247	1.548	1.209	1.592
60	1.383	1.449	1.350	1.484	1.317	1.520	1.283	1.558	1.249	1.598
65	1.407	1.468	1.377	1.500	1.346	1.534	1.315	1.568	1.283	1.604
70	1.429	1.485	1.400	1.515	1.372	1.546	1.343	1.578	1.313	1.611
75	1.448	1.501	1.422	1.529	1.395	1.557	1.368	1.587	1.340	1.617
80	1.466	1.515	1.441	1.541	1.416	1.568	1.390	1.595	1.364	1.624
85	1.482	1.528	1.458	1.553	1.435	1.578	1.411	1.603	1.386	1.630
90	1.496	1.540	1.474	1.563	1.452	1.587	1.429	1.611	1.406	1.636
95	1.510	1.552	1.489	1.575	1.468	1.596	1.446	1.618	1.425	1.642
100	1.522	1.562	1.503	1.583	1.482	1.604	1.462	1.625	1.441	1.647
150	1.611	1.637	1.598	1.651	1.584	1.665	1.571	1.679	1.557	1.693
200	1.664	1.684	1.653	1.693	1.643	1.704	1.633	1.715	1.623	1.725

Table 7a – Continued

k=6		k=7		k=8		k=9		k=10	
dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.124	2.892	-	-	-	-	-	-	-	-
0.164	2.665	0.105	3.053	-	-	-	-	-	-
0.211	2.490	0.140	2.838	0.090	3.182	-	-	-	-
0.257	2.354	0.183	2.667	0.122	2.981	0.078	3.278	-	-
0.303	2.244	0.226	2.530	0.161	2.817	0.107	3.101	0.068	3.374
0.349	2.153	0.269	2.416	0.200	2.681	0.142	2.944	0.094	3.201
0.393	2.078	0.313	2.319	0.241	2.566	0.179	2.811	0.127	3.053
0.435	2.015	0.355	2.238	0.282	2.467	0.126	2.697	0.160	2.925
0.476	1.963	0.396	2.169	0.322	2.381	0.255	2.597	0.196	2.813
0.515	1.918	0.436	2.110	0.362	2.308	0.294	2.510	0.232	2.714
0.552	1.881	0.474	2.059	0.400	2.244	0.331	2.468	0.268	2.625
0.587	1.849	0.510	2.015	0.437	2.188	0.368	2.367	0.304	2.548
0.620	1.821	0.545	1.977	0.437	2.140	0.404	2.308	0.340	2.479
0.652	1.797	0.578	1.944	0.507	2.097	2.439	2.255	0.375	2.417
0.682	1.766	0.610	1.915	0.540	2.059	0.473	2.209	0.409	2.362
0.711	1.759	0.640	1.889	0.572	2.026	0.505	2.168	0.441	2.313
0.738	1.743	0.669	1.867	0.602	1.997	0.536	2.131	0.473	2.269
0.764	1.729	0.696	1.847	0.630	1.970	0.566	2.098	0.504	2.229
0.788	1.718	0.723	1.830	0.658	1.947	0.595	2.068	0.533	2.193
0.812	1.707	0.748	1.814	0.684	1.925	0.622	2.041	0.562	2.160
0.834	1.698	0.772	1.800	0.710	1.906	0.649	2.017	0.589	2.131
0.856	1.690	0.794	1.788	0.734	1.889	0.674	1.995	0.615	2.104
0.876	1.683	0.816	1.776	0.757	1.874	0.698	1.975	0.641	2.080
0.896	1.677	0.837	1.766	0.779	1.860	0.722	1.957	0.665	2.057
0.914	1.671	0.857	1.757	0.800	1.847	0.744	1.940	0.689	2.037
0.932	1.666	0.877	1.749	0.821	1.836	0.766	1.925	0.711	2.018
0.950	1.662	0.895	1.742	0.841	1.825	0.787	1.911	0.733	2.001
0.966	1.658	0.913	1.735	0.860	1.816	0.807	1.899	0.754	1.985
0.982	1.655	0.930	1.729	0.878	1.807	0.826	1.887	0.774	1.970
0.997	1.652	0.946	1.724	0.895	1.799	0.844	1.876	0.789	1.956
1.065	1.643	1.019	1.704	0.974	1.768	0.927	1.834	0.881	1.902
1.123	1.639	1.081	1.692	1.039	1.748	0.997	1.805	0.955	1.864

Table 7a: Continued

1.172	1.638	1.134	1.685	1.095	1.734	1.057	1.785	1.018	1.837
1.214	1.639	1.179	1.682	1.144	1.726	1.108	1.771	1.072	1.817
1.251	1.642	1.218	1.680	1.186	1.720	1.153	1.761	1.120	1.802
1.283	1.645	1.253	1.680	1.223	1.716	1.192	1.754	1.162	1.792
1.283	1.645	1.253	1.680	1.223	1.716	1.192	1.754	1.162	1.792
1.313	1.646	1.284	1.682	1.256	1.716	1.227	1.746	1.199	1.785
1.338	1.653	1.312	1.683	1.285	1.714	1.259	1.745	1.232	1.777
1.362	1.657	1.337	1.685	1.312	1.714	1.287	1.743	1.262	1.773
1.383	1.661	1.360	1.687	1.336	1.714	1.312	1.741	1.288	1.769
1.403	1.666	1.381	1.690	1.358	1.715	1.336	1.741	1.313	1.767
1.421	1.670	1.400	1.693	1.378	1.717	1.357	1.741	1.335	1.765
1.543	1.708	1.530	1.722	1.515	1.737	1.501	1.752	1.468	1.767
1.613	1.735	1.603	1.746	1.592	1.575	1.582	1.768	1.571	1.779

Table 7a – Continued

n	k=11		k=12		k=13		k=14		k=15	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
16	0.060	3.446	-	-	-	-	-	-	-	-
17	0.084	3.286	0.053	3.506	-	-	-	-	-	-
18	0.113	3.146	0.075	3.358	0.047	3.557	-	-	-	-
19	0.145	3.023	0.102	3.227	0.067	3.420	0.043	3.601	-	-
20	0.178	2.914	0.131	3.109	0.092	3.297	0.061	3.474	0.038	3.639
21	0.212	2.817	0.162	3.004	0.119	3.185	0.084	3.358	0.055	3.521
22	0.246	2.729	0.194	2.909	0.148	3.084	0.109	3.252	0.077	3.412
23	0.281	2.651	0.227	2.822	0.178	2.991	0.136	3.155	0.100	3.311
24	0.315	2.580	0.260	2.744	0.209	2.906	0.165	3.065	0.125	3.218
25	0.348	2.517	0.292	2.674	0.240	2.829	0.194	2.982	0.152	3.131
26	0.381	2.460	0.324	2.610	0.272	2.758	0.224	2.906	0.180	3.050
27	0.413	2.409	0.356	2.552	0.303	2.964	0.253	2.836	0.208	2.976
28	0.444	2.363	0.387	2.499	0.333	2.635	0.283	2.772	0.237	2.907
29	0.474	2.321	0.417	2.451	0.363	2.582	0.313	2.713	0.266	2.843
30	0.503	2.283	0.447	2.407	0.393	2.533	0.342	2.659	0.294	2.785
31	0.531	2.248	0.475	2.367	0.422	2.487	0.371	2.609	0.322	2.730
32	0.558	2.216	0.503	2.330	0.450	2.446	0.399	2.563	0.350	2.680
33	0.585	2.187	0.530	2.296	0.477	2.408	0.426	2.520	0.377	2.633
34	0.610	2.160	0.556	2.266	0.503	2.373	0.452	2.481	0.404	2.590
35	0.634	2.136	0.581	2.237	0.529	2.340	0.478	2.444	0.430	2.550
36	0.658	2.113	0.605	2.210	0.554	2.310	0.504	2.410	0.455	2.512
37	0.680	2.092	0.628	2.186	0.578	2.282	0.528	2.379	0.480	2.477
38	0.702	2.073	0.651	2.164	0.601	2.256	0.552	2.350	0.504	2.445
39	0.723	2.055	0.673	2.143	0.623	2.232	0.575	2.323	0.528	2.414
40	0.744	2.039	0.694	2.123	0.645	2.210	0.597	2.297	0.551	2.386
45	0.835	1.972	0.790	2.044	0.744	2.118	0.700	2.193	0.655	2.269
50	0.913	1.925	0.871	1.987	0.829	2.051	0.787	2.116	0.746	2.182
55	0.979	1.891	0.940	1.945	0.902	2.002	0.863	2.059	0.825	2.117
60	1.037	1.865	1.001	1.914	0.965	1.964	0.929	2.015	0.893	2.067
65	1.087	1.845	1.053	1.889	1.020	1.934	0.986	1.980	0.953	2.027

Table 7a – Continued

70	1.131	1.831	1.099	1.870	1.068	1.911	1.037	1.953	1.005	1.995
75	1.170	1.819	1.141	1.856	1.111	1.893	1.082	1.931	1.052	1.970
80	1.205	1.810	1.777	1.844	1.150	1.878	1.122	1.913	1.094	1.949
85	1.236	1.803	1.210	1.834	1.184	1.866	1.158	1.898	1.132	1.931
90	1.264	1.798	1.240	1.827	1.215	1.856	1.191	1.886	1.166	1.917
95	1.290	1.793	1.267	1.821	1.244	1.848	1.221	1.876	1.197	1.905
100	1.314	1.790	1.292	1.816	1.270	1.841	1.248	1.868	1.225	1.895
150	1.473	1.783	1.458	1.799	1.444	1.814	1.429	1.830	1.414	1.847
200	1.561	1.791	1.550	1.801	1.539	1.813	1.528	1.824	1.518	1.836

Table 7a – Continued

k=16		k=17		k=18		k=19		k=20	
dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.035	3.671	-	-	-	-	-	-	-	-
0.050	3.562	0.032	3.700	-	-	-	-	-	-
0.070	3.459	0.046	3.597	0.029	3.725	-	-	-	-
0.092	3.363	0.065	3.501	0.043	3.629	0.027	3.747	-	-
0.116	3.274	0.085	3.410	0.060	3.538	0.039	3.657	0.025	3.766
0.141	3.191	0.107	3.325	0.079	3.452	0.055	3.572	0.036	3.682
0.167	3.113	0.131	3.245	0.100	3.371	0.073	3.490	0.051	3.602
0.194	3.040	0.156	3.169	0.122	3.294	0.093	3.412	0.068	3.524
0.222	2.972	0.182	3.098	0.146	3.220	0.114	3.338	0.087	3.450
0.249	2.909	0.208	3.032	0.171	3.152	0.137	3.267	0.107	3.379
0.277	2.851	0.234	2.970	0.196	3.087	0.160	3.201	0.128	3.311
0.304	2.797	0.261	2.912	0.221	3.026	0.184	3.137	0.151	3.246
0.331	2.746	0.287	2.858	0.246	2.969	0.209	3.078	0.174	3.184
0.357	2.699	0.313	2.808	0.272	2.915	0.233	3.022	0.197	3.126
0.383	2.655	0.339	2.761	0.297	2.865	0.257	2.969	0.221	3.071
0.409	2.614	0.364	2.717	0.322	2.818	0.282	2.919	0.244	3.019
0.434	2.576	0.389	2.675	0.347	2.774	0.306	2.872	0.268	2.969
0.458	2.540	0.414	2.637	0.371	2.733	0.330	2.828	0.291	2.923
0.482	2.507	0.438	2.600	0.395	2.694	0.354	2.787	0.315	2.879
0.505	2.476	0.461	2.566	0.418	2.657	0.377	2.748	0.338	2.838
0.612	2.346	0.570	2.424	0.528	2.503	0.488	2.582	0.448	2.661
0.705	2.250	0.665	2.318	0.625	2.387	0.586	2.456	0.548	2.526
0.786	2.176	0.748	2.237	0.711	2.298	0.674	2.359	0.637	2.421
0.857	2.120	0.822	2.173	0.786	2.227	0.751	2.283	0.716	2.338
0.919	2.075	0.886	2.123	0.852	2.172	0.819	2.221	0.786	2.272

Table 7a: Continued

0.974	2.038	0.943	2.082	0.911	2.127	0.880	2.172	0.849	2.217
1.023	2.009	0.993	2.049	0.964	2.090	0.934	2.131	0.905	2.172
1.066	1.984	1.039	2.022	1.011	2.057	0.983	2.097	0.955	2.135
1.106	1.965	1.080	1.999	1.053	2.033	1.027	2.068	1.000	2.104
1.141	1.948	1.116	1.979	1.091	2.012	1.066	2.044	1.041	2.077
1.174	1.934	1.150	1.963	1.126	1.993	1.102	2.023	1.079	2.054
1.203	1.922	1.181	1.949	1.158	1.977	1.136	2.006	1.113	2.034
1.400	1.863	1.385	1.880	1.370	1.897	1.355	1.913	1.340	1.931
1.507	1.847	1.495	1.860	1.484	1.871	1.474	1.883	1.462	1.896

Table 7b – Durbin-Watson Statistic:
5 Percent Significance Points of dL and dU

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.610	1.400	-	-	-	-	-	-	-	-
7	0.700	1.356	0.467	1.896	-	-	-	-	-	-
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287	-	-	-	-
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	-	-
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789

Table 7b: Continued

40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.355	1.771
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.769	1.788	1.665	1.802
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.779	1.728	1.810	1.718	1.820

Table 7b_ Continued

k= 6		k= 7		k= 8		k= 9		k=10	
dL	dU	dL	dU	dL	DU	dL	dU	dl	dU
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.203	3.005	-	-	-	-	-	-	-	-
0.268	2.832	0.171	3.149	-	-	-	-	-	-
0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	-	-	-	-
0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	-	-
0.447	2.472	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073
0.649	2.206	0.459	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
0.692	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
0.732	2.124	0.637	2.290	0.547	2.460	0.461	2.633	0.380	2.806
0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734
0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
0.837	2.035	0.751	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
0.868	2.012	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431
0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396
0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281
1.080	1.891	1.015	1.979	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
1.114	1.877	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198
1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164

Table 7b: Continued

1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.945	2.149
1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.002	1.038	2.088
1.291	1.882	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
1.433	1.802	1.401	1.837	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948
1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.420	1.909
1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877
1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

Table 7b – Continued

n	k=11		k=12		k=13		k=14		k=15	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
16	0.098	3.503	-	-	-	-	-	-	-	-
17	0.138	3.378	0.087	3.557	-	-	-	-	-	-
18	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603	-	-	-	-
19	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496	0.070	3.642	-	-
20	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395	0.100	3.542	0.063	3.676
21	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300	0.132	3.448	0.091	3.583
22	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211	0.166	3.358	0.120	3.495
23	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.128	0.202	3.272	0.153	3.409
24	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053	0.239	3.193	0.186	3.327
25	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983	0.275	3.119	0.221	3.251
26	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919	0.312	3.051	0.256	3.179
27	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.348	2.987	0.291	3.112
28	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928	0.325	3.050
29	0.612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.755	0.418	2.874	0.359	2.992
30	0.643	2.477	0.577	2.592	0.512	2.708	0.451	2.823	0.392	2.937
31	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665	0.484	2.776	0.425	2.987
32	0.703	2.411	0.638	2.517	0.576	2.625	0.515	2.733	0.457	2.840
33	0.731	2.382	0.668	2.484	0.606	2.588	0.546	2.692	0.488	2.796
34	0.758	2.355	0.695	2.454	0.634	2.554	0.575	2.654	0.518	2.754
35	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.619	0.547	2.716
36	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492	0.631	2.586	0.575	2.680
37	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555	0.602	2.646
38	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438	0.683	2.526	0.628	2.614
39	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413	0.707	2.499	0.653	2.585
40	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391	0.731	2.473	0.678	2.557
45	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296	0.838	2.367	0.788	2.439
50	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225	0.927	2.287	0.882	2.350
55	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170	1.003	2.225	0.961	2.281

Table 7b : Continued

60	1.184	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127	1.068	2.177	1.029	2.227
65	1.231	2.006	1.195	2.049	1.160	2.093	1.124	2.138	1.088	2.183
70	1.272	1.986	1.239	2.026	1.206	2.066	1.172	2.106	1.139	2.148
75	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.043	1.215	2.080	1.184	2.118
80	1.340	1.957	1.311	1.991	1.283	2.024	1.253	2.059	1.224	2.093
85	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.009	1.287	2.040	1.260	2.073
90	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995	1.318	2.025	1.292	2.055
95	1.418	1.929	1.394	1.956	1.370	1.984	1.345	2.012	1.321	2.040
100	1.434	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000	1.347	2.026
150	1.579	1.892	1.564	1.908	1.550	1.924	1.535	1.940	1.519	1.956
200	1.654	1.885	1.643	1.896	1.632	1.908	1.621	1.919	1.610	1.931

Table 7b – Continued

k= 16		k= 17		k=18		k= 19		k=20	
dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dl	dU
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0.058	3.705	-	-	-	-	-	-	-	-
0.083	3.619	0.052	3.731	-	-	-	-	-	-
0.110	3.535	0.076	3.650	0.048	3.753	-	-	-	-
0.141	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773	-	-
0.172	3.376	0.130	3.394	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.790
0.205	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
0.238	3.233	0.191	3.349	0.149	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
0.271	3.168	0.222	3.283	0.178	3.392	0.138	3.495	0.104	3.592
0.305	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
0.337	3.050	0.286	3.160	0.238	3.266	0.195	3.368	0.156	3.465
0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.208	0.224	3.309	0.183	3.406
0.401	2.946	0.349	3.050	0.299	3.153	0.253	3.252	0.211	3.348
0.432	2.899	0.379	3.000	0.329	3.100	0.283	3.198	0.239	3.293
0.462	2.854	0.409	2.954	0.359	3.051	0.312	3.147	0.267	3.240
0.492	2.813	0.439	2.910	0.388	3.005	0.340	3.099	0.295	3.190
0.520	2.774	0.467	2.868	0.417	2.961	0.369	3.053	0.323	3.142
0.548	2.738	0.495	2.829	0.445	2.920	0.397	3.009	0.351	3.097
0.575	2.703	0.522	2.792	0.472	2.880	0.424	2.968	0.378	3.054
0.600	2.671	0.549	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.808	0.477	2.892	0.430	2.974
0.740	2.512	0.692	2.586	0.644	2.659	0.598	2.733	0.553	2.807
0.836	2.414	0.792	2.479	0.747	2.544	0.703	2.610	0.660	2.675
0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
0.990	2.278	0.951	2.330	0.913	2.382	0.874	2.434	0.836	2.487
1.052	2.229	1.016	2.276	0.980	2.323	0.944	2.371	0.908	2.419
1.105	2.189	1.072	2.232	1.038	2.275	1.005	2.318	0.971	2.362
1.153	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
1.195	2.129	1.165	2.165	1.136	2.201	1.106	2.238	1.076	2.275
1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.149	2.206	1.121	2.241
1.266	2.085	1.240	2.116	1.213	2.148	1.187	2.179	1.160	2.211
1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.186

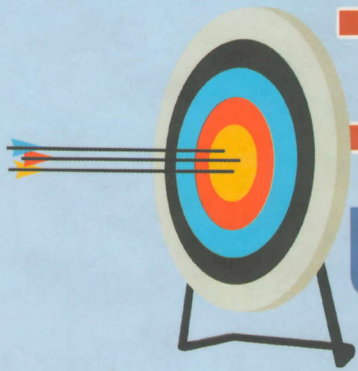
Table 7b : Continued

1.324	2.053	1.301	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.164
1.504	1.972	1.489	1.989	1.474	2.006	1.458	2.023	1.443	2.040
1.599	1.943	1.588	1.955	1.576	1.967	1.565	1.979	1.554	1.991

**Table 8: Five Percent Significance of $\partial_{4,L}$ and $\partial_{4,U}$ for
Regressions with Quarterly Dummy Variable ($k = k' + 1$)**

n	k'=1		k'= 2		k'= 3		k'= 4		k'= 5	
	d _{4,L}	d _{4,U}	d _{4,L}	d _{4,U}	d _{4,L}	d _{4,U}	d _{4,L}	d _{4,U}	d _{4,L}	d _{4,U}
16	0.774	0.982	0.662	1.109	0.549	1.275	0.435	1.381	0.350	1.532
20	0.924	1.102	0.827	1.203	0.728	1.327	0.626	1.428	0.544	1.556
24	1.036	1.189	0.953	1.273	0.867	1.371	0.779	1.459	0.702	1.565
28	1.123	1.257	1.050	1.328	0.975	1.410	0.898	1.487	0.828	1.576
32	1.192	1.311	1.127	1.373	1.061	1.443	0.993	1.511	0.929	1.587
36	1.248	1.355	1.191	1.410	1.131	1.471	1.070	1.532	1.013	1.598
40	1.295	1.392	1.243	1.422	1.190	1.496	1.135	1.550	1.082	1.609
44	1.335	1.423	1.288	1.469	1.239	1.518	1.189	1.567	1.141	1.620
48	1.369	1.451	1.326	1.493	1.281	1.537	1.236	1.582	1.191	1.630
52	1.399	1.475	1.359	1.513	1.318	1.554	1.276	1.595	1.235	1.639
56	1.426	1.496	1.389	1.532	1.351	1.569	1.312	1.608	1.273	1.648
60	1.449	1.515	1.415	1.548	1.379	1.583	1.343	1.619	1.307	1.656
64	1.470	1.532	1.438	1.563	1.405	1.596	1.371	1.629	1.337	1.664
68	1.489	1.548	1.459	1.577	1.427	1.608	1.396	1.639	1.364	1.671
72	1.507	1.562	1.478	1.589	1.448	1.618	1.418	1.648	1.388	1.678
76	1.522	1.574	1.495	1.601	1.467	1.628	1.439	1.656	1.411	1.685
80	1.537	1.586	1.511	1.611	1.484	1.637	1.457	1.663	1.431	1.691
84	1.550	1.597	1.525	1.621	1.500	1.646	1.475	1.671	1.449	1.696
88	1.562	1.607	1.539	1.630	1.515	1.654	1.490	1.677	1.466	1.702
92	1.574	1.617	1.551	1.639	1.528	1.661	1.505	1.684	1.482	1.707
96	1.584	1.626	1.563	1.647	1.541	1.668	1.519	1.690	1.496	1.712
100	1.594	1.634	1.573	1.654	1.552	1.674	1.531	1.695	1.510	1.717

الاقتصاد القياسي



اليازوري

دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع



عمان - وسط البلد - شارع الملك حسين

هاتف: +962 6 4626626 تلفاكس: +962 6 461 4185

ص.ب: 520646 الرمز البريدي: 11152

www.yazori.com info@yazori.com



9 789957 122218